

**Министерство образования Республики Беларусь**

**Учреждение образования  
«Гомельский государственный технический  
университет имени П. О. Сухого»**

**Кафедра «Автоматизированный электропривод»**

# **ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ И РОБАСТНЫХ СИСТЕМ**

**ПОСОБИЕ**

**по одноименной дисциплине для студентов  
второй ступени высшего образования  
специальности 1-53 81 03 «Автоматизация  
и управление в технических системах»  
дневной и заочной форм обучения**

**Гомель 2021**

УДК 681.5.01(075.8)  
ББК 65.050.2я73  
Т33

*Рекомендовано научно-методическим советом  
факультета автоматизированных и информационных систем  
ГГТУ им. П. О. Сухого  
(протокол № 2 от 02.10.2018 г.)*

Составитель *В. С. Захаренко*

Рецензент: зав. каф. «Промышленная электроника» ГГТУ им. П. О. Сухого  
канд. техн. наук, доц. *Ю. В. Крышнев*

**Теория** оптимальных и робастных систем : пособие по одной дисциплине для студентов второй ступени высшего образования специальности 1-53 81 03 «Автоматизация и управление в технических системах» днев. и заоч. форм обучения / сост. В. С. Захаренко. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2021. – 230 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц; 32 Mb RAM; свободное место на HDD 16 Mb; Windows 98 и выше; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: <https://elib.gstu.by>. – Загл. с титул. экрана.

Изложен теоретический курс дисциплины «Теория оптимальных и робастных систем». Рассмотрены методы оптимального управления, анализа систем с неопределенностями, робастного неадаптивного и адаптивного управления.

Для студентов второй ступени высшего образования специальности 1-53 81 03 «Автоматизация и управление в технических системах» дневной и заочной форм обучения.

**УДК 681.5.01(075.8)  
ББК 65.050.2я73**

© Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого», 2021

## **1. Оптимальные системы**

В широком значении слово «оптимальный» означает наилучший в смысле некоторого критерия эффективности. При таком толковании любая научно обоснованная система является оптимальной, так как при выборе какой-либо системы подразумевается, что она в каком-либо отношении лучше других систем. Критерии, с помощью которых осуществляется выбор (критерии оптимальности), могут быть различными. Этими критериями могут являться качество динамики процессов управления, надежность системы, энергопотребление, ее вес и габариты, стоимость и т.п., либо совокупность этих критериев с некоторыми весовыми коэффициентами.

Ниже термин «оптимальный» используется в узком смысле, когда система автоматического управления оценивается лишь качеством динамических процессов и при этом критерием (мерой) этого качества выступает интегральный показатель качества. Такое описание критериев качества позволяет использовать для нахождения оптимального управления хорошо разработанный в математике аппарат вариационного исчисления.

Далее рассматривается два класса систем: системы программного управления, управляющее воздействие в которых не использует информацию о текущем состоянии объекта, и системы автоматического регулирования (системы стабилизации программного движения), действующие по принципу обратной связи.

Формулируются вариационные задачи, возникающие при построении оптимальных систем программного и стабилизирующего управления. Далее излагается математическая теория оптимального управления (принцип максимума Л.С. Понтрягина и метод динамического программирования Р. Беллмана). Эта теория является фундаментом для построения оптимальных систем. Она доставляет большой объем информации о структуре оптимального управления. Свидетельством последнего являются оптимальные по быстродействию управления. Вместе с тем практическое применение теории сталкивается с трудностями вычислительного характера. Дело в том, что математическая теория оптимального управления позволяет свести процесс построения оптимального управления к решению краевой задачи для дифференциальных уравнений (обыкновенных либо в частных производных). Трудности численного решения краевых задач приводят к тому, что построение оптимальных управлений для каждого класса объектов управления является самостоятельной творческой задачей, решение которой требует учета специфических особенностей объекта, опыта и интуиции разработчика.

Эти обстоятельства побудили к отысканию классов объектов, для которых при построении оптимального управления краевая задача легко решается численно. Такими объектами управления оказались объекты,

описываемые линейными дифференциальными уравнениями. Эти результаты, полученные А.М. Летовым и Р. Калманом, явились основой нового направления синтеза систем оптимальной стабилизации, называемого аналитическим конструированием регуляторов.

## 1.1. Понятия оптимального управления

### 1.1.1. Оптимальное программное управление

Рассмотрим объект управления (ОУ), движение которого описывается уравнением

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(x, u, t) \quad (1.1.1)$$

где  $x(t)$  –  $n$ -мерный вектор переменных состояния объекта,  $u(t)$  –  $m$ -мерный вектор управлений.

В развернутой форме уравнения имеют вид

$$\frac{dx_i}{dt} = \varphi_i(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t) \quad (1.1.2)$$

где  $i = (1, \dots, n)$ ,  $\varphi_i$  – заданные функции. Они предполагаются непрерывными и необходимое число раз дифференцируемыми по всем аргументам.

В уравнении ОУ управления являются неизвестными функциями времени, которые определяются исходя из следующих условий.

1. Задано начальное

$$x(t_0) = x^{(0)} \quad (1.1.3)$$

и конечное

$$x(t_1) = x^{(1)} \quad (1.1.4)$$

состояния ОУ, где  $t_0$  – время начала, а  $t_1$  – время окончания функционирования объекта.

2. Эффективность управления оценивается с помощью интеграла

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0(x, u, t) \cdot dt \quad (1.1.5)$$

где  $\varphi_0$  – заданная непрерывная функция своих аргументов. Для определенности далее будем полагать, что эффективность управления тем выше, чем меньше значение этого интеграла.

3. На управления и переменные состояния накладываются ограничения, выражающие ограниченные ресурсы управления и допустимые пределы

изменения переменных состояния. Часто ограничения на управления имеют вид

$$|u_k(t)| \leq u_k^* \quad (1.1.6)$$

где  $k = (1, \dots, m)$ ,  $u_k^*$  – заданные числа.

При  $m = 2$  точки вектора  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ , координаты которого удовлетворяют этим неравенствам, заполняют заштрихованный прямоугольник, показанный на рис. 1.1.

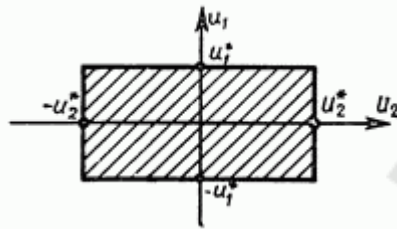


Рис. 1.1. Область допустимых значений управлений.

В общем случае будем считать, что в соответствии с конструкцией объекта и условиями его эксплуатации задано замкнутое множество  $U$  в пространстве переменных  $u_1, \dots, u_m$  и управления могут принимать в каждый момент времени лишь значения из этого множества. Замкнутость множества  $U$  означает, что управления могут находиться не только внутри, но и на его границе (например,  $u_1(t) = u_1^*$ ).

Далее будем называть *оптимальным программным управлением* функции времени  $u_k(t) = u_k^0(t)$  ( $k = 1, \dots, m$ ), принимающие значения из множества  $U$ , при которых ОУ переводится из состояния  $\mathbf{x}^{(0)}$  в состояние  $\mathbf{x}^{(1)}$  и при этом функционал  $J$  принимает наименьшее значение.

Часто краевые условия имеют более общий вид: моменты времени  $t_0$  и  $t_1$  либо один из них не заданы (тогда говорят о задаче с нефиксированным временем); вектор  $\mathbf{x}^{(0)}$  (или  $\mathbf{x}^{(1)}$ ) не задан (задача со свободным правым (или левым) концом траектории с фиксированным либо нефиксированным временем; компоненты векторов  $\mathbf{x}^{(0)}$  и  $\mathbf{x}^{(1)}$  не заданы, а лежат на гиперповерхностях (задача с подвижными концами).

Интеграл  $J$  также может иметь более сложную структуру

$$J = q_1 \cdot \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \cdot dt + q_2 \cdot v_0(\mathbf{x}^{(1)}, t_1) \quad (1.1.7)$$

где  $v_0(\mathbf{x}^{(1)}, t_1)$  – заданная функция,  $q_1$  и  $q_2$  – известные числа.

Кроме того, на переменные состояния, как и на управления, могут накладываться ограничения

$$x \in X \quad (1.1.8)$$

где  $X$  – замкнутое множество в пространстве состояний  $x_1, \dots, x_n$ .

В ряде случаев на управления и переменные состояния накладываются интегральные ограничения, например, вида

$$\int_{t_0}^{t_1} u_k^2(t) \cdot dt \leq J_{uk}^*; \quad \int_{t_0}^{t_1} x_i^2(t) \cdot dt \leq J_{xi}^*. \quad (1.1.9)$$

### 1.1.2. Оптимальное стабилизирующее управление

#### Уравнения возмущенного движения.

Пусть оптимальное программное управление найдено. Это означает, что известны функции  $u_k^*(t) = u_k^0(t)$  ( $k = 1, \dots, m$ ). Подставляя эти функции в уравнения ОУ и решая уравнения с начальными условиями, получим функции  $x_i^*(t)$  ( $i = 1, \dots, n$ ), которые будем называть оптимальным программным движением или оптимальной программной траекторией.

Реальное (истинное) движение системы всегда отличается от программного по следующим причинам: а) неточная реализация начальных условий, б) неполная информация о внешних возмущениях, действующих на систему, в) неточная реализация программного управления и т.д., поэтому реальное движение описывается функциями

$$x_i(t) = x_i^*(t) + \delta x_i(t); \quad u_k(t) = u_k^*(t) + \delta u_k(t) \quad (1.1.10)$$

где  $\delta x_i(t)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) – отклонения (возмущения) фактического движения от программного;  $\delta u_k(t)$  ( $k = 1, \dots, m$ ) – отклонения реального управления от программного. Числа  $\delta x_i(t_0)$  – достаточно малые, но неизвестные числа, являющиеся случайными погрешностями при реализации заданных начальных условий. Об этих погрешностях обычно известно лишь, что они удовлетворяют неравенству

$$\sum_{i=1}^n \delta x_i^2(t_0) \leq \varepsilon^2 \quad (1.1.11)$$

где  $\varepsilon$  – известное число.

Нетрудно получить уравнения (уравнения возмущенного движения), описывающие отклонения фактического движения от программного движения, которое называется невозмущенным.

Действительно, принимая во внимание, что функции реального движения удовлетворяют уравнениям объекта управления, и вычитая из уравнений

$$\begin{aligned} & \frac{dx_i^*(t)}{dt} + \frac{d\delta x_i(t)}{dt} = \\ & = \varphi_i[x_1^*(t) + \delta x_1(t), \dots, x_n^*(t) + \delta x_n(t), u_1^*(t) + \delta u_1(t), \dots, u_m^*(t) + \\ & + \delta u_m(t), t] \end{aligned}$$

тождества

$$\frac{dx_i^*(t)}{dt} = \varphi_i[x_1^*(t), \dots, x_n^*(t), u_1^*(t), \dots, u_m^*(t), t]$$

получим уравнения возмущенного движения

$$\frac{d\delta x_i(t)}{dt} = \delta\varphi_i(\delta x_1, \dots, \delta x_n, \delta u_1, \dots, \delta u_m, t) \quad (1.1.12)$$

где  $\delta\varphi_i(\delta x_1, \dots, \delta x_n, \delta u_1, \dots, \delta u_m, t) = \varphi_i[x_1^* + \delta x_1, \dots, x_n^* + \delta x_n, u_1^* + \delta u_1, \dots, u_m^* + \delta u_m, t] - \varphi_i[x_1^*, \dots, x_n^*, u_1^*, \dots, u_m^*, t]$  ( $i = 1, \dots, n$ ).

Если функции  $\delta\varphi_i$  разложить в ряд Тейлора в окрестности точки  $(x_1^*, \dots, x_n^*, u_1^*, \dots, u_m^*)$  то уравнения возмущенного движения примут вид

$$\begin{aligned} & \frac{d\delta x_i(t)}{dt} = \\ & = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) \cdot \delta x_j + \sum_{k=1}^m b_{ik}(t) \cdot \delta u_k + \\ & + o_i(\delta x_1, \dots, \delta x_n, \delta u_1, \dots, \delta u_m, t) \end{aligned} \quad (1.1.13)$$

где

$$a_{ij}(t) = \left. \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right|^*, b_{ik}(t) = \left. \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_k} \right|^*,$$

символ  $|^*$  означает, что частные производные вычисляются в точке  $x_i = x_i^*, u_k = u_k^*$  ( $i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m$ );  $o_i(\delta x_1, \dots, \delta x_n, \delta u_1, \dots, \delta u_m, t)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) – функции, разложение которых в ряд Тейлора начинается с членов второго порядка малости.

Отбрасывая нелинейные члены, получим уравнения первого приближения

$$\frac{d\delta x_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) \cdot \delta x_j + \sum_{k=1}^m b_{ik}(t) \cdot \delta u_k, (i = 1, \dots, n). \quad (1.1.14)$$

### **Понятие об оптимальном стабилизирующем управлении.**

Решения уравнения возмущенного движения при заданных начальных условиях описывают отклонения реального движения от программного в каждый момент времени. Для количественной характеристики этих отклонений часто используют значение интеграла

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \left( \sum_{i=1}^n q_{ii} \cdot \delta x_i^2 \right) \cdot dt, \quad (1.1.15)$$

в котором  $q_{ii}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) – положительные числа. Интеграл представляет собой взвешенную с помощью коэффициентов  $q_{ii}$  сумму площадей, ограниченных квадратом отклонений истинного движения от программного по каждой переменной состояния. Он характеризует «расстояние» реального движения и программного и является «мерой» близости этих движений.

Используем  $\delta u_k(t)$  ( $k = 1, \dots, m$ ) для сближения этих движений, тогда  $\delta u_k(t)$  называются *стабилизирующими управлениями*. Таким образом, результирующие управления  $u_k(t) = u_k^*(t) + \delta u_k(t)$  состоят из программных и стабилизирующих управлений. Подставляя это выражение в ограничения, накладываемые на управления, получим ограничения на стабилизирующее управление

$$-u_k^* - u_k^*(t) \leq \delta u_k(t) \leq u_k^* - u_k^*(t). \quad (1.1.16)$$

Обычно  $|u_k^*(t)| \geq |\delta u_k(t)|$  ( $k = 1, \dots, m$ ). Это объясняется тем, что программное управление обеспечивает основное (программное) движение системы, а стабилизирующее управление лишь «парирует» малые отклонения от программного движения, обеспечивая, если  $t_1 \rightarrow \infty$ , устойчивость (отсюда термин «стабилизирующее управление») и требуемую точность осуществления программного движения. В связи с этим часто вместо приведенных выше ограничений, определяющих допустимый «расход» стабилизирующего управления в каждый момент времени, накладывают на стабилизирующие управления интегральные ограничения (ограничения на «энергию»)

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta u_k^2(t) \cdot dt \leq J_{uk}^*. \quad (1.1.17)$$

Для учета этих ограничений интегральную оценку качества стабилизации представим в виде

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \left[ \sum_{i=1}^n q_{ii} \cdot \delta x_i^2 + \sum_{k=1}^m \gamma_{kk} \cdot \delta u_k^2 \right] \cdot dt \quad (1.1.18)$$

где числа  $\gamma_{kk}$  определяются значениями  $J_{uk}^*$ .

Стабилизирующее управление предназначено для минимизации интеграла  $J$ . Кроме того, если  $t_1 \rightarrow \infty$ , то для существования этого интеграла стабилизирующее управление должно обеспечивать асимптотическую



устойчивость нулевого решения системы уравнений возмущенного движения.

Если отыскивать стабилизирующее управление как явную функцию времени (по аналогии с программным управлением), то для каждого начального условия из множества погрешностей начальных условий получим управления  $\delta u_k[t, \delta x_1(t_0), \dots, \delta x_n(t_0)]$  ( $k = 1, \dots, m$ ) для реализации которых необходимо измерять переменные состояния в момент времени  $t = t_0$ , так как числа  $\delta x_i(t_0)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) неизвестны. Кроме того, функции  $\delta u_k[t, \delta x_1(t_0), \dots, \delta x_n(t_0)]$  ( $k = 1, \dots, m$ ) будут различными для каждого набора  $\delta x_i(t_0)$  ( $i = 1, \dots, n$ ).

В связи с этим естественно отыскивать стабилизирующее управление не как явную функцию времени, а как функцию переменных состояния

$$\delta u_k(t) = r_k[\delta x_1(t), \dots, \delta x_n(t), t], (k = 1, \dots, m). \quad (1.1.19)$$

Заметим, что вид этих функций не зависит от начальных условий.

Теперь можно определить понятие *оптимального стабилизирующего управления* как функции переменных состояния и времени, при которых на движениях системы, возбужденных произвольными начальными отклонениями, показатель качества  $J$  принимает наименьшее значение. Если в  $J$  верхний предел  $t_1$  не ограничен, то стабилизирующее управление должно также обеспечивать асимптотическую устойчивость системы.

Во многих случаях контроль отклонений истинного движения от программного осуществляется не по переменным состояния, а по переменным, называемым регулируемыми (управляемыми) переменными. Они связаны с отклонениями по каждой переменной состояния соотношением

$$\theta_i = \sum_{j=1}^n n_{ij} \cdot x_j, (i = 1, \dots, m) \quad (1.1.20)$$

где  $\theta_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) – регулируемые переменные.

Критерий, с помощью которого оцениваются эти отклонения, имеет вид

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \left[ \sum_{i=1}^m q_{ii}^{(0)} \cdot \delta \theta_i^2 + \sum_{k=1}^m \gamma_{kk} \cdot \delta u_k^2 \right] \cdot dt. \quad (1.1.21)$$

### ***Особенности оптимальных систем программного управления и стабилизации.***

Рассмотрим более подробно связь и различие программного и стабилизирующего управлений. В связи с этим рассмотрим общую

структурную схему реализации этих управлений, представленную на рис. 1.2. Объект вместе с задатчиками программного управления и движения образует систему программного управления, а объект вместе с регулятором – систему стабилизации программного движения. На рисунке не показаны исполнительные и измерительные устройства, которые включены в модель объекта управления.

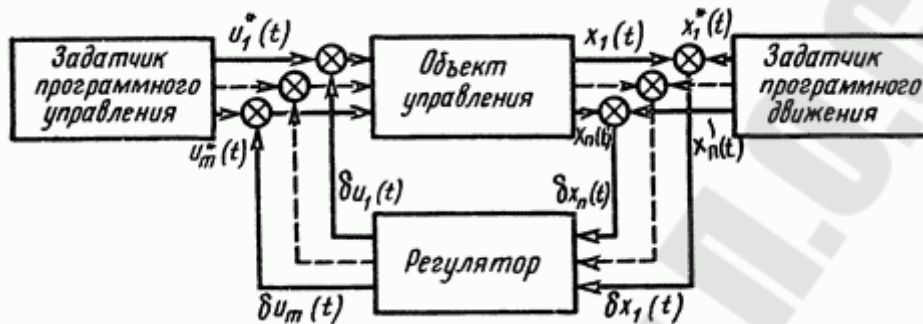


Рис. 1.2. Система программного и стабилизирующего управления.

Различие способа функционирования системы программного управления и системы стабилизации состоит в следующем.

1. Для первой из этих систем начальные условия известны до начала проектирования, а для второй начальные условия неизвестны, известно лишь, что они находятся в определенных пределах.
2. В первом случае управления являются явными функциями времени, а во втором – функциями измеряемых переменных состояния (а в общем случае и времени). Таким образом, в первом случае управление осуществляется по разомкнутому циклу, а во втором – по принципу обратной связи.
3. Эффективность работы системы программного управления оценивается определенным интегралом  $J$ , в котором функция  $\varphi_0(x, u, t)$  определяется физической природой объекта управления. В системе стабилизации критерий (показатель) качества  $J$  ее функционирования часто не связан с физической природой объекта управления, а его коэффициенты  $q_{ii}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) определяются исходя из инженерных требований (времени переходного процесса от истинного движения к программному, перерегулирования при этом движения, установившейся ошибки в осуществлении программного движения и т.п.). Однако в теории оптимального управления полагают критерий качества, заданным, оставляя вопросы выбора его коэффициентов (а в общем случае и структуры) за пределами этой теории.
4. При построении стабилизирующего управления обычно используют уравнения первого приближения. Это объясняется тем, что стабилизирующее управление предназначено для уменьшения

отклонения  $\delta x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), а при малых значениях этих отклонений функции  $o_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) зависят от квадратов, кубов и т.д. этих отклонений, и поэтому эти функции можно опустить. Линейный характер уравнений первого приближения существенно упрощает процедуры построения стабилизирующих управлений. Использование же уравнений первого приближения при построении программного управления, как правило, недопустимо.

### 1.1.3. Развитие понятий оптимального управления

#### *Стабилизирующее управление при внешних воздействиях (возмущениях).*

Причиной возмущенного движения часто является неполнота знаний о внешних воздействиях на объект управления в его программном движении.

Уравнения ОУ при учете внешних возмущений имеют вид

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(x, u, f, t) \quad (1.1.22)$$

где  $f(t)$  –  $\mu$ -мерный вектор внешних воздействий.

Будем полагать, что эти функции имеют две составляющие: известную –  $f_i^*(t)$  и неизвестную –  $\delta f_i(t)$  ( $i = 1, \dots, \mu$ ).

Повторяя изложенное ранее, получим *уравнения возмущенного движения* с учетом внешних воздействий.

В первом приближении эти уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d\delta x_i(t)}{dt} = & \\ = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) \cdot \delta x_j + \sum_{k=1}^m b_{ik}(t) \cdot \delta u_k + \sum_{\rho=1}^{\mu} \psi_{i\rho}(t) \cdot \delta f_{\rho}, & \quad (1.1.23) \\ (i = 1, \dots, n) & \end{aligned}$$

где

$$\psi_{i\rho} = \left. \frac{\partial \varphi_i}{\partial f_{\rho}} \right|_*$$

В зависимости от объема информации о функциях  $\delta f_i(t)$  можно различить три случая:

- полная информация (это означает, что функции известны заранее; тогда, в частности, они могут быть включены в состав  $f_i^*(t)$  либо они точно измеряются в процессе движения объекта);

- $\delta f_i(t)$  – случайный процесс с известными статистическими характеристиками;
- отсутствует какая-либо информация о функциях  $\delta f_i(t)$ , однако известно, что они ограничены некоторыми известными числами  $\delta \bar{f}$  ( $|\delta f_i(t)| \leq \delta \bar{f}_i, i = 1, \dots, \mu$ ).

В зависимости от объема информации о внешних воздействиях можно различить следующие типы оптимальных систем:

- равномерно-оптимальные;
- статистически оптимальные;
- минимаксно-оптимальные.

Стабилизирующее управление для систем первого типа находится из условия минимума функционала  $J$  на решениях системы уравнений возмущенного движения первого приближения. В системах второго типа каждой реализации внешнего воздействия соответствует при известных управлениях  $\delta u_k$  свое значение интеграла  $J$ , и поэтому в качестве меры эффективности стабилизирующих управлений используется математическое ожидание этого интеграла

$$J_1 = M \left\{ \int_{t_0}^{t_1} \left[ \sum_{i=1}^n q_{ii} \cdot \delta x_i^2 + \sum_{k=1}^m \gamma_{kk} \cdot \delta u_k^2 \right] \cdot dt \right\}. \quad (1.1.24)$$

Физический смысл величины  $J_1$  состоит в том, что случайные воздействия возбуждают случайное движение по ординатам  $\delta x_i(t)$ , ( $i = 1, \dots, n$ ). Если вычислить значение интеграла  $J$  для каждой реализации случайного движения и затем определить «среднеарифметическое», то получим значение  $J_1$ . Управление, при котором  $J_1$  достигает минимума, является оптимальным в среднем, и поэтому система стабилизации называется *статистически оптимальной*.

При отсутствии информации о внешних воздействиях используется игровой подход к определению оптимального управления. В соответствии с этим подходом функции  $\delta f_i(t)$  ( $i = 1, \dots, \mu$ ) считаются «управлениями» и определяются из условия максимизации интеграла  $J$ , а управления  $\delta u_k(t)$  ( $k = 1, \dots, m$ ) – из условия его минимизации. Эти управления обеспечивают наилучший результат при наихудшем внешнем воздействии (минимум максимального значения функционала  $J$ ), и поэтому системы с таким управлением называются *минимаксно-оптимальными*.

### **Общий вид уравнений стабилизирующего управления.**

В общем случае стабилизирующие управления описываются не алгебраическими уравнениями  $\delta u_k(t) = r_k[\delta x_1(t), \dots, \delta x_n(t), t]$  ( $k = 1, \dots, m$ ), а дифференциальными уравнениями вида

$$\frac{dx_p}{dt} = \varphi_p(x_p, \delta x, t); \quad (1.1.25)$$

$$\delta u = r_p(x_p, \delta x, t) \quad (1.1.26)$$

где  $x_p(t)$  –  $n_p$ -мерный вектор переменных состояния устройства управления (регулятора);  $\varphi_p(x_p, \delta x, t)$ ,  $r_p(x_p, \delta x, t)$  –  $n_p$ - и  $m$ -мерные векторы соответственно.

В ряде случаев не все переменные состояния объекта управления доступны непосредственному измерению.

Пусть измеряются некоторые переменные  $y_1(t), \dots, y_r(t)$ , связанные с переменными объекта соотношениями

$$y = w(\delta x, t) \quad (1.1.27)$$

где  $y(t)$  –  $r$ -мерный вектор измеряемых переменных;  $w(\delta x, t)$  – заданный  $r$ -мерный вектор. В этом случае уравнения регуляторов имеют вид

$$\frac{dx_p}{dt} = \varphi_p(x_p, y, t); \quad (1.1.28)$$

$$\delta u = r_p(x_p, y, t). \quad (1.1.29)$$

Если теперь для общности изложения заменить функцию под интегралом  $J$  функцией  $\varphi_0$ , то модели объекта управления и модели целей управления (критерии качества управления) в системах программного управления и стабилизации будут совпадать. Это естественно, так как с математической точки зрения несущественно происхождение этих моделей.

Используя матричную форму, отбрасывая также знак  $\delta$ , запишем уравнения первого приближения возмущенного движения с учетом внешних возмущений и уравнение для регулируемых переменных

$$\frac{dx}{dt} = A(t) \cdot x + B(t) \cdot u + \Psi(t) \cdot f, \theta = N(t) \cdot x \quad (1.1.30)$$

где  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $\Psi(t)$ ,  $N(t)$  – матрицы, элементами которых являются известные функции времени. Эти матрицы имеют размеры  $n \times n$ ,  $n \times m$ ,  $n \times \mu$ ,  $m \times n$  соответственно.

Связь измеряемых переменных с переменными состояния объекта часто может быть линеаризована и тогда она с учетом помех измерения принимает вид

$$y = D(t) \cdot x + \kappa(t) \quad (1.1.31)$$

где  $\kappa(t)$  –  $r$ -мерный вектор помех измерения;  $D(t)$  – заданная матрица размеров  $n \times r$ .

Устройство управления (регулятор) часто описывается линейными уравнениями вида

$$\frac{dx_p}{dt} = A_p(t) \cdot x_p + B_p(t) \cdot y; \quad (1.1.32)$$

$$u = D_p(t) \cdot x_p + F_p(t) \cdot y \quad (1.1.33)$$

где  $A_p(t)$ ,  $B_p(t)$ ,  $D_p(t)$ ,  $F_p(t)$  – матрицы размеров  $n_p \times n_p$ ,  $n_p \times r$ ,  $m \times n_p$ ,  $m \times r$  соответственно.

Часто регулятор содержит управляющую ЭВМ. В этом случае он описывается разностными уравнениями

$$\begin{aligned} x_p[(k+1) \cdot T] = \\ = \Phi_p(k \cdot T) \cdot x_p(k \cdot T) + R_p(k \cdot T) \cdot y(k \cdot T); \end{aligned} \quad (1.1.34)$$

$$u(k \cdot T) = D_p(k \cdot T) \cdot x_p(k \cdot T) + F_p(k \cdot T) \cdot y(k \cdot T); \quad (1.1.35)$$

$$u(t) = u(k \cdot T), k \cdot T \leq t < (k+1) \cdot T \quad (1.1.36)$$

где  $T$  – интервал дискретности регулятора;  $\Phi_p(k \cdot T)$ ,  $R_p(k \cdot T)$ ,  $D_p(k \cdot T)$ ,  $F_p(k \cdot T)$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) – матрицы чисел соответствующих размеров.

Поскольку для работы такого регулятора достаточно измерения вектора  $y$  лишь в дискретные моменты времени  $0, T, 2 \cdot T, 3 \cdot T$  и т.д., то естественно при определении параметров дискретного регулятора использовать дискретную модель объекта управления. Такая модель при  $f(t) = \theta(t) = 0$  имеет вид

$$\begin{aligned} x[(k+1) \cdot T] = \Phi(k \cdot T) \cdot x(k \cdot T) + R(k \cdot T) \cdot u(k \cdot T); \\ \theta(k \cdot T) = N(k \cdot T) \cdot x(k \cdot T); \end{aligned} \quad (1.1.37)$$

$$y = D(k \cdot T) \cdot x(k \cdot T). \quad (1.1.38)$$

Матрицы  $\Phi(k \cdot T)$  и  $R(k \cdot T)$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) нетрудно построить на основе матриц  $A(t)$  и  $B(t)$ , если воспользоваться формулой Коши

$$x(t) = H(t, t_0) \cdot x(t_0) + \int_{t_0}^t H(t, \tau) \cdot B(\tau) \cdot u(\tau) \cdot d\tau \quad (1.1.39)$$

где  $H(t, t_0)$  – нормированная фундаментальная матрица. Эта матрица (размеров  $n \times n$ ) составлена из  $n$ -мерных векторов (первый вектор – это решение однородного уравнения  $\frac{dx}{dt} = A(t) \cdot x$  при начальных условиях  $x_1(t_0) = 1, x_2(t_0) = \dots = x_n(t_0) = 0$ ; второй вектор является решением однородного уравнения при начальных условиях  $x_1(t_0) = 0, x_2(t_0) = 1, x_3(t_0) = \dots = x_n(t_0) = 0$  и т.д.).

Произведение  $H(t, \tau) \cdot B(\tau)$  – это импульсная переходная матрица объекта. Ее можно получить экспериментально, прикладывая (в момент  $\tau$ ) к входам объекта  $\delta$ -импульсы.

Полагая в последнем уравнении  $t = (k + 1) \cdot T$ ,  $t_0 = k \cdot T$  и принимая во внимание, что управляющее воздействие на интервале дискретности не меняется, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[(k + 1) \cdot T] &= \\ &= H[(k + 1) \cdot T, k \cdot T] \cdot \mathbf{x}(k \cdot T) + \\ &+ \left[ \int_{k \cdot T}^{(k+1) \cdot T} H(t, \tau) \cdot B(\tau) \cdot d\tau \right] \cdot \mathbf{u}(k \cdot T) \end{aligned} \quad (1.1.40)$$

отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \Phi(k \cdot T) &= H[(k + 1) \cdot T, k \cdot T]; \\ R(k \cdot T) &= \int_{k \cdot T}^{(k+1) \cdot T} H(t, \tau) \cdot B(\tau) \cdot d\tau. \end{aligned} \quad (1.1.41)$$

В дискретном случае критерий качества имеет вид

$$\begin{aligned} J &= \\ &= \sum_{k=1}^N \mathbf{x}^T(k \cdot T) \cdot Q(k \cdot T) \cdot \mathbf{x}(k \cdot T) + \mathbf{u}^T[(k - 1) \cdot T] \cdot \\ &\cdot \mathbf{u}[(k - 1) \cdot T] \end{aligned} \quad (1.1.42)$$

где  $Q(k \cdot T)$  ( $k = 1, \dots, N$ ) – заданные положительно-определенные матрицы чисел.

В стационарном случае, когда параметры объекта не изменяются во времени, его уравнения записываются как

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A \cdot \mathbf{x} + B \cdot \mathbf{u} + \Psi \cdot \mathbf{f}, \boldsymbol{\theta} = N \cdot \mathbf{x} \quad (1.1.43)$$

где  $A, B, \Psi, N$  – заданные матрицы чисел.

Дискретная модель объекта при этом имеет вид (при  $f = 0$ )

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[(k + 1) \cdot T] &= \Phi \cdot \mathbf{x}(k \cdot T) + R \cdot \mathbf{u}(k \cdot T), \boldsymbol{\theta}(k) = \\ &= N \cdot \mathbf{x}(k) \end{aligned} \quad (1.1.44)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi &= e^{A \cdot T} = \\ &= E + A \cdot T + \frac{1}{2!} \cdot (A \cdot T)^2 + \dots + \frac{1}{\mu!} \cdot (A \cdot T)^\mu + \dots; \end{aligned} \quad (1.1.45)$$

$$R = \left[ E \cdot T + \frac{1}{2!} \cdot A \cdot T^2 + \dots + \frac{1}{\mu!} \cdot A^{\mu-1} \cdot T^{\mu} + \dots \right] \cdot B. \quad (1.1.46)$$

Последние соотношения нетрудно доказать, если принять во внимание, что в стационарном случае можно указать явный вид нормированной фундаментальной матрицы  $H(t, t_0) = e^{A \cdot (t-t_0)}$ .

Если измеряемые переменные и управления являются скалярными функциями времени ( $r = m = 1$ ), то объект управления называется *одномерным объектом*. Исключая вектор состояния  $x$  из уравнений

$$\frac{dx}{dt} = Ax + bu, y = dx, \quad (1.1.47)$$

получим уравнение одномерного объекта в форме «вход-выход»

$$\begin{aligned} y^{(n)} + d_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \dots + d_1 \cdot \frac{dy(t)}{dt} + d_0 \cdot y = \\ = k_m \cdot u^{(m)} + \dots + k_1 \cdot \frac{du(t)}{dt} + k_0 \cdot u. \end{aligned} \quad (1.1.48)$$

Нетрудно найти связь коэффициентов уравнения с исходными уравнениями

Действительно, преобразуя систему (1.1.47) по Лапласу, получим при нулевых начальных условиях  $x(p) = (E \cdot p - A)^{-1} \cdot b \cdot u(p)$ . Отсюда имеем выражение

$$\begin{aligned} y(p) &= d \cdot (E \cdot p - A)^{-1} \cdot b \cdot u(p) = \\ &= \frac{d \cdot (E \cdot \widetilde{p} - A) \cdot b}{\det(E \cdot p - A)} \cdot u(p) \end{aligned} \quad (1.1.49)$$

где  $(E \cdot \widetilde{p} - A)$  – присоединенная матрица:  $(E \cdot \widetilde{p} - A) \cdot (E \cdot p - A) = E \cdot \det(E \cdot p - A)$ .

С другой стороны, передаточная функция объекта в форме «вход-выход»

$$w(p) = \frac{k_m \cdot p^{(m)} + \dots + k_1 \cdot p + k_0}{p^{(n)} + d_{n-1} \cdot p^{(n-1)} + \dots + d_1 \cdot p + d_0} = \frac{k(p)}{d(p)} \quad (1.1.50)$$

и таким образом

$$d(p) = \det(E \cdot p - A), k(p) = d \cdot (E \cdot \widetilde{p} - A) \cdot b.$$

## 1.2. Методы теории оптимального управления

Задачи построения оптимального программного и стабилизирующего управлений, рассмотренные в предыдущем параграфе, по математическому содержанию являются задачами вариационного исчисления. Методы



вариационного исчисления условно можно разделить на классические и современные. К классическим методам относятся методы, основанные на уравнениях Эйлера, Лагранжа, Якоби, Вейерштрасса, а к современным – принцип максимума Понтрягина и метод динамического программирования Беллмана. Современные методы своим возникновением обязаны задачам оптимального управления. Их достоинствами (по сравнению с классическими) являются возможность учета ограничений на управление и переменные состояния, более широкий класс функций управления, приспособленность для использования вычислительной техники и т.п.

Далее приводится решение задачи об оптимальном программном управлении на основе принципа максимума. Показано, что принцип максимума сводит эту задачу к краевой задаче для обыкновенных дифференциальных уравнений. Обсуждаются трудности ее численного решения. Затем излагается решение задачи об оптимальном стабилизирующем управлении на основе метода динамического программирования. Метод сводит задачу об оптимальном стабилизирующем управлении к краевой задаче для уравнения в частных производных. Указываются трудности численного решения краевой задачи. Устанавливается связь принципа максимума и метода динамического программирования.

### **1.2.1. Принцип максимума.**

Развитие систем управления, ужесточение требований к их точности при ограниченных габаритах и ресурсах привело в 40-50-х годах к использованию вариационного исчисления для построения оптимальных систем управления. Вначале использовались методы классического вариационного исчисления, однако вскоре стало ясно, что для построения систем новой техники (в частности, систем запуска ракет), систем, оптимальных по быстродействию, и т.п., необходимо дальнейшее развитие вариационного исчисления и создания математической теории оптимального управления. Дело в том, что из-за ограничений на управления (например, ограниченным количеством топлива ракеты, наличием «упоров» рулей управления и т.п.) оптимальные управления оказались кусочно-непрерывными функциями с точками разрыва первого рода, число которых неизвестно. Это противоречило предположению классического вариационного исчисления о непрерывности экстремалей.

Этапом в развитии теории оптимального управления в нашей стране явилась общая постановка проблемы об оптимальном управлении, предложенная в 1954 г. сотрудником Института автоматики и телемеханики АН СССР проф. А.А. Фельдбаумом на совместном семинаре инженеров и математиков, руководимом акад. Л.С. Понтрягиным. В 1956 – 1960 гг. Л.С. Понтрягиным и его учениками была разработана математическая

теория оптимальных процессов. Основным результатом этой теории является «принцип максимума», указывающий необходимые условия оптимальности для широкого круга задач оптимального программного управления.

**Задача об оптимальном программном управлении.**

Пусть объект управления описывается уравнением

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(x, u). \quad (1.2.1)$$

Управления  $u_1(t), \dots, u_m(t)$  при каждом  $t$  принимают значения из некоторого замкнутого множества  $U$ . В качестве такого множества, часто далее будем иметь в виду множество, описываемое неравенствами

$$|u_k(t)| \leq u_k^*. \quad (1.2.2)$$

Назовем *допустимыми управлениями* те  $u_k(t)$  ( $k = 1, \dots, m$ ), которые являются кусочно-непрерывными функциями и принимают значения из множества  $U$ .

Среди допустимых управлений, переводящих ОУ из заданного состояния

$$x(t_0) = x^{(0)} \quad (1.2.3)$$

в другое заданное состояние

$$x(t_1) = x^{(1)}, \quad (1.2.4)$$

требуется найти такое, для которого функционал

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0(x, u) \cdot dt \quad (1.2.5)$$

принимает наименьшее значение.

Здесь, в отличие от § 1.1, функции  $\varphi_0$  и  $\varphi_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) не явно зависят от  $t$ . Последнее (стационарность объекта) не снижает общности рассмотрения, так как в противном случае, вводя новую переменную  $x_{n+1} = t$  и дополняя систему ОУ уравнением  $\frac{dx_{n+1}}{dt} = 1$ , получим систему, правая часть которой не зависит явно от  $t$ .

Введем вспомогательные переменные  $\psi_i(t)$  ( $i = 0, \dots, n$ ), которые являются решением следующей системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d\psi_i}{dt} = - \sum_{j=0}^n \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}; \quad \psi_0 = -1. \quad (1.2.6)$$

Переменные  $\psi_i(t)$  ( $i = 0, \dots, n$ ) часто называют *вспомогательными переменными*, а уравнения для их определения называют *сопряженной системой*.

Запишем теперь уравнения ОУ и сопряженную систему в более компактной форме. Для этого введем в рассмотрение функцию  $H$  переменных  $x_1(t), \dots, x_n(t), \psi_0(t), \dots, \psi_n(t)$  и  $u_1(t), \dots, u_m(t)$

$$H(x, \psi, \psi_0, u) = \sum_{i=0}^n \psi_i \varphi_i(x, u), \quad (1.2.7)$$

используя которую представим ОУ и сопряженную систему, как

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \psi_i}; \quad (1.2.8)$$

$$\frac{d\psi_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x_i}. \quad (1.2.9)$$

Если ограничения на управления отсутствуют, то на основе классического вариационного исчисления можно записать необходимое условие экстремума

$$\frac{\partial H}{\partial u_k} = 0. \quad (1.2.10)$$

### **Принцип максимума**

Учтем теперь ограничения (1.2.2) на управления. Если в процессе оптимального управления функции  $u_k(t)$  ( $k = 0, \dots, m$ ) не достигают границ множества (1.2.2) (что означает  $|u_k(t)| < u_k^*$  ( $k = 0, \dots, m$ )), то для них выполняются соотношения (1.2.10). Однако часто оптимальное управление принимает граничные значения  $u_k^*$  либо  $-u_k^*$  ( $k = 0, \dots, m$ ), более того, оптимальное управление может скачком переходить с одной границы на другую. Такие управления уже являются кусочно-непрерывными функциями времени.

При попадании оптимального управления на границу множества  $U$  соотношения (1.2.10), нарушаются. Оптимальные управления удовлетворяют в этом случае принципу максимума Л.С. Понтрягина, установленного и доказанного в форме, приведенной ниже теоремы.

Переходя к этой теореме, сделаем некоторые пояснения. Возьмем произвольное допустимое управление  $u(t)$  и при начальных условиях  $x^{(0)}$ ,  $x_0(t_0) = 0$  найдем решение системы (1.2.1):  $x_1(t_1), \dots, x_n(t)$ .

Подставляя это решение и управление  $u(t)$  в (1.2.6), определим, пока при некоторых произвольных начальных условиях  $\psi(t_0)$  решение (1.2.6):

$\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)$ . При фиксированных (постоянных) значениях векторов  $\mathbf{x}$  и  $\boldsymbol{\psi}$  функция  $H$  становится функцией вектора  $\mathbf{u} \in U$ . Максимум этой функции по  $\mathbf{u}$  и обозначим через  $M(\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}, \psi_0)$

$$M(\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}, \psi_0) = \max_{\mathbf{u} \in U} H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}, \psi_0, \mathbf{u}). \quad (1.2.11)$$

Максимум (наибольшее значение) непрерывной функции  $H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}, \psi_0, \mathbf{u})$  может достигаться как в точках локального максимума этой функции, в которых

$$\frac{\partial H}{\partial u_k} = 0 \text{ и } \sum_{l,k=1}^m \frac{\partial^2 H}{\partial u_k \cdot \partial u_l} \cdot \delta u_k \cdot \delta u_l < 0, \quad (1.2.12)$$

так и на границах  $u_k^*$  и  $-u_k^*$  ( $k = 1, \dots, m$ ), множества  $U$ .

**Теорема** (принцип максимума Л.С. Понтрягина). Пусть  $\mathbf{u}(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$  – такое допустимое управление, что соответствующие ему решения  $x_i(t)$  ( $i = 0, \dots, n$ ) уравнения (1.2.8), исходящие в момент  $t_0$  из состояния (1.2.3), проходят в момент времени  $t_1$  через точку  $x^{(1)}, x_0(t_1)$ . Для оптимальности управления (при котором  $x_0(t_1)$ ) принимает наименьшее значение) необходимо существование таких ненулевых непрерывных функций  $\psi_0(t), \psi_1(t), \dots, \psi_n(t)$ , удовлетворяющих уравнениям (1.2.9), что при любом  $t$  ( $t_0 \leq t \leq t_1$ ) функция  $H(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\psi}(t), \psi_0(t), \mathbf{u})$  переменного  $\mathbf{u} \in U$  достигает при  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$  максимума

$$H(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\psi}(t), \psi_0(t), \mathbf{u}(t)) = M(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\psi}(t), \psi_0(t)) \quad (1.2.13)$$

при этом в конечный момент времени  $t_1$  выполняются соотношения

$$\psi_0(t_1) < 0; M(\mathbf{x}(t_1), \boldsymbol{\psi}(t_1), \psi_0(t_1)) = 0 \quad (1.2.14)$$

Если  $\mathbf{x}(t)$ ,  $\boldsymbol{\psi}(t)$  и  $\mathbf{u}(t)$  удовлетворяют (1.2.8), (1.2.9) и (1.2.13), то функции  $\psi_0(t)$  и  $M(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\psi}(t), \psi_0(t))$  переменного  $t$  являются постоянными и поэтому проверку соотношений (1.2.14) можно проводить не обязательно в момент времени  $t_1$ , а в любой момент  $t$  ( $t_0 \leq t \leq t_1$ ).

Доказательство теоремы является достаточно сложным поэтому оно не приводится.

Соотношения (2.1.13) и (2.1.14) можно записать в более простой форме

$$\max_{\mathbf{u} \in U} H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}, \psi_0, \mathbf{u}) = 0 \quad (1.2.15)$$

Таким образом, центральным в теореме является условие максимума (1.2.15). Оно означает, что если  $u_1(t), \dots, u_m(t)$  – оптимальные управления, а  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  – оптимальные траектории, то непременно найдутся такая постоянная  $\psi_0 < 0$  и такие решения  $\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)$  системы (1.2.9), что

функция  $H(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1, \dots, u_m, \psi_0, \psi_1(t), \dots, \psi_n(t))$  переменных  $u_1, \dots, u_m$  при всех  $t \in [t_0, t_1]$  будет достигать максимума на  $U$  именно при оптимальных управлениях  $u_1(t), \dots, u_m(t)$ . Поэтому эту теорему, дающую необходимое условие оптимальности в задачах оптимального управления, принято называть *принципом максимума*. Отметим, что во внутренних точках множества  $U$  для оптимального управления выполняются условия (1.2.10), которые являются необходимыми для (1.2.15).

### **Трудности практического применения принципа максимума.**

Как же практически воспользоваться условием (1.2.15), ведь функции  $(x_1(t), \dots, x_n(t), \psi_1(t), \dots, \psi_n(t))$  и постоянная  $\psi_0$ , входящие в это условие, неизвестны? Здесь поступают следующим образом: рассматривая функцию  $H(x, u, \psi, \psi_0)$  как функцию  $m$  переменных  $u_1(t), \dots, u_m(t) \in U$  и считая переменные  $x, \psi, \psi_0$  параметрами, решают задачу максимизации функции  $H$  и находят функцию

$$u = u(x, \psi, \psi_0) \in U, \quad (1.2.16)$$

на которой достигается наибольшее значение функции  $H$ .

В ряде случаев функция (1.2.16) может быть записана в явном виде. Например, если правые части ОУ имеют структуру

$$\varphi_i(x, u) = \varphi_i^{(1)}(x) + \sum_{k=1}^n \varphi_{ik}^{(2)}(x) \cdot u_k,$$

а подынтегральное выражение функционала (1.2.5)

$$\varphi_0(x, u) = \varphi_0 x + \sum_{i=1}^n \varphi_{0k}(x) \cdot u_k$$

множество описывается  $U$  неравенствами (1.2.2), то

$$\begin{aligned} H(x, \psi, \psi_0, u) &= \\ &= \sum_{i=0}^n \psi_i(t) \cdot \varphi_i^{(1)} + \sum_{k=0}^m \left( \sum_{i=0}^n \psi_i(t) \cdot \varphi_{ik}^{(2)}(x) \right) \cdot u_k \end{aligned} \quad (1.2.17)$$

и эта функция достигает наибольшего значения на  $U$  в точке с координатами

$$u_k = \begin{cases} u_k^*, & \text{если } \sum_{i=0}^n \psi_i(t) \cdot \varphi_{ik}^{(2)}(x) > 0; \\ -u_k^*, & \text{если } \sum_{i=0}^n \psi_i(t) \cdot \varphi_{ik}^{(2)}(x) < 0, \end{cases}$$

или

$$u_k(t) = u_k^* \cdot \text{sign} \left( \sum_{i=0}^n \psi_i(t) \cdot \varphi_{ik}^{(2)} \cdot \mathbf{x}(t) \right). \quad (1.2.18)$$

Формула (1.2.18) дает большой объем информации о структуре оптимального управления:  $k$ -я ( $k = 1, \dots, m$ ) координата оптимального управления является ступенчатой (кусочно-постоянной) функцией со значениями  $u_k^*$  и  $-u_k^*$ , при этом моменты переключения определяются условием

$$\sum_{i=1}^n \psi_i(t) \cdot \varphi_{ik}^{(2)}(\mathbf{x}(t)) = 0. \quad (1.2.19)$$

Итак, допустим, что функция (1.2.16) известна. Рассмотрим систему  $2 \cdot n$  дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \varphi_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\psi}_0)); \quad (1.2.20)$$

$$\psi_i = - \sum_{j=0}^n \frac{\partial \varphi_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\psi}_0))}{\partial x_i} \cdot \psi_j. \quad (1.2.21)$$

Общее решение системы (1.2.20), (1.2.21) зависит от произвольных постоянных, которые определяются из краевых условий (1.2.3), (1.2.4). Задача интегрирования уравнений (1.2.20), (1.2.21) при краевых условиях (1.2.3), (1.2.4) называется *краевой задачей* (двухточечной краевой задачей).

Таким образом, принцип максимума позволяет свести решение задачи об оптимальном программном управлении к решению краевой задачи.

Трудность ее решения состоит в том, что интегрирование уравнений (1.2.20), (1.2.21) в «прямом времени» не представляется возможным, так как неизвестны начальные условия  $\psi_i(t_0)$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Один из возможных подходов к решению краевой задачи заключается в следующем. Задавая произвольным вектором  $\boldsymbol{\psi}(t_0) = \boldsymbol{\psi}^{(0)}$  и интегрируя (1.2.20), (1.2.21) при известных начальных условиях  $\mathbf{x}(t_0)$ ,  $\boldsymbol{\psi}^{(0)}$  найдем функции  $\mathbf{x}(t)$ ,  $\boldsymbol{\psi}(t)$  и при  $t = t_1$  проверим выполнение равенства (1.2.4). Если оно нарушается, задаемся другим вектором  $\boldsymbol{\psi}(t_0) = \boldsymbol{\psi}^{(1)}$  и, интегрируя (1.2.20), (1.2.21) при начальных условиях  $\mathbf{x}(t_0)$ ,  $\boldsymbol{\psi}^{(1)}$  получим при  $t = t_1$  вектор  $\mathbf{x}(t_1)$ .

Если он не совпадает с заданным, продолжаем процесс до тех пор, пока не найдется такой вектор  $\boldsymbol{\psi}(t_0)$  что условия (1.2.4) будут выполняться с приемлемой точностью. При этом подходе используются градиентные методы, когда  $\boldsymbol{\psi}(t_0)$  определяется из условия минимума «расстояния»  $\mathbf{x}(t_1)$  от заданного вектора  $\mathbf{x}^{(1)}$ .

В вычислительной математике разработан ряд методов приближенного численного решения краевых задач: метод стрельбы, метод прогонки, ряд итерационных методов. Во многих случаях не представляется возможным найти из условия (1.2.15) явный вид (1.2.18) оптимального управления. Тогда уравнения (1.2.1), сопряженная система (1.2.9) и условия максимума (2.2.15) образуют *краевую задачу принципа максимума*. Эта задача имеет ряд специфических особенностей, затрудняющих применение стандартных численных методов решения краевых задач. К числу таких особенностей относятся разрывы функций  $u_k(t)$  ( $t = 1, \dots, m$ ), удовлетворяющих условию максимума (1.2.15), их неединственность, нелинейный характер зависимости (1.2.16) даже в линейных системах. Кроме того, особенностью краевых задач, связанных с принципом максимума даже в случаях, когда удается найти явный вид управлений (1.2.16), является их плохая сходимость, вызванная неустойчивостью системы (1.2.20), (1.2.21). Отметим в заключение, что, несмотря на различные методы численного решения краевой задачи принципа максимума, процесс решения каждой оптимизации на основе этого принципа является самостоятельной творческой задачей, решаемой в рамках той частной отрасли динамики, к которой относится объект управления, с учетом его специфических особенностей, используемых для улучшения сходимости численного решения краевой задачи.

### **1.2.2. Оптимальные по быстрдействию системы**

Повышение быстрдействия при заданных ресурсах – это повышение производительности процессов и машин, и поэтому оптимальные по быстрдействию и близкие к ним системы стали первоочередным объектом исследования специалистами по автоматике. В 1935 г. в СССР был получен патент на систему перемещения валков прокатного стана, в которой применялась квадратичная обратная связь, обеспечивающая максимальное быстрдействие. Аналогичный принцип был применен несколько позже в автоматическом потенциометре, выпускаемом одной из фирм США. Затем появились теоретические работы. В 1953 г. было введено общее понятие оптимального процесса в  $n$ -мерном пространстве состояний ( $n$ -мерном фазовом пространстве) и доказана теорема об  $n$ -интервалах переключения оптимального по быстрдействию процесса. Первая публикация по принципу максимума также содержала (высказанный в форме гипотезы) принцип, ведущий к решению общей задачи об оптимальном по быстрдействию программном управлении. В последующие годы появилось большое число работ, основанных на принципе максимума, в которых приводятся различные способы построения оптимального по быстрдействию систем программного управления, а также синтезу таких систем.

**Принцип максимума для оптимальных по быстродействию систем.**

Задача определения оптимального по быстродействию программного управления состоит в нахождении управлений  $u \in U$ , при которых объект

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(x, u) \quad (1.2.22)$$

переводится из состояния

$$x(t_0) = x^{(0)} \quad (1.2.23)$$

в состояние

$$x(t_1) = x^{(1)} \quad (1.2.24)$$

( $x^{(0)}$ ,  $x^{(1)}$  и  $t_0$  – заданы, а  $t_1$  – неизвестно), при этом функционал

$$J = \int_0^{t_1} dt = t_1 - t_0 \quad (1.2.25)$$

принимает наименьшее значение.

Опираясь на теорему принципа максимума, выведем необходимые условия оптимальности по быстродействию.

Из (1.2.25) следует, что  $\varphi_0(x, u) = 1$ , и поэтому

$$H(x, \psi, \phi_0, u) = \varphi + \sum_{i=0}^n \phi_i \cdot \varphi_0(x, u).$$

Вводя функцию

$$H(x, \psi, \phi_0, u) = \sum_{i=0}^n \phi_i \cdot \varphi_0(x, u), \quad (1.2.26)$$

запишем (1.2.22) и сопряженную систему в виде

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial \phi_i}; \quad (1.2.27)$$

$$\frac{d\phi_i}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial x_i}. \quad (1.2.28)$$

При фиксированных  $x$  и  $\psi$   $H_1$  становится функцией  $u$ . Обозначим

$$M_1(x, \psi) = \max_{u \in U} (x, \psi, u).$$

Очевидно, что

$$M(x, \phi) = M_1(x, \psi) - \phi_0.$$



Таким образом, необходимое условие (1.2.15) для оптимальности по быстрдействию примет вид

$$\max_{\mathbf{u} \in U} H_1(\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}, \mathbf{u}) = \phi_0 \quad (\phi_0 \leq 0). \quad (1.2.29)$$

### Линейные объекты

Рассмотрим важный для практики частный случай задачи об оптимальном быстродействии, когда уравнения (1.2.22) объекта линейны и имеют вид

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A \cdot \mathbf{x} + B \cdot \mathbf{u}. \quad (1.2.30)$$

В этом случае функция

$$H_1 = \sum_{i=1}^n \phi_i \cdot \left[ \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j + \sum_{k=1}^m b_{ik} \cdot u_k \right]. \quad (1.2.31)$$

Сопряженная система (1.2.28) записывается так

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_i(t)}{dt} &= - \sum_{j=1}^n \frac{\partial [\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j + \sum_{k=1}^m b_{ik} \cdot u_k]}{\partial x_i} \cdot \phi_i = \\ &= - \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot \phi_i. \end{aligned} \quad (1.2.32)$$

Для линейных объектов принцип максимума является не только необходимым, но и достаточным условием оптимальности по быстрдействию. В соответствии с (1.2.29) для оптимальности управления необходимо и достаточно, чтобы функция (1.2.31) принимала наибольшее значение при ограниченном  $\mathbf{u}$ . Эта функция достигает максимума, если

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m \left[ \sum_{i=1}^n b_{ik} \cdot \phi_i(t) \right] \cdot u_k(t) = \\ = \max_{|u_k(t)| \leq u_k^*} \sum_{k=1}^m \left[ \sum_{i=1}^n b_{ik} \cdot \phi_i(t) \right] \cdot u_k(t). \end{aligned} \quad (1.2.33)$$

При  $m = 1$  и ограничении  $|u_k(t)| \leq u_k^*$  это условие примет вид

$$\sigma_1(t) \cdot u(t) = \max_{|u_k(t)| \leq u^*} \sigma_1(t) \cdot u \quad (1.2.34)$$

где  $\sigma_1(t) = \sum_{i=1}^n b_{i1} \cdot \phi_i(t)$ .

Необходимым условием экстремума всякой гладкой функции, заданной в открытой области изменения ее аргумента, является равенство

нулю ее производной. Если функция задана в замкнутой области, то ее экстремум может достигаться как внутри, так и на границе этой области. В рассматриваемом случае функция  $H_{11} = \sigma_1 \cdot u$  – линейная относительно  $u$ , ее производная не зависит от  $u$ , и поэтому если на  $u$  не наложено ограничение, то не существует точки  $u$ , в которой функция  $H_{11}$  достигает экстремума. Если функция  $H_1$  рассматривается в замкнутом интервале  $[-u^*, u^*]$  изменения переменной  $u$ , то в этом интервале она достигает максимума и минимума на границах интервала, как показано на рис. 1.3.

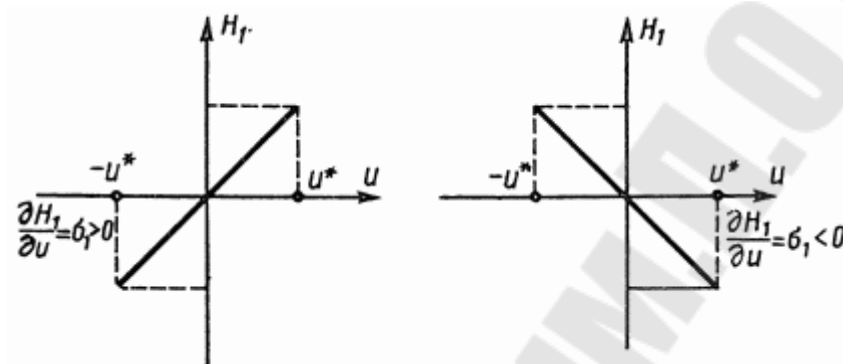


Рис. 1.3. Графики функции  $H_1(u)$ .

Спрашивается, каково же должно быть  $u$ , чтобы функция  $H_1$  достигала максимума? Как следует из рис.,  $u$  определяется выражением

$$u = u^* \cdot \text{sign} \frac{\partial H_1}{\partial u} = u^* \cdot \text{sign} \sigma_1.$$

Это выражение справедливо для каждого момента времени, и поэтому оптимальное управление имеет вид

$$u(t) = u^* \cdot \text{sign} \sum_{i=1}^n b_{i1} \cdot \phi_i(t). \quad (1.2.35)$$

Возвращаясь к общему случаю ( $m > 1$ ), замечаем, что каждая составляющая  $u_1(t), \dots, u_m(t)$  вектора  $\mathbf{u}$  изменяется независимо от остальных составляющих, поэтому (1.2.33) выполняется, если

$$u_k(t) = u_k^* \cdot \text{sign} \sum_{i=1}^n b_{ik} \cdot \phi_i(t). \quad (1.2.36)$$

Таким образом, для линейных объектов принцип максимума дает явный вид (1.2.36) оптимального управления, а краевая задача состоит в определении вектора  $\boldsymbol{\psi}(t_0)$  при котором решения системы

$$\frac{dx}{dt} = A \cdot x + B \cdot u. \quad (1.2.37)$$

$$u_k = u_k^* \cdot \text{sign } B'_{[k]} \cdot \psi \quad (1.2.38)$$

( $B'_{[k]}$  –  $k$ -ый столбец матрицы  $B$ );

$$\frac{d\psi}{dt} = -A' \cdot \psi \quad (1.2.39)$$

удовлетворяют краевым условиям (1.2.23), (1.2.24).

Заметим, что корни характеристического уравнения объекта (1.2.30) и сопряженной системы (1.2.32) равны по модулю, однако противоположны по знаку. Действительно, характеристический полином объекта имеет вид  $\det(E \cdot p - A)$ , а сопряженной системы имеет вид  $\det(E \cdot p + A')$ , и если, например, объект асимптотически устойчив, то сопряженная система неустойчива. Это приводит к трудностям численного решения краевой задачи. В связи с этим был разработан ряд методов для решения краевых задач для подобных систем. В частности, метод, предложенный Н.Н. Красовским, сводит задачу об оптимальном программном управлении в линейных системах к, так называемой, *проблеме моментов*, изучаемой в функциональном анализе.

Пусть объект описывается уравнением

$$\frac{d^3x}{dt^3} + d_2 \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + d_1 \cdot \frac{dx}{dt} + d_0 \cdot y = b \cdot u. \quad (1.2.40)$$

Требуется определить функцию управления  $u(t)$ , удовлетворяющую неравенству  $|u(t)| \leq 0$ , которое переводит этот объект из состояния

$$y(0) = y_{10}; \frac{dy(0)}{dt} = y_{20}; \frac{d^2y(0)}{dt^2} = y_{30} \quad (1.2.41)$$

в нулевое положение

$$y(t_1) = \frac{dy(t_1)}{dt} = \frac{d^2y(t_1)}{dt^2} = 0 \quad (1.2.42)$$

за минимальное время.

Введем обозначения  $x_1 = y$ ,  $x_2 = \frac{dy}{dt}$ ,  $x_3 = \frac{d^2y}{dt^2}$ ,  $b = b_{31}$  и запишем систему уравнений объекта

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2; \\ \frac{dx_2}{dt} = x_3; \\ \frac{dx_3}{dt} = -d_2 \cdot x_3 - d_1 \cdot x_2 - d_0 \cdot x_1 + b_{31} \cdot u. \end{cases} \quad (1.2.43)$$

Тогда функция

$$\begin{aligned}
 H_1 &= \\
 &= \phi_1 \cdot x_2 + \phi_2 \cdot x_3 + \phi_3 \cdot \\
 &\cdot (-d_2 \cdot x_3 - d_1 \cdot x_2 - d_0 \cdot x_1 + b_{31} \cdot u),
 \end{aligned}
 \tag{1.2.44}$$

а сопряженная система (1.2.32) будет иметь вид

$$\begin{cases}
 \frac{d\phi_1}{dt} = d_0 \cdot \phi_3; \\
 \frac{d\phi_2}{dt} = -\phi_1 + d_1 \cdot \phi_3; \\
 \frac{d\phi_3}{dt} = -\phi_2 + d_2 \cdot \phi_3.
 \end{cases}
 \tag{1.2.45}$$

Из (1.2.44) заключаем, что искомое оптимальное управление имеет вид

$$u = 1 \cdot \text{sign } b_{31} \cdot \phi_3(t).
 \tag{1.2.46}$$

Разрешая последнюю систему относительно  $\phi_3$ , получим дифференциальное уравнение

$$-\frac{d^3\phi_3}{dt^3} + d_2 \cdot \frac{d^2\phi_3}{dt^2} - d_1 \cdot \frac{d\phi_3}{dt} + d_0 \cdot \phi_3 = 0
 \tag{1.2.47}$$

для определения функции  $\phi_3(t)$ .

### **Теорема об n-интервалах.**

Из (1.2.36) следует, что каждая из компонент оптимального управления представляет собой кусочно-постоянную функцию, точками разрыва которой являются точки обращения в нуль функции

$$\sigma_k(t) = \sum_{i=1}^n b_{ik} \cdot \phi_i(t).$$

На рис. 1.4 приведен график, изменения во времени одной из этих функций.

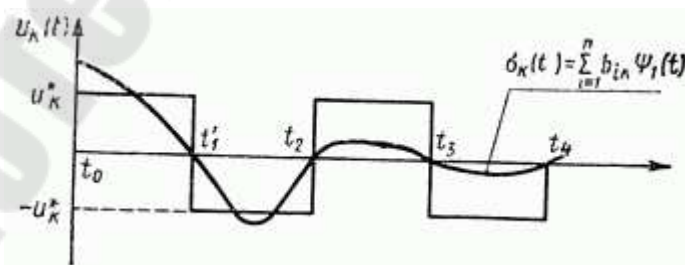


Рис. 1.4. График функции  $u(t)$ .

Каждую точку разрыва оптимального управления будем называть точкой переключения. Число переключения каждого из управлений  $u_k(t)$  ( $k = 1, \dots, m$ ) определяется числом нулей функции  $\sigma_k(t)$  ( $k = 1, \dots, m$ ) и

может быть очень большим. Существует, однако, один важный случай, когда число переключений этих управлений допускает точную оценку. Этот случай составляет содержание теоремы об  $n$ -интервалах.

**Теорема** (об  $n$ -интервалах). Если корни характеристического уравнения объекта (1.2.30) действительны, то число переключений каждого из управлений  $u_1(t), \dots, u_m(t)$  не превышает  $n - 1$ .

При доказательстве теоремы ограничимся для простоты рассмотрением примера при  $n = 3, m = 1$ . Кроме того, будем полагать, что объект управления описывается системой (1.2.43), при этом корни уравнения  $p^3 + d_2 \cdot p^2 + d_1 \cdot p + d_0 = 0$  объекта (1.2.43) попарно различны. Однако приводимое ниже доказательство полностью повторяется для общего случая, описанного теоремой.

Обозначим через  $-\lambda_1, -\lambda_2, -\lambda_3$  корни характеристического уравнения объекта. Тогда очевидно, что корни характеристического полинома уравнения (1.2.47) равны  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  и, следовательно, функция  $\phi_3(t)$ , являющаяся решением этого уравнения, имеет вид

$$\phi_3(t) = k_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + k_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} + k_3 \cdot e^{\lambda_3 \cdot t} \quad (1.2.48)$$

где  $k_1, k_2, k_3$  – постоянные интегрирования.

Поскольку число корней (нулей) функции  $\phi_3(t)$  определяет число переключений оптимального управления, то теорема будет доказана, если справедливо следующее утверждение.

**Утверждение.** Если  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  – попарно различные действительные числа, то функция (1.2.48) не может иметь более двух действительных корней.

**Доказательство.** При  $n = 1$  утверждение справедливо (уравнение  $e^{\lambda_1 \cdot t} = 0$  не имеет действительных корней). Предположим, что утверждение доказано для случая, когда в (1.2.48) имеется лишь два слагаемых, и докажем ее для трех слагаемых.

Допустим противное, что функция (1.2.48) имеет не менее трех действительных корней. Умножив ее на  $e^{-\lambda_3 \cdot t}$ , получим функцию

$$k_1 \cdot e^{(\lambda_1 - \lambda_3) \cdot t} + k_2 \cdot e^{(\lambda_2 - \lambda_3) \cdot t} + k_3, \quad (1.2.49)$$

которая также имеет не менее трех действительных корней. Из математического анализа (теорема Ролля) следует, что между двумя действительными корнями функции лежит по крайней мере один корень ее производной. Следовательно, производная функции (1.2.49) имеет не менее двух действительных корней. С другой стороны, эта производная определяется выражением

$$k_1 \cdot (\lambda_1 - \lambda_3) \cdot e^{(\lambda_1 - \lambda_3) \cdot t} + k_2 \cdot (\lambda_2 - \lambda_3) \cdot e^{(\lambda_2 - \lambda_3) \cdot t}, \quad (1.2.50)$$

в которой числа  $\lambda_1 - \lambda_3$  и  $\lambda_2 - \lambda_3$  попарно различны, и, следовательно, она имеет не более одного действительного корня (выше полагалось, что

утверждение доказано для случая, когда (1.2.48) содержит менее трех слагаемых). Полученное противоречие доказывает утверждение и теорему.

### 1.2.3. Метод динамического программирования

В пятидесятых годах наряду с задачами оптимального управления в технике возникли задачи об оптимальном управлении в экономике, управления войсками и т.д. (задачи об управлении запасами, ресурсами, составление расписаний, организация тыла). Они не допускали эффективного численного решения на основе существующих методов. Это привлекло внимание математиков к этим задачам. При этом обнаружилось, что процесс решения многих из них может быть представлен как некоторый многоплановый процесс принятия решений. Эта концепция получила название *метода динамического программирования*, что означает принятие решений во времени.

Основу метода динамического программирования, разработанного американским математиком Р. Беллманом, составляет *принцип оптимальности*, используя который выводят функциональное уравнение метода. Решение этого уравнения приводит к синтезу оптимального управления.

#### Принцип оптимальности

Рассмотрим задачу об оптимальном стабилизирующем управлении. Пусть дан объект управления, описываемый уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(x, u, t). \quad (1.2.51)$$

Требуется найти закон управления

$$u = r(x, t) \quad (1.2.52)$$

чтобы на движениях системы (1.2.51), (1.2.52), возбужденных произвольными начальными отклонениями, минимизировался функционал

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0(x, u, t) \cdot dt. \quad (1.2.53)$$

При этом на управления (1.2.52) наложены ограничения  $u \in U$ . Для определенности часто будем полагать, что

$$-u_k^* \leq u_k(t) \leq u_k^* \quad (1.2.54)$$

где  $u_k^*$  ( $k = 1, \dots, m$ ) – заданные числа.

Отметим, что эта задача является вариационной задачей со свободным правым концом и фиксированным  $t_1$ .

Для простоты изложения принцип оптимальности ограничимся частным случаем этой задачи, когда  $n = 2$ , а  $m = 1$ . В этом случае уравнения (1.2.51) и (1.2.52) примут вид

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \varphi_1(x_1, x_2, u, t); \\ \frac{dx_2}{dt} = \varphi_2(x_1, x_2, u, t); \end{cases} \quad (1.2.55)$$

$$u = r(x_1, x_2, t). \quad (1.2.56)$$

а функционал (1.2.53) запишется, если опустить для простоты  $t$  в  $\varphi_0$  как

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0(x_1, x_2, u) dt \quad (1.2.57)$$

Переходя к принципу оптимальности, допустим, что оптимальное управление (1.2.52) найдено. Этому управлению соответствует оптимальная траектория  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  которую можно вычислить, подставляя в уравнения (1.2.51) функцию (1.2.52) и интегрируя (1.2.51) при некотором начальном условии  $x_1(t_0)$ ,  $x_2(t_0)$ . Эта траектория приведена на рис. 1.5.

Отметим какую-либо точку  $x'$  на оптимальной траектории и назовем участок между точкой  $x^{(0)} = \{x_1(t_0), x_2(t_0)\}$  и точкой  $x' = \{x_1(t'), x_2(t')\}$  первым (траектория 1), а участок между точками  $x' = \{x_1(t'), x_2(t')\}$  и  $x^{(1)} = \{x_1(t_1), x_2(t_1)\}$  назовем вторым участком траектории (траектория 2).

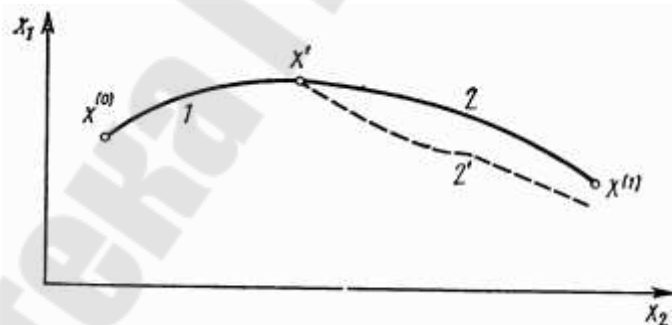


Рис. 1.5. Оптимальная траектория.

**Принцип оптимальности:** независимо от того, каким путем система (1.2.55) достигла в момент времени  $t'$  точки  $\{x_1(t'), x_2(t')\}$ , ее оптимальным последующим движением будет траектория 2.

Другими словами, второй участок оптимальной траектории является оптимальной траекторией. Это означает, что если система, начав движение из точки  $x^{(0)}$ , оказалась в момент времени  $t'$  в точке  $x'$ , то оптимальное движение из этой точки будет совпадать с траекторией 2.

Обоснование принципа почти очевидно. Действительно, пусть движение из точки  $x'$  продолжается не по траектории 2, а по траектории 2' и при этом движении функционал

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0(x_1, x_2, u) \cdot dt$$

принимает меньшее значение, чем на траектории 2. Тогда значение функционала (1.2.57) на траектории 1 – 2' будет меньшим, чем на траектории 1 – 2. Это противоречит предположению об оптимальности  $u$ .

### Функциональное уравнение

Несмотря на почти очевидный, эвристический характер принципа оптимальности, он имеет своим следствием далеко не очевидное функциональное уравнение. Переходя к его выводу, введем обозначения для значений функционала на оптимальных траекториях

$$v[x_1(t_0), x_2(t_0), t] = \min_{|u(t)| \leq u^*} \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0[x_1(t), x_2(t), u(t)] \cdot dt;$$

$$v[x_1(t'), x_2(t'), t'] = \min_{|u(t)| \leq u^*} \int_{t'}^{t_1} \varphi_0[x_1(t), x_2(t), u(t)] \cdot dt.$$

Представим (полагая  $t' = t_0 + \tau$ ;  $\tau$  – достаточное малое число) функционал (1.2.57) в форме

$$\int_{t_0}^{t_0+\tau} \varphi_0[x_1(t), x_2(t), u(t)] \cdot dt + \int_{t_0+\tau}^{t_1} \varphi_0[x_1(t), x_2(t), u(t)] \cdot dt.$$

Допустим, что оптимальное управление на втором участке известно. Значение, которое принимает функционал оптимизации при движении по этому участку, определяется выражением  $v[x_1(t'), x_2(t')]$ . На основе принципа оптимальности можно записать функциональное уравнение

$$v[x_1(t_0), x_2(t_0), t_0] = \min_{|u(t)| \leq u^*} \left\{ \int_{t_0}^{t_0+\tau} \varphi_0[x_1(t), x_2(t), u(t)] \cdot dt + v[x_1(t_0 + \tau), x_2(t_0 + \tau), t_0 + \tau] \right\}.$$

Учитывая малость  $\tau$ , получим



$$\begin{aligned}
v[x_1(t_0), x_2(t_0), t_0] &= \\
&= \min_{|u(t)| \leq u^*} \{ \varphi_0[x_1(t_0), x_2(t_0), u(t_0)] \cdot \tau + \\
&+ v[x_1(t_0 + \tau), x_2(t_0 + \tau), t_0 + \tau] \}. \tag{1.2.58}
\end{aligned}$$

Минимизируя выражение в фигурных скобках по  $u(t_0)$ , получим оптимальное управление на первом участке. Однако в этом выражении функция  $v$  неизвестна. В связи с этим преобразуем (1.2.58).

Используя разложение в ряд Тейлора, получим

$$\begin{aligned}
x_i(t_0 + \tau) &= x_i(t_0) + \left. \frac{\partial x_i}{\partial t} \right|_{t=t_0} \cdot \tau + o_{1i}(\tau) = \\
&= x_i(t_0) + \varphi_i[x_1(t_0), x_2(t_0), u(t_0), t_0] \cdot \tau + o_{1i}(\tau).
\end{aligned}$$

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{o_{1i}(\tau)}{\tau} \rightarrow 0;$$

$$\begin{aligned}
v[x_1(t_0 + \tau), x_2(t_0 + \tau), t_0 + \tau] &= \\
&= v\{x_1(t_0) + \varphi_1[x_1(t_0), x_2(t_0), u(t_0), t_0] \cdot \tau + o_{1i}(\tau), x_2(t_0) + \\
&+ \varphi_2[x_1(t_0), x_2(t_0), u(t_0), t_0] \cdot \tau + o_{12}(\tau), t_0 + \tau\} = \\
&= v[x_1(t_0), x_2(t_0), t_0] + \left. \frac{\partial v}{\partial x_1} \right|_{\substack{t=t_0 \\ x_1=x_1(t_0) \\ x_2=x_2(t_0)}} \varphi_1[x_1(t_0), x_2(t_0), u(t_0), t_0] \tau + \\
&+ \left. \frac{\partial v}{\partial x_2} \right|_{\substack{t=t_0 \\ x_1=x_1(t_0) \\ x_2=x_2(t_0)}} \cdot \varphi_2[x_1(t_0), x_2(t_0), u(t_0), t_0] \cdot \tau + \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{\substack{t=t_0 \\ x_1=x_1(t_0) \\ x_2=x_2(t_0)}} \cdot \tau + o_3(\tau)
\end{aligned}$$

$$\text{где } \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{o_3(\tau)}{\tau} \rightarrow 0.$$

Подставляя эти выражения в (1.2.58), получим

$$\begin{aligned}
v[x_1(t_0), x_2(t_0), t_0] &= \\
&= \min_{|u(t_0)| \leq u^*} \left\{ \varphi_0[x_1(t_0), x_2(t_0), u(t_0)] \cdot \tau + v[x_1(t_0), x_2(t_0), t_0] + \right. \\
&+ \left. \sum_{i=1}^2 \left. \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|_{\substack{t=t_0 \\ x_i=x_i(t_0)}} \cdot \varphi_i[x_1(t_0), x_2(t_0), u(t_0), t_0] \cdot \tau + \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{\substack{t=t_0 \\ x_1=x_1(t_0) \\ x_2=x_2(t_0)}} \cdot \tau + o_3(\tau) \right\}.
\end{aligned}$$

Сокращая  $v[x_1(t_0), x_2(t_0), t_0]$  в обеих частях равенства и поделив результат на  $\tau$ , получим при  $\tau \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{\substack{t=t_0 \\ x_1=x_1(t_0) \\ x_2=x_2(t_0)}} = \\
& = \min_{|u(t_0)| \leq u^*} \left\{ \varphi_0[x_1(t_0), x_2(t_0), u(t_0)] + \right. \\
& \left. + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial v}{\partial x_i} \Big|_{\substack{t=t_0 \\ x_1=x_1(t_0) \\ x_2=x_2(t_0)}} \cdot \varphi_i[x_1(t_0), x_2(t_0), u(t_0), t_0] \right\}.
\end{aligned}$$

Учитывая, что полученный результат справедлив для любых  $x_1(t_0)$ ,  $x_2(t_0)$ ,  $t_0$ , опустим индекс «0» и запишем

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial v[x_1(t), x_2(t), t]}{\partial t} = \\
& = \min_{|u(t)| \leq u^*} \left\{ \varphi_0[x_1(t), x_2(t), u] + \right. \\
& \left. + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial v[x_1(t), x_2(t), t]}{\partial x_i} \cdot \varphi_i[x_1(t), x_2(t), u, t] \right\}.
\end{aligned} \tag{1.2.59}$$

В общем случае, когда  $n > 2$ ,  $m > 1$ , это уравнение имеет вид

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial v[x_1, \dots, x_n, t]}{\partial t} = \\
& = \min_{u_1, u_2, \dots, u_m \in U} \left\{ \varphi_0[x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m] + \right. \\
& \left. + \sum_{i=1}^n \frac{\partial v[x_1, \dots, x_n, t]}{\partial x_i} \cdot \varphi_i[x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m] \right\}.
\end{aligned} \tag{1.2.60}$$

Если известно, что оптимальные управления находятся внутри множества  $U$ , либо если ограничения подобного рода вообще отсутствуют, то уравнение (1.2.60) можно представить как совокупность уравнений в частных производных

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial v}{\partial t} = \\
& = \varphi_0[x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m] + \\
& + \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot \varphi_i[x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t];
\end{aligned} \tag{1.2.61}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \varphi_0[x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m]}{\partial \frac{du_k}{dt}} + \\ & + \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_0[x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t]}{\partial u_k} = 0. \end{aligned} \quad (1.2.62)$$

Таким образом, для решения задачи об оптимальной стабилизации необходимо решить, при краевых условиях

$$v[x_1(t_1), \dots, x_n(t_1), t_1] = 0. \quad (1.2.63)$$

специфическое уравнение в частных производных (1.2.60) либо систему из  $m + 1$  уравнений в частных производных (1.2.61), (1.2.62). В результате решения этих уравнений получим искомые оптимальные управления  $u_k = u_k(x_1, \dots, x_n, t)$  где  $(k = 1, \dots, m)$  и функцию  $v(x_1, \dots, x_n, t)$ , которая при  $x_i = x_{i0}, t = t_0$  является наименьшим значением функционала оптимизации

$$v(x_{10}, \dots, x_{n0}, t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \cdot dt, \quad (1.2.64)$$

если выполняются краевые условия (1.2.63). Действительно, пусть оптимальные управления определены. Тогда, вдоль оптимальных траекторий и управлений, уравнение (1.2.0) примет вид

$$\begin{aligned} & - \frac{\partial v(x_1, \dots, x_n, t)}{\partial t} = \\ & = \varphi_0(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial v(x_1, \dots, x_n, t)}{\partial x_i} \cdot \varphi_i(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v(x_1, \dots, x_n, t)}{\partial t} + \\ & + \sum_{i=1}^n \frac{\partial v(x_1, \dots, x_n, t)}{\partial x_i} \cdot \varphi_i(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t) = \\ & = -\varphi_0(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m). \end{aligned} \quad (1.2.65)$$

Очевидно, что это уравнение можно записать в более компактной форме

$$\frac{\partial v(x_1, \dots, x_n, t)}{\partial t} = -\varphi_0(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m). \quad (1.2.66)$$

Интегрируя его в пределах от  $t_0$  до  $t_1$ , заключаем, что

$$v[x_1(t_1), \dots, x_n(t_1), t_1] = - \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \cdot dt. \quad (1.2.67)$$

Учитывая краевые условия (1.2.63), получим (1.2.64).

При  $t \rightarrow \infty$  на оптимальные управления накладывается дополнительное требование асимптотической устойчивости. Если функция  $\varphi_0 > 0$  и  $v[x_1, \dots, x_n]$  для всех  $x_1, \dots, x_n$  то система (1.2.51), (1.2.52) асимптотически устойчива.

Действительно, уравнение (1.2.65) является уравнением второго метода А.М. Ляпунова и поэтому для асимптотической устойчивости оптимальной системы достаточно положительно – определенной функции  $v(x_1, \dots, x_n)$ , полная производная которой в силу дифференциальных уравнений (1.2.51) отрицательно-определенна.

Таким образом, если  $\varphi_0(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) > 0$  и  $t_1 \rightarrow \infty$ , то функция  $v(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t)$  в уравнениях метода динамического программирования оказывается функцией Ляпунова, поэтому этот метод иногда называют *методом Ляпунова – Беллмана*. Заметим также, что для асимптотически устойчивой оптимальной системы краевое условие (1.2.63) выполняется автоматически.

Отметим в заключение, что если функционал оптимизации (1.2.53) имеет более общий вид

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \cdot dt + v_0[x_1(t_1), \dots, x_n(t_1), t_1], \quad (1.2.68)$$

то краевое условие (1.2.63) записывается как

$$v[x_1(t_1), \dots, x_n(t_1), t_1] = v_0[x_1(t_1), \dots, x_n(t_1), t_1]. \quad (1.2.69)$$

### **Численное решение задачи управления**

Допустим, что удалось найти в явной форме управление, при котором выражение в фигурных скобках, входящее в (1.2.60), достигает минимума

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t, \mathbf{v}_x) \quad (1.2.70)$$

где  $\mathbf{v}_x$  – вектор с компонентами  $\frac{\partial v}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial v}{\partial x_n}$ .

Подставляя это выражение в (1.2.60), получим нелинейное уравнение в частных производных первого порядка

$$-\frac{\partial v}{\partial t} = \varphi_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}, t, \mathbf{v}_x)) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot \varphi_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}, t, \mathbf{v}_x), t). \quad (1.2.71)$$

Численное решение этого уравнения при краевых условиях (1.2.59) представляет собой более трудную задачу, чем решение краевой задачи принципа максимума, так как там речь шла о краевой задаче для обыкновенных дифференциальных уравнений, а здесь о краевой задаче для уравнений в частных производных. Это увеличение трудностей численного решения естественно, так как на основе метода динамического программирования решается более сложная задача синтеза управлений, тогда как принцип максимума доставляет управления как функции времени. Кстати, эти функции получаются и применением метода динамического программирования к задаче об оптимальном программном управлении, если в управления  $u_k = r_k(x_1(t), \dots, x_n(t), t)$  ( $k = 1, \dots, m$ ) подставить вместо  $x_i(t)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) оптимальные траектории.

Для решения уравнения (1.2.71) применяют известные методы решения уравнений в частных производных (разностные методы, метод характеристик, метод прямых и т.п.), однако имеется специальный метод приближенного численного решения этого уравнения. Этот метод состоит в замене дифференциальных уравнений (1.2.51) системой дифференциально-разностных уравнений, а интеграла (1.2.53) – суммой и в использовании для нахождения оптимального дискретного управления в такой системе на основе функционального уравнения для дискретных систем. Собственно, исторически такое функциональное уравнение и было впервые получено при синтезе оптимального управления именно дискретных систем.

### **Связь с принципом максимума**

Для установления связи метода динамического программирования с принципом максимума запишем функциональное уравнение (1.2.60) в несколько иной форме. В связи с этим введем переменную  $x_{n+1} = t$ . Очевидно, что

$$\frac{dx_{n+1}}{dt} = \varphi_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1}, u_1, \dots, u_m) = 1. \quad (1.2.72)$$

С учетом этого соотношения, а также очевидного равенства  $\min_t \{\alpha(t)\} = \max_t \{-\alpha(t)\}$  запишем (1.2.60) в виде

$$\max_{u \in U} \left\{ - \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot \varphi_i - \varphi_0 \right\} = 0. \quad (1.2.73)$$

Принцип максимума для задачи о минимуме функционала (1.2.53) на связях (1.2.51) доставляет (при  $\psi_0 = -1$ ) условие

$$\max_{u \in U} \left\{ - \sum_{i=1}^{n+1} \psi_i \cdot \varphi_i - \varphi_0 \right\} = 0, \quad (1.2.74)$$

в котором  $\psi_{n+1}(t)$  является решением уравнения

$$\frac{\partial \psi_{n+1}}{\partial t} = - \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_{n+1}} \cdot \psi_i. \quad (1.2.75)$$

Сравнивая (1.2.73) и (1.2.74), нетрудно заметить их идентичность, если доказать, что вдоль оптимальных траекторий выполняется равенство

$$\psi_i(t) = - \frac{\partial v[x_1(t), \dots, x_{n+1}(t)]}{\partial x_i(t)}. \quad (1.2.76)$$

Переходя к доказательству этого равенства, вычислим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) &= \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \cdot x_i = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \cdot \varphi_i = \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \cdot \partial x_j} \cdot \varphi_i. \end{aligned} \quad (1.2.77)$$

С другой стороны дифференцируй (1.2.73) по  $x_i$  ( $i = 1, \dots, n+1$ ), получим вдоль оптимальных траекторий

$$- \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \cdot \partial x_j} \cdot \varphi_i - \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_j} = 0. \quad (1.2.78)$$

Используя (1.2.77), запишем это равенство в виде

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) = - \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_j}. \quad (1.2.79)$$

Сравнивая это выражение с сопряженными уравнениями (1.2.6), заключаем, что функции времени  $-\frac{\partial v}{\partial x_i}$  и  $\psi_i(t)$  ( $i = 1, \dots, n+1$ ) удовлетворяют одинаковым дифференциальным уравнениям и, следовательно, эти функции совпадают при одинаковых начальных (краевых) условиях в этих уравнениях.

Заметим, что при выводе (1.2.79) использовалось соотношение (1.2.78), которое нуждается в обосновании. Дело в том, что равенство выражения в фигурных скобках (1.2.73) нулю не означает равенства нулю ее производной, а это молчаливо предполагалось при выводе (1.2.78).

В связи с этим рассмотрим фиксированный момент времени  $t = t^*$ . Для этого момента оптимальное уравнение  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t^*)$  является вектором чисел. Для точек фазового пространства, не лежащих на оптимальной траектории  $\mathbf{u}(t^*)$  уже не будет оптимальным и, следовательно, для этих точек функция в фигурных скобках выражения (1.2.73) не будет достигать максимума. Отсюда следует, что эта функция достигает максимума, равного нулю, лишь в точках, лежащих на оптимальной траектории, и, следовательно, частные производные рассматриваемой функции  $x_j$  ( $j = 1, \dots, n + 1$ ) в силу необходимых условий экстремума (по  $x_j$  ( $j = 1, \dots, n + 1$ )) обращаются в нуль. Таким образом, связь между методом динамического программирования и принципом максимума установлена.

Укажем в заключение на различие этих методов. Оно вызвано тем, что функциональное уравнение (1.2.73) содержит частные производные  $-\frac{\partial v}{\partial x_i}$  ( $i = 1, \dots, n$ ), которые могут не существовать. Это обстоятельство можно было бы считать не особенно существенным, если бы после решения функционального уравнения оказалось, что функция  $v(x_1, \dots, x_n, t)$  дифференцируема по  $x_i$  ( $j = 1, \dots, n$ ). В действительности же для многих практически важных задач функция  $v(x_1, \dots, x_n, t)$  не является дифференцируемой по  $x_i$  ( $j = 1, \dots, n$ ), и поэтому возникла необходимость дальнейших исследований, связанных с этим методом.

В 1962 г. В.Ф. Кротов предложил простые достаточные условия оптимальности, которые охватили как частный случай функциональные уравнения метода динамического программирования. Эти условия нашли широкое применение для решения практических задач. С использованием этих условий были начаты исследования функционального уравнения метода динамического программирования. Были указаны дополнительные условия, накладываемые на это уравнение, при которых оно приводит к синтезу оптимального управления.

Сразу же после появления динамического программирования началось его широкое практическое применение для построения управления запуском ракет и спутников, химическими процессами, реактором и другими объектами.

### **1.3. Аналитическое конструирование регуляторов**

В 1960 г. появилась работа сотрудника института автоматики и телемеханики АН СССР, профессора А.М. Летова, в которой было получено аналитическое решение задачи об оптимальной стабилизации линейных стационарных объектов при квадратичном функционале качества. Эта работа благодаря ясной постановке задачи и конструктивным результатам явилась источником большого числа публикация по синтезу регуляторов для различных классов объектов (линейных непрерывных, дискретных, с

запаздыванием, нелинейных), в которых при решении задачи об оптимальной стабилизации были преодолены трудности решения краевой задачи принципа максимума и метода динамического программирования. Это направление получило название *аналитического конструирования регуляторов*. В зарубежных источниках оно часто называется линейно-квадратической оптимизацией, а первой зарубежной публикацией была вышедшая в том же 1960 г. работа американского математика Р. Калмана, в которой решалась задача оптимизации для линейных, нестационарных объектов.

В этом параграфе приведена процедура аналитического конструирования (синтеза) регуляторов на основе метода динамического программирования. Показано, что синтез регуляторов для систем стабилизации оптимальных в смысле квадратичного функционала сводится на основе метода динамического программирования к решению обыкновенных дифференциальных либо разностных уравнений (уравнений Риккати) с известными начальными условиями.

Излагается метод синтеза регуляторов в случае, когда не все переменные состояния доступны непосредственному измерению. Вводится понятие о наблюдателе, который представляет собой динамическую систему, выходные переменные которой со временем приближаются к переменным состояния объекта, которые необходимо восстановить.

### **1.3.1. Процедуры аналитического конструирования регуляторов**

#### ***Построение регулятора на основе метода динамического программирования***

Рассмотрим объект управления, возмущенное движение которого описывается в первом приближении уравнением

$$\frac{dx}{dt} = A \cdot x + B \cdot u; x(t_0) = x^{(0)}, t_0 = 0 \quad (1.3.1)$$

где  $A$  и  $B$  – заданные, матрицы чисел размеров  $n \times n$  и  $n \times m$  соответственно.

Требуется найти матрицу чисел  $C'$  (размеров  $m \times n$ ) уравнения регуляторов

$$u = C' \cdot x, \quad (1.3.2)$$

такую, чтобы на асимптотически устойчивых движениях системы (1.3.1), (1.3.2), возбужденных произвольными начальными отклонениями  $x^{(0)}$  минимизировался функционал



$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}' \cdot Q \cdot \mathbf{x} + \mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}) \cdot dt \quad (1.3.3)$$

где  $Q$  – заданная положительно-определенная матрица размеров  $n \times n$  ( $\mathbf{x}' \cdot Q \cdot \mathbf{x} > 0$  для всех  $\mathbf{x}$ , это обозначается далее  $Q > 0$ ).

Матрицу  $C'$  закона управления (1.3.2) иногда называют матрицей коэффициентов усиления регулятора.

Переходя к решению этой задачи об оптимальной стабилизации на основе метода динамического программирования, ограничимся вначале случаем  $n = m = 1$ . В этом случае уравнения системы и функционал примут вид

$$\frac{dx}{dt} = a \cdot x + b \cdot u; \quad (1.3.4)$$

$$u = c \cdot x; \quad (1.3.5)$$

$$J = \int_0^{\infty} (q \cdot x^2 + u^2) \cdot dt. \quad (1.3.6)$$

Тогда уравнения (1.2.61), (1.2.62) метода динамического программирования запишутся как

$$-\frac{\partial v}{\partial t} = q \cdot x^2 + u^2 + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot (a \cdot x + b \cdot u); \quad (1.3.7)$$

$$2 \cdot u + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot b = 0 \text{ или } u = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \cdot b. \quad (1.3.8)$$

Предпоследнее равенство выражает необходимое условие экстремума правой части (1.3.7). Нетрудно проверить, что при этом управлении достигается ее минимум. Действительно,

$$\frac{d^2 \left[ q \cdot x^2 + u^2 + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot (a \cdot x + b \cdot u) \right]}{du^2} = 2 > 0$$

Этот минимум – единственный. Правда, как будет показано ниже, уравнению (1.3.7) удовлетворяет не единственная функция  $v$ . Эта функция доопределяется из условия устойчивости системы (1.3.1), (1.3.2).

Исключая  $u$  из (1.3.7) с помощью (1.3.8), получим нелинейное уравнение в частных производных

$$-\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x} \cdot a \cdot x - \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{\partial v}{\partial x} \cdot b \right)^2 + q \cdot x^2. \quad (1.3.9)$$

Решение этого уравнения при краевом условии  $v[x(t_1)] = 0$  ( $t_1 \rightarrow \infty$ ) будем искать в виде

$$v = p \cdot x^2; p = \text{const.} \quad (1.3.10)$$

Подставляя это выражение в (1.3.9), получим

$$0 = 2 \cdot p \cdot a \cdot x^2 - (p \cdot b)^2 \cdot x^2 + q \cdot x^2. \quad (1.3.11)$$

Отсюда следует алгебраическое уравнение для определения неизвестного коэффициента  $p$  в (1.3.10)

$$2 \cdot p \cdot a - p^2 \cdot b^2 + q = 0. \quad (1.3.12)$$

Из двух решений

$$p^{(1)} = \frac{a}{b^2} + \sqrt{\frac{a^2}{b^4} + \frac{q}{b^2}}; p^{(2)} = \frac{a}{b^2} - \sqrt{\frac{a^2}{b^4} + \frac{q}{b^2}}$$

этого уравнения выбираем первое исходя из условия положительности функции  $v$ , обеспечивающего асимптотическую устойчивость синтезируемой системы, а следовательно, и выполнение краевого условия  $v[x(\infty)] = 0$ .

На основе (1.3.8) получаем

$$u = (-p^{(1)} \cdot b) \cdot x, \quad (1.3.13)$$

и, таким образом, искомое число

$$c = -p^{(1)} \cdot b. \quad (1.3.14)$$

В общем случае ( $n > 1, m \geq 1$ ) уравнения (1.3.12), (1.3.14) аналитического конструирования регуляторов имеют вид

$$P \cdot A + A' \cdot P - P \cdot B \cdot B' \cdot P + Q = 0; \quad (1.3.15)$$

$$C = -P \cdot B \quad (1.3.16)$$

где  $P$  – симметричная матрица чисел размеров  $n \times n$ .

Уравнение (1.3.15) называется *матричным уравнением Риккати* (смысл названия станет ясен несколько позже).

**Процедура аналитического конструирования регуляторов (процедура АКОР)** состоит из трех операций: 1) решение уравнения Риккати, 2) выделение из всего множества этих решений матрицы  $P^0 > 0$  (численный метод нахождения  $P^0$  приведен ниже), 3) вычисление искомой матрицы коэффициентов усиления регулятора по формуле

$$C = -P^0 \cdot B. \quad (1.3.17)$$

Убедимся непосредственно, что матрица  $C$ , определяемая соотношением (1.3.17), обеспечивает асимптотическую устойчивость

системы (1.3.1), (1.3.2). Для исследования устойчивости системы  $\frac{dx}{dt} = (A + B \cdot C') \cdot x$  воспользуемся прямым методом Ляпунова. Примем в качестве функции Ляпунова  $v = x' \cdot P^0 \cdot x > 0$  и вычислим полную производную этой функции

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \left( \frac{dx}{dt} \right)' \cdot P^0 \cdot x + x' \cdot P^0 \cdot \frac{dx}{dt} = \\ &= x' \cdot (A + B \cdot C') \cdot P^0 + x' \cdot P^0 \cdot (A + B \cdot C') \cdot x = \\ &= x' \cdot (P^0 \cdot A + A' \cdot P^0 + P^0 \cdot B \cdot C' + C \cdot B' \cdot P^0) \cdot x. \end{aligned}$$

Учитывая, что матрица  $C$  определяется выражением (1.3.17), получим, с учетом того, что  $P^0$  удовлетворяет (1.3.15),

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= x' \cdot (P^0 \cdot A + A' \cdot P^0 - P^0 \cdot B \cdot B' \cdot P^0 - P^0 \cdot B \cdot B' \cdot P^0) \cdot x = \\ &= -x' \cdot Q \cdot x - x' \cdot P^0 \cdot B \cdot B' \cdot P^0 \cdot x = -x' \cdot Q \cdot x - u' \cdot u < 0. \end{aligned}$$

Если объект (1.3.1) полностью управляем и  $Q > 0$ , то среди решений системы (1.3.15) всегда найдется и при том единственная положительно-определенная матрица  $P^0$ . Напомним, что *условием полной управляемости объекта* (1.3.1) является равенство

$$\text{ранг}[B, A \cdot B, \dots, A^{(n-1)} \cdot B] = n \quad (1.3.18)$$

которое будем называть *условием управляемости пары*  $(A, B)$ . Если матрица  $Q$  – неотрицательно-определенная матрица ( $Q \geq 0$ ), то ее всегда можно представить в виде

$$Q = H' \cdot H$$

где  $H$  – матрица размеров  $\chi \times n$  ( $\chi$  – ранг матрицы  $Q$ ). Среди решений (1.3.15) по-прежнему существует единственная матрица  $P^0$ , если  $Q$  в функционале (1.3.3) неотрицательно-определенная матрица, удовлетворяющая условию полной управляемости пары  $(A', H')$

$$\text{ранг}[H', A' \cdot H', \dots, A^{(n-1)'} \cdot H'] = n.$$

Требование полной управляемости пар  $(A, B)$ ,  $(A', H')$  для существования и единственности  $P^0 > 0$  можно ослабить, заменив его условием стабилизируемости этих пар.

### **Нестационарные объекты**

Рассмотрим полностью управляемый нестационарный объект, описываемый уравнением

$$\frac{dx}{dt} = A(t) \cdot x + B(t) \cdot u; x(t_0) = x^{(0)}, t_0 = 0, \quad (1.3.19)$$

в котором  $A(t)$  и  $B(t)$  известные на интервале  $[t_0, t_1]$  матрицы функций.

Пусть критерий качества имеет вид

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (\mathbf{x}' \cdot Q(t) \cdot \mathbf{x} + \mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}) \cdot dt + \mathbf{x}'(t_1) \cdot P^{(1)} \cdot \mathbf{x}(t_1). \quad (1.3.20)$$

где  $Q(t)$  и  $P^{(1)}$  – заданные положительно-определенные матрицы функций и чисел соответственно

Требуется найти матрицу  $C'(t)$  регулятора

$$\mathbf{u} = C'(t) \cdot \mathbf{x}. \quad (1.3.21)$$

при которой на движениях системы (1.3.19), (1.3.21), возбужденных произвольными начальными отклонениями, минимизируется функционал (1.3.20).

Переходя к решению этой задачи, рассмотрим вначале случай  $n = m = 1$ . Тогда уравнения системы и функционал оптимизации примут вид

$$\frac{dx}{dt} = a(t) \cdot x + b(t) \cdot u; \quad (1.3.22)$$

$$u = c(t) \cdot x; \quad (1.3.23)$$

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (q(t) \cdot x^2 + u^2) \cdot dt + p^{(1)} \cdot x^2(t_1). \quad (1.3.24)$$

Функцию  $v$ , разрешающую задачу АКОР для нестационарного объекта (1.3.19), будем искать в виде  $v = p(t) \cdot x^2$ . Подставляя ее в (1.3.9), получим вместо алгебраического уравнения (1.3.11) дифференциальное уравнение

$$-\frac{dp(t)}{dt} = 2 \cdot p(t) \cdot a(t) - p^2(t) \cdot b^2(t) + q(t). \quad (1.3.25)$$

и краевое условие

$$p(t_1) = p^{(1)}. \quad (1.3.26)$$

Уравнение (1.3.25) является специальным видом дифференциального уравнения, решение которого изучалось еще в XVIII в. итальянским математиком Я. Риккати, именем которого оно и названо.

В общем случае ( $n > 1, m \geq 1$ ) уравнение (1.3.25) и краевое условие (1.3.26) имеют вид

$$\begin{aligned}
 -\frac{dP(t)}{dt} &= \\
 &= P(t) \cdot A(t) + A'(t) \cdot P(t) - P(t) \cdot B(t) \cdot B'(t) + Q(t).
 \end{aligned}
 \tag{1.3.27}$$

$$P(t_1) = P^{(1)}. \tag{1.3.28}$$

Уравнение (1.3.27) называется *матричным дифференциальным уравнением Риккати*.

Переходя к решению уравнения (1.3.27), введем «новое время»  $\tau = t_1 - t$  и обозначим  $P(t) = P(t_1 - \tau) = \bar{P}(\tau)$ . Тогда (1.3.27) и (1.3.28) примут вид

$$\begin{aligned}
 \frac{d\bar{P}(\tau)}{d\tau} &= \\
 &= \bar{P}(\tau) \cdot A(t_1 - \tau) + A'(t_1 - \tau) \cdot \bar{P}(\tau) - \bar{P}(\tau) \cdot B(t_1 - \tau) \cdot \\
 &\cdot B'(t_1 - \tau) \cdot \bar{P}(\tau) + Q(t_1 - \tau);
 \end{aligned}
 \tag{1.3.29}$$

$$\bar{P}(0) = P^{(1)} \tag{1.3.30}$$

Таким образом, краевая задача для уравнения (1.3.27) свелась путем введения нового (обратного) времени к задаче решения уравнения (1.3.29) с известными начальными условиями (1.3.30). Для его численного решения можно использовать любой из известных методов интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений (метод Рунге-Кутты, Эйлера и т.п.).

Решив уравнение (1.3.30), найдём искомую матрицу

$$C(t) = \bar{P}(t_1 - t) \cdot B(t). \tag{1.3.31}$$

### **Критерий обобщенной работы**

В 1967 г. А.А. Красовский предложил упрощение процедуры АКОР с вычислительной стороны. Для этого в функционал (1.3.3) вводятся дополнительные слагаемые, с учетом которого функционал оптимизации принимает (в развернутой форме) вид

$$\begin{aligned}
 J &= \\
 &= \int_0^\infty \left\{ \sum_{ij=1}^n q_{ij} \cdot x_i \cdot x_j + \sum_{k=1}^m u_k^2 + \frac{1}{4} \cdot \left[ \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot b_{ik} \right]^2 \right\} \cdot dt
 \end{aligned}
 \tag{1.3.32}$$

где квадратичная форма  $v = x' \cdot P \cdot x$  содержит положительно-определенную матрицу  $P$ , являющуюся решением матричного алгебраического уравнения

$$P \cdot A + A' \cdot P + Q = 0. \quad (1.3.33)$$

Оптимальное управление определяется по-прежнему на основе формулы (1.3.16). Для того чтобы убедиться в этом, положим  $n = m = 1$ . Функционал (1.3.32) примет вид

$$J = \int_0^{\infty} \left\{ q \cdot x^2 + u^2 + \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot b \right)^2 \right\} \cdot dt. \quad (1.3.34)$$

Подставляя в уравнение (1.3.9) вместо  $q \cdot x^2$  выражение

$$q \cdot x^2 + \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot b \right)^2$$

получим вместо нелинейного алгебраического уравнения (1.3.12) линейное уравнение

$$2 \cdot p \cdot a + q = 0 \quad (1.3.35)$$

для определения коэффициента  $p$  квадратичной формы  $v = p \cdot x^2$ .

Таким образом, аналитическое конструирование по критерию обобщенной работы состоит в решении линейного алгебраического уравнения (1.3.33) и вычисления искомой матрицы  $C$  по формуле (1.3.16). Уравнение (3.1.33) называется *уравнением Ляпунова*. Оно имеет единственное решение  $P > 0$ , когда собственные числа матрицы  $A$  имеют отрицательные вещественные части. При этом условии нетрудно показать, что синтезированная система асимптотически устойчива. Действительно, в соответствии с прямым методом Ляпунова примем в качестве функции Ляпунова функцию  $v = x' \cdot P \cdot x > 0$ , вычисляя ее полную производную по времени, получим, что

$$\frac{dv}{dt} = -x' \cdot [Q + 2 \cdot C \cdot C'] < 0.$$

Функционал (1.3.32) называется *критерием обобщенной работы*. Это название связано с тем, что последнее слагаемое в (1.3.32) можно записать как  $\int_0^{\infty} u'_{\text{опт}} \cdot u_{\text{опт}} \cdot dt$ , который выражает собой «энергию» (обобщенную работу) оптимального управления  $u_{\text{опт}}$ .

### **Детерминированные внешние возмущения**

Рассмотрим объект управления, описываемый уравнением

$$\frac{dx}{dt} = A \cdot x + B \cdot u + \Psi \cdot f; \quad x(t_0) = x^{(0)} \quad (1.3.36)$$

где  $f(t)$  –  $\mu$ -мерный вектор внешних возмущений;  $\Psi$  – заданная матрица чисел размеров  $n \times \mu$ . Относительно вектора  $f(t)$  известно, что:

1. Его компоненты ограничены по модулю

$$|f_i(t)| \leq f_i^* \quad (1.3.37)$$

где  $f_i^*$  ( $i = 1, \dots, \mu$ ) – заданные числа;

2. Функции  $f_i(t)$  ( $i = 1, \dots, \mu$ ) – исчезающие. Это означает, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f_i(t) = 0; \quad (1.3.38)$$

3. Вектор  $f(t)$  измеряется.

Требуется найти управление

$$\mathbf{u} = C' \cdot \mathbf{x} + \frac{1}{2} \cdot B' \cdot L(t) \quad (1.3.39)$$

( $L(t)$  – некоторая матрица размером  $n \times n$ ), такое, чтобы на движениях системы (1.3.36), (1.3.39), возбужденных произвольными начальными условиями и внешними возбуждениями, минимизировался функционал (1.3.3)

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}' \cdot Q \cdot \mathbf{x} + \mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}) \cdot dt \quad (1.3.40)$$

Отметим, что требование (1.3.38) необходимо для сходимости интеграла (1.3.40)

Аналитическое конструирование регулятора при внешних возмущениях состоит из операций: 1) вычисления матрицы  $C'$  в соответствии с процедурой аналитического конструирования, изложенной в начале параграфа 3.1 при  $f = 0$ ; 2) решения дифференциального уравнения

$$\frac{dL}{dt} = -(A + B \cdot C')' \cdot L - (P + P') \cdot \Psi \cdot f(t) \quad (1.3.41)$$

и определения матрицы  $L(t)$ , входящей в закон оптимального управления (1.3.39).

Для доказательства рассмотрим случай  $n=m=\mu=1$ . В этом случае уравнение (1.3.36) примет вид

$$\frac{dx}{dt} = a \cdot x + b \cdot u + \psi \cdot f, \quad (1.3.42)$$

а функционал (1.3.40) запишется как

$$J = \int_0^{\infty} (a \cdot x^2 + u^2) dt. \quad (1.3.43)$$

Уравнения метода динамического программирования примет вид

$$-\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x}(a \cdot x + \psi \cdot f) - \frac{1}{4} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \cdot b \right)^2 + q \cdot x^2. \quad (1.3.44)$$

Решение этого уравнения будем искать в виде

$$v = p \cdot x^3 + l_1(t) \cdot x + l_0(t), \quad (1.3.45)$$

где  $p$  – неизвестное число, а  $l_1(t)$  и  $l_0(t)$  – неизвестные функции.

Для определения этих неизвестных подставим (1.3.45) в (1.3.44):

$$\begin{aligned} & - \left( \frac{dl_1}{dt} \cdot x + \frac{dl_0}{dt} \right) = \\ & = (2p \cdot x + l_1)(a \cdot x + \psi \cdot f) - \frac{1}{4} (2p \cdot x + l_1)^2 \cdot b^2 + \\ & + q \cdot x^2. \end{aligned}$$

Приравнявая нулю коэффициенты при  $x^2$ ,  $x$ ,  $x^0$ , получим уравнения:

$$\begin{aligned} 2p \cdot a - p^2 \cdot b^2 + q &= 0; \quad -l_1 = \\ &= (a - p \cdot b^2) \cdot l_1 + 2p \cdot \psi \cdot f; \quad -\frac{dl_0}{dt} = l_1 \cdot \psi \cdot f - \frac{1}{4} l_1^2 \cdot b^2. \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что в соответствии с (1.3.8)

$$u = -\frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x} \cdot b = -p \cdot b \cdot x' - \frac{1}{2} l_1(t) \cdot b,$$

убеждаемся в справедливости (1.3.39) и (1.3.41).

### Задача о слежении

Пусть требуется, чтобы движение объекта (1.3.36) по переменным состояниям было близко к некоторому желаемому движению, описываемому с помощью  $m$  – мерной вектор-функции  $\mathbf{x}_ж(t)$ , задаваемом на интервале  $[t_0, t]$ . Другими словами,  $\mathbf{x}(t)$  должно следовать (или «следить») за  $\mathbf{x}_ж(t)$ .

Мера близости вектор-функций  $\mathbf{x}(t)$  и  $\mathbf{x}_ж(t)$  определяется как значение функционала

$$J = \int_0^\infty [(\mathbf{x} + \mathbf{x}_ж)' \cdot Q_0 \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_ж) + \mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}] dt \quad (1.3.46)$$

Таким образом, возникает задача о построении управления, при котором этот функционал принимает наименьшее значение.

Покажем, что эта задача сводится к предыдущей. Действительно, вводя новый вектор  $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_ж$ , получим, используя (1.3.36), уравнение

$$\frac{d\mathbf{e}}{dt} = A \cdot \mathbf{e} + B \cdot \mathbf{u} + \mathbf{f}^{(1)} \quad (1.3.47)$$

где  $\mathbf{f}^{(1)}(t)$  – это  $n$  – мерный вектор.



$$f^{(1)}(t) = A \cdot x_{\text{ж}} - \frac{dx_{\text{ж}}}{dt} + \Psi \cdot f(t) \quad (1.3.48)$$

Функционал (1.3.46) принимает вид

$$J = \int_0^{\infty} (e' \cdot Q_0 \cdot e + u' \cdot u) dt. \quad (1.3.49)$$

Если  $f^{(1)}(t)$  обладает свойством (1.3.38), то оптимальное управление определяется соотношением (1.3.39).

### Дискретные (цифровые) регуляторы

Пусть задан объект управления, описываемый разностными уравнениями

$$\begin{aligned} x \cdot (k + 1) &= \Phi \cdot x(k) + R \cdot u(k) \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \\ x(0) &= x^{(0)}. \end{aligned} \quad (1.3.50)$$

где  $\Phi$  и  $R$ - заданные матрицы чисел размеров  $n \times n$  и  $n \times m$  соответственно.

Качество переходных процессов для этого объекта оценивается суммой

$$J = \sum_{k=1}^N x'(k) \cdot Q \cdot x(k) + u'(k-1) \cdot u \cdot (k-1), \quad (1.3.51)$$

где  $Q$  – заданная положительно определенная матрица. Требуется найти матрицы  $C(k)$  управления

$$u(k) = C'(k) \cdot x(k) \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.3.52)$$

при котором функционал (1.3.51) принимает наименьшее значение при любых  $x^{(0)}$ .

Аналитическое конструирование регуляторов для дискретных объектов состоит из операций:

1. вычисления матриц  $P(N-j)$   $j = \overline{1, N}$  на основе рекуррентного соотношения

$$\begin{aligned} P(N-j) &= \\ &= \Phi' [Q + P \cdot (N-j+1)] \cdot \Phi - \Phi' \cdot \\ &\cdot [Q + P \cdot (N-j+1)] \cdot R \times \\ &\times [R' (Q + P \cdot (N-j+1)) \cdot R + E]^{-1} \times R' \cdot \\ &\cdot [Q + P \cdot (N-j+1)] \cdot \Phi \quad (j = \overline{1, N}); \end{aligned} \quad (1.3.53)$$

$$P(N) = 0; \quad (1.3.54)$$

2. нахождение

$$\begin{aligned}
C'(N-j) &= \\
&= -\{R' \cdot [Q + P \cdot (N-j+1)] \cdot R + E\}^{-1} \times R' \cdot \\
&\cdot [Q + P \cdot (N-j+1)] \cdot \Phi \quad (j = \overline{1, N});
\end{aligned} \tag{1.3.55}$$

3. определения матрицы коэффициентов усиления регулятора

$$C'(k) = C' \cdot (N-j) \quad (j = \overline{1, N}) \tag{1.3.56}$$

Вывод соотношений (1.3.53)...(1.3.56) для общего случая нестационарного дискретного объекта приведен в Дополнении 3.

Докажем эти соотношения при  $n=m=1$ . В этом случае объект (1.3.50) и функционал (1.3.51) принимают вид

$$x \cdot (k+1) = f \cdot x(k) + r \cdot u(k) \quad (k = 0, 1, 2, \dots); \tag{1.3.57}$$

$$J = \sum_{k=1}^N q \cdot x^2(k) + u^2(k). \tag{1.3.58}$$

Для нахождения оптимального управления

$$u(k) = c(k) \cdot x(k) \tag{1.3.59}$$

применим принцип оптимальности, рассмотренный в § 1.2.3.

В соответствии с этим принципом независимо от того, как двигалась система до последнего шага (интервала  $[(N-1), N]$ ), управление  $(u(N-1))$  на последнем шаге должно быть оптимальным (относительно состояния, возникшего в результате первых  $N-1$  шагов).

Частичная сумма, которую необходимо минимизировать на последнем шаге, имеет вид

$$\begin{aligned}
J^{(N-1)} &= q \cdot x^2(N) + u^2(N-1) = \\
&= q \cdot [f \cdot x(N-1) + r \cdot u \cdot (N-1)]^2 + u^2(N-1).
\end{aligned} \tag{1.3.60}$$

Используя необходимое условие экстремума этой суммы

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J^{(N-1)}}{\partial u(N-1)} &= \\
&= 2q \cdot [f \cdot x \cdot (N-1) + r \cdot u \cdot (N-1)]r + 2 \cdot u \cdot \\
&\cdot (N-1) = 0,
\end{aligned} \tag{1.3.61}$$

получим оптимальное управление на последнем участке

$$u \cdot (N-1) = -\frac{qfr}{1+qr^2} \cdot x \cdot (N-1). \tag{1.3.62}$$

При оптимальном управлении

$$\begin{aligned}\min J^{(N-1)} = v^{(N-1)} &= \left[ q \cdot f^2 - \frac{q^2 f^2 r^2}{1 + qr^2} \right] \cdot x^2 \cdot (N-1) = \\ &= p \cdot (N-1) \cdot x^2 \cdot (N-1),\end{aligned}\quad (1.3.63)$$

где

$$p \cdot (N-1) = q \cdot f^2 - \frac{q^2 f^2 r^2}{1 + r^2 q}.\quad (1.3.64)$$

Переходя к нахождению управления на предпоследнем шаге (интервале  $[N-2, N-1]$ ), запишем частичную сумму, которую должно минимизировать это управление:

$$\begin{aligned}J^{(N-1)} &= q \cdot x^2(N-2) + u^2(N-2) + v^{(N-1)} = \\ &= [q + p(N-1)]x^2(N-1) + u^2(N-2) = \\ &= [q + p \cdot (N-1)][f \cdot x \cdot (N-2) + r \cdot u \cdot (N-2)]^2 + \\ &+ u^2 \cdot (N-2).\end{aligned}\quad (1.3.65)$$

Используя необходимое условие минимума  $\frac{\partial J^{(N-2)}}{\partial u(N-2)} = 0$ , получим оптимальное управление на предпоследнем участке

$$u(N-2) = -\frac{[q + p \cdot (N-1)] \cdot f \cdot r}{1 + [q + p \cdot (N-1)] \cdot r^2} x(N-2).\quad (1.3.66)$$

При этом управлении частичная сумма (1.3.65) примет значение

$$\begin{aligned}\min J^{(N-2)} = v^{(N-2)} &= \\ &= \left\{ [q + p \cdot (N-1)] \cdot f^2 - \frac{[q + p \cdot (N-1)]^2 \cdot f^2 \cdot r^2}{1 + [q + p \cdot (N-1)] \cdot r^2} \right\} \times \\ &\times x^2 \cdot (N-2) = p \cdot (N-2) \cdot x^2 \cdot (N-2).\end{aligned}\quad (1.3.67)$$

где

$$\begin{aligned}p(N-2) &= \\ &= [q + p \cdot (N-1)] \cdot f^2 - \frac{[q + p \cdot (N-1)]^2 \cdot f^2 \cdot r^2}{1 + [q + p \cdot (N-1)] \cdot r^2}\end{aligned}\quad (1.3.68)$$

Продолжая этот процесс, дойдем до  $j$ -го (от конца) участка (интервала  $[N-j, N-j+1]$ ). Частичная сумма, которую нужно минимизировать управлением  $u(N-j)$ , имеет вид

$$\begin{aligned}J^{(N-j)} &= q \cdot x^2 \cdot (N-j+1) + u^2 \cdot (N-j) + v^{(N-j+1)} = \\ &= [q + p \cdot (N-j+1)] \cdot x^2 \cdot (N-j+1) + u^2 \cdot (N-j) = \\ &= [q + p \cdot (N-j+1)] \cdot \\ &\cdot [f \cdot x \cdot (N-j) + r \cdot u \cdot (N-j) + r \cdot u \cdot (N-j)]^2 + u^2 \cdot \\ &\cdot (N-j).\end{aligned}\quad (1.3.69)$$

Оптимально уравнение

$$\begin{aligned} u \cdot (N - j) &= \\ &= - \frac{[q + p \cdot (N - j + 1)] \cdot f \cdot r}{1 + [q + p \cdot (N - j + 1)] \cdot r^2} \cdot x \cdot (N - j) = \\ &= c \cdot (N - j) \cdot x \cdot (N - j), \end{aligned} \quad (1.3.70)$$

где

$$c \cdot (N - j) = - \frac{[q + p \cdot (N - j + 1)] \cdot f \cdot r}{1 + [q + p \cdot (N - j + 1)] \cdot r^2}. \quad (1.3.71)$$

Значение частичной суммы (1.3.69) при этом управлении

$$\min J^{(N-1)} = v^{(N-2)} = p \cdot (N - j) \cdot x^2 \cdot (N - j), \quad (1.3.72)$$

где

$$\begin{aligned} p \cdot (N - j) &= \\ &= [q + p \cdot (N - j + 1)] f^2 - \frac{[q + p \cdot (N - j + 1)]^2 \cdot f^2 \cdot r^2}{1 + [q + p \cdot (N - j + 1)] \cdot r^2}. \end{aligned} \quad (1.3.73)$$

Полагая в (1.3.55), (1.3.53)  $n=m=1$ , убеждаемся, что они совпадают с (1.3.71), (1.3.73) соответственно.

Если в функционале (1.3.51) верхний предел  $N \rightarrow \infty$ , то оптимальное управление (1.3.52) принимает вид

$$u(k) = C' \cdot x(k) \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (1.3.74)$$

где  $C'$  - матрица чисел, определяемая из уравнений

$$\begin{aligned} \bar{P} - \Phi' \cdot \bar{P} \cdot \Phi - \Phi'^{\bar{P}} \cdot R \cdot [R' \cdot \bar{P} \cdot R + E]^{-1} \cdot R' \cdot \bar{P} \cdot \Phi + \\ + Q = 0 \end{aligned} \quad (1.3.75)$$

и

$$C' = -[R' \cdot \bar{P} \cdot R + E]^{-1} \cdot R' \cdot \bar{P} \cdot \Phi \quad (1.3.76)$$

Эти уравнения следуют из (3.1.96), (3.1.98), если положить  $P(N - j) = P(N - j + 1) = P$  и обозначить  $Q + P = \bar{P}$ .

### 1.3.2. Частотные свойства оптимальных систем

#### Условие оптимальности в частотной форме

Процедуры аналитического конструирования регуляторов и построения наблюдателей образуют эффективный метод синтеза регуляторов систем, качество которого оценивается с помощью интегрального показателя. Однако часто оказывается, что технические требования к системе трудно непосредственно выразить с помощью такого показателя, поэтому возникает задача выбора коэффициентов оптимизации

по заданным требованиям к точности и качеству системы. Для ее решения нужно установить связь между структурой и параметрами функционала оптимизации, с одной стороны, и показателем качества (временем регулирования, перерегулированием, запасами устойчивости по фазе и модулю) и точностью (установившимися ошибками при внешних возмущениях) – с другой.

Установление такой связи опирается на *условие оптимальности в частотной форме*.

Переходя к этому условию рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = A \cdot x + B \cdot u; \quad (1.3.77)$$

$$u = C' \cdot x. \quad (1.3.78)$$

оптимальную в смысле функционала

$$J = \int_0^{\infty} (x' \cdot Q \cdot x + u' \cdot u) \cdot dt, \quad (1.3.79)$$

в котором  $Q$  – положительно определённая матрица. Оптимальность системы (1.3.77), (1.3.78) означает, что матрица

$$C = -P \cdot B, \quad (1.3.80)$$

где определено-положительная матрица  $P$  является решением алгебраического уравнения Риккати:

$$P \cdot A + A' \cdot P - P \cdot B \cdot B' \cdot P + Q = 0, \quad (1.3.81)$$

в котором  $A$  и  $B$  – заданные матрицы, удовлетворяемые условию управляемости.

Преобразуя (1.3.77), (1.3.78) по Лапласу при нулевых начальных условиях, запишем передаточную матрицу этой системы в разомкнутом состоянии

$$W_{\text{раз}}(s) = -C' \cdot (Es - A)^{-1} \cdot B, \quad (1.3.82)$$

где  $s$  – комплексное число.

Прибавим и вычтем из левой части (1.3.81) произведение  $sP$  и умножим полученное равенство с лева на  $B'(Es - A)^{-1}$ , а справа на  $(Es - A)^{-1}$ , тогда

$$\begin{aligned} B' \cdot (-Es - A)^{-1'} \cdot [-P \cdot A + Ps - A' \cdot P - sP + P \cdot B \cdot B' \cdot \\ P - Q] \cdot (Es - A)^{-1} \cdot B = B' \cdot (-Es - A)^{-1'} \cdot P \cdot B + B' \cdot \\ P \cdot (Es - A)^{-1} \cdot B + B' \cdot (-Es - A)^{-1'} \cdot P \cdot B \cdot B' \cdot P \cdot (Es - \\ A)^{-1} \cdot B - B' \cdot (-Es - A)^{-1'} \cdot Q \cdot (Es - A)^{-1} \cdot B = 0. \end{aligned} \quad (1.3.83)$$

Вводя обозначение  $H(s) = H \cdot (Es - S)^{-1} \cdot B$ , где  $H' \cdot H = Q$ , и учитывая (1.3.80), запишем (1.3.83) в виде

$$\begin{aligned} & -B' \cdot (Es - A)^{-1} \cdot C - C' \cdot (Es - a)^{-1} \cdot B + B' \cdot \\ & \cdot (Es - A)^{-1} \cdot C \cdot C' \cdot (Es - A)^{-1} \cdot B = H'(-s) \cdot H(s). \end{aligned}$$

Прибавляя к обеим частям единичную матрицу и учитывая выражение (1.3.82) для передаточной матрицы разомкнутой системы, получим окончательно

$$[E_m + W_{\text{раз}}(-s)'] \cdot [E_m + W_{\text{раз}}(s)] = E_m + H(-s) \cdot H(s). \quad (1.3.84)$$

Пологая  $s = j\omega$ , получим условие оптимальности в частной форме

$$\begin{aligned} & [E_m + W_{\text{раз}}(-j\omega)'] \cdot [E_m + W_{\text{раз}}(j\omega)] = \\ & = E_m + H(-j\omega) \cdot H(j\omega). \end{aligned} \quad (1.3.85)$$

Это условие выполняется для всех вещественных  $\omega$  и связывает частотную передаточную матрицу  $W_{\text{раз}}(j\omega)$  оптимальной системы с параметрами функционала оптимизации.

В дальнейшем изложении большую роль будет играть случай скалярного управления ( $m = 1$ ). В этом случае уравнения (1.3.77), (1.3.78) имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = A \cdot x + b \cdot u; \quad (1.3.86)$$

$$u = c' \cdot x, \quad (1.3.87)$$

где  $u$  – скаляр;  $b$  и  $c$  –  $n$ -мерные векторы-столбцы.

Передаточная функция этой системы

$$w_{\text{раз}}(s) = -c' \cdot (Es - A)^{-1} \cdot b. \quad (1.3.88)$$

Условие оптимизации (1.3.85) принимает при скалярном уравнении вид

$$\begin{aligned} & [1 + w_{\text{раз}}(-j\omega)] \cdot [1 + w_{\text{раз}}(j\omega)] = \\ & = 1 + \sum_{i=1}^n h_i(-j\omega) \cdot h_i(j\omega), \end{aligned} \quad (1.3.89)$$

где  $h_i(j\omega)$  ( $i = \overline{1, n}$ ) – дробно-рациональные функции, являющиеся компонентами вектора  $H \cdot (Ej\omega - A)^{-1} \cdot b$ .

### **Коэффициент и частота среза**

Найдем связь между коэффициентами функционала

$$J = \int_0^{\infty} \left( \sum_{i=1}^n q_{ii} \cdot x_i^2 + u^2 \right) \cdot dt, \quad (1.3.90)$$

(где для простоты  $Q = \text{diag}[q_{11}, \dots, q_{nn}]$ ,  $q_{ii} > 0, i = \overline{1, n}$ ) в смысле которого оптимальна система (1.3.86), (1.3.87), с одной стороны, и коэффициентом передачи  $k_p$  и частотой среза  $\omega_{\text{ср}}$  этой системы – с другой.

Напомним, что для системы без астатизма

$$k_p = \omega_{\text{раз}}(0), \quad (1.3.91)$$

для астатических

$$k_p = \lim_{s \rightarrow 0} s^r \cdot w(s), \quad (1.3.92)$$

где  $r$  – порядок астатизма, а частота среза определяется равенством

$$k_p^2 \approx \sum_{i=1}^n h_i^2(0). \quad (1.3.93)$$

Преобразуем это выражение, поскольку в рассматриваемом случае

$$H = \text{diag} [\sqrt{q_{11}}, \dots, \sqrt{q_{nn}}],$$

учитывая, что компоненты вектора  $(Es - A)^{-1} \mathbf{b}$  имеет вид  $\frac{\rho_i(s)}{D(s)}$ , где  $\rho_i(s)$  – составляющего вектора  $\rho(s) = \overline{(Es - A)} \cdot \mathbf{b}$  а

$$D(s) = \det(Es - A) = s^n + d_{n-1}s^{n-1} + \dots + d_1s + d_0 \quad (1.3.94)$$

$\overline{(Es - A)}$  – присоединенная матрица, получим

$$\sum_{i=1}^n h_i(s) \cdot h_i(-s) = \left[ \sum_{i=1}^n q_{ii} \cdot \rho_i(s) \cdot \rho_i(-s) \right] \frac{1}{D(s) \cdot D(-s)}. \quad (1.3.95)$$

Таким образом, (1.3.94) принимает вид

$$k_p^2 \approx \sum_{i=1}^n q_{ii} \cdot \frac{\rho_i^2(0)}{d_0^2}. \quad (1.3.96)$$

Для астатических систем аналогичное, но уже точное соотношение следует из (1.3.95) после его умножения на  $s_{2r}$  при  $s \rightarrow 0$ :

$$k_p^2 \approx \sum_{i=1}^n q_{ii} \cdot \frac{\rho_i^2(0)}{d_r^2}. \quad (1.3.97)$$

Часто по соображениям точности работы системы число  $k_p$  задано. Тогда для обеспечения заданного коэффициента передачи разомкнутой системы необходимо определять коэффициенты функционала (1.3.90) из равенства (1.3.96), (1.3.97), в которых  $\rho_i(0)$  ( $i = \overline{1, n}$ ) и  $d_0(d_r)$  – известные числа, определяемые параметрами объекта управления.

Для установления зависимости частоты среза (1.3.86), (1.3.87) от параметров функционала (1.3.90) введем в рассмотрение некоторую частоту  $\omega_{cp}^*$ , определяемую равенством

$$\frac{\sum_{i=1}^n q_{ii} \cdot \rho_i(-j\omega_{cp}^*) \cdot \rho_i(j\omega_{cp}^*)}{D(-j\omega_{cp}^*) \cdot D(j\omega_{cp}^*)} = 1, \quad (1.3.98)$$

которое эквивалентно

$$\sum_{i=1}^n h_i(-j\omega_{cp}^*) \cdot h_i(j\omega_{cp}^*) = 1. \quad (1.3.99)$$

Кроме того, запишем тождество (1.3.89) как

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re} \cdot w_{\text{раз}}(j\omega) + w_{\text{раз}}(-j\omega) \cdot w_{\text{раз}}(j\omega) = \\ = \sum_{i=1}^n h_i(-j\omega) \cdot h_i(j\omega), \end{aligned} \quad (1.3.100)$$

либо

$$2a(\omega) \cdot \cos\varphi(\omega) \cdot a^2(\omega) = \sum_{i=1}^n h_i(-j\omega) \cdot h_i(j\omega), \quad (1.3.101)$$

где

$$a(\omega) = |w_{\text{раз}}(j\omega)|; \quad \varphi(\omega) = \arg w_{\text{раз}}(j\omega).$$

При  $\omega = \omega_{cp}^*$  тождество (3.3.25) принимает с учетом (3.3.23) вид  $2a(\omega_{cp}^*) \cdot \cos\varphi(\omega_{cp}^*) \cdot a^2(\omega_{cp}^*) = 1$ , откуда следует

$$a(\omega_{cp}^*) = -\cos\varphi(\omega_{cp}^*) + \sqrt{\cos^2\varphi(\omega_{cp}^*) + 1}. \quad (1.3.102)$$

Учитывая, что  $-1 \leq \cos\varphi(\omega) \leq 1$ , получим границы для значений амплитудно-частотной характеристики  $a(\omega)$  оптимальной системы в точке  $\omega_{cp}^*$ :

$$0,4 \leq a(\omega_{cp}^*) \leq 2,4 \text{ или } |20\lg(\omega_{cp}^*)| \leq 8 \text{ Дб}. \quad (1.3.103)$$

Если полагать наклон логарифмической амплитудно-частотной характеристики (ЛАЧХ) в окрестности  $\omega_{cp}^*$  не менее 20 дБ/дек, то нетрудно



заклучить, что истинная частота среза  $\omega_{\text{ср}}$  отличается от  $\omega_{\text{ср}}^*$  не более чем на 0,4 декады (в 2,5 раза).

Таким образом, если коэффициенты  $q_{ii}$  ( $i = \overline{1, n}$ ) функционала (1.3.90) выбрать так, чтобы при заданном  $\omega_{\text{ср}}^*$  выполнялось равенство (1.3.98), то частота среза оптимальной в смысле такого функционала системы (1.3.86), (1.3.87) будет отличаться от заданной не более чем в 2,5 раза.

### **Границы запасов устойчивости оптимальных систем**

Исследуем частотные свойства системы (1.3.86), (1.3.87) со скалярным управлением оптимальной в смысле функционала (1.3.90). Для общности будем полагать, что в этом функционале часть коэффициентов  $q_{ii}$  равно нулю, однако, требование полной управляемости пары  $(A', H')$  выполняется.

Оказывается для частотных показателей качества (запаса устойчивости по фазе  $\varphi_3$ , запаса устойчивости по модулю  $L$  и показателю колебательности  $M$ ) оптимальных систем можно указать их границы, не зависящие от выбора коэффициентов функционала (1.3.90).

**Утверждение** Запасы устойчивости и показатель колебательной системы (1.3.86), (1.3.87) удовлетворяют неравенствам

$$\varphi_3 \geq 60^\circ; L \geq 2; M \leq 2. \quad (1.3.104)$$

**Доказательство** утверждения опирается на тождество (1.3.89) Учитывая, что

$$\sum_{i=1}^n h_i(-j\omega) \cdot h_i(j\omega) \geq 0, \quad (1.3.105)$$

запишем на основе (1.3.89)

$$[1 + R \cdot e \cdot \omega_{\text{раз}}(j\omega)]^2 + Im^2 \cdot \omega_{\text{раз}}(j\omega) \geq 1. \quad (1.3.106)$$

Равенству  $[1 + R \cdot e \cdot \omega_{\text{раз}}(j\omega)]^2 + Im^2 \cdot \omega_{\text{раз}}(j\omega) = 1$  соответствует в плоскости годографа амплитудно-фазовой характеристики (АФЧХ) окружность единичного радиуса с центром в точке  $R \cdot e \cdot \omega_{\text{раз}}(j\omega) = -1, Im \cdot \omega_{\text{раз}}(j\omega) = 0$ . Эта окружность показана на рис. 1.6. Неравенство (1.3.106) означает, что годограф АФЧХ оптимальной системы не пересекает зоны (это запретная зона на рис. 1.6 заштрихована), ограниченной окружностью единичного радиуса с центром в точке  $(-1, j0)$ .

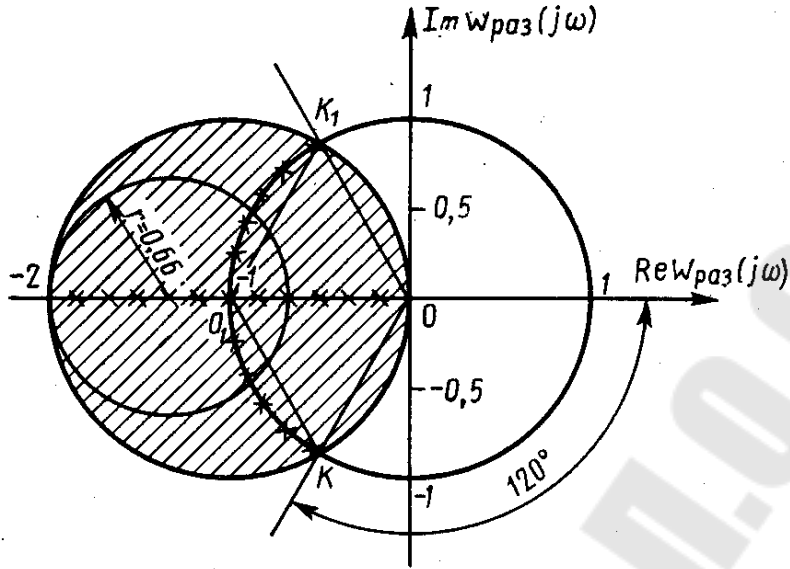


Рис. 1.6. Годограф АФЧХ и запретная зона.

Опираясь на такую геометрическую интерпретацию условия оптимальности в частотной форме (1.3.89) и неравенства (1.3.105), нетрудно доказать соотношения (1.3.104) для границ частотных показателей качества.

Действительно пересечение запретной зоны с кругом единичного радиуса с центром в начале координат образует сегмент, в который вписываются два равносторонних треугольника  $O_1OK_1$ ,  $O_1OK$  (сторонами этих треугольников являются радиусы пересекающихся окружностей), которые опираются на дугу, отмеченную на рисунке крестиками, а поэтому угол  $OKK_1$  равен  $120^\circ$ . Это означает, что запас по фазе  $\varphi_3 \geq 60^\circ$ .

Переходя ко второму из неравенств (3.3.104), отметим, что отрезок вещественной оси  $[-2, 0]$ , отмеченный на рисунке крестиками, находится внутри запретной зоны. Это означает, что запас устойчивости по модулю для оптимальных систем с АФЧХ второго рода не менее двух, а с АФЧХ первого рода – бесконечно велик. Последнее следует из того, что участок  $[-1, 0]$  вещественной оси не может пересекаться АФЧХ оптимальной системы.

Граница показателя колебательности оптимальных систем находится следующим образом, на рис. 1.6 нанесена окружность радиуса  $\frac{M}{(M^2-1)} = 0,66$  с центром в точке  $(-a, j0)$ , где  $a = \frac{M^2}{(M^2-1)} = 1,3$ . Эта окружность составляет геометрическое место точек, запретных для АФЧХ с показателем колебательности  $M = 2$ . Так как это окружность находится внутри запретной зоны, касаясь границы этой зоны, то  $M \leq 2$  и, таким образом, утверждение доказано.

Отметим, что доказательство опиралось на неравенство (1.3.106), которое не содержит коэффициентов функционала оптимизации. Правда, при этом требуется, чтобы  $q_{ii} \geq 0$  ( $i = \overline{1, n}$ ), так как в этом случае выполняется (3.3.105), поэтому границы (3.3.104) не зависят от выбора этих коэффициентов, и таким образом, утверждение доказано.

Отметим, что аналогичное утверждение получено для оптимальных систем с векторным управлением.

## **1.4. Оптимальные стохастические системы**

Рассмотрим теперь построение систем стабилизации для объектов, подверженных внешним возмущениям, а также помехам, сопровождающим процесс измерения его выходных переменных.

Внешние возмущения и помехи предполагаются гауссовскими случайными процессами

Излагается оптимальное управление при внешних возмущениях типа «белый шум», приложенных к объекту, переменные состояния которого измеряются точно (без помех). Оказывается, что это управление совпадает с законом управления, полученным в предыдущей главе, при отсутствии внешних возмущений.

Строится оптимальное стохастическое управление при  $n$  полностью измеряемом векторе переменных состояния и аддитивных помехах в процессе измерения. Приводятся соотношения для определения матрицы коэффициентов усиления наблюдателя полного порядка, при которой осуществляется оптимальное восстановление и фильтрация переменных состояния объектов. Доказана теорема разделения, в которой в отличие от детерминированного случая утверждается статическая оптимальность системы, содержащий оптимальный регулятор, в котором не измеряемые переменные состояния заменяются оценками их переменных, получаемыми на выходе оптимального наблюдателя (оптимального фильтра).

Излагаются алгоритмы оптимального стохастического дискретного (цифрового) управления.

### **1.4.1. Оптимальное управление при измеряемом векторе состояний**

Рассмотрим нестационарный объект управления

$$\frac{dx}{dt} = A(t) \cdot x + B(t) \cdot u + \Psi(t) \cdot f; \quad x(t_0) = x^{(0)}, \quad (1.4.1)$$

где  $f(t)$  –  $\mu$  – мерный вектор внешних возмущений, являющийся гауссовским случайным процессом типа «белый шум». Здесь и далее будем полагать, что математическое ожидание

$$M \{f(t)\} = 0. \quad (1.4.2)$$

Ковариационная матрица этого процесса

$$R_f(t', t'') = M\{f(t') \cdot f'(t'')\} = R^{(1)}(t) \cdot \delta(t' - t''). \quad (1.4.3)$$

где  $R^{(1)}(t)$  – положительно определенная матрица размерев  $\mu \times \mu$ , характеризующая интенсивность «белого шума» в момент времени  $t'$ .

Пусть начальное состояние  $x^{(0)}$  также является гауссовским случайным вектором, не зависящим от внешних возмущений и имеющих при  $M\{x^{(0)}\} = 0$  ковариационную матрицу

$$M\{x^{(0)} \cdot x^{(0)'}\} = R^{(0)}. \quad (1.4.4)$$

Рассмотрим критерий

$$J = M \left\{ \int_{t_0}^{t_1} [\mathbf{x}' \cdot Q(t) \cdot \mathbf{x} + \mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}] + \mathbf{x}'(t) \cdot P^{(1)} \cdot \mathbf{x}(t_1) \right\}, \quad (1.4.5)$$

где  $Q(t)$  – положительно определенная матрица.

Требуется найти управление  $\mathbf{u}(t)$  как функцию текущей и прошлой информации об  $\mathbf{x}(t)$ . При котором (1.4.5) принимает наименьшее значение.

Так как текущая информация об  $\mathbf{x}(t)$  носит случайный характер, то и формируемое на ее основе оптимальное управление будет *случайным (стохастическим) управлением*.

Неожиданным оказывается тот факт. Что наличие «белого шума» в уравнении (1.4.1) не изменяет оптимального управления, которое было получено ранее (в § 1.3.1) при отсутствии внешних возмущений. Изменяется лишь значение минимума критерия. Сформулируем этот результат.

**Утверждение** Оптимальное стохастическое управление для объекта (4.1.1), при котором функционал (4.1.5) принимает наименьшее значение, имеет вид

$$\mathbf{u} = C'(t) \cdot \mathbf{x}, \quad (1.4.6)$$

где

$$C(t) = -P(t) \cdot B(t); \quad (1.4.7)$$

$P(t)$  – решение матричного уравнения Риккати

$$\begin{aligned} -\frac{dP}{dt}(t) = \\ = P(t) \cdot A(t) + A'(t) \cdot P(t) - P(t) \cdot B(t) \cdot B'(t) \cdot P(t) + \\ + Q(t) \end{aligned} \quad (1.4.8)$$

при краевом условии

$$P(t_1) = P^{(1)}. \quad (1.4.9)$$

Значение функционала (1.4.5) при управлении (1.4.6) определяется выражением

$$\text{tr} \left\{ P(t_0) \cdot R^{(0)} + \int_{t_0}^{t_1} \Psi(t) \cdot R^{(1)}(t) \cdot \Psi'(t) \cdot P(t) dt \right\}. \quad (1.4.10)$$

(В этом выражении запись  $\text{tr}A$  означает след квадратной матрицы  $A$ . По определению,

$$\text{tr}A = \sum_{i=1}^n a_{ii},$$

где  $a_{ii}$  ( $i = \overline{1, n}$ ) – диагональные элементы матрицы  $A$ .)

Рассмотрим теперь стационарный случай, когда матрицы, входящие в уравнение объекта (1.4.1), и функционал (1.4.5) постоянны, а интенсивность стационарного «белого шума» характеризуется матрицей чисел  $R^{(1)}$ . Наименьшее значение функционала оптимизации имеет вид

$$\min J = \text{tr} \left\{ P(t_0) \cdot R^{(0)} + \int_{t_0}^{t_1} \Psi \cdot R^{(1)} \cdot \Psi' \cdot P(t) dt \right\}. \quad (1.4.11)$$

Во многих практических случаях время функционирования системы велико. Тогда полагают в функционале оптимизации  $t_1 \rightarrow \infty$  и значение функционала

$$\min J = \text{tr} P^0 \cdot R^{(0)} + (t_1 - t_0) \Psi \cdot \Psi' \cdot P^0, \quad (1.4.12)$$

где  $P^0$  – установившееся решение матричного уравнения Риккати (1.3.15).

Очевидно, что при  $t_1 \rightarrow \infty$  число  $\min J \rightarrow \infty$ .

Причиной этой ситуации является неограниченная энергия случайного процесса типа «белый шум», поэтому при  $t_1 \rightarrow \infty$  вместо функционала (4.1.11) принимают функционал

$$J = \lim_{t_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{t_1 - t_0} M \left\{ \int_{t_0}^{t_1} (\mathbf{x}' \cdot Q(t) \cdot \mathbf{x} + \mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}) dt + \mathbf{x}' \cdot (t_1) \cdot P^{(1)} \cdot \mathbf{x}(t_1) \right\} \quad (1.4.13)$$

Для стационарных систем этот функционал можно записать как

$$J = \lim_{t_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{t_1 - t_0} M \left\{ \int_{t_0}^{t_1} (\mathbf{x}' \cdot Q \cdot \mathbf{x} + \mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}) dt \right\}. \quad (1.4.14)$$

### 1.4.2. Оптимальное управление при неполной информации о векторе состояния

#### Структура оптимального регулятора

Пусть не все переменные состояния объекта (1.4.1) доступны непосредственному измерению и пусть, кроме того, измерения осуществляются с помехами. Тогда объект управления описывается уравнениями

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A(t) \cdot \mathbf{x} + B(t) \cdot \mathbf{u} + \Psi(t) \cdot \mathbf{f}; \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^{(0)}; \quad (1.4.15)$$

$$\mathbf{y} = D(t) \cdot \mathbf{x} + \chi(t). \quad (1.4.16)$$

где, как и ранее,  $\mathbf{f}(t)$  –  $\mu$ -мерный вектор внешних возмущений, являющийся гауссовским случайным процессом типа «белый шум» с нулевым математическим ожиданием и заданной ковариационной матрицей  $R^{(1)}(t)$ ,  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $\Psi(t)$  – заданные матрицы,  $\mathbf{y}(t)$  –  $r$ -мерный вектор измеряемых переменных;  $\chi(t)$  – это  $r$ -мерный вектор помех (шумов), также являющийся случайным процессом типа «белый шум» с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей

$$R^{(2)}(t', t'') = M\{\chi(t') \cdot \chi'(t'')\} = R^{(2)}(t) \cdot \delta(t' - t''), \quad (1.4.17)$$

где  $R^{(2)}(t)$  – заданная положительно-определенная матрица размеров  $r \times r$ .

Далее предполагается, что внешние возмущения и помехи измерений независимы (не коррелированы).

Наконец, обозначим

$$\begin{aligned} M \cdot \{\mathbf{x}(t_0)\} &= \bar{\mathbf{x}}^{(0)}; \quad M \cdot \{[\mathbf{x}(t_0) - \bar{\mathbf{x}}^{(0)}][\mathbf{x}(t_0) - \bar{\mathbf{x}}^{(0)}]'\} = \\ &= R^{(0)} \quad (4.2.4) \end{aligned} \quad (1.4.18)$$

и будем полагать, что начальные условия не зависят от возмущений и помех, а вектор  $\bar{\mathbf{x}}^{(0)}$  и матрица  $R^{(0)}$  размеров  $n \times n$  известны.

Требуется найти управление  $\mathbf{u}$ , зависящее от измеряемого вектора  $\mathbf{y}$ , такое, чтобы критерий

$$\begin{aligned}
 J &= \\
 &= M \cdot \\
 &\cdot \left\{ \int_{t_0}^{t_1} [\mathbf{x}' \cdot Q(t) \cdot \mathbf{x} + \mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}] \cdot dt + \mathbf{x}'(t_1) \cdot P^{(1)} \cdot \mathbf{x}(t_1) \right\}. \quad (1.4.19)
 \end{aligned}$$

где  $Q(t)$ ,  $P^{(1)}$  – заданные положительно-определенные матрицы, принимал наименьшее значение.

Регулятор, формирующий искомое управление, состоит (как и в детерминированном случае, рассмотренном в предыдущей главе) из двух частей: устройства, реализующего оптимальный закон (1.4.6), в котором вместо неизвестного вектора переменных состояния  $\mathbf{x}$  подставляется его оценка  $\hat{\mathbf{x}}$ , вырабатываемая во втором устройстве – наблюдателе. Как и в детерминированном случае, наблюдатель описывается уравнением

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} = A(t) \cdot \hat{\mathbf{x}} + K(t) \cdot [\mathbf{y} - A(t) \cdot \hat{\mathbf{x}}] + B(t) \cdot \mathbf{u}. \quad (1.4.20)$$

в котором матрица  $K(t)$  определяется из условиями минимума функционала

$$J = M \cdot \{\mathbf{e}' \cdot \Lambda(t) \cdot \mathbf{e}\}, \quad (1.4.21)$$

(где  $\Lambda(t)$  – заданная положительно-определенная матрица ошибки  $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$  восстановления (наблюдения, фильтрации)).

При таком определении матрицы  $K(t)$  уравнение (4.2.6) описывает оптимальный *наблюдатель (оптимальный фильтр)*.

Таким образом, цель последующего состоит в нахождении матрицы  $K(t)$  из условия минимума (1.4.21) и в доказательстве *принципа разделения*, который является основанием для представления регулятора из двух частей.

Отметим, что уравнение устройства восстановления (1.4.20) было построено в предыдущей главе исходя из эвристических соображений. В действительности же оно впервые было получено Р. Калманом и Бьюси, что явилось дальнейшим развитием результатов А. Н. Колмогорова и Н. Винера по оптимальной фильтрации.

### 1.4.3. Оптимальные стохастические дискретные системы

#### *Оптимальное управление при измеряемом векторе состояния*

Рассмотрим дискретный объект управления

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x} \cdot (k + 1) &= \\
 &= \Phi(k) \cdot \mathbf{x}(k) + R(k) \cdot \mathbf{u}(k) + \Psi(k) \cdot \\
 &\cdot \mathbf{f}(k) \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (1.4.22)
 \end{aligned}$$

где  $f(k)$  –  $\mu$ -мерный вектор внешних возмущений, являющийся последовательностью  $f(0), f(1), f(2) \dots$  некоррелированных стохастических величин с нулевым средним и матрицами дисперсии  $R^{(1)}(k)$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ );  $\Phi(k), \Psi(k), R(k)$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) – заданные матрицы.

Пусть задан критерий

$$J = M \cdot \left\{ \sum_{k=1}^N x'(k) \cdot Q(k) \cdot x(k) + u'(k-1) \cdot u(k-1) + x'(N) \cdot P^{(1)} \cdot x(N) \right\} \quad (1.4.23)$$

где  $Q(k)$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ),  $P^{(1)}$  – заданные положительно-определенные матрицы.

Требуется найти управление  $u(k)$  как функцию переменных состояния, при котором функционал (1.4.23) принимает наименьшее значение.

Искомое управление, как и в непрерывном случае, совпадает с управлением, полученным в § 1.3.1 при отсутствии внешних воздействий. Сформулируем этот результат.

**Утверждение.** Оптимальное стохастическое управление дискретным объектом (1.4.22), при котором критерий (1.4.23) принимает наименьшее значение, имеет вид

$$u(k) = C'(k)x(k) \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (1.4.24)$$

где

$$C'(k) = - \{ R(k)[Q(k+1) + P(k+1)]R(k) + E_m \}^{-1} R'(k)[Q(k+1) + P(k+1)]\Phi(k). \quad (1.4.25)$$

Последовательность матриц  $P(k)$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ), является решением матричного разностного уравнения

$$P(k) = \Phi'(k)[Q(k+1) + P(k+1)][\Phi(k) + R(k)C'(k)] \quad ((k = N-1, N-2, \dots, 1)) \quad (1.4.26)$$

с конечным условием

$$A(N) = P^{(1)}. \quad (1.4.27)$$

Нетрудно видеть, что если подставить (1.4.25) в (1.4.26) и положить



$P^{(1)} = 0$ ,  $\Phi(k) = \Phi$ ,  $R(k) = R$ ,  $k = N - j$ , то (1.4.24) ... (1.4.27) совпадает с (1.3.53) ... (1.3.57).

В стационарном случае, когда матрицы, входящие в уравнения объекта (1.4.22), и функционал (1.4.23) постоянны, получим при  $N \rightarrow \infty$  и функционале

$$J = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \cdot M \cdot \left\{ \sum_{k=1}^N x'(k) \cdot Q(k) \cdot x(k) + u'(k-1) \cdot u(k-1) \right\}, \quad (1.4.28)$$

оптимальную систему

$$x \cdot (k+1) = \Phi \cdot x(k) + R \cdot u(k) \quad (k = 0, 1, 2, \dots); \quad (1.4.29)$$

$$u(k) = C' \cdot x(k) \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (1.4.30)$$

в которой матрица  $C$  определяется, как в детерминированном случае, соотношениями (1.3.53) ... (1.3.56).

## 2. Робастные системы

### 2.1. Введение в проблематику

#### 2.1.1. Понятие неопределенного объекта. Классификация неопределенностей

Традиционные методы анализа и синтеза систем управления основаны на предположении, что математическая модель объекта является известной и абсолютно точно описывает его поведение. Обычно методы, основанные на этом предположении, объединяют под общим названием *классической теории управления*. Однако для современных подходов к постановке и решению задач управления характерен более критический взгляд на точность математических моделей, имеющих в распоряжении разработчика. Дело в том, что практически любая модель представляет собой идеализированное (т.е. упрощенное) описание реального объекта. Кроме того, некоторые характеристики объекта могут быть заранее неизвестными или значительно изменяться в процессе его функционирования. При этом говорят о *неопределенности математической модели объекта* (или просто – о *неопределенном объекте*, понимая под этим неопределенность его математической модели). Математическую модель, положенную в основу синтеза алгоритма управления,

называют *номинальной*.

В условиях существенной неопределенности классические методы теории управления оказываются неприменимыми или дают плохие результаты. В этих случаях необходимо применение специальных методов анализа и синтеза систем управления объектами с неопределенными (т.е. с неточно известными) математическими моделями.

Выделяют следующие основные типы неопределенностей математических моделей.

*Параметрическая неопределенность* означает, что неизвестными являются постоянные параметры математической модели. Значения параметров, использованные при синтезе алгоритма управления, называют *номинальными*. Во многих практических случаях *реальные* значения параметров могут существенно отличаться от принятых номинальных.

**Пример 1.1.** Типичным примером параметрически неопределенного объекта является безредукторный электропривод, где выходной вал двигателя непосредственно соединен с нагрузкой (см. рис. 1.1, б). Такая схема, например, используется в мехатронных поворотных столах (см. рис. 1.2), что позволяет существенно упростить конструкцию привода, исключить из нее изнашивающиеся и деформирующиеся детали и, как следствие, повысить жесткость всей электромеханической системы.

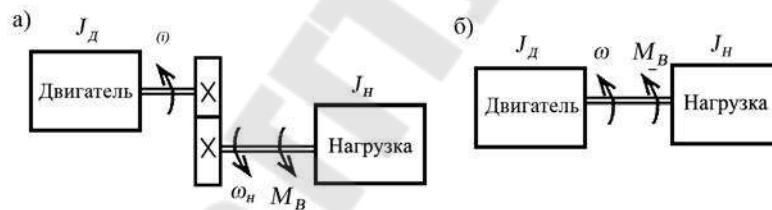


Рис. 1.1. Схемы электроприводов: а – редукторная, б – безредукторная

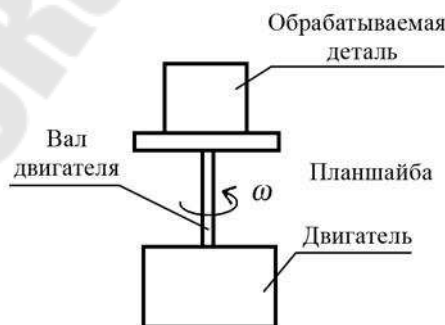


Рис. 1.2. Конструкция мехатронного поворотного стола

При наличии редуктора (рис. 1.1, а) уравнения вращающихся масс (без учета внешнего момента  $M_B$ ) имеют вид

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega, \left( J_D + \frac{J_H}{j^2} \right) \frac{d\omega}{dt} + k_c \cdot \omega = M_D. \quad (2.1.1)$$

В выражении (2.1.1) и на **рис. 1.1**  $\varphi$ ,  $\omega$  – угол поворота и скорость вращения выходного вала двигателя;  $J_D$  – момент инерции ротора электродвигателя,  $J_H$  – момент инерции нагрузки,  $k_c$  – коэффициент вязкого трения,  $\omega$  – передаточное число редуктора,  $M_D$  – вращающий момент,  $\omega_H$  – скорость вращения нагрузки,  $\omega_H = \omega/j$ . Так как в большинстве технических систем используются высокоскоростные низкомоментные двигатели, то  $j \gg 1$ . Поэтому влияние момента инерции нагрузки в редукторных системах ослабляется в  $(j^2)$  раз, что позволяет пренебречь членом  $J_H/j^2$ .

При отсутствии редуктора (**рис. 1.1, б**) уравнения вращающихся масс принимают вид

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega, (J_D + J_H) \frac{d\omega}{dt} + k_c \cdot \omega = M_D. \quad (2.1.2)$$

Из уравнения (2.1.2) видно, что в безредукторном приводе момент инерции нагрузки непосредственно (т.е. без какого-либо ослабления) влияет на параметры привода. При этом, как правило,  $J_H > J_D$ . Более того, во многих практических случаях момент инерции нагрузки заранее точно неизвестен и может изменяться в процессе эксплуатации электропривода. Обычно известен только диапазон  $J_{min} \leq J_H \leq J_{max}$  возможных значений, так что  $J_H$  оказывается *интервальной величиной*. Если данный диапазон оказывается достаточно широким, то модель (1.2) должна рассматриваться в качестве *параметрически неопределенной* с параметрической неопределенностью *интервального типа*.

**Пример 1.2.** Дополним уравнения вращающихся масс (2.1.2) уравнением электрической цепи якоря электродвигателя постоянного тока в форме

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L} \cdot I - \frac{c_E}{L} \cdot \omega + \frac{1}{L} \cdot U, \quad (2.1.3)$$

где  $I$  – ток якоря,  $R$  и  $L$  – активное сопротивление и индуктивность обмотки якоря,  $c_E$  – постоянная противо-эдс,  $U$  – входное напряжение. Связь уравнений (2.1.2) и (2.1.3) определяется через вращающий момент в соответствии с выражением  $M_D = c_M \cdot I$ , где  $c_M$  – коэффициент передачи по моменту. В ходе работы двигатель нагревается, происходит разогрев обмотки якоря, что влечет за собой изменение его активного сопротивления. Если изменение является существенным, то активное сопротивление уже не может больше рассматриваться в качестве известного и постоянного параметра, оно должно быть представлено функцией времени  $R(t)$ . При этом модель (2.1.3) принимает вид

$$\frac{dI(t)}{dt} = -\frac{R(t)}{L} \cdot I(t) - \frac{c_E}{L} \cdot \omega(t) + \frac{1}{L} \cdot U(t), \quad (2.1.4)$$

где  $R(t)$  несет *параметрическую неопределенность*, параметризованную временем

Неконтролируемый дрейф активного сопротивления существенно сказывается, например, в двух двигательных приводах (рис. 1.3), вызывая разбаланс якорных токов в двигателях, приводящий к появлению скручивающего момента и преждевременному разрушению рабочего вала электропривода.

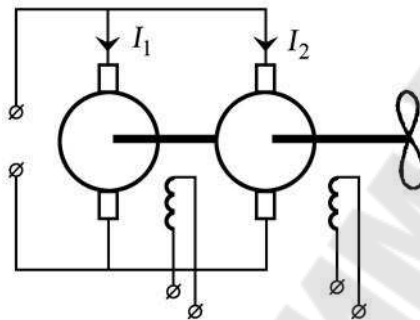


Рис. 1.3. Двухдвигательный электропривод гребной установки судна

*Сигнальная неопределенность* означает, что на объект управления действует неизмеримый сигнал или сигнал с априори неизвестными параметрами (амплитуда, частота и т.д.) внешнего (экзогенного) или внутреннего (эндогенного) происхождения, такие сигналы, отклоняющие процесс управления от желаемого его хода, принято называть *возмущениями*.

*Функциональная неопределенность* означает, что математическая модель объекта содержит *неизвестные* функциональные зависимости координат состояния, регулируемых переменных или сигналов управления.

**Пример 1.3.** Перепишем уравнение вращающихся масс электропривода (2.1.2) с учетом приложения внешнего момента  $M_B$  в форме

$$\frac{d\omega}{dt} = \omega, (J_D + J_H) \frac{d\omega}{dt} + k_c \cdot \omega = M_D + M_B. \quad (2.1.5)$$

Пусть уравнение (2.1.5) описывает электропривод гребной установки судна. Тогда внешний момент  $M_B$ , являющийся в данном случае моментом сопротивления воды, будет представлять достаточно сложную функцию скорости вращения выходного вала, записываемую в форме  $M_B = M_B(\omega)$ . При этом модель (1.4) примет вид

$$\frac{d\omega}{dt} = \omega, (J_D + J_H) \frac{d\omega}{dt} + k_c \cdot \omega = M_D + M_B(\omega). \quad (2.1.6)$$

В первом приближении функция  $M_B = M_B(\omega)$  может быть представлена в виде квадратичной зависимости  $M_B(\omega) = -\gamma \text{sign}(\omega)\omega^2$ , коэффициент  $\gamma$  которой зависит от многих априори неизвестных факторов (плотности и температуры воды, наличия или отсутствия ледовой крошки и т.п.). В связи с этим модель (2.1.6) является *функционально неопределенной*.

*Структурная неопределенность* означает, что структура математической модели является неточно известной. Как правило, структурная неопределенность выражается в том, что динамический порядок реального объекта оказывается выше порядка его математической модели. При этом говорят о наличии у объекта *немоделируемой (паразитной) динамики*.

**Пример 1.4.** Рассмотрим в совокупности электропривод постоянного тока, состоящий из усилителя мощности (см. рис. 1.4, а). Часто при решении задач синтеза замкнутых систем пренебрегают динамикой усилителя мощности. При этом модель усилителя представляют статической зависимостью  $U = k_u u$ , где  $u$  – сигнал управления,  $k_u$  – коэффициент усиления усилителя. Объединяя уравнения (2.1.3) и (2.1.5), получим систему соотношений, описывающих модель электропривода постоянного тока (см. рис. 1.4, б):

$$\varphi = \frac{1}{s} \cdot \omega; \quad (2.1.7)$$

$$\omega = \frac{k_\omega}{T_\omega \cdot s + 1} (c_M \cdot I + M_B); \quad (2.1.8)$$

$$I = \frac{k_I}{T_1 \cdot s + 1} (k_u \cdot u - c_E \cdot \omega); \quad (2.1.9)$$

где  $T_\omega = \frac{J_D + J_H}{k_c}$ ,  $k_\omega = \frac{1}{k_c}$ ,  $T_1 = \frac{L}{R}$ ,  $k_I = \frac{1}{L}$ .

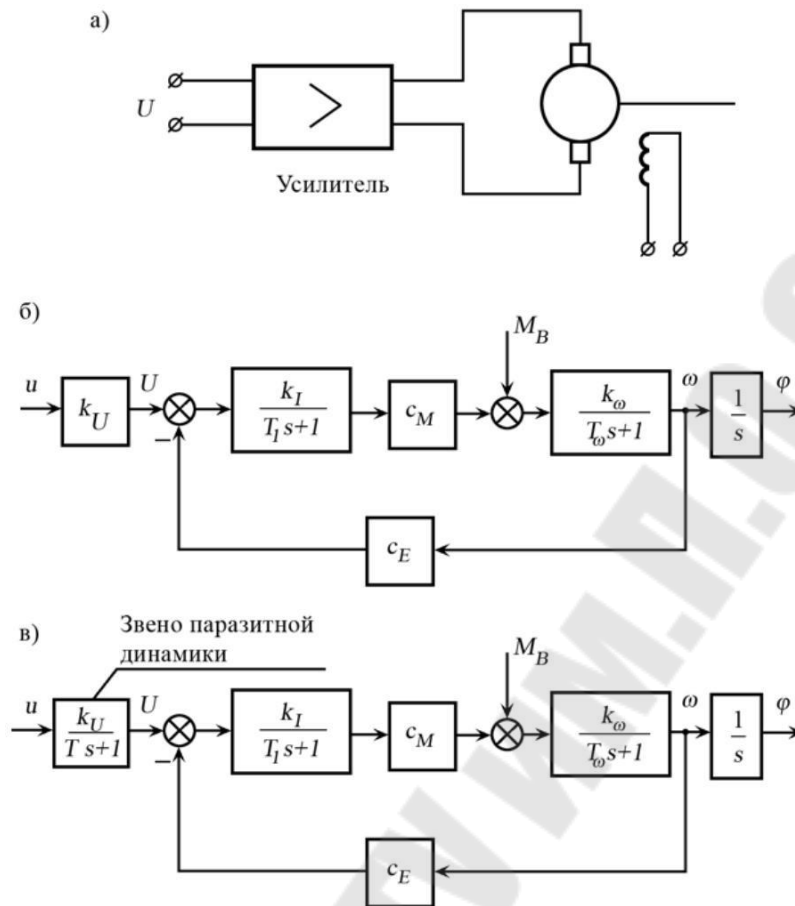


Рис. 1.4. Электропривод постоянного тока

Однако усилитель является инерционным устройством, для его описания наиболее часто используют его представление апериодическим звеном первого порядка. С учетом динамики усилителя мощности математическая модель электропривода (см. рис. 1.4, в) получает аналитическое представление в виде системы соотношений

$$\varphi = \frac{1}{s} \omega; \quad (2.1.10)$$

$$\omega = \frac{k_{\omega}}{T_{\omega} \cdot s + 1} (c_M \cdot I + M_B); \quad (2.1.11)$$

$$I = \frac{k_I}{T_I \cdot s + 1} (k_u \cdot u - c_E \cdot \omega); \quad (2.1.12)$$

$$U = \frac{k_u}{T_U \cdot s + 1} u, \quad (2.1.13)$$

где  $T_U$  - малая постоянная времени усилителя мощности. Полная модель (2.1.10) – (2.1.13) отличается от упрощенной (2.1.7) – (2.1.9) на единицу

большой размерностью, что порождено дополнительным уравнением (2.1.13), представляющим собой *паразитную динамику*.

Наконец, отметим, что на этапе синтеза управления *неопределенности* делятся на *априорные и текущие вариации* параметров математической модели. Априорная неопределенность существует уже на этапе синтеза системы. Она может быть обусловлена отсутствием информации о свойствах объекта управления и условиях его функционирования, отсутствием точного математического описания объекта, технологическим разбросом параметров элементов системы управления, вносимого при их производстве и т.д. Текущие вариации параметров математической модели объекта представляют собой нежелательные их изменения в ходе его рабочей эксплуатации. Причинами таких вариаций могут быть: изменение свойств нагрузки (например, момента инерции нагрузки), нагрев обмоток двигателя, приводящий к изменению их активного сопротивления, уменьшение массы топлива в баках ракеты или самолета, приводящее к изменению массы, изменение режима работы объекта и свойств внешней среды.

Строго говоря, большинство реальных объектов, с точки зрения точности их математических моделей, являются в той или иной степени *неопределенными*.

### **2.1.2. Проблемы управления в условиях неопределенности**

При синтезе систем управления неопределенными объектами необходимо ответить на следующие два вопроса.

**Вопрос № 1.** *Можно ли использовать методы классической теории управления неопределенными объектами и, если можно, то как оценить влияние на качество замкнутой системы возможных отклонений свойств реального объекта от свойств принятой номинальной модели?*

Единой теории, дающей ответ на поставленный вопрос, в настоящее время не предложено. Более того, возможны различные варианты его формальной (более конкретизированной) постановки. Поэтому укажем несколько альтернативных подходов, позволяющих ответить на поставленный вопрос в его различных постановках или для ряда важных частных случаев:

1. *теория грубости свойств* систем управления позволяет определить условия, при которых сохраняется то или иное желаемое свойство замкнутой системы при изменениях ее математической модели.
2. *теория чувствительности* использует гипотезу малости вариаций (неопределенности) параметров относительно их номинальных значений и с помощью функций чувствительности позволяет оценивать

влияние параметрической неопределенности на траектории системы и показатели их качества

3. *теория интервальных систем* допускает гипотезу произвольной неопределенности параметров, принадлежащих прямоугольному параллелепипеду в пространстве параметров, и решает задачу поиска условий гурвицевой устойчивости для значений вектора параметров, соответствующих угловым точкам параллелепипеда;
4. *теория сингулярно возмущенных систем* позволяет исследовать свойства замкнутых систем управления с паразитной динамикой.

**Вопрос № 2.** Если нельзя использовать методы классической теории, то как управлять неопределенными объектами?

Ответ на этот вопрос дает теория *адаптивных и робастных систем*. Таким образом, теория адаптивных и робастных систем изучает методы управления неопределенными объектами, для которых являются неприменимыми методы классической теории управления.

### **2.1.3. Основные методы управления неопределенными объектами**

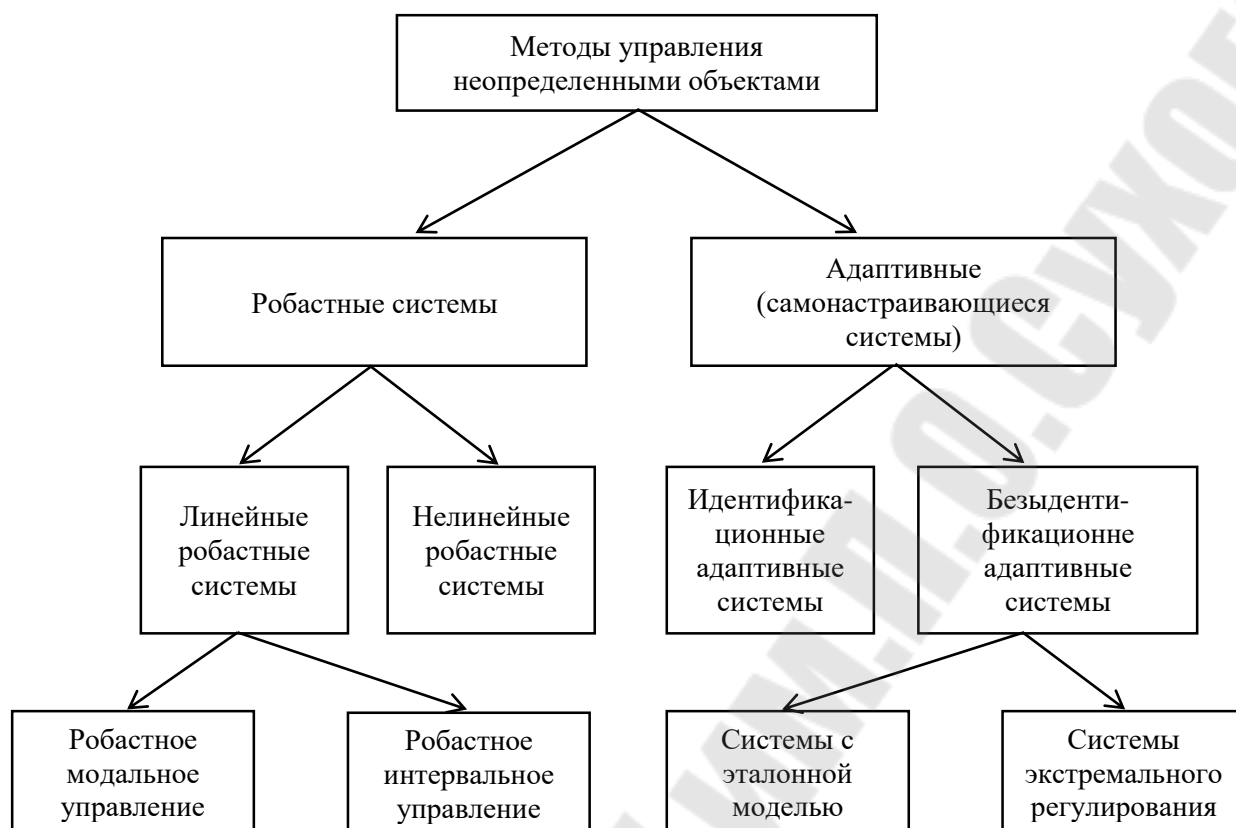
Классификация основных методов управления неопределенными объектами приведена на рис. 1.5.

*Робастные (грубые) системы* – это системы управления, обеспечивающие приемлемое (в смысле некоторого критерия) качество при наличии параметрических, сигнальных, функциональных или структурных неопределенностей объекта управления. При этом, как правило, в ходе рабочего функционирования системы коэффициенты регулятора не подстраиваются, а малая чувствительность (т.е. грубость или робастность) к различного рода вариациям математической модели объекта достигается за счет специальным образом выбранной структуры регулятора (алгоритма управления).

Таким образом, робастные системы относятся к классу *ненастраивающихся* систем управления, а их малая чувствительность к различного рода вариациям математической модели объекта обеспечивается на этапе синтеза алгоритма управления.

*Адаптивные (самонастраивающиеся) системы* – это системы управления, обеспечивающие компенсацию параметрических, сигнальных, функциональных или структурных неопределенностей объекта управления за счет автоматической подстройки регулятора в ходе рабочего функционирования системы. Другими словами, адаптивные системы восполняют нехватку априорной информации об объекте управления в ходе рабочего функционирования. В этом смысле они могут также называться *самообучающимися системами*.





**Рис.1.5.** Классификация методов управления неопределенными объектами

*Линейные робастные системы*, использующие для решения задач управления в условиях параметрической неопределенности методы *робастного модального управления*, опираются на возможности *обобщенного модального управления*, которое доставляет матрице состояния проектируемой системы желаемые алгебраический спектр собственных значений и геометрический спектр собственных векторов. Алгоритмы *обобщенного модального управления* в условиях параметрической неопределенности матричных компонентов модельного представления объекта относятся к классу *неадаптивных*. Эти алгоритмы используют такой базис векторно-матричного представления объекта управления, в котором параметрическая неопределенность заключена в неопределенности только его матрицы состояния.

Возможности алгоритмов *обобщенного модального управления* в условиях параметрической неопределенности реализуются в двух версиях: *модально-робастного управления* и *управления*, доставляющего проектируемой системе *параметрическую инвариантность* ее выходов относительно параметрического "внешнего" входа. В первой версии *робастного модального управления*, реализуемого в алгоритмической среде *обобщенного модального управления*, требуемые динамические показатели процессов в установившемся и переходном режимах доставляются проектируемой системе назначением желаемого спектра собственных

значений (мод) номинальной реализации ее матрицы состояния. Стабильность этих показателей при известной неопределенности матрицы состояния объекта (иными словами, их *робастность*) обеспечивается *модальной робастностью* путем минимизации числа обусловленности матрицы собственных векторов номинальной реализации матрицы состояния системы и контролем нормы матрицы со-стояния модальной модели, что позволяет гарантировать требуемое значение мажорантной оценки областей локализации мод матрицы со-стояния спроектированной системы. Во второй версии *робастного модального управления* алгоритмическими возможностями *обобщенного модального управления* номинальной реализации матрицы состояния системы доставляется такой спектр собственных векторов, элементы которого совпадают с матрицами-столбцами входа доминирующих параметрических внешних воздействий, полученных столбцово-строчной факторизацией матричного компонента матрицы состояния объекта, несущего информацию об ее параметрической неопределенности. Если полученную выше неполную управляемость отношения "параметрический вход – состояние системы" дополнить обеспечением принадлежности матриц-столбцов ядру матрицы выхода, то тем самым достигается полная неуправляемость отношения "параметрическое внешнее воздействие – выход системы" или, иначе, *параметрическая инвариантность выхода* проектируемой системы.

*Интервальное робастное управление*, как и в предыдущем случае, использует векторно-матричное описание объектов, интервальность значений первичных физических параметров которого приводит к интервальному представлению только его матрицы состояния, декомпозируемой на медианную и интервальную составляющие, характеризующуюся тем свойством, что все угловые реализации последней обладают одинаковыми нормами. При реализации *интервального робастного управления* в алгоритмической среде *обобщенного модального управления* требуемое качество процессов в проектируемой системе обеспечивается назначением желаемой структуры мод медианной составляющей матрицы состояния системы с одновременным контролем значения оценки относительной интервальности этой матрицы путем измерения нормы медианной составляющей матрицы состояния системы при известной априори норме интервальной составляющей матрицы состояния объекта с последующей оценкой *относительной интервальности* показателей качества, понимаемых как *оценки робастности* при использовании интервальных модельных представлений параметрической неопределенности.

В *нелинейных робастных системах* малая чувствительность к различным вариациям математической модели объекта управления обеспечивается за счет дополнительного введения в алгоритм управления

специальной статической нелинейной обратной связи (см. рис. 1.6). При этом даже для линейных объектов управления закон управления оказывается нелинейным. Свойство статических нелинейных законов управления улучшать качество замкнутых систем или обеспечивать нулевую чувствительность к параметрическим или сигнальным возмущениям было установлено достаточно давно. В современном виде метод нелинейного робастного управления был сформулирован в последней трети прошлого века и продолжает развиваться и поныне.

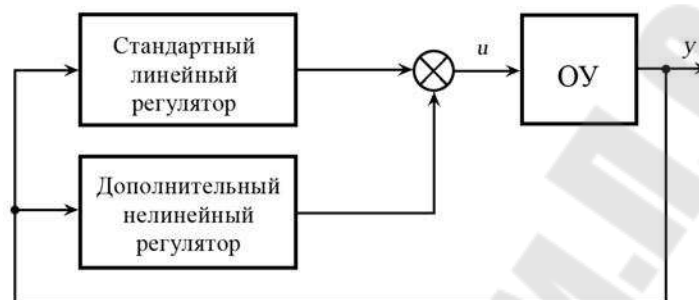


Рис. 1.6. Система нелинейного робастного управления

Принцип построения идентификационных адаптивных систем (или систем с *косвенной адаптацией*) основан на использовании процедуры идентификации объекта, т.е. на получении оценок его параметров или динамических характеристик. Полученные оценки используются далее для расчета коэффициентов регулятора. Таким образом, в своей структуре идентификационные адаптивные системы содержат (см. рис. 1.7) блок (алгоритм) идентификации, вырабатывающий оценки  $\hat{q}$  неизвестных параметров объекта управления, блок расчета параметров регулятора  $\hat{k}$  и собственно настраиваемый регулятор. Очевидно, что при стремлении оценок параметров объекта к истинным свойства замкнутой системы будут приближаться к желаемым.

Несмотря на простоту основной идеи, системы с косвенной адаптацией обладают рядом существенных недостатков. Во-первых, описанная выше стратегия требует дополнительного времени на изучение объекта, что приводит к задержке при выработке правильного управления. Во-вторых, цели функционирования настраиваемого регулятора и блока оценки параметров оказываются, по существу, различными. Цель функционирования регулятора – обеспечение желаемого поведения регулируемой переменной  $y$ , в то время как цель блока идентификации – получение оценок параметров объекта управления. В этом смысле цепь настройки параметров оказывается разомкнутой по главной цели управления со всеми вытекающими отсюда негативными последствиями. В частности, большая ошибка в управлении регулируемой переменной  $y$

может никак не сказываться на скорости сходимости по параметрическим оценкам  $\hat{q}$  и, в свою очередь, не ускорять процессы настройки регулятора.

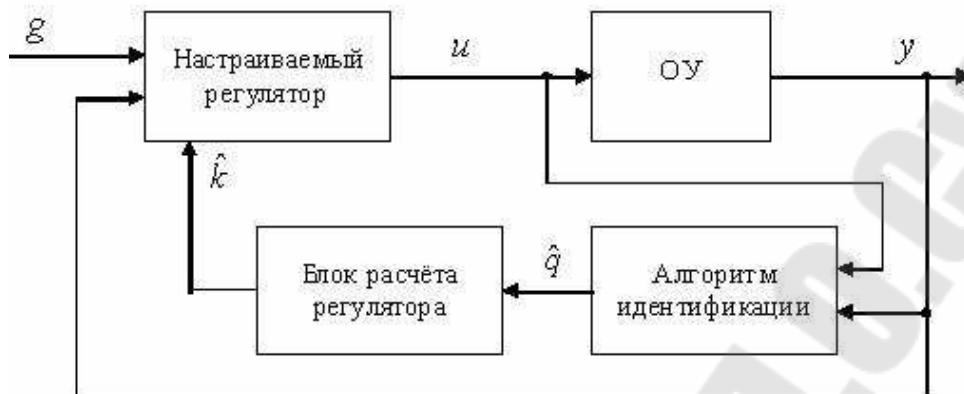
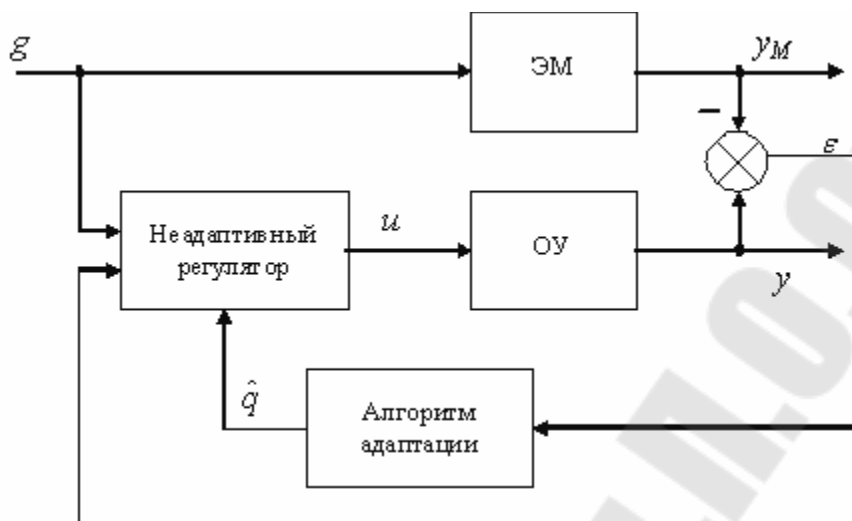


Рис. 1.7. Система идентификационного адаптивного управления

Более совершенной является стратегия, состоящая в настройке параметров регулятора из условия минимизации ошибки управления. При этом и настраиваемый регулятор, и блок (алгоритм) его настройки объединяются единой целью функционирования. На таком принципе основаны *безыдентификационные адаптивные системы* (или *системы с прямой адаптацией*). В таких системах цель управления задается либо с помощью *эталонного (модельного)* значения регулируемой переменной  $u_M(t)$ , либо с помощью некоторого числового *критерия качества*  $Q = Q(y(t))$ .

Для выработки эталонного значения регулируемой переменной  $u_M(t)$ , как правило, используется специальный динамический блок – *эталонная модель* (отсюда второе название эталонной переменной – *модельная переменная*). Наиболее часто эталонная модель реализуется в виде линейной системы, формирующей желаемый отклик на задающее воздействие (см. рис. 1.8). Настраиваемый регулятор строится таким образом, чтобы при соответствии его коэффициентов параметрам объекта управления замкнутая система вела себя точно так же, как эталонная модель. Тогда информацию о параметрических рассогласованиях в системе будет нести ошибка слежения за эталонной моделью  $\varepsilon = y - u_M$ . При этом в качестве цели работы *алгоритма адаптации* (или *алгоритма настройки коэффициентов регулятора*) естественно положить минимизацию ошибки  $\varepsilon = y - u_M$ . Таким образом, происходит объединение самого регулятора и алгоритма его адаптации единой целью – минимизацией ошибки слежения за эталонной моделью. Отметим, что, в отличие от идентификационного подхода, в данном случае не требуется проведения процедуры оценки неизвестных параметров объекта, а коэффициенты регулятора

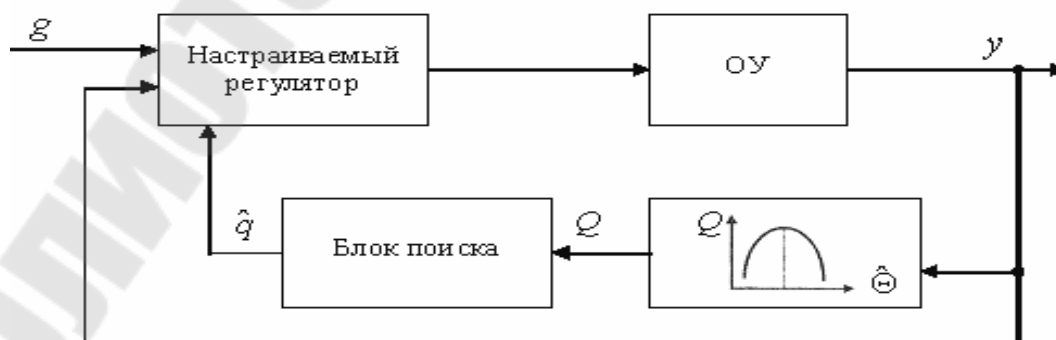
настраиваются непосредственно из условия выполнения главной цели управления.



**Рис.1.8.** Система адаптивного управления с эталонной моделью

Описанные системы получили название *адаптивных систем с эталонной моделью* (рис. 1.8). В настоящее время адаптивные системы с эталонной моделью представляют собой хорошо разработанный класс адаптивных систем, получивших наиболее широкое распространение в практических реализациях и широко представленных в научной литературе.

Альтернативный подход к построению безидентификационных адаптивных систем – сформировать некоторый критерий качества  $Q = Q(y(t))$ , значение которого достигает минимума (максимума) при соответствии коэффициентов регулятора параметрам объекта управления. Тогда настройку параметров объекта управления можно вести из условия минимизации (максимизации) критерия качества. Самонастраивающиеся системы, основанные на таком принципе, получили названия *систем экстремального регулирования*. Их структура представлена на рис. 1.9.



**Рис.1.9.** Система экстремального регулирования

Сравнивая структурные схемы, представленные на рис. 1.7, 1.8 и 1.9, можно сделать вывод, что основной отличительной чертой адаптивных (самонастраивающихся) систем является наличие дополнительной обратной связи, образованной цепью настройки параметров регулятора. Такая обратная связь получила название *параметрической*, в отличие от *сигнальной* обратной связи, образованной непосредственно регулятором.

Обобщенные структурные схемы систем, робастность (малую чувствительность) которых обеспечивается неадаптивными и адаптивными методами управления, приведены на рис. 10.

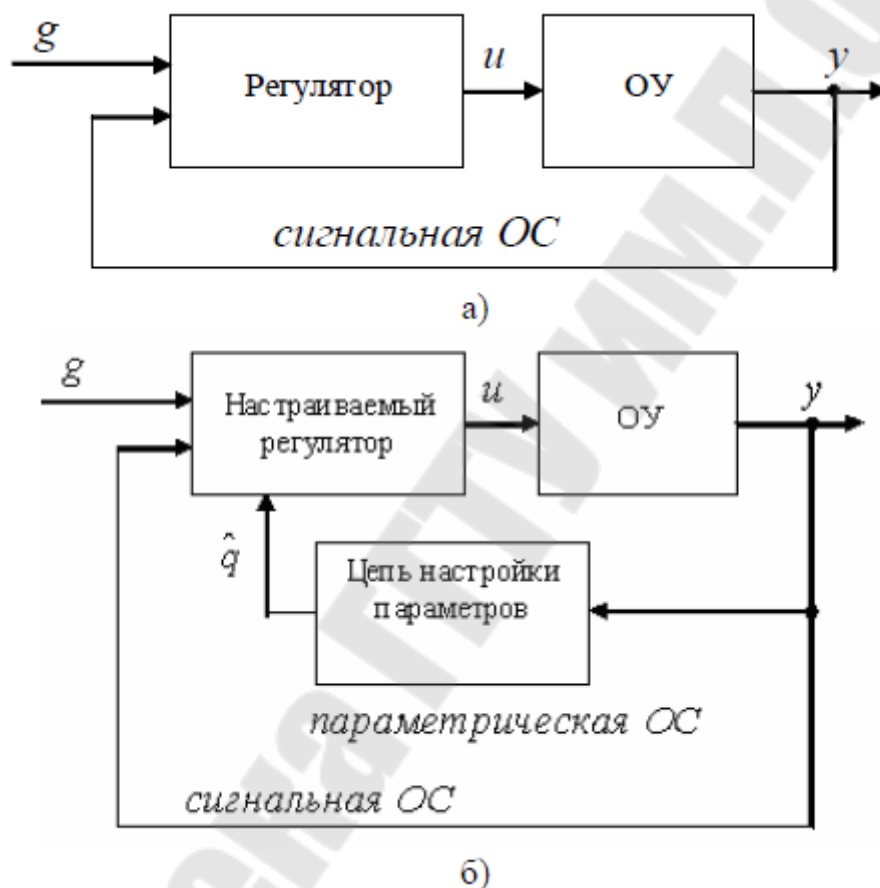


Рис.1.10. Обобщенные схемы робастных замкнутых систем: а – неадаптивная, б - адаптивная

## 2.2. Анализ систем с неопределенностями

### 2.2.1. Грубость свойств систем управления

#### Постановка задачи. Понятия грубости и робастности

Задача исследования систем с неопределенностями может быть сформулирована следующим образом. Пусть номинальная система (т.е. система с номинальной математической моделью) обладает некоторыми

*желаемыми свойствами* (например, определенным типом устойчивости, заданными показателями точности или заданными показателями динамического качества и т. п.). Сохранятся ли эти свойства при изменениях (*вариациях* или *возмущениях*) математической модели? Проблема сохранения некоторого свойства системы при изменениях ее математической модели изучается *теорией грубости свойств систем управления*. Дадим следующее определение.

**Определение 2.1.** *Если некоторое свойство системы сохраняется хотя бы при малых (в определенном смысле) вариациях ее математической модели, то данное свойство называется грубым по отношению к выделенному классу вариаций. Если можно указать хотя бы одну систему, у которой исследуемое свойство не сохраняется при сколь угодно малых вариациях ее математической модели, то такое свойство называется негрубым.*

Особое значение понятие грубости приобретает при исследовании свойств сложной системы по ее упрощенной (идеализированной) модели. Впервые задача исследования свойств системы по ее упрощенной номинальной модели была сформулирована и решена известным русским математиком Александром Михайловичем Ляпуновым в форме его знаменитых теорем об исследовании устойчивости по первому приближению (т. е. по линеаризованной модели). Термин *грубая система* был введен в научный оборот только через 45 лет А.А. Андроновым, выделившим класс динамических систем, топологическая структура траекторий которых не меняется при малых изменениях их математических моделей.

Однако для теории динамических систем с целенаправленно изменяемыми внешними воздействиями (т.е. для задач теории управления) характерна более широкая трактовка понятия грубости как сохранения некоторых свойств (и не обязательно – только топологической структуры траекторий) динамической системы при малых изменениях ее математической модели. Так как фундаментальным свойством любой динамической системы является устойчивость, то прежде всего интересуются грубостью свойств устойчивости (хотя можно изучать грубость свойств переходных процессов, грубость точностных свойств, грубость частотных характеристик и т. п.).

В последнее время в литературе часто вместо термина «грубость» используется термин *робастность* (от англ. *robust* – крепкий, сильный). Обычно, говоря о робастности, предполагают знание количественных оценок допустимых вариаций математической модели. В этом смысле «грубость» может трактоваться как «локальная робастность». Термины «грубый» и «робастный» используются также по отношению к алгоритмам управления и замкнутым системам. При этом для корректного

использования этих терминов необходимо оговаривать класс номинальных моделей систем управления, класс допустимых вариаций и указывать свойство системы, которое сохраняется при данных вариациях. Однако во многих специальных разделах современной теории управления термин «робастный» используется в специальном, более узком смысле без каких-либо дополнительных оговорок и условий. Так, *адаптивными робастными* системами в современной теории адаптивного управления называются системы, которые за счет специальной модификации алгоритма адаптации сохраняют работоспособность в условиях внешних возмущений, нестационарности неизвестных параметров или при наличии паразитной динамики.

В настоящем параграфе мы остановимся на исследовании *грубости свойств устойчивости* динамических систем. При этом основным методом исследования является метод функций Ляпунова. В приложении 2 приведены краткие сведения из теории устойчивости и метода функций Ляпунова, необходимые для понимания последующего материала.

Грубость свойств систем управления может изучаться по отношению к различным классам вариаций (возмущений) математической модели – параметрическим, сигнальным, структурным и т.д. Ниже мы остановимся подробнее на двух классах возмущений – параметрических и структурных. Анализ грубости свойств устойчивости по отношению к сигнальным (постоянно действующим) возмущениям можно найти в литературе.

### ***Грубость свойств устойчивости по отношению к параметрическим возмущениям***

Начнем изучение вопроса с частного примера, а потом распространим полученный результат на широкий класс динамических систем.

**Пример 2.1.** Рассмотрим задачу асимптотической стабилизации объекта вида

$$\frac{dx}{dt} = q \cdot x + u, \quad (2.2.1)$$

где  $x$  – скалярная регулируемая переменная,  $u$  – сигнал управления,  $q$  – постоянный параметр. Очевидно, что для решения поставленной задачи можно использовать регулятор вида

$$u = -q_0 \cdot x - k \cdot \dot{x}, \quad (2.2.2)$$

где  $k > 0$  – коэффициент обратной связи, а  $q_0$  – номинальное значение параметра  $q$ . Если истинное значение параметра соответствует номинальному (т. е.  $q_0 = q$ ), то, подставляя (2.2.2) в (2.2.1), имеем

$$\frac{dx}{dt} = -k \cdot \dot{x}. \quad (2.2.3)$$



Так как модель (2.2.3) получена при условии равенства истинного значения параметра  $q$  номинальному  $q^{\wedge}$ , то будем называть ее *номинальной моделью* замкнутой системы. Из (2.2.3) с очевидностью следует экспоненциальная устойчивость нулевого состояния равновесия. Сохранится ли данное свойство при отклонении номинального значения параметра от истинного? Подставляя (2.2.2) в (2.2.1) при условии, что  $q_0 = q$ , получаем

$$\frac{dx}{dt} = -k \cdot x + q \cdot x, \quad (2.2.4)$$

где величина  $q = q - q_0$  носит название *параметрического возмущения* (или *параметрической ошибки*). При этом сама модель (2.2.4) получила название *параметрически возмущенной* модели. Очевидно, что возмущенная модель также экспоненциально устойчива, если  $|q| < k$ . Таким образом, можно сделать *предположение, что свойство экспоненциальной устойчивости является грубым по отношению к параметрическим возмущениям*, так как оно сохраняется хотя бы при малых отклонениях истинных параметров объекта от принятых номинальных значений.

Рассмотрим теперь *номинальную* систему более общего вида,

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), \quad (2.2.5)$$

где  $x$  —  $n$ -мерный вектор состояния. Пусть возмущенная система описывается уравнением

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) + \Delta(x, t), \quad (2.2.6)$$

где слагаемое  $\Delta(x, t)$  в общей форме определяет вариации (возмущения) номинальной модели. Класс *параметрических возмущений* задается неравенством

$$\Delta(x, t) \leq c_5 \|x\|, \quad (2.2.7)$$

где  $c_5$  некоторая положительная константа. Использование неравенства (2.2.7) для определения класса параметрических возмущений может быть мотивировано с учетом примера 2.1. Действительно, параметрическое возмущение (состоящее в отклонении истинного значения параметра от принятого номинального) привело к появлению в возмущенной модели (2.2.4) слагаемого  $qx$ , для которого справедлива оценка  $qx \leq |q||x|$ . Заменяя положительную константу  $|q|$  на  $c_5$ , слагаемое  $qx$  на  $\Delta(x, t)$  и переходя к векторной величине  $x$ , получим общее описание класса параметрических возмущений в виде неравенства (2.2.7).

**Определение 2.2.** Свойство устойчивости системы (2.2.5) называется грубым по отношению к параметрическим возмущениям, если может быть указано число  $c_5 > 0$  такое, что данное свойство устойчивости справедливо также для системы (2.2.6) при любых  $\Delta(x, t)$ , удовлетворяющих условию (2.2.7).

Пусть номинальная модель (2.2.5) является экспоненциально устойчивой и, следовательно, существует функция Ляпунова  $V(x)$ , для которой справедливы неравенства (П 2.10) – (П 2.12) из Приложения 2. Тогда вычисляя производную функции Ляпунова  $V(x)$  в силу уравнений параметрически возмущенной системы (2.2.6), получаем:

$$\begin{aligned} \frac{dV(x)}{dt} &\leq -c_3 \|x^2\| + \left\| \frac{\partial V(x)}{\partial x} \right\| \|\Delta\| \leq \\ &\leq -(c_3 - c_4 \cdot c_5) \|x^2\| \leq -\frac{1}{c_2} (c_3 - c_4 \cdot c_5) V(x). \end{aligned}$$

Из последнего неравенства очевидно, что при  $c_5 < c_3/c_4$  состояние равновесия возмущенной системы (2.2.6) является экспоненциально устойчивым. Таким образом, доказано следующее утверждение.

**Утверждение 2.1.** Свойство экспоненциальной устойчивости является грубым по отношению к параметрическим возмущениям.

**Замечание 2.1.** Так как можно указать количественную оценку допустимых параметрических вариаций, определенную неравенством  $c_5 < c_3/c_4$ , то свойство экспоненциальной устойчивости является также робастным по отношению к параметрическим возмущениям.

Являются ли грубыми по отношению к параметрическим возмущениям свойства устойчивости по Ляпунову и асимптотической устойчивости? Для ответа на этот вопрос рассмотрим следующие примеры.

**Пример 2.2.** Пусть для управления объектом (2.2.1) использован регулятор вида

$$u = -q_0 \cdot x, \quad (2.2.8)$$

где, как и раньше,  $q_0$  – номинальное значение параметра  $q$ . При равенстве номинального значения параметра истинному подстановка уравнения (2.2.8) в уравнение (2.2.1) дает следующую номинальную модель замкнутой системы:

$$\frac{dx}{dt} = 0,$$

откуда следует устойчивость по Ляпунову состояния равновесия  $x = 0$ . При  $q \neq q_0$  получаем параметрически возмущенную модель:

$$\frac{dx}{dt} = q \cdot x. \quad (2.2.9)$$

Из (2.2.9) очевидно, что при любых сколь угодно малых положительных параметрических возмущениях (т.е. при  $q > 0$ ) модель (2.2.9) является неустойчивой. Следовательно, свойство устойчивости по Ляпунову не является грубым по отношению к параметрическим возмущениям.

**Пример 2.3.** Пусть линейная номинальная модель имеет вид (П2.8) (см. приложение 2). Как отмечено в приложении, состояние равновесия  $x = 0$  линейной нестационарной системы (П2.8) является асимптотически устойчивым (но не является ни равномерно асимптотически устойчивым, ни экспоненциально устойчивым). Очевидно, что состояние равновесия  $x = 0$  возмущенной системы

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{t+1} \cdot x + c_5 \cdot x = -\left(\frac{1}{t+1} - c_5\right) \cdot x$$

является неустойчивым для любых сколь угодно малых  $c_5 > 0$ , так как

$$-\left(\frac{1}{t+1} - c_5\right) > 0$$

при всех  $t > 1/c_5 - 1$ .

**Пример 2.4.** Пусть нелинейная номинальная модель имеет вид (П2.9) (см. приложение 2). Состояние равновесия  $x = 0$  системы является равномерно асимптотически устойчивым (но не является экспоненциально устойчивым). При этом состояние равновесия  $x = 0$  возмущенной системы

$$\frac{dx}{dt} = -x^3 + c_5 \cdot x = -(x^2 - c_5) \cdot x$$

является неустойчивым для любых сколь угодно малых  $c_5 > 0$ , так как в малой окрестности точки  $x = 0$  имеем

$$-(x^2 - c_5) > 0$$

для всех  $|x| < \sqrt{c_5}$ .

Примеры 2.2, 2.3 и 2.4 позволяют сформулировать следующее утверждение.

**Утверждение 2.2.** *Свойства устойчивости по Ляпунову, асимптотической устойчивости и равномерной асимптотической устойчивости не являются грубыми по отношению к параметрическим возмущениям.*

Класс линейных стационарных динамических систем допускает наглядную геометрическую интерпретацию введенного понятия грубости свойств устойчивости. Экспоненциальная устойчивость линейных систем означает, что корни системы расположены в левой открытой полуплоскости

на некотором ненулевом расстоянии  $\lambda$  от границы устойчивости (см. рис. 2.1).

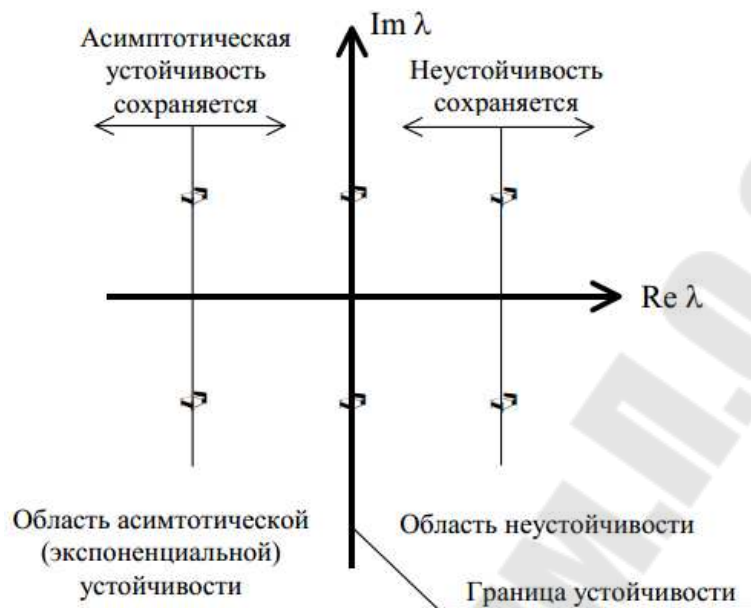


Рис. 2.1. Комплексная плоскость и корни линейных стационарных систем

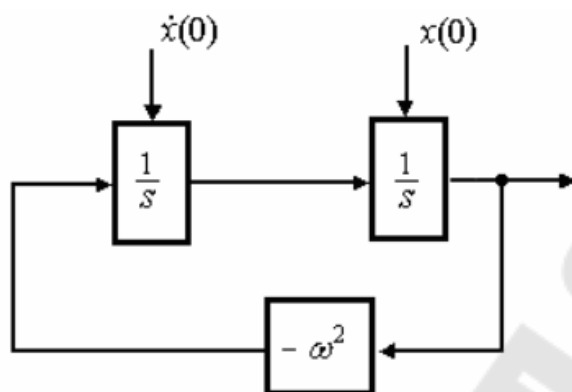
Поэтому небольшие изменения в расположении корней, вызванные параметрическими возмущениями, не приводят к переходу корня в правую полуплоскость и, следовательно, к изменению типа устойчивости. Аналогичное замечание можно сделать для неустойчивых систем, имеющих корни в правой открытой полуплоскости. Однако, если система находится на границе устойчивости (т.е. является устойчивой по Ляпунову, но не является экспоненциально устойчивой), то она имеет корни с нулевой вещественной частью, расположенные на мнимой оси. Малейший (произвольно малый) сдвиг корней вправо приводит к переходу корней в правую полуплоскость и к изменению свойств устойчивости (система становится неустойчивой). Аналогично, при малейшем сдвиге корней влево корни попадают в левую полуплоскость, и система становится экспоненциально устойчивой.

Проблема обеспечения стабильной работы технических систем, находящихся на границе устойчивости, является сложной инженерной проблемой. Так, генератор гармонических колебаний может быть описан простым дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{dt} + \omega^2 \cdot x = 0, \quad (2.2.10)$$

где константа  $\omega$  определяет угловую частоту колебаний, а начальные условия  $x(0)$  и  $\frac{dx}{dt}(0)$  задают амплитуду и фазу колебаний. Очевидно, что

реализация уравнения (2.2.10) на современной электронной базе допускает микроминиатюрное исполнение (схема моделирования генератора (2.2.10) приведена на **рис. 2.2**).



**Рис. 2.2.** Функциональная блок-схема генератора гармонического сигнала

Однако на практике генераторы представляют собой достаточно сложные технические устройства, основная проблема практической реализации которых состоит в обеспечении стабильности характеристик. Легко убедиться, что корни характеристического уравнения генератора (2.2.10) являются чисто мнимыми и, следовательно, сам генератор (как динамическая система) находится на границе устойчивости. Малейшая неидеальность в реализации уравнения (2.2.10) приводит к смещению корней (влево или вправо с мнимой оси) и, соответственно, к генерации затухающих или расходящихся колебаний. Таким образом, проблема грубости свойств устойчивости динамических систем получает важное практическое значение при конструировании генераторов, интерполяторов и дифференциальных анализаторов.

### **Грубость свойств устойчивости по отношению к структурным возмущениям**

Рассмотрим теперь случай *структурных возмущений*, вызванных наличием *паразитной* динамики. Ограничимся классом линейных стационарных систем. Пусть номинальная линейная система описывается уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = A \cdot x + b \cdot u, \quad (2.2.11)$$

$$u = -k^T \cdot x, \quad (2.2.12)$$

где  $x$  –  $n$ -мерный вектор состояния,  $u$  – сигнал управления,  $A$  –  $n \times n$  стационарная матрица,  $b$  –  $n \times 1$  вектор стационарных коэффициентов, а  $k$  –  $n \times 1$  вектор коэффициентов обратных связей. При этом уравнение (2.2.11) описывает объект управления, а уравнение (2.2.12) – модальный

регулятор стабилизации (см. рис. 2.3.а). Регулятор (2.2.12) выбран таким образом, что замкнутая система (2.2.11), (2.2.12) экспоненциально устойчива, т.е. матрица  $F = A - b \cdot k^T$  является гурвицевой.

Пусть возмущенная система имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = A \cdot x + b \cdot \xi, \quad (2.2.13)$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \gamma \cdot (u - \xi), \quad (2.2.14)$$

$$u = -k^T \cdot x, \quad (2.2.15)$$

где уравнение (2.2.14) описывает паразитную динамику, представленную апериодическим звеном первого порядка с постоянной времени  $T = 1/\gamma$  и выходной переменной  $\xi$  (см. рис.2.3.б).

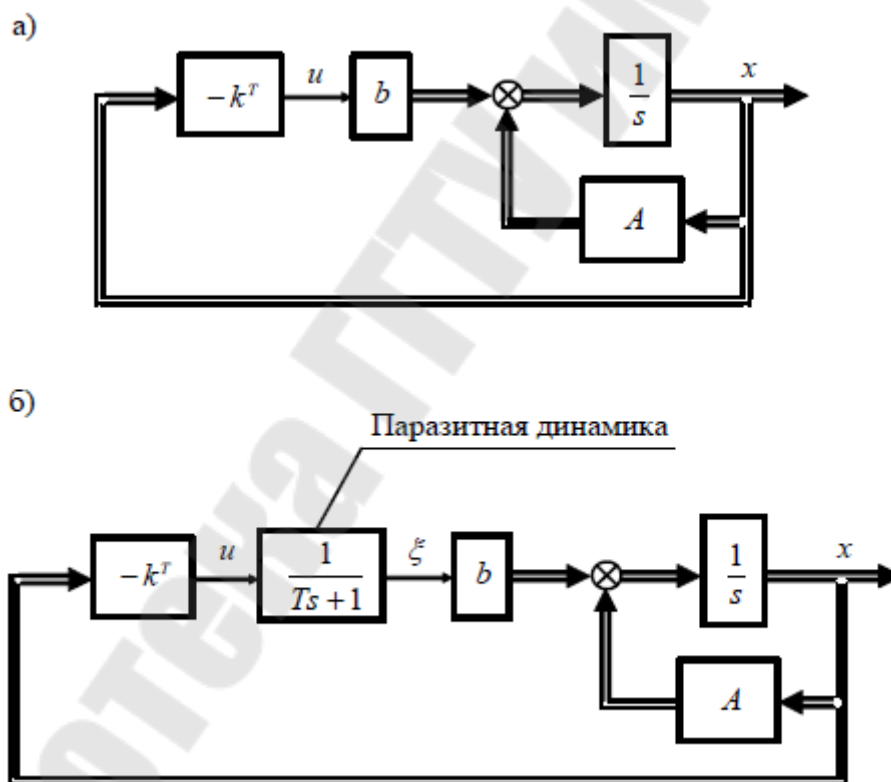


Рис. 2.3. Системы модального управления: а – структурная схема номинальной модели; б – структурная схема модели с паразитной динамикой

Вопрос, который подлежит исследованию, состоит в следующем: будет ли возмущенная система (2.2.13)–(2.2.15) экспоненциально устойчивой хотя бы при малых значениях постоянной времени  $T$ ? В случае положительного ответа мы сделаем вывод о грубости свойства

экспоненциальной устойчивости по отношению к паразитной динамике для класса линейных стационарных систем.

Для использования метода функций Ляпунова преобразуем систему (2.2.13)–(2.2.15) к удобному виду, введя новую «быструю» переменную

$$z = u - \xi. \quad (2.2.16)$$

Так как процессы в возмущенной системе (2.2.13)–(2.2.15) будут исследоваться при малых значениях постоянной времени  $T$  (т.е. при больших значениях коэффициента  $\gamma$ ), то разность между сигналами  $u$  и  $\xi$  будет быстро затухать. Это наблюдение мотивирует введенное название переменной  $z$  – *быстрая переменная*.

Продифференцируем (2.2.16) с учетом (2.2.13) и (2.2.15) (о правилах дифференцирования скалярных функций векторного аргумента см. приложение 1):

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{du}{dt} - \frac{d\xi}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x} \cdot (k^T \cdot x) \cdot \frac{dx}{dt} - \gamma \cdot (u - z) = \\ &= -k^T \cdot (A \cdot x + b \cdot \xi) - \gamma \cdot z = \\ &= -k^T \cdot (A \cdot x + b \cdot (-k^T \cdot x - z)) - \gamma \cdot z = \\ &= -k^T \cdot F \cdot x + -k^T \cdot b \cdot z - \gamma \cdot z. \end{aligned}$$

Наконец, подставляя  $\xi = u - z$  в (2.2.13), получаем описание замкнутой возмущенной системы в координатах  $x$  и  $z$ :

$$\frac{dx}{dt} = F \cdot x - b \cdot z, \quad (2.2.17)$$

$$\frac{dz}{dt} = -\gamma \cdot z - k^T \cdot F \cdot x + k^T \cdot b \cdot z. \quad (2.2.18)$$

Для исследования устойчивости системы (2.2.17), (2.2.18) используем функцию Ляпунова вида

$$V(x, z) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot P \cdot x + \frac{1}{2} \cdot z^2, \quad (2.2.19)$$

где симметрическая положительно определенная матрица  $P$  является решением уравнения Ляпунова

$$F^T \cdot P + P \cdot F = -2I. \quad (2.2.20)$$

Отметим, что уравнение (2.2.19) имеет единственное решение, так как матрица  $F$  является гурвицевой (см. приложение 1).

Вычисляя производную функции (2.2.19) в силу уравнений (2.2.17), (2.2.18), получаем (о правилах транспонирования матричных произведений см. приложение 1):

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{dt}(x, z) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{dx^T}{dt} \cdot P \cdot x + \frac{1}{2} \cdot x^T \cdot P \cdot \frac{dx}{dt} + z \cdot \frac{dz}{dt} = \\
&= \frac{1}{2} \cdot (F \cdot x - b \cdot z)^T \cdot P \cdot x + \frac{1}{2} \cdot x^T \cdot P \cdot (F \cdot x - b \cdot z) - \gamma \cdot \\
&\cdot z^2 - z \cdot k^T \cdot F \cdot x + k^T \cdot b \cdot z^2 = \\
&= \frac{1}{2} \cdot x^T \cdot (F^T \cdot P + P \cdot F) \cdot x - \frac{1}{2} \cdot z \cdot b^T \cdot P \cdot x - c - \gamma \cdot z^2 - \\
&- z \cdot k^T \cdot F \cdot x + k^T \cdot b \cdot z^2.
\end{aligned}$$

Принимая во внимание уравнение (2.2.20) и тот факт, что слагаемые  $\frac{1}{2} \cdot z \cdot b^T \cdot P \cdot x$  и  $\frac{1}{2} \cdot z \cdot b^T \cdot P \cdot x$  равны (в силу симметричности матрицы  $P$ ), перепишем выражение для производной функции Ляпунова в виде

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{dt}(x, z) &= \\
&= -\|x\|^2 - z \cdot b^T \cdot P \cdot x - \gamma \cdot z^2 - z \cdot k^T \cdot F \cdot x + k^T \cdot b \cdot \\
&\cdot z^2.
\end{aligned}$$

Объединяя слагаемые с одинаковыми переменными и переходя к нормам, получим

$$\frac{dV}{dt}(x, z) \leq -\|x\|^2 - \gamma \cdot \|z\|^2 + \rho_1 \cdot \|z\| \cdot \|x\| + \rho_2 \cdot \|z\|^2, \quad (2.2.21)$$

где значения констант  $\rho_1$  и  $\rho_2$  определяются соотношениями

$$\rho_1 = \|b^T \cdot P - k^T \cdot F\|, \quad \rho_2 = \|k^T \cdot b\|. \quad (2.2.22)$$

Перепишем выражение (2.2.21) в виде

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{dt}(x, z) &\leq \\
&\leq -\frac{3}{4} \cdot \|x\|^2 - (\gamma - \rho_1^2 - \rho_2) \cdot \|z\|^2 - \frac{1}{4} \cdot \|x\|^2 + \rho_1 \cdot \|z\| \cdot \\
&\cdot \|x\| - \rho_1^2 \cdot \|z\|^2 = \\
&= -\frac{3}{4} \cdot \|x\|^2 - (\gamma - \rho_1^2 - \rho_2) \cdot \|z\|^2 - \\
&- \left( \frac{1}{2} \cdot \|x\| - \rho_1 \cdot \|z\| \right)^2.
\end{aligned}$$

Усиливая последнее неравенство, пренебрежем квадратным членом:

$$\frac{dV}{dt}(x, z) \leq -\frac{3}{4} \cdot \|x\|^2 - (\gamma - \rho_1^2 - \rho_2) \cdot \|z\|^2. \quad (2.2.23)$$

Из (2.2.23) легко получить условие экспоненциальной устойчивости



$$\gamma > \rho_1^2 + \rho_2,$$

где положительные константы  $\rho_1$  и  $\rho_2$  определены равенствами (2.2.22).

Другими словами, если коэффициент  $\gamma$  является достаточно большим (или, что эквивалентно, постоянная времени  $1/T = \gamma$  звена паразитной динамики является достаточно малой), то возмущенная система (2.2.13)–(2.2.15) сохраняет свойство экспоненциальной устойчивости. Таким образом, доказано следующее утверждение.

**Утверждение 2.3.** *Свойство экспоненциальной устойчивости является грубым по отношению к паразитной динамике для класса линейных стационарных систем.*

В общем случае такое утверждение не является справедливым для нелинейных и нестационарных систем. Для них свойство экспоненциальной устойчивости сохраняется только для ограниченного множества начальных условий, радиус которого зависит от скорости изменения нестационарных параметров.

### **Практические выводы**

Свойство экспоненциальной устойчивости является наиболее сильным («крепким», робастным) по отношению к различным вариациям математической модели замкнутой системы. На практике это означает следующее. Если синтезированный регулятор обеспечивает экспоненциальную устойчивость системы с номинальной (упрощенной, идеализированной) математической моделью, то этот же регулятор обеспечит экспоненциальную устойчивость и для реальной системы при небольших отклонениях ее параметров (или структуры) от принятых номинальных значений. Это позволяет при синтезе управления использовать усредненные (приближенные) значения параметров, пренебрегать малыми постоянными времени.

Для класса линейных систем задача обеспечения экспоненциальной устойчивости является достаточно простой, так как свойства асимптотической и экспоненциальной устойчивости следуют одно из другого (см. приложение 2). Для нелинейных и нестационарных систем асимптотическая устойчивость, в общем случае, не означает экспоненциальной устойчивости, а, значит, не гарантирует устойчивости замкнутых систем даже при малых вариациях их математических моделей. Особую сложность приобретают задачи практической реализации систем, находящихся на границе устойчивости, так как они тоже не являются грубыми по отношению к различным типам возмущений (вариаций) их математических моделей.

В завершение параграфа отметим, что в практической деятельности разработчики систем управления часто исходят из интуитивной предпосылки, что свойства реальной системы сохраняются при малых изменениях ее математической модели. Однако, как мы установили выше, такое утверждение справедливо только для одного типа устойчивости – экспоненциальной. В связи с этим позволим себе сделать замечание, что часто интуиция является плохим советчиком в тех вопросах, где требуются строгие методы исследования.

### **2.2.2. Методы теории чувствительности**

Методы теории чувствительности объектов и систем управления к вариациям параметров их функциональных компонентов относительно номинальных значений этих параметров является эффективным инструментом решения проблемы параметрической неопределенности, сформулированной в разделе 1, как в аналитической, так и синтетической постановках. Инструментарий современной теории чувствительности (ТЧ) весьма обширен, он имеет богатую библиографию. Авторы для решения поставленных задач ограничились тем инструментом теории чувствительности, возможности которого сориентированы на матричный формализм метода пространства состояния (МПС).

#### ***Аппарат функций траекторной чувствительности***

Аппарат функций траекторной чувствительности (ФТЧ) в своей первичной постановке строился так, чтобы дать разработчикам возможность наблюдать дополнительное движение динамической системы, порожденное вариациями параметров ее функциональных компонентов относительно их номинальных значений, оценивать влияние этого движения на качественные показатели системы.

В связи с тем, что наблюдение дополнительного движения осуществляется с помощью дополнительной динамической системы с фиксированными параметрами, именуемой моделью траекторной чувствительности (МТЧ), аппарат дает возможность разработчику при формировании объекта управления, представляющего собой агрегированные объединения физического (технологического) процесса, регулирующих органов и устройств измерения компонентов вектора состояния, сравнивать конфигурацию ОУ на предмет оценки потенциальной стабильности показателей качества проектируемой системы в условиях неопределенности параметров. Анализ управляемости агрегированной системы «номинальный ОУ – МТЧ» по выходу модели траекторной чувствительности с помощью аппарата матриц управляемости по состоянию и выходу МТЧ, а также системных грамианов позволяет ранжировать параметры по степени достижимости стабильности

показателей качества систем с использованием возможностей неадаптивных алгоритмов управления, рационально распределять ресурсы управления, решать задачу «оптимального номинала» агрегатов ОУ. Применительно к спроектированной системе аппарат ФТЧ позволяет как на траекторном, так и на структурном уровне оценивать эффект введения в состав системы регуляторов в условиях параметрической неопределенности, проводить сравнения альтернативных вариантов регуляторов. Применение аппарата функций траекторной чувствительности к дискретным динамическим системам дает возможность как траекторно, так и структурно оценивать влияние таких «дискретных» параметров, как интервал дискретности и запаздывания вывода из ЭВМ вычисленного управления.

Для введения аппарата траекторной чувствительности рассмотрим непрерывную динамическую систему, которая характеризуется вектором состояния  $X \in R^n$ , вектором выхода  $y \in R^m$ , а также вектором  $q$  квазистационарных параметров ( $\frac{dq(t)}{dt} = 0$ ), который вызывает вариацию  $\Delta q$  так, что  $q = q_0 + \Delta q, q \in R^p$ . Чтобы обеспечить прозрачность трактовки результатов, будем использовать безразмерную форму представления элементов  $q_j$  вектора параметров  $q (j = 1, \dots, p)$ .

Полное движение динамической системы для случая произвольного значения вектора  $q$  параметров по состоянию и выходу может быть представлено в форме

$$x(t, q = q_0 + \Delta q) = x(t) + \Delta x(t, q_0, \Delta q), \quad (2.2.24)$$

$$y(t, q = q_0 + \Delta q) = y(t) + \Delta y(t, q_0, \Delta q), \quad (2.2.25)$$

где  $x(t) = x(t, q_0); y(t) = y(t, q_0)$ . В выражениях (2.2.24), (2.2.25)  $x(t)$  и  $y(t)$  представляют собой номинальные траектории непрерывной динамической системы соответственно по состоянию и выходу,  $\Delta x(t, q_0, \Delta q)$  и  $\Delta y(t, q_0, \Delta q)$  – дополнительные движения системы по состоянию и выходу, определяемые вариацией  $\Delta q$ , а также номинальным значением  $q_0$  вектора параметров. Будем полагать справедливыми две гипотезы: первая – о малости  $\|\Delta q\|$   $\Delta q$  вектора параметров, вторая – о непрерывной дифференцируемости по вектору параметров  $q$  в точке  $q = q_0$  траекторий  $x(t, q)$  и  $y(t, q)$  в каждый момент времени. Тогда (2.24) и (2.25) принимают вид

$$x(t, q) = x(t) + \left. \frac{\partial x(t, q)}{\partial q} \right|_{q=q_0} \Delta q + O_x^2(\Delta q), \quad (2.2.26)$$

$$y(t, q) = y(t) + \left. \frac{\partial y(t, q)}{\partial q} \right|_{q=q_0} \Delta q + O_y^2(\Delta q), \quad (2.2.27)$$

где выполняются соотношения

$$\lim_{\|\Delta q\| \rightarrow 0} \frac{\|O_x^2(\Delta q)\|}{\|\Delta q\|} = 0; \quad \lim_{\|\Delta q\| \rightarrow 0} \frac{\|O_y^2(\Delta q)\|}{\|\Delta q\|} = 0. \quad (2.2.28)$$

Если воспользоваться (2.2.26)–(2.2.28), то для дополнительных движений  $\Delta x(t, q_0, \Delta q)$  и  $\Delta y(t, q_0, \Delta q)$  параметрически возмущенной системы можно записать:

$$\Delta x(t, q_0, \Delta q) = \Sigma(t)\Delta q, \quad (2.2.29)$$

$$\Delta y(t, q_0, \Delta q) = \Xi(t)\Delta q, \quad (2.2.30)$$

Матрицы Якоби вида  $\Sigma(t)$  и  $\Xi(t)$  именуется матрицами траекторной чувствительности непрерывной системы соответственно по состоянию и выходу, и столбцовая форма их записи имеет вид

$$\Sigma(t) = \text{row} \left\{ \sigma_j(t) \triangleq \left. \frac{\partial x(t, q)}{\partial q_j} \right|_{q=q_0} ; j = 1, \dots, p \right\}, \quad (2.2.31)$$

$$\Xi(t) = \text{row} \left\{ \eta_j(t) \triangleq \left. \frac{\partial y(t, q)}{\partial q_j} \right|_{q=q_0} ; j = 1, \dots, p \right\}, \quad (2.2.32)$$

где  $\sigma_j(t)$  и  $\eta_j(t)$  являются функциями траекторной чувствительности первого порядка (в дальнейшем – просто функциями траекторной чувствительности по состоянию и выходу).

Заметим, что если известны матрицы чувствительности  $\Sigma(t)$  и  $\Xi(t)$  непрерывной динамической системы для любого  $t$ , то основные задачи анализа параметрической неопределенности в традиционной постановке могут быть решены. Причем, если достаточно решения задачи в экстремальной версии, в форме мажорант и минорант дополнительных движений, то эффективным инструментом здесь оказывается SVD-разложение матрицы (см. приложение 5) траекторной чувствительности  $\Sigma(t)$  и  $\Xi(t)$ . В пространстве траекторий для любого  $t$  максимальное  $\alpha(*)_M(t)$  и минимальное  $\alpha(*)_m(t)$  сингулярные числа матрицы  $(*) (t)$ , задают значение нормы максимальной и минимальной полуосей эллипсоидных покрытий дополнительных движений (2.29) и (2.30), порожденных сферой  $\|\Delta q\| = 1$ , а элементы правого сингулярного базиса SVD-разложения матрицы  $(*) (t)$  задают сочетания вариаций параметров, порождающие максимальную и минимальную полуоси этого покрытия.

Конструирование модели траекторной чувствительности проиллюстрируем на примере линейного непрерывного ОУ, матричные компоненты модельного представления которого зависят от вектора параметров  $q$ .

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt}(t, q) &= A(q) \cdot x(t, q) + B(q) \cdot u(t); x(0, q) = \\ &= x(0); y(t, q) = C(q) \cdot x(q)(t, q), \end{aligned} \quad (2.2.33)$$

где  $x \in R^n, u \in R^r, y \in R^m \forall q, t$ . Продифференцируем выражение (2.2.33) по  $j$ -му компоненту  $q_j$  вектора параметров  $q$  в точке  $q = q_0$ . Сконструируем порядок дифференцирования по времени  $t$  и параметру  $q_j$  в левой части первого уравнения (2.33) так, что получим цепочку равенств

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{dx}{dt}(t, q) \right) \right|_{q=q_0} &= \left. \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{dx(t, q)}{dt} \right) \right|_{q=q_0} = \\ &= \left. \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x(t, q)}{\partial q_j} \right) \right|_{q=q_0} = \sigma_j(t), \end{aligned} \quad (2.2.34)$$

а также введем обозначения

$$A_{q_j} = \left. \frac{\partial A(q)}{\partial q_j} \right|_{q=q_0}; B_{q_j} = \left. \frac{\partial B(q)}{\partial q_j} \right|_{q=q_0}; C_{q_j} = \left. \frac{\partial C(q)}{\partial q_j} \right|_{q=q_0}, \quad (2.2.35)$$

$$A(q)|_{q=q_0} = A; B(q)|_{q=q_0} = B; C(q)|_{q=q_0} = C, \quad (2.2.36)$$

$$x(t, q)|_{q=q_0} = x(t); y(t, q)|_{q=q_0} = y(t). \quad (2.2.37)$$

Теперь для  $j$ -й модели траекторной чувствительности получим представление

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_j(t)}{dt} &= A\sigma_j(t) + A_{q_j} \cdot x(t) + B_{q_j} \cdot u(t); \eta_j = \\ &= C\sigma_j(t) + C_{q_j} \cdot x(t), \end{aligned} \quad (2.2.38)$$

МТЧ (2.38) будет генерировать функции траекторной чувствительности  $\sigma_j(t)$  по состоянию и  $\eta_j(t)$  по выходу, если ее дополнить моделью номинального ОУ (см. рисунок 2.4), полученной из (2.2.33) при  $q = q_0$ :

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + B \cdot u(t); x(0); y(t) = C \cdot x(t). \quad (2.2.39)$$

Нетрудно видеть из (2.2.33) и (2.2.39), что динамическая модель дополнительных движений (2.2.29) и (2.2.30) с точностью до мультипликативной составляющей  $\Delta q_j$  ( $j = 1, \dots, p$ ) по выходам  $\sigma_j(j)$  и

$\eta_j(t)$  совпадает системой из  $p$  МТЧ (2.2.38). Установление возможности сведения дополнительных движений к нулю хотя бы в асимптотике сводится к анализу управляемости МТЧ вида (2.2.38). Для этих целей сконструируем агрегированную систему с составным вектором  $\frac{dx_j(t)}{dt} = \text{col}\{x, \sigma_j\}$  размерности  $\dim x = 2 \cdot n$ , которая объединением (2.2.38) и (2.2.39), получает векторно-матричное представление

$$\frac{dx_j(t)}{dt} = A_j \cdot x_j(t) + B_j \cdot u(t); x_j(0) = \text{col}\{x(0), 0\} \quad (2.2.40)$$

$$\begin{aligned} x(t) &= C_{xj} \cdot x_j(t); y(t) = C_j \cdot x_j(t); \sigma_j(t) = \\ &= C_{\sigma j} \cdot x_j(t); \eta_j(t) = C_{\eta j} \cdot x_j(t) \end{aligned} \quad (2.2.41)$$

где

$$A_j = \begin{bmatrix} A & 0 \\ A_{qj} & A \end{bmatrix}; B_j = \begin{bmatrix} B \\ B_{qj} \end{bmatrix}; \quad (2.2.42)$$

$$\begin{aligned} C_{xj} &= [I_{n \times n} \ 0_{n \times n}]; C_j = [C \ 0_{m \times n}]; C_{\sigma j} = \\ &= [0_{n \times n} \ I_{n \times n}]; C_{\eta j} = [C_{qj} \ C]. \end{aligned} \quad (2.2.43)$$

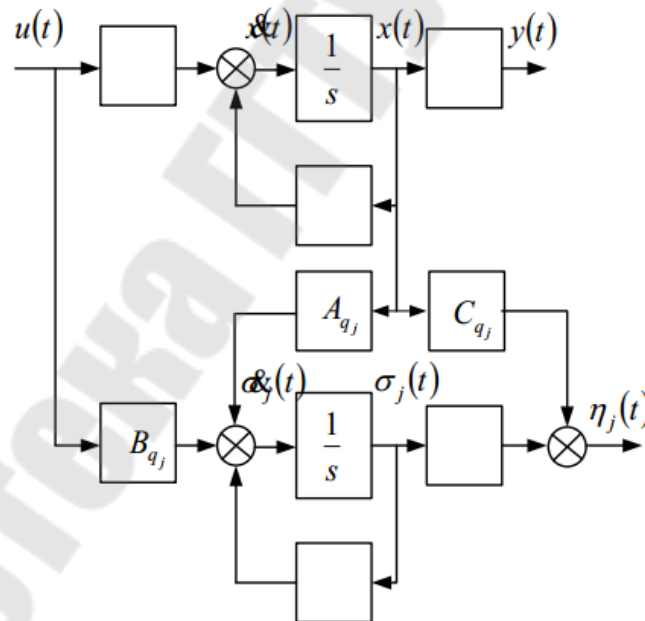


Рис.2.4 Модель траекторной чувствительности, дополненная моделью номинального ОУ

Если провести агрегирование номинального ОУ (2.2.39) и всех  $p$  МТЧ (2.2.38) путем введения вектора  $x = \text{col}\{x, \sigma_j; j = 1, \dots, p\}$  размерности  $\dim x = (p + 1)n$ , то векторно-матричное представление такой системы получает вид

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= A \cdot x(t) + B \cdot u(t); x(0) = \\ &= \text{col}\{x(0), \sigma_j(0) = 0; j = 1, \dots, p\}, \end{aligned} \quad (2.2.44)$$

$$\begin{aligned} x(t) &= C_x \cdot x(t); y(t) = C \cdot x(t); \sigma(t) = C_\sigma \cdot x(t); \eta(t) = \\ &= C_\eta \cdot x(t), \end{aligned} \quad (2.2.45)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} A & 0_{n \times np} \\ \text{col}\{A_{qj}; j = 1, \dots, p\} & \text{diag}\{A_{jj} = A; j = 1, \dots, p\} \end{bmatrix}, \quad (2.2.46)$$

$$B = \text{col}\{B, B_{aj}; j = 1, \dots, p\}; C_x = \text{row}[I_{n \times n} \quad 0_{n \times np}], \quad (2.2.47)$$

$$C = \text{row}[C \quad 0_{m \times pn}]; C_\sigma = [0_{np \times n} \quad I_{np \times np}], \quad (2.2.48)$$

$$C_\eta = [\text{col}\{C_{qj}; j = 1, \dots, p\} \quad \text{diag}\{C_{\eta jj} = C; j = 1, \dots, p\}], \quad (2.2.49)$$

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \text{col}\{\sigma_j(t); j = 1, \dots, p\}; \eta(t) = \\ &= \text{col}\{\eta_j(t); j = 1, \dots, p\}. \end{aligned} \quad (2.2.50)$$

Нетрудно видеть, что с ростом числа варьируемых параметров заметно растет размерность  $\dim x = (p + 1)n$  агрегированной системы (2.2.44), (2.2.45), что может породить проблемы вычислительной устойчивости. В этой связи аддитивная природа дополнительных движений по состоянию (2.2a) и выходу (2.2.30) позволяет  $p$  раз воспользоваться агрегированной системой (2.2.40), (2.2.41) размерности  $\dim x = 2 \cdot n$  для всех  $j = 1, \dots, p$ .

Для оценки достижимости нулевой траекторной чувствительности к вариациям параметра  $q_j$  ( $j = 1, \dots, p$ ), а также ранжирования параметров по возможным затратам ресурсов управления для достижения нечувствительности траектории проектируемой системы к этим вариациям проведем анализ управляемости системы (2.2.40), (2.2.41) по вектору состояния  $\sigma_j$  МТУ и ее выходу  $\eta_j$ . Первая задача решается на тройке матриц  $(C_{\sigma_j}, A_j, B_j)$ , а вторая – на тройке матриц  $(C_{\eta_j}, A_j, B_j)$ . Для этих целей сформулируем следующее утверждение.

**Утверждение 2.4.** Если тройка матриц  $(C_{\sigma_j}, A_j, B_j)$  полностью управляема для всех  $j = 1, \dots, p$  в том смысле, что матрица управляемости

$$W_{y\sigma_j} = \begin{bmatrix} C_{\sigma_j} B_j & C_{\sigma_j, A_j, B_j} & K & C_{\sigma_j, A_j^{n-1}, B_j} \end{bmatrix}, j = 1, \dots, p \quad (2.2.51)$$

имеет ранг, равный  $n$  ( $\text{rang } W_{y\sigma_j} = n$ ), то в системе управления, полученной агрегированием параметрически возмущенного ОУ (2.2.33) и регулятора, содержащего в своем составе номинальный ОУ (2.2.39) и реализующего закон управления по вектору дополнительного движения  $\Delta x(t, q_0, \Delta q_j)$ , достижима в асимптотике траекторная нечувствительность вектора состояния  $x(t)$  к вариациям всех компонентов  $q_j$  ( $j = 1, \dots, p$ ) вектора параметров  $q$  относительно номинальных значений в смысле выполнения условия

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta x(t, q_0, \Delta q_j) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, p \quad (2.2.52)$$

с наперед заданным темпом.

Для доказательства утверждения используется тот факт, что в силу (2.2.29) и (2.2.31) условие (2.2.52) эквивалентно выполнению предельного перехода

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma_j(t) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, p. \quad (2.2.53)$$

Тогда управляемость тройки матриц  $(C_{\sigma_j}, A_j, B_j)$   $j = 1, \dots, p$  гарантирует существование такого закона управления, при котором выполняется (2.2.53), а, следовательно, (2.2.52).

Требования к ресурсам управления заметно снижаются, если изначально ограничиться задачей обеспечения траекторной нечувствительности выхода проектируемой системы. На уровне требований к структурным свойствам агрегированной системы (2.2.40), (2.2.41) задача сводится к контролю управляемости тройки матриц  $(C_{\eta_j}, A_j, B_j)$  и количественной оценке эффекта управления попеременной  $\eta_j$  при приложении управления  $u(t)$  фиксированной нормы с помощью сингулярных чисел матрицы управляемости

$$W_{y\eta_j} = \begin{bmatrix} C_{\eta_j} B_j & C_{\eta_j, A_j, B_j} & K & C_{\eta_j, A_j^{n-1}, B_j} \end{bmatrix}. \quad (2.2.54)$$

Следует заметить, что если ранг матриц  $B_j$  и  $C_{\eta_j}$  больше единицы, то матрица управляемости (2.2.54) по выходу составляется для всех возможных композиций столбцов матрицы  $B_j$  и всех строк матрицы  $C_{\eta_j}$ . Ранжирование параметров  $q_j$  ( $j = 1, \dots, p$ ) осуществляется по значению сингулярных чисел  $\alpha \{W_{q\eta_j}\}$ . Чем эти числа меньше, тем большими по норме управлениями достигается асимптотическая траекторная



нечувствительность данного компонента  $y_j(t)$  ( $j = 1, \dots, m$ ) вектора выхода  $y(t)$  к вариациям  $j$ -го элемента  $q_j$  вектора параметров  $q$ . Нулевому сингулярному числу соответствуют бесконечные по норме управления, с помощью которых достигается асимптотическая траекторная нечувствительность компонента  $y_j(t)$  вектора выхода  $y(t)$ .

**Пример 2.5.** Рассмотрим исполнительный электропривод (ЭП) проектируемой следящей системы, описываемый передаточной функцией

$$W_{\text{ЭП}}(s) = \frac{K_{\text{дв}}}{(T_{\text{дв}} \cdot s + 1) \cdot s}$$

при номинальном значении параметров и передаточной функцией

$$W_{\text{ЭП}}(s, q) = \frac{K_{\text{дв}} \cdot (1 + q_1)}{(T_{\text{дв}} \cdot (1 + q_2) \cdot s + 1) \cdot s}$$

при варьируемых параметрах  $q_1 = q_{10} + \Delta q_1$ ;  $q_2 = q_{20} + \Delta q_2$ ;  $q_{10} = q_{20} = 0$ ;  $|\Delta q_1| = |\Delta q_2| \leq 0.3$ . В выражениях для передаточных функций  $K_{\text{дв}} = 20 \text{ рад} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{В}^{-1}$ ,  $T_{\text{дв}} = 0.1 \text{ с}$ . Для составления векторноматричного описания ОУ (2.2.33), (2.3а), МТЧ (2.2.38) и агрегированных систем (2.2.40), (2.2.41) запишем передаточную матрицу ЭП в форме

$$W_{\text{ЭП}}(s, q) = \frac{\frac{K_{\text{дв}}}{T_{\text{дв}}} \cdot \frac{1 + q_1}{1 + q_2} \cdot \frac{1}{s}}{1 + \frac{1}{T_{\text{дв}} \cdot (1 + q_2) \cdot s}} = \frac{200 \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1 + q_1}{1 + q_2} \cdot \frac{1}{s}}{1 + 10 \cdot \frac{1}{1 + q_2} \cdot \frac{1}{s}}$$

Воспользуемся базисом представления передаточной функции  $W_{\text{ЭП}}(s, q)$ , в котором от  $q_1$  и  $q_2$  зависит только матрица состояния, тогда векторноматричное описание (2.33) ОУ получает вид

$$\frac{dx}{dt}(t, q) = A(q) \cdot x(t, q) + B \cdot u(t); \quad y(t) = C \cdot x(t),$$

в котором

$$A(q) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1 + q_1}{1 + q_2} \\ 0 & -\frac{10}{1 + q_2} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 200 \end{bmatrix}; \quad C = [1 \quad 0].$$

Матрицы номинального ОУ (2.2.39) имеют реализации

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -10 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 200 \end{bmatrix}; \quad C = [1 \quad 0].$$

Матрицы моделей траекторий чувствительности (2.38):

$$A_{q1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; B_{q1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; C_{q1} = [0 \quad 0];$$

$$A_{q1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}; B_{q1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; C_{q1} = [0 \quad 0].$$

Матрицы агрегированной системы (2.2.40), (2.2.41) имеют представление:

$$A_1 = \begin{bmatrix} A & 0 \\ A_{q1} & A \end{bmatrix}; B_1 = \begin{bmatrix} B \\ B_{q1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 200 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; C_{\sigma_1} = \\ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; C_{\sigma_1} = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0];$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} A & 0 \\ A_{q2} & A \end{bmatrix}; B_2 = \begin{bmatrix} B \\ B_{q2} \end{bmatrix} = B_1; C_{\delta_2} = C_{\delta_1}; C_{\eta_2} = C_{\eta_1};$$

Проверим управляемость агрегированных систем по состоянию  $\sigma_j(t)$  и выходу  $\eta_j(t)$  ( $j = 1, 2$ ) с помощью матриц управляемости  $\widetilde{W}_{y\sigma_j}$  (2.2.51) и  $\widetilde{W}_{y\eta_j}$  (2.2.54), которые с учетом  $n=2$  имеют реализации

$$\widetilde{W}_{y\sigma_1} = \begin{bmatrix} \widetilde{C}_{\sigma_1} \widetilde{B}_1 & \widetilde{C}_{\sigma_1} \widetilde{A}_1 \widetilde{B}_1 & \widetilde{C}_{\sigma_1} \widetilde{A}_1^2 \widetilde{B}_1 & \widetilde{C}_{\sigma_1} \widetilde{A}_1^3 \widetilde{B}_1 \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} 0 & 200 & -2000 & 20000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\widetilde{W}_{y\eta_1} = \begin{bmatrix} \widetilde{C}_{\eta_1} \widetilde{B}_1 & \widetilde{C}_{\eta_1} \widetilde{A}_1 \widetilde{B}_1 & \widetilde{C}_{\eta_1} \widetilde{A}_1^2 \widetilde{B}_1 & \widetilde{C}_{\eta_1} \widetilde{A}_1^3 \widetilde{B}_1 \end{bmatrix} = \\ = [0 \quad 200 \quad -2000 \quad 20000];$$

$$\widetilde{W}_{y\sigma_2} = \begin{bmatrix} \widetilde{C}_{\sigma_2} \widetilde{B}_2 & \widetilde{C}_{\sigma_2} \widetilde{A}_2 \widetilde{B}_2 & \widetilde{C}_{\sigma_2} \widetilde{A}_2^2 \widetilde{B}_2 & \widetilde{C}_{\sigma_2} \widetilde{A}_2^3 \widetilde{B}_2 \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} 0 & -200 & 4000 & -60000 \\ 0 & 2000 & -40000 & 6000000 \end{bmatrix};$$

$$\widetilde{W}_{y\eta_2} = \begin{bmatrix} \widetilde{C}_{\eta_2} \widetilde{B}_2 & \widetilde{C}_{\eta_2} \widetilde{A}_2 \widetilde{B}_2 & \widetilde{C}_{\eta_2} \widetilde{A}_2^2 \widetilde{B}_2 & \widetilde{C}_{\eta_2} \widetilde{A}_2^3 \widetilde{B}_2 \end{bmatrix} = \\ = [0 \quad -200 \quad 4000 \quad -60000].$$

Ранги матриц  $\widetilde{W}_{y\sigma_1}$  и  $\widetilde{W}_{y\sigma_2}$  соответственно равны  $\text{rang} \widetilde{W}_{y\sigma_1} = 1$ ,  $\text{rang} \widetilde{W}_{y\sigma_2} = 1$ , агрегированные системы (2.2.40), (2.2.41) с составными векторами состояний  $\widetilde{x}_1 = \text{col}\{x, \sigma_1\}$  и  $\widetilde{x}_2 = \text{col}\{x, \sigma_2\}$  не являются полностью управляемыми по векторам  $\sigma_1(t)$  и  $\sigma_2(t)$ , поэтому недостаточно выполнения условия асимптотической сходимости (2.52) по состоянию

параметрически возмущенного ОУ. Ранги матриц  $\widetilde{W}_{y\eta_1}$  и  $\widetilde{W}_{y\eta_2}$  равны  $\text{rang}\widetilde{W}_{y\eta_1} = \text{rang}\widetilde{W}_{y\eta_2} = 1$ , что совпадает с размерностью  $m = 1$  вектора выхода. Таким образом, выбором закона управления можно обеспечить сходимость  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta y(t, q_0, \Delta q_j) = 0$  с заданным темпом. Сингулярные числа матриц  $W_{y\eta_j}$  принимают значения  $\alpha\{W_{y\eta_1}\} = 2 \cdot 10^4$ ;  $\alpha\{W_{y\eta_2}\} = 6 \cdot 10^4$ . Отсюда следует, что асимптотическая сходимость к нулю дополнительного движения  $\Delta y(t, q_0, \Delta q_1)$  потребует больших затрат на управление, чем сходимость дополнительного движения  $\Delta y(t, q_0, \Delta q_2)$  с тем же темпом.

Рассмотрим теперь возможности аппарата функций траекторной чувствительности применительно к исследованию спроектированной системы в условиях параметрической неопределенности, а, следовательно, к оценке эффекта введения регулятора, реализующего просинтезированный закон управления.

При произвольном значении  $q = q_0 + \Delta q$  векторе параметров исследуемая система имеет векторно-матричное представление

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt}(t, q) &= F(q) \cdot x(t, q) + G(q) \cdot g(t); x(0); y(t, q) = \\ &= C(q) \cdot x(t, q), \end{aligned} \quad (2.2.55)$$

$$\varepsilon(t, q) = g(t) - y(t, q), \quad (2.2.56)$$

где  $g(t)$  – внешнее воздействие,  $\varepsilon(t, q)$  – ошибка воспроизведения системой (2.2.55) внешнего воздействия. Система (2.2.55) образована агрегированием ОУ (2.2.33) и регулятора, реализующего ЗУ

$$U(t) = K_g \cdot g(t) - K \cdot x(t) \quad (2.2.57)$$

в виде прямой связи (ПС) по внешнему воздействию и отрицательной обратной связи (ОС) по вектору состояния ОУ, матрицы которого  $K_g$  и  $K$  просинтезированы для случая номинальной версии (2.2.39) объекта управления. Определенности ради положим, что матрица  $K$  просинтезирована с использованием концепции матричного и векторного подобия, приводящей к матричному уравнению Сильвестра, решение которого является алгоритмической основой современной постановки задачи модального управления (МУ). Матрица  $K_g$  ПС доставляет спроектированной системе необходимые свойства отношения "вход–выход". Простейшим из них является равенство входа  $g(t)$  и выхода  $y(t)$  в неподвижном состоянии (свойство астатизма порядка  $V \geq 1$ ), что накладывает на номинальную передаточную матрицу  $\Phi(s) = \Phi(s_1 q = q_0)$  системы (2.2.55)

$$\Phi(s) = C \cdot (s \cdot I - F)^{-1} \cdot G \quad (2.2.58)$$

Условие

$$\Phi(0) = \lim_{s \rightarrow 0} \Phi(s) = -C \cdot F^{-1} \cdot G = I; \quad (2.2.59)$$

с учетом того, что

$$F = A - B \cdot K, G = B \cdot K_g \quad (2.2.60)$$

соотношение (2.2.59) позволяет для матрицы  $K_g$  ПС записать

$$K_g = -(C \cdot F^{-1} \cdot B)^{-1}. \quad (2.2.61)$$

Следует заметить, что в зависимости от состава допустимых измерений ЗУ (2.2.57) может иметь еще две реализационные версии, записываемые в формах

$$U(t) = K_g \cdot g(t) - K_y \cdot y(t) - K_x \cdot x(t), \quad (2.2.62)$$

$$U(t) = K_\varepsilon \cdot \varepsilon(t) - K_x \cdot x(t). \quad (2.2.63)$$

При этом формы представления ЗУ (2.2.57), (2.2.62) и (2.2.63) при номинальных значениях параметров являются эквивалентными, если выполняются матричные соотношения

$$[K_y \quad K_x] \begin{bmatrix} C \\ I \end{bmatrix} = K, \quad (2.2.64)$$

$$K_\varepsilon = K_g = K_y, K_x = K + (C \cdot F^{-1} \cdot B)^{-1} \cdot C. \quad (2.2.65)$$

Однако при реализации структурных компонентов системы  $K_g, K_y, K_\varepsilon$  с некоторой параметрической неопределенностью, т.е. в форме  $K_g(q), K_y(q), K_\varepsilon(q)$ , свойства системы (2.2.55), (2.2.56) с ЗУ в формах (2.2.57), (2.2.62) и (2.2.63), определяемые дополнительными движениями  $\Delta x(t, q_0, \Delta q), \Delta y(t, q_0, \Delta q), \Delta \varepsilon(t, q_0, \Delta q)$ , оказываются различными.

Модель траекторной чувствительности системы (2.2.55), (2.2.56), если ввести обозначение

$$F_{q_j} = \left. \frac{\partial F(q)}{\partial q_j} \right|_{q=q_0}; \quad G_{q_j} = \left. \frac{\partial G(q)}{\partial q_j} \right|_{q=q_0}; \quad F(q)|_{q=q_0} = F; \quad G(q)|_{q=q_0} = G, \quad (2.2.66)$$

по аналогии с (2.38) (см. рисунок 2.5) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_j(t)}{dt} &= F \cdot \sigma_j(t) + F_{q_j} \cdot x(t) + G_{q_j} \cdot g(t); \quad \eta_j = \\ &= C \cdot \sigma_j(t) + C_{q_j} \cdot x(t). \end{aligned} \quad (2.2.67)$$

Функция траекторной чувствительности  $\varepsilon_j(t)$  вектора ошибки удовлетворяет условию

$$\varepsilon_j(t) = \left. \frac{\partial \varepsilon(q)}{\partial q_j} \right|_{q=q_0} = \left. \frac{\partial}{\partial q_j} [g(t) - y(t, q)] \right|_{q=q_0} = -y_j(t). \quad (2.2.688)$$

Если по аналогии с (2.40), (2.41) ввести в рассмотрение агрегированную систему с вектором состояния  $x_j(t) = \text{col}\{x, \sigma_j\}$  то для нее получим

$$\dot{x}_j(t) = F_j \cdot x_j(t) + G_j \cdot g(t); x_j(0) = \text{col}\{x(0), 0\}, \quad (2.2.699)$$

$$x(t) = C_{xj} \cdot x_j(t); y(t) = C_j \cdot x_j(t); \sigma_j(t) = C_{\sigma j} \cdot x_j(t), \quad (2.2.70)$$

$$\eta_j(t) = C_{\eta j} \cdot x_j(t); \xi_j(t) = -\eta_j(t), \quad (2.2.701)$$

где

$$F_j^{\%} = \begin{bmatrix} F & 0 \\ F_{qj} & F \end{bmatrix}; G_j^{\%} = \begin{bmatrix} G \\ G_{qj} \end{bmatrix}, \quad (2.2.712)$$

а матрицы  $C_{xj}^{\%}$ ,  $C_j^{\%}$ ,  $C_{\sigma j}^{\%}$  и  $C_{\eta j}^{\%}$  задаются в форме (2.2.43).

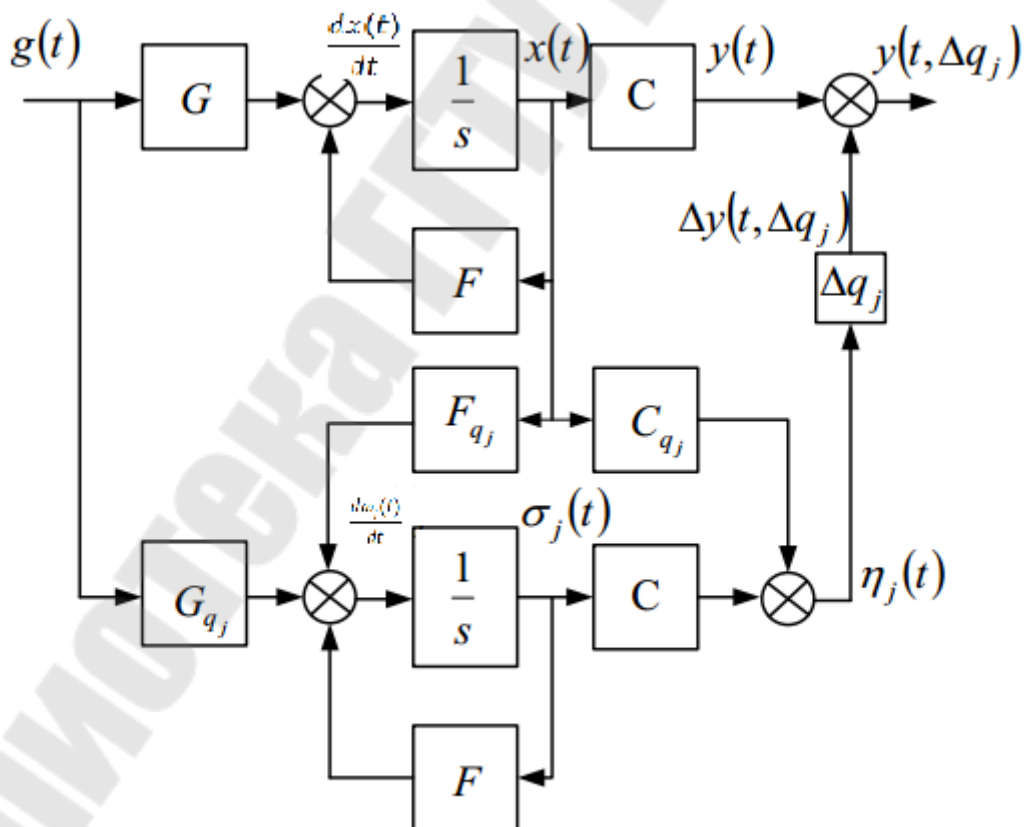


Рис.2.5 Модель траекторной чувствительности, дополненная номинальной моделью системы (2.2.55), (2.2.56)

Если провести агрегирование номинальной системы и всех  $p$  МТЧ вида (2.2.67) путем введения вектора  $x^{\%} = \text{col}\{x, \sigma_j, j = 1, p\}$  размерности  $\dim x^{\%} = (p + 1)n$ , о векторно-матричное представление такой системы по аналогии с (2.2.44)–(2.2.47) получает представление

$$\begin{aligned} \dot{x}^{\%}(t) &= F_{\%} \cdot x^{\%}(t) + G_g^{\%} \cdot (t); x^{\%}(0) = \\ &= \text{col}\{x(0), \sigma_j(0) = 0; j = \overline{1, p}\}, \end{aligned} \quad (2.2.723)$$

$$\begin{aligned} x(t) &= C_x^{\%} \cdot x^{\%}(t); y(t) = C^{\%} \cdot x^{\%}(t); \sigma(t) = \\ &= C_{\sigma}^{\%} \cdot x^{\%}(t); \eta(t) = C_{\eta}^{\%} \cdot x^{\%}(t); \xi(t) = -\eta(t), \end{aligned} \quad (2.2.734)$$

Где

$$\begin{aligned} F^{\%} \left[ \begin{array}{c} F \\ \text{col}\{F_{qj}; j = \overline{1, p}\} \text{diag}\{F_{jj}^{\%} = F; j = \overline{1, p}\} \end{array} \right], G^{\%} = \\ = \text{col}\{G, G_{qj}; j = \overline{1, p}\}. \end{aligned} \quad (2.2.745)$$

Матрицы  $C_x^{\%}$ ,  $C^{\%}$ ,  $C_{\sigma}^{\%}$  и  $C_{\eta}^{\%}$  определяются посредством (2.2.47)–(2.2.49).

Анализ свойств спроектированной системы в условиях параметрической неопределенности ее функциональных компонентов может быть осуществлен траекторными и структурными методами.

Траекторный метод предполагает конструирование оценок максимального и минимального размеров сечений трубы, в которой размещаются движения  $\Delta x(g(t), q_0, \Delta q, t)$  по состоянию,  $\Delta y(g(t), q_0, \Delta q, t)$  и  $\Delta \Sigma(g(t), q_0, \Delta q, t)$  по выходу и ошибке.

Если эта задача решается в глобальной постановке, т.е. на множестве всех параметров  $q_j j = \overline{1, p}$ , образующих вектор  $p$ , то для формирования оценок, как это уже отмечено в начале параграфа, целесообразно использовать SVD-анализ применительно к матрицам чувствительности  $\Sigma(t)$  (2.2.31) и  $\Xi(t)$  (2.2.32), конструируемым с помощью агрегированной системы (2.2.73)–(2.2.75).

Если задача решается в локальной покомпонентной форме, то оценки максимальных размеров трубок дополнительных движений  $\Delta x_i(g(t), q_0, \Delta q, t)$  и  $\Delta y_l(g(t), q_0, \Delta q, t)$  на множестве угловых реализаций вектора  $\Delta q$ , параметрированные временем  $t$ , определяются соотношениями

$$\hat{\Delta x}_i(t) = \max_{\Delta q} \Delta x_i(g(t), q_0, \Delta q, t) = \sum_{j=1}^p \sigma_{ji}(t) |\Delta q_j| \text{sgn } \delta_{ji}(t), \quad (2.2.75)$$

$$\hat{\Delta}y_l(t) = \max_{\Delta q} \Delta y_l(g(t), q_0, \Delta q, t) = \sum_{j=1}^p \eta_{ji}(t) |\Delta q_j| \operatorname{sgn} \eta_{ji}(t), \quad (2.2.76)$$

$$\hat{\Delta}\varepsilon_l(t) = \hat{\Delta}y_l(t). \quad (2.2.78)$$

Структурный метод предполагает конструирование оценок норм элементов функционального пространства  $L_T^2(T = [0, \infty))$  применительно к функциям траекторной чувствительности с использованием системных грамианов как в глобальной, так и локальной постановках. Если далее ограничиться функциями траекторной чувствительности по выходу (ошибке) в глобальной постановке, то используется агрегированная система (2.2.73)–(2.2.74), при этом кросс-грамиан  $W_\eta^{\%}$  конструируется на тройке матриц  $(C_\eta^{\%}, F^{\%}, G^{\%})$  как решения матричного уравнения

$$F^{\%} \cdot W_\eta^{\%} + W_\eta^{\%} \cdot F^{\%} = -G^{\%} \cdot C_\eta^{\%} \quad (2.2.77)$$

Теперь к кросс-грамиану  $W_\eta^{\%}$  необходимо применить технику SVD-анализа, которая дает информацию о длинах максимальной и минимальной полуосей эллипсоидных покрытий в виде  $\alpha_M(W_\eta^{\%})$  и  $\alpha_m(W_\eta^{\%})$  – максимального и минимального сингулярных чисел  $W_\eta^{\%}$ , а элементы правого сингулярного базиса  $V_\eta^{\%}$ , согласованные с  $\alpha_M(W_\eta^{\%})$  и  $\alpha_m(W_\eta^{\%})$ , задают наименее и наиболее благоприятные состояния параметров, порождающие дополнительные движения  $\Delta y(g(t), q_0, \Delta q, t)$  максимальной и минимальной норм функционального пространства. В случае локальной покомпонентной постановки задач, когда оценивается норма дополнительного движения  $\Delta y_l(g(t), q_0, \Delta q_j, t)$ , порожденного вариацией  $\Delta q_j$  – го компонента вектора параметров  $q$ , наблюдаемого на  $l$  – том выходе  $j$  – ой МТЧ при возбуждении  $k$  – того входа системы (2.2.55), кросс-грамиан  $W_{n_j}^{\%}(C_{j\eta}^{\%}, G_{jk}^{\%})$  строится на тройке матриц  $(C_{j\eta}^{\%}, A_{\Sigma_j}^{\%}, G_{jk}^{\%})$  как решение матричного уравнения

$$\text{Место для уравнения.} \quad (2.2.78)$$

$$\text{Место для уравнения.} \quad (2.2.79)$$

$$F_j^{\%} \cdot W_{n_j}^{\%}(C_{j\eta}^{\%}, G_{jk}^{\%}) + W_{n_j}^{\%} \cdot (C_{j\eta}^{\%}, G_{jk}^{\%}) \cdot F_j^{\%} = -G_{jk}^{\%} \cdot C_{j\eta}^{\%}. \quad (2.2.80)$$

Ненулевые сингулярные числа кросс-грамианов  $W_{n_j}^{\%}(C_{j\eta}^{\%}, G_{jk}^{\%})$  позволяют дать полную апостериорную характеристику эффекта введения в

систему регулятора, реализующего ЗУ в одной из форм (2.2.57), (2.2.62) и (2.2.63), осуществить апостериорное ранжирование варьируемых параметров.

Структурный метод может быть реализован и с использованием передаточных матриц (функций) "вход агрегированной системы – выход МТЧ" с последующим использованием аппарата анализа  $H^\infty$ . Так, аналогом (2.2.80) является передаточная функция

$$\Phi_{j\eta lk}(s) \stackrel{\Delta}{=} \frac{\eta_{jl}(s)}{g_k(s)} = C_{jn}^{\%} (sI - F_j^{\%})^{-1} G_{jk}^{\%}, \quad (2.2.81)$$

для которой необходимо получить оценку нормы в  $H^\infty$  - пространстве.

**Пример 2.6.** Рассматривается система, представляющая собой объединение ОУ с передаточной функцией  $W_{oy}(s) = \frac{1}{(s+1)s}$  и регулятора, доставляющего матрице  $F = A - BK$  распределение мод Баттерворта с характеристической частотой  $\omega_0 = 10c^{-1}$ , так что ее собственные значения имеют реализацию  $\lambda_{1,2} = -10(0,707mj0.707)$ .

Ставится задача сравнить по чувствительности реализации ЗУ в формах (2.2.62) и (2.2.63),

$$\begin{aligned} u(t) = \\ = K_g \cdot (1 + q_1) \cdot q(t) - K_y \cdot (1 + q_2) \cdot y(t) - K_x \cdot x(t), \end{aligned} \quad (2.2.82)$$

$$u(t) = K_\Sigma(1 + q_3) \cdot \varepsilon(t) - K_x \cdot x(t), \quad (2.2.83)$$

применительно к дополнительному установившемуся движению по выходу при ступенчатом входном воздействии  $g(t) = g_0 \cdot l(t)$ . Модель (2.2.39) номинального ОУ характеризуется матрицами

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; C = [1 \quad 0].$$

Система (2.2.55) при номинальном значении вектора параметров  $q = q_0 = 0$  характеризуется матрицами  $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -100 & -14.1 \end{bmatrix}; G = \begin{bmatrix} 0 \\ 100 \end{bmatrix}; C = [1 \quad 0]$ . Система (2.2.55) при реализации ЗУ в форме (2.2.82) имеет матрицы  $F(q) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -100(1 + q_2) & -14.1 \end{bmatrix}; G(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ 100(1 + q_1) \end{bmatrix}; C = [1 \quad 0]$ , а при реализации ЗУ в форме (2.2.83) –

$$F(q) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -100(1 + q_3) & -14.1 \end{bmatrix}; G(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ 100(1 + q_3) \end{bmatrix}.$$

Агрегированные системы с векторами  $x_j^{\%} = col\{x, \sigma_j; j = \overline{1,3}\}$  (2.2.69)–(2.2.72) характеризуются матрицами



$$F_1^{\%} = \begin{bmatrix} F & 0 \\ F_{q1} & F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -100 & -14.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -100 & -14.1 \end{bmatrix}; G_1^{\%} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 100 \\ 0 \\ 100 \end{bmatrix}; G_{\eta 1}^{\%} [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0];$$

$$F_2^{\%} = \begin{bmatrix} F & 0 \\ F_{q2} & F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -100 & -14.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -100 & 0 & -100 & -14.1 \end{bmatrix}; G_2^{\%} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 100 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; G_{\eta 2}^{\%} [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0];$$

$$F_3^{\%} = \begin{bmatrix} F & 0 \\ F_{q2} & F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -100 & -14.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -100 & 0 & -100 & -14.1 \end{bmatrix}; G_3^{\%} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 100 \\ 0 \\ 100 \end{bmatrix}; G_{\eta 3}^{\%} [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0];$$

Для решения поставленной задачи используем структурный подход, основанный на аппарате передаточных функций, для которых

$$\Phi_{\eta 1g}(s) \frac{\Delta \eta_1(s)}{= g(s)} = C_{\eta 1}^{\%} (sI - F_1^{\%})^{-1} G_1^{\%} = \frac{100}{s^2 + 14,1s + 100};$$

$$\Phi_{\eta 2g}(s) \frac{\Delta \eta_2(s)}{= g(s)} = C_{\eta 2}^{\%} (sI - F_2^{\%})^{-1} G_2^{\%} = \frac{(100)^2}{(s^2 + 14,1s + 100)^2};$$

$$\Phi_{\eta 3g}(s) \frac{\Delta \eta_3(s)}{= g(s)} = C_{\eta 3}^{\%} (sI - F_3^{\%})^{-1} G_3^{\%} = \frac{100s(s + 14,1)}{(s^2 + 14,1s + 100)^2};$$

Анализ установившегося значения функций чувствительности по выходу на основе их Лапласовых образов при скачкообразном входе  $g(t) = g_0 1(t)$

$$\eta_j(s) = \Phi_{\eta j}(s) \cdot g(s)$$

дает:

$$\eta_{1уст} = \lim_{t \rightarrow \infty} \eta_1(t) = g_0 \lim_{s \rightarrow 0} \Phi_{\eta_1}(s) = g_0,$$

$$\eta_{2уст} = \lim_{t \rightarrow \infty} \eta_2(t) = g_0 \lim_{s \rightarrow 0} \Phi_{\eta_2}(s) = -g_0,$$

$$\eta_{3уст} = \lim_{t \rightarrow \infty} \eta_3(t) = g_0 \lim_{s \rightarrow 0} \Phi_{\eta_3}(s) = 0.$$

Таким образом, дополнительные движения по выходу в установившемся режиме при ступенчатом внешнем воздействии, соответственно при реализации закона управления в форме (2.2.82) и (2.2.83), получают представления

$$\Delta Y_{уст}(t) = \eta_{1уст} \cdot \Delta q_1 + \eta_{2уст} \cdot \Delta q_2 = g_0 \cdot (\Delta q_1 - \Delta q_2),$$

$$\Delta Y_{уст}(t) = \eta_{3уст} \cdot \Delta q_2 = 0.$$

В заключение рассмотрим возможности аппарата функций траекторной чувствительности к исследованию дополнительных движений по состоянию,

$$\Delta x(k, q_0, \Delta q) \triangleq x(k, q_0 + \Delta q) - x(k, q_0) = \sum (k) \Delta q, \quad (2.2.84)$$

и выходу,

$$\Delta y(k, q_0, \Delta q) = y(k, q_0 + \Delta q) - y(k, q_0) = \sum (k) \Delta q, \quad (2.2.85)$$

где  $k$  - дискретное время, выраженное в числе интервалов дискретности длительности  $\Delta t$ , для дискретных динамических систем на примере

$$\begin{aligned} x(k+1, q) &= \bar{A}(q)x(k, q) + \bar{B}(q)u(k); x(0); y(k, q) = \\ &= C(q)x(k, q). \end{aligned} \quad (2.2.86)$$

Будем придерживаться концепции дискретного объекта управления (ДОУ), состоящей в том, что ДОУ (2.2.86) представляет собой дискретную по времени с интервалом дискретности длительности  $\Delta t$  выборку из непрерывных процессов по вектору состояния  $x(t, q)$  и выходу  $y(t, q)$  при фиксированном на интервале  $t \in [\Delta tk, \Delta t(k+1)]$  значении управления  $u(t) = u(\Delta tk) = u(k)$ . Эта концепция связывает матрицы непрерывного (2.2.39) и дискретного ОУ (2.2.39) следующими функциональными соотношениями:

$$\begin{aligned} \bar{A}(q) &= e^{A(q)\Delta t}; \bar{B}(q) = A^{-1}(q)(e^{A(q)\Delta t} - I)B(q); \bar{C}(q) = \\ &= C(q) \end{aligned} \quad (2.2.87)$$

если при выводе управления из устройства, его формирующего и осуществляющего цифро-аналоговое преобразование, можно пренебречь задержкой по сравнению с  $\Delta t$ . Если задержкой  $\tau$  пренебречь нельзя, то размерность вектора ДОУ становится на  $\tau$  больше размерности вектора

состояния непрерывного ОУ, где  $r$  - размерность вектора управления, а матрицы модели (2.2.86) принимают вид

$$\begin{aligned} \bar{A}(q) &= \begin{bmatrix} e^{A(q)\Delta t} & e^{A(q)\Delta t}(I - e^{A(q)\tau})A^{-1}(q)B(q) \\ 0_{r \times n} & 0_{r \times r} \end{bmatrix}; \bar{B} = \\ &= \begin{bmatrix} e^{A(q)(\Delta t - \tau)}A^{-1}(q)B(q) \\ I_{r \times r} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.2.88)$$

$$\bar{C} = [C \quad 0_{m \times r}]. \quad (2.2.89)$$

Матрицы функций чувствительности  $\Sigma(k)$  и  $\mathfrak{K}(k)$  строятся в форме (2.2.31), (2.2.32) на основе гипотезы о том, что в каждый дискретный момент времени векторы  $x(k, q)$  и  $y(k, q)$  дифференцируемы по  $q$ :

$$\Sigma(k) = \text{row} \left\{ \sigma_j(k) \frac{\Delta \partial x(k, q)}{\partial q_j} \Big|_{q=q_0}; j = \overline{1, p} \right\}, \quad (2.2.90)$$

$$\mathfrak{K}(k) = \text{row} \left\{ \eta_j(k) \frac{\Delta \partial y(k, q)}{\partial q_j} \Big|_{q=q_0}; j = \overline{1, p} \right\}, \quad (2.2.91)$$

Модель траекторной чувствительности, необходимая для генерирования функций траекторной чувствительности  $\sigma_j(k)$  и  $\eta_j(k)$   $j = \overline{1, p}$  по состоянию и выходу ДОУ, строится путем дифференцирования компонентов представления (2.2.86) по компонентам  $q_j$  вектора параметров  $q$  при его номинальном значении, в результате чего для МТЧ получаем

$$\begin{aligned} \sigma(k+1) &= \bar{A}\sigma(k) + \bar{A}_{q_j}x(k) + \bar{B}u(k); \sigma_j(0) = 0; \eta_j(k) = \\ &= \bar{C}\sigma_j(k) + \bar{C}_{q_j}x(k). \end{aligned} \quad (2.2.92)$$

Дальнейшее конструирование инструментария аппарата функций траекторной чувствительности осуществляется по той же схеме, что и в случае непрерывных ОУ.

Необходимо в заключение отметить, что векторно-матричное представление ДОУ в форме (2.2.86) с матричными компонентами (2.2.87) и (2.2.88), в явном виде содержащими такие чисто "дискретные" параметры, как интервал дискретности  $\Delta t$  и задержку  $\tau$  вывода управления, заметно упрощает анализ процессов ДОУ, опирающийся на возможности аппарата функций траекторной чувствительности.

### ***Функции чувствительности алгебраических и геометрических спектров матриц***

Рассматривается  $n \times n$  квадратная матрица  $N(q)$ , элементы которой  $N_{il}(q)$  ( $i, l = \overline{1, n}$ ) зависят от параметров  $q_j$ , образующих  $p$ -мерный вектор  $q = q_0 + \Delta q$  с номинальным значением  $q_0$ . Очевидно, оказываются зависимыми от элементов  $q_j$  вектора параметров  $q$   $j = \overline{1, p}$  и элементы  $\lambda_i(q)$  алгебраического спектра собственных значений матрицы  $N(q)$   $\sigma\{N(q)\} = \{\lambda_i(q)I - N(q) = 0; i = \overline{1, n}\}$ , становятся зависимыми от вектора параметров  $q$  и собственные векторы  $\zeta_i(q)$   $N(q)\zeta_i(q) = \lambda_i(q)\zeta_i(q); i = \overline{1, n}$ .

Если для матрицы  $N(q)$  построить сингулярное разложение, то получим представление

$$N(q) = U(q) \sum (q) V^T(q), \quad (2.2.93)$$

где  $U(q), V(q)$  - ортогональные матрицы для  $\forall t$ , образующие левый и правый сингулярный базисы,  $\sum(q)$  - диагональная для  $\forall q$  матрица сингулярных чисел  $\alpha_i(q)$

$$\sum (q) = \text{diag}\{\alpha_i(q); i = \overline{1, n}\} \quad (2.2.94)$$

где сингулярные числа  $\alpha_i(q); (i = \overline{1, n})$  вычисляются в силу соотношений

$$\begin{aligned} \alpha_i(q) &= \left| \mu_i^{\frac{1}{2}}(q) \right| \det(\mu_i(q)I - N(q)N^T(q)) = \\ &= \det(\mu_i(q)I - N^T(q)N(q)) = 0. \end{aligned} \quad (2.2.95)$$

Таким образом, матрица  $N(q)$  обладает алгебраическим спектром сингулярных чисел  $\sigma_\alpha\{N(q)\} = \{\alpha_i(q); i = \overline{1, n}\}$  и двумя геометрическими спектрами с элементами  $U_i(q)$  и  $V_i(q)$ , образующими левый  $U_i(q) = \text{row}\{U_i(q); i = \overline{1, n}\}$  сингулярные базисы.

Ставится задача конструирования функций чувствительности собственных значений

$$\lambda_{iaj} = \frac{\Delta \partial \lambda_i(q)}{\partial q_j} \Big|_{q=q_0}, \quad (2.2.96)$$

собственных векторов

$$\zeta_{iaj} = \frac{\Delta \partial \zeta_i(q)}{\partial q_j} \Big|_{q=q_0} \quad (2.2.97)$$

сингулярных чисел

$$\alpha_{iaj} = \frac{\Delta \partial \alpha_i(q)}{\partial q_j} \Big|_{q=q_0}, \quad (2.2.98)$$

элементов левого сингулярного базиса

$$U_{iqj} = \frac{\Delta \partial U_i(q)}{\partial q_j} \Big|_{q=q_0}$$

и элементов правого сингулярного базиса  $V_{iqj} = \frac{\Delta \partial V_i(q)}{\partial q_j} \Big|_{q=q_0}$  к вариациям  $j$  – го элемента  $q_j$  вектора параметров  $q$  относительно номинального значения  $q_0$ , с целью анализа чувствительности показателей качества динамической системы, сформированных в модальной или эллипсоидной формах. Основные результаты изложим в форме системы утверждений.

**Утверждение 2.5.** Пусть квадратная  $n \times n$  матрица  $N(q)$  является матрицей простой структуры при  $q = q_0 + \Delta q$ , где  $\Delta q$  не нарушает корректность аппарата чувствительности в рамках функций чувствительности первого порядка так, что справедливо матричное условие подобия, записываемое в форме

$$M(q) \cdot \Lambda(q) = N(q) \cdot M(q), \quad (2.2.99)$$

где  $\Lambda(q) = \text{diag}\{\lambda_i(q); i = \overline{1, n}\}$ ,  $M(q)$  – матрица диагонального преобразования, тогда функция чувствительности  $\lambda_{iqj}$   $i$  – го собственного значения  $\lambda_i(q)$  к вариации  $j$  – го элемента  $q_j$  вектора параметров  $q$  относительно номинального значения  $q_0$  может быть вычислена в силу соотношений

$$\lambda_{iqj} = (M^{-1}) \cdot N_{qj} (M)_i = (M^{-1} \cdot N_{qj} \cdot M)_{ii}. \quad (2.2.100)$$

В выражении (2.100)  $M = M(q = q_0)$ ,  $(M^{-1})^i$  –  $i$ -я строчка матрицы  $M$ ,  $(M^{-1})_i$  –  $i$ -й столбец матрицы  $M$ , матрица  $N_{qj}$  есть матрица чувствительности матрицы  $N(q)$  к вариации параметра  $q_j$ , определяемая соотношением

$$\begin{aligned} N_{qj} &= \frac{\Delta \partial N(q)}{\partial q_j} \Big|_{q=q_0} = \\ &= \text{row} \left\{ \text{col} \left( \frac{\partial N_{ii}(q)}{\partial q_j} \Big|_{q=q_0}; i = \overline{1, n} \right); i = \overline{1, n} \right\} \end{aligned} \quad (2.2.101)$$

Доказательство утверждения 2.5 приведено в приложении 4.

В процессе доказательства утверждения 2.5, по существу, доказано следующее утверждение.

**Утверждение 2.6.** Матрица  $N(q)$  к диагональному виду  $\Lambda(q)$  составлена из собственных векторов диагоналируемой матрицы так, что

$$\zeta_i(q) = M_i(q); i = \overline{1, n}. \quad (2.2.102)$$



$$\delta_{q_j} = \frac{1}{2} \left\{ \left( M^{-1} N_{q_j} M \right)_{11} + \left( M^{-1} N_{q_j} M \right)_{22} \right\}, \quad (2.2.107)$$

$$\beta_{q_j} = \frac{1}{2} \left\{ \left( M^{-1} N_{q_j} M \right)_{11} + \left( M^{-1} N_{q_j} M \right)_{22} \right\}, \quad (2.2.108)$$

Нетрудно видеть, что на функциях чувствительности собственных значений  $\lambda_{iqj}$  матрицы простой структуры  $N(q)$ , именуемых также функциями модальной чувствительности, может быть сконструирована матрица  $S_\lambda$  модальной чувствительности

$$S_\lambda = \text{row} \{ \text{col} \{ \lambda_{iqj}; i = \overline{1, n} \}; j = \overline{1, p} \} \quad (2.2.109)$$

Столбцы матрицы модульной чувствительности  $S_\lambda$  составлены из функций чувствительности всех собственных значений (мод)  $\lambda_{iqj}$  к вариациям одного параметра  $q_j$  ( $j = \overline{1, p}$ ), строки этой матрицы составлены из функций чувствительности одного собственного значения  $\lambda_i(q)$  к вариациям всех параметров  $q_j$ . Если на векторе  $\Delta q = \text{col} \{ \Delta q_j; j = \overline{1, p} \}$  вариаций вектора параметров  $q$  относительно номинальных значений сконструировать вектор  $\Delta \lambda = \text{col} \{ \Delta \lambda_i; j = \overline{1, n} \}$  вариаций собственных значений, то эти векторы оказываются связанными соотношением

$$\Delta \lambda(q_0, \Delta q) = S_\lambda \cdot \Delta q. \quad (2.2.110)$$

Векторно-матричное соотношение (2.2.110) позволяет дать исчерпывающее решение задачи оценки вариации собственных значений матрицы  $N(q)$ . Тогда, если воспользоваться сингулярным разложением матрицы модальной чувствительности

$$S_\lambda = U_\lambda \sum \lambda V_\lambda^T, \quad (2.2.1101)$$

при этом выделить согласованные тройки  $\{ U_{\lambda \min}, \alpha_{\lambda \min}, V_{\lambda \min} \}$ , то на фиксированной в сфере  $\| \Delta q \| = \text{const}$  в пространстве параметров могут быть получены оценки

$$\max_{\Delta q} \| \Delta \lambda \| = \alpha_{\lambda M} \| \Delta q \|, \quad (2.2.1112)$$

$$\min_{\Delta q} \| \Delta \lambda \| = \alpha_{\lambda m} \| \Delta q \| \quad (2.2.1123)$$

максимальной и минимальной по норме вариации собственных значений, при этом правые сингулярные векторы  $V_{\lambda \max}$  и  $V_{\lambda \min}$  задают наиболее неблагоприятное и наименее неблагоприятное сочетание параметров, порождающих соответственно вариации (2.112) и (2.113).

Если задача (2.2.111) решается покомпонентно, то для оценок максимально достижимой вариации  $\Delta\lambda_i$  собственного значения  $\lambda_i$  при вариации  $\Delta q$  вектора параметров можно воспользоваться соотношением

$$\text{Место для уравнения.} \quad (2.2.113)$$

$$\max_{\Delta q} \|\Delta\lambda\| = \sum_{j=1}^p \lambda_{iqj} |\Delta q_j| \operatorname{sgn} \lambda_{iqj}, \quad (2.2.114)$$

Основной областью использования аппарата функций чувствительности собственных значений являются системы, при синтезе которых для достижения желаемых показателей качества процессов использованы корневые (модальные) методы. Наиболее характерными представителями таких систем являются системы, которые просинтезированы методами модального управления.

**Пример 2.7.** В качестве примера матрицы  $N(q)$  рассмотрим матрицу  $F(q) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10(1+q_1) & -7(1+q_2) \end{bmatrix}$  состояния системы, спроектированной методами модального управления так, что при номинальных значениях параметров  $q_{10} = 0, q_{20} = 0$  матрица  $F$  имеет спектр собственных значений  $\sigma\{F\} = \{\lambda_1 = -2; \lambda_2 = -5\}$ , и ее степень устойчивости  $\eta = -2$ . Для анализа модальной чувствительности спроектированной системы произведем следующие вычисления.

Вычисление матриц чувствительности  $(F(q))_{q_j}; j = \overline{1,2}$ , методом прямого дифференцирования дает

$$F_{q_1} = \frac{\partial}{\partial q_1} F(q)|_{q=q_0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -10 & 0 \end{bmatrix}; F_{q_2} = \frac{\partial}{\partial q_2} F(q)|_{q=q_0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}.$$

Вычисление  $M: M\Lambda = FM$ , где  $\Lambda = \operatorname{diag}\{\lambda_1 = -2; \lambda_2 = -5\}$ , дает реализацию матрицы  $M$  в форме матрицы Вандермонда

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -5 \end{bmatrix},$$

откуда  $M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$ . Вычисление матриц:



$$M^{-1}F_{qj}M|_{j=1} \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ -2 & -1 \\ \frac{3}{3} & \frac{3}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -10 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-10}{3} & \frac{-10}{3} \\ \frac{10}{3} & \frac{10}{3} \end{bmatrix};$$

$$M^{-1}F_{qj}M|_{j=2} \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ -2 & -1 \\ \frac{3}{3} & \frac{3}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{14}{3} & \frac{35}{3} \\ -\frac{14}{3} & -\frac{35}{3} \end{bmatrix}.$$

В силу (2.2.100) получаем функции модальной чувствительности  $\lambda_{1q_1} = -\frac{10}{3}$ ;  $\lambda_{1q_2} = \frac{14}{3}$ ;  $\lambda_{1q_1} = \frac{10}{3}$ ;  $\lambda_{1q_2} = -\frac{35}{3}$ . Матрица модальной чувствительности  $S\lambda$  получает представление

$$S\lambda = \begin{bmatrix} \frac{-10}{3} & \frac{14}{3} \\ \frac{10}{3} & -\frac{35}{3} \end{bmatrix}.$$

Сингулярное разложение матрицы  $S\lambda$  принимает вид

$$S_\lambda = U_\lambda \Sigma_\lambda V_\lambda^T =$$

$$= \begin{bmatrix} 0,4118 & 0,8817 \\ -0,8817 & 0,4118 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,3489 & 0,9373 \\ 0,9373 & -0,3489 \end{bmatrix},$$

которое в силу (2.112), (2.113) дает оценки

$$\max_{\Delta q} \|\Delta\lambda\| = 13,34 \|\Delta q\|.$$

$$\max_{\Delta q} \|\Delta\lambda\| = 13,34 \|\Delta q\|.$$

Наиболее неблагоприятное сочетание вариаций параметров характеризуется вектором

$$\Delta q = \begin{bmatrix} -0,3489 \\ 0,9373 \end{bmatrix} \|\Delta q\|,$$

наименее неблагоприятное сочетание вариаций параметров характеризуется вектором

$$\Delta q = \begin{bmatrix} 0,9373 \\ -0,3489 \end{bmatrix} \|\Delta q\|.$$

Максимальная вариация  $\Delta\lambda_1$  собственного значения  $\lambda_1$  задается в силу первой строки матрицы  $S_\lambda$  соотношением

$$\Delta\lambda_1 = \frac{10}{3} |\Delta q_1| + \frac{14}{3} |\Delta q_2|,$$

максимальная вариация  $\Delta\lambda_2$  собственного значения  $\lambda_2$  задается в силу второй строки матрицы  $S_\lambda$  соотношением

$$\Delta\lambda_2 = \frac{10}{3} |\Delta q_1| + \frac{14}{3} |\Delta q_2|$$

Нетрудно видеть, что при вариациях  $\Delta q_1$  и  $\Delta q_2$ , одновременно принимающих значения  $\Delta q_1 = -0,25$  и  $\Delta q_2 = 0,25$ , т.е. при вариациях реальных значений системных параметров, образующих матрицу  $F$ , составляющих 25% от номинальных, противоположных знаков, спроектированная система оказывается на границе устойчивости.

Обратимся теперь к вычислению функций чувствительности к вариациям  $j$ -го компонента  $q_j$  вектора параметров  $q$  элементов  $\alpha_i(q)$  алгебраического вектора  $\sigma_a\{N(q)\}$  сингулярных чисел и элементов  $U_i(q)$  и  $V_i(q)$  левого и правого сингулярных базисов матрицы  $N(q)$  быть квадратной и матрицей простой структуры.

**Утверждение 2.8.** Функция чувствительности  $\alpha_{iq_j}$  сингулярного числа  $\alpha_i \in \{N(q)\}$  к вариации  $j$ -го компонента  $q_j$  вектора параметров  $q$  относительно его номинального значения  $q_0$  может быть вычислена в силу соотношения

$$\alpha_{iq_j} = (U^T)^i N_{q_j} V_i = (U^T N_{q_j} V)_i \quad (2.2.115)$$

Доказательство утверждения приведено в приложении 4.

**Утверждение 2.9.** Функции чувствительности  $U_{iq_j}$  и  $V_{iq_j}$   $i$ -х элементов левого  $U(q)$  и правого  $V(q)$  сингулярных базисов матрицы  $N(q)$  к вариации компонента  $q_j$  вектора параметров  $\alpha_{iq_j}$  могут быть представлены в аддитивных формах

$$U_{iq_j} = \sum_{k=1}^n \gamma_{ik}^j U_i \text{ и } V_{iq_j} = \sum_{k=1}^n \rho_{ik}^j V_i; j = \overline{1, p}, \quad (2.2.116)$$

где  $\gamma_{ik}^j$  и  $\rho_{ik}^j$  - коэффициенты разложения  $U_{iq_j}$  и  $V_{iq_j}$  по элементам базиса  $U$  и  $V$  соответственно – задаются соотношениями

$$\gamma_{ik}^j = \frac{\alpha_i (U^T)^k N_{iq_j} V_i + \alpha_k (U^T)^i N_{iq_j} V_k}{\alpha_i^2 - \alpha_k^2}; i \neq k; \gamma_{jj}^i = 0, \quad (2.2.117)$$

$$\rho_{ik}^j = \frac{\alpha_i (U^T)^i N_{iq_j} V_i + \alpha_k (U^T)^i N_{iq_j} V_k}{\alpha_i^2 - \alpha_k^2}; i \neq k; \rho_{ik}^j = 0. \quad (2.2.118)$$

Доказательство утверждения 2.9 строится по той же схеме, что и доказательство утверждения 2.7, здесь оно опущено.

Нетрудно видеть, что на функциях чувствительности  $\lambda_{iq_j}$  сингулярных чисел  $N(q)$  может быть построена матрица  $S_\alpha$  сингулярной чувствительности

$$S_\alpha = \text{row} \left\{ \text{col} \left\{ \alpha_{iq_j}; i = \overline{1, n} \right\} \right\}. \quad (2.2.119)$$

Строки  $S_\alpha^i$  матрицы  $S_\alpha$  (2.119) составлены из функций чувствительности  $\alpha_{iq_j}$  сингулярного числа  $\alpha_i(q)$  к вариации всех компонентов  $q_j$  вектора  $q$ . Столбцы  $S_{\alpha l}$  матрицы  $S_\alpha$  составлены из функций чувствительности  $\alpha_{lq_j}$ ,  $l = \overline{1, n}$  всех сингулярных чисел к вариации одного компонента  $q_j$  вектора параметров. Если ставится задача оценки  $\alpha^*$  наиболее чувствительного сингулярного числа, то это также можно сделать с помощью функционала  $J_{S_\alpha}^i = \|S_\alpha^i\|_i, i = \overline{1, n}$ ; в форме

$$\alpha^* = \arg \max_i J_{S_\alpha}^i. \quad (2.2.120)$$

Если ставится задача оценки доминирующего параметра  $q^*$ , то это можно сделать с помощью функционала  $J_{S_\alpha j} = \|S_{\alpha j}\|; j = \overline{1, p}$  в форме

$$q^* = \arg \max_j J_{S_\alpha j}. \quad (2.2.121)$$

Если на векторе  $\Delta q = \text{col} \{ \Delta q_j; j = \overline{1, p} \}$  вариаций параметров  $q$  относительно номинального значения  $q_0$  построить вектор  $\Delta \alpha = \text{col} \{ \Delta \alpha_j; j = \overline{1, n} \}$  вариаций сингулярных чисел, то эти векторы оказываются связанными соотношениями

$$\Delta \alpha(q_0, \Delta q) = S_\alpha \cdot \Delta q. \quad (2.2.122)$$

Если теперь построить сингулярное разложение матрицы  $S_\alpha$  сингулярной чувствительности

$$S_\alpha = U_\alpha \cdot \Sigma_\alpha V_\alpha^T, \quad (2.2.123)$$

при этом выделить согласованные тройки  $\{U_{\alpha \max}, \alpha_{\alpha \min}, V_{\alpha \min}\}$ , то на фиксированной сфере  $\|\Delta q\| = \text{const}$  в пространстве параметров могут быть сконструированы оценки

$$\max_{\Delta q} \|\Delta \alpha\| = \alpha_{\alpha M} \|\Delta q\|, \quad (2.2.124)$$

$$\min_{\Delta q} \|\Delta \lambda\| = \alpha_{\alpha M} \|\Delta q\| \quad (2.2.125)$$

максимальной и минимальной по норме вариации сингулярных чисел  $N(q)$ , при этом правые сингулярные векторы  $V_{amax}$  и  $V_{amin}$  задают наиболее неблагоприятное и наименее неблагоприятное сочетание вариаций  $\Delta q_j$  ( $j = \overline{1, p}$ ) параметров, порождающих вариации  $\Delta \alpha$  соответственно с нормами (2.2.124) и (2.2.125).

Если задача (2.2.122) решается покомпонентно, то максимальная вариация  $\Delta \alpha_j$ , достижимая на векторе  $\Delta q = \text{col}\{\Delta q_j; j = \overline{1, p}\}$ , определится соотношением

$$\max_{\Delta q} \|\Delta \alpha_i\| = \sum_{j=1}^p \alpha_{iq_j} |\Delta q_j| \text{sgn } \alpha_{iq_j}, \quad (2.2.126)$$

**Пример 2.8.** Проиллюстрируем технологию вычисления функций чувствительности  $\alpha_{iq_j}$  сингулярных чисел  $\alpha_i(q)$  на примере матрицы

$$N(q) = \begin{bmatrix} -2(1+q_1) & 1 \\ 0 & -5(1+q_2) \end{bmatrix}, q_{10}=q_{20} = 0.$$

Матрица  $N(q)$  является треугольной, следовательно, ее диагональные элементы совпадают с собственными значениями  $\lambda_i(q)$  матрицы. По условию задачи варьируемыми элементами матрицы  $N(q)$  являются только диагональные элементы, поэтому решение задачи вычисления функций чувствительности сингулярных чисел  $\lambda_i(q)$  позволяет установить связь вариаций сингулярных чисел матрицы с вариациями ее собственных значений. Следуя изложенной процедуре, заложенной в соотношении (2.116), произведем вычисления.

$$\begin{aligned} N_{q_1} &= \frac{\partial}{\partial q_1} N(q)|_{q=q_0} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; N_{q_2} = \\ &= \frac{\partial}{\partial q_2} N(q)|_{q=q_0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_i: (NN^T)U_i &= \alpha_i^2 U_i; \|U_i\| = 1; V_i: (N^T N)V_i = \\ &= \alpha_i^2 V_i; \|V_i\| = 1 \end{aligned}$$

$$N^T N = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 26 \end{bmatrix}; NN^T = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 25 \end{bmatrix};$$

$$\sigma\{NN^T\} = \sigma\{N^TN\} = \{\alpha_1^2 = 26,2; \alpha_2^2 = 3,8\};$$

$$\Sigma = \text{diag}\{\alpha_1 = 5,17; \alpha_2 = 1,954\};$$

$$U = [U_1 U_2] = \begin{bmatrix} -0,2298 & 0,9732 \\ 0,9732 & 0,2298 \end{bmatrix}; V = [V_1 V_2] = \\ = \begin{bmatrix} 0,0898 & 0,9959 \\ 0,9959 & 0,0898 \end{bmatrix}$$

Вычисление матриц:

$$U^T N_{q_1} V = \\ = \begin{bmatrix} -0,2298 & 0,9732 \\ 0,9732 & 0,2298 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,0898 & 0,9959 \\ 0,9959 & 0,0898 \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} -0,0413 & 0,4577 \\ 0,1748 & -1,9384 \end{bmatrix}'$$

$$U^T N_{q_2} V = \\ = \begin{bmatrix} -0,2298 & 0,9732 \\ 0,9732 & 0,2298 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,0898 & 0,9959 \\ 0,9959 & 0,0898 \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} -4,846 & -0,437 \\ -1,1443 & -0,1032 \end{bmatrix}$$

Из полученных матриц в силу (2.2.116) получаем функции чувствительности сингулярных чисел

$$\alpha_{1q_1} = (U^T N_{q_1} V)_{11} = -0.0413; \alpha_{2q_1} = (U^T N_{q_1} V)_{22} = \\ = -1.9384,$$

$$\alpha_{2q_1} = (U^T N_{q_1} V)_{11} = -4.846; \alpha_{2q_2} = (U^T N_{q_1} V)_{22} = \\ = -0.1032.$$

Матрица сингулярной чувствительности  $S_\alpha$  получает реализацию

$$S_\alpha = \begin{bmatrix} -0.0413 & -4.846 \\ -1.9384 & -0.1032 \end{bmatrix}'$$

которая характеризуется абсолютными нормами строк и столбцов

$$\|S_\alpha^1\| = 4.8873; \|S_\alpha^2\| = 2.0416; \|S_{\alpha_1}\| = 1.9797; \|S_{\alpha_2}\| = \\ = 4.9492.$$

Полученные значения норм позволяют сделать вывод, что наиболее чувствительным является сингулярное число  $\alpha_1 = 517$ , а доминирующим параметром является  $q_2$ . Заметим, что сингулярные числа обладают большей параметрической робастностью (меньшей чувствительностью) по

сравнению с собственными значениями, их вариации связаны соотношениями

$$\Delta\alpha_1 = -0.0413\Delta\lambda_1, \Delta\alpha_2 = -0.1032\Delta\lambda_2.$$

Основной прикладной областью аппарата функций чувствительности сингулярных чисел является анализ чувствительности эллипсоидных показателей качества объектов и систем управления. Эллипсоидные показатели конструируются на эллипсоидных мажорантах и минорантах эллипсоидного покрытия векторных процессов по состоянию, выходу и ошибке. Эллипсоидные мажоранты и миноранты позволяют скаляризовать векторные процессы. Математически эллипсоидные мажоранта и миноранта представляют собой соответственно максимальный и минимальный элементы алгебраического спектра сингулярных чисел некоторой критериальной матрицы  $N$ , сводящей описание процессов в исследуемом объекте или системе к линейной (локально линейной) алгебраической задаче, записываемой или в векторно-матричной форме

$$k = N\chi, \quad (2.2.127)$$

или в скалярной форме

$$k^T \cdot k = \chi^T \cdot N^T \cdot N\chi, \quad (2.2.128)$$

где  $\dim k = \nu, \dim \chi = e, N = (\nu \times e)$  – критериальная матрица.

Если в (2.2.127) и (2.2.128) перейти к евклидовым векторным нормам, то для обеих форм в силу отношения Релея становятся справедливыми неравенства

$$\alpha_m\{N\} \leq \frac{\|k\|}{\|\chi\|} \leq \alpha_M\{N\}, \quad (2.2.129)$$

здесь  $\alpha_m\{N\}, \alpha_M\{N\}$  – соответственно минимальное и максимальное сингулярные числа матрицы  $N$ .

Задача в форме (2.2.127) при исследовании процессов в динамических системах оказывается параметризованной временем  $t$  так, что представление (2.2.127) принимает вид

$$k(t) = N(t) \cdot \chi(0), \quad (2.2.130)$$

что приводит к соотношениям по евклидовым нормам, записываемым в форме

$$\alpha_m\{N(t)\} \leq \frac{\|k(t)\|}{\|\chi_0\|} \leq \alpha_M\{N(t)\}. \quad (2.2.131)$$

В неравенствах (2.131)  $\alpha_m\{N(t)\}, \alpha_M\{N(t)\}$  задают соответственно ормализованные эллипсоидные миноранту и мажоранту векторного

процесса  $x(t)$ , порожденного вектором  $\chi_0$  начального состояния, принадлежащего сфере  $\|\chi_0\| = 1$ .

Если критериальная матрица  $N$  в (2.2.130) параметризована не только временем, но и вектором параметров  $q = q_0 + \Delta q$ , тогда (2.2.130) принимает вид

$$\kappa(t, q) = N(t, q) \cdot \chi(0); N(t, q = q_0) = N(t). \quad (2.2.132)$$

Соотношение (2.2.132) позволяет записать для (2.2.131)

$$\begin{aligned} \alpha_m\{N(t, q)\} \triangleq \alpha_{Nm}(t, q) &\leq \frac{\|\kappa(t, q)\|}{\|\chi(0)\|} \leq \\ &\leq \alpha_{NM}(t, q) \triangleq \alpha_M\{N(t, q)\}. \end{aligned} \quad (2.2.133)$$

Эллипсоидные миноранта  $\alpha_{Nm}(t, q)$  и мажоранта  $\alpha_{NM}(t, q)$ , параметризованные временем  $t$  и вектором параметров  $q$ , ставят задачу конструирования глобальной эллипсоидной мажоранты

$$\begin{aligned} \min_{\Delta q} \alpha_{Nm}\{t, q = q_0 + \Delta q\} = \\ = \alpha_{Nm}(t) + \max_{\Delta q} \Delta \alpha_{Nm}\{t, q_0, \Delta q\} \forall t \end{aligned} \quad (2.2.134)$$

и глобальной эллипсоидной миноранты

$$\begin{aligned} \min_{\Delta q} \alpha_{Nm}\{t, q = q_0 + \Delta q\} = \\ = \alpha_{Nm}(t) - \max_{\Delta q} \Delta \alpha_{Nm}\{t, q_0, \Delta q\} \forall t \end{aligned} \quad (2.2.135)$$

с привлечением аппарата функций чувствительности сингулярных чисел критериальной матрицы  $N(t, q)$  при условии, что  $\|\Delta q\|$  не нарушает корректности аппарата чувствительности в рамках функций чувствительности первого порядка.

Для конструирования критериальных матриц  $N(t)$  в случае возбуждения входа системы

$$\frac{dx}{dt}(t) = F \cdot x(t) + G \cdot g(t); x(0); y(t) = C \cdot x(t) \quad (2.2.136)$$

конечномерным внешним воздействием  $g(t)$  воспользуемся положениями следующего утверждения.

**Утверждение 2.10.** Пусть система (2.2.136) возбуждается конечномерным внешним воздействием  $g(t)$ , генерируемым конечномерной автономной системой

$$\frac{dz}{dt}(t) = \Gamma \cdot z(t), z(0); g(t) = P \cdot z(t), \quad (2.2.137)$$

где  $\Gamma \in R^{l \times l}$ ;  $P \in R^{m \times l}$ ;  $z \in R^l$ ;  $g \in R^m$ . Тогда, если матрица  $T$  удовлетворяет матричному уравнению Сильвестра

$$T \cdot \Gamma - F \cdot T \cdot z(0) = G \cdot P, \quad (2.2.138)$$

то для системы (2.2.136) оказываются справедливыми представления

$$\begin{aligned} x(t) &= [e^{Ft} \cdot T e^{\Gamma t} - T] \begin{bmatrix} x(0) \\ z(0) \end{bmatrix} = \\ &= e^{Ft} x(0) + (\Gamma \cdot x e^{\Gamma t} - e^{Ft} T) z(0) \end{aligned} \quad (2.2.139)$$

$$y(t) = C \cdot x(t) = C e^{Ft} x(0) + C(T e^{\Gamma t} - e^{Ft} T) \cdot z(0) \quad (2.2.140)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= g(t) - y(t) = \\ &= (P - C \cdot T) e^{\Gamma t} z(0) + C e^{Ft} (T \cdot z(0) - x(0)) \end{aligned} \quad (2.2.141)$$

Доказательство утверждения 2.10 приведено в приложении 4.

Нетрудно видеть, что представление (2.2.139)–(2.2.141) содержит несколько задач вида (2.2.130). Первая задача – для полного движения по вектору состояния, в которой следует в силу (2.2.130) и (2.2.139) положить

$$\begin{aligned} \chi(0) &= \\ &= [x^T(0), z^T(0)]^T; N(t) = [e^{Ft} \cdot T e^{\Gamma t} - e^{Ft} \cdot T]; q(t) = \\ &= x(t) \end{aligned} \quad (2.2.142)$$

Вторая задача – для свободного движения по состоянию, для которой следует положить

$$\chi(0) = x(0); N(t) = e^{Ft}; q(t) = x(t) \quad (2.2.143)$$

Третья задача – для вынужденного движения по вектору состояния, для которого следует положить

$$\chi(0) = z(0); N(t) = T \cdot e^{\Gamma t} - e^{Ft} \cdot T; q(t) = x(t) \quad (2.2.144)$$

Нетрудно видеть, что задача (2.2.144) декомпозируется на задачу для установившегося движения по состоянию с компонентами

$$\chi(0) = z(0); N(t) = T \cdot e^{\Gamma t}; q(t) = x(t) \quad (2.2.145)$$

Аналогичные задачи вида (2.2.130) содержатся в представлении (2.140) для вектора выхода, в которых следует положить  $q(t) = x(t); N(t) = C e^{Ft} t; q(0) = x(0)$  для компонента свободного движения и  $q(t) = x(t); N(t) = C(T e^{\Gamma t} - e^{Ft} T); \chi(0) = z(0)$  для компонента вынужденного движения соответственно. В представлении (2.2.141) для вектора ошибки интерес представляет установившаяся составляющая ошибки, в этом случае для сведения задачи к виду (2.2.130) следует положить  $q(t) = \varepsilon(t), N(t) = (P - C \cdot T) e^{\Gamma t}$  и  $\chi(0) = z(0)$ .



Если матричные компоненты представления (2.2.136) зависят от вектора параметров  $q = q_0 + \Delta q$  так, что они принимают вид  $F(q)$  и  $G(q)$ , то перечисленные задачи сводятся к виду (2.2.132), в которой матрица  $N(t, q)$  содержит матрицы  $F(q)$  и  $T(q)$ . Следует заметить, что при вычислении матриц чувствительности  $F_{q_j}$  и  $T_{q_j} (j = \overline{1, p})$  в первом случае используется дифференцирование  $F(q)$  по  $q_j$  в точке  $q = q_0$ , а во втором  $T_{q_j}$  ищется как решение продифференцированного по  $q_j$  в точке  $q = q_0$  уравнения Сильвестра (2.2.138), принимающего при  $q \neq q_0$  вид

$$T(q) \cdot \Gamma - F(q) \cdot T(q) = G(q) \cdot P, \quad (2.2.146)$$

в результате чего получим

$$T_{q_j} \cdot \Gamma - F \cdot T_{q_j} = G_{q_j} \cdot P + F_{q_j} \cdot T; j = \overline{1, p} \quad (2.2.147)$$

К задаче вида (2.2.127) сводится и задача анализа такого структурного свойства, как управляемость. В этом случае следует положить  $k = x(0)$ ,  $N = W_y$ , где  $W_y$  – матрица управляемости, представляемая в виде

$$W_y = [B \quad AB \quad A^2B \quad L \quad A^{n-1}B] \quad (2.2.148)$$

$\chi = V$  – вектор стратегии управления на интервале  $T = [0, t_k]$ , задаваемый в форме

$$V = \text{col} \left\{ - \int_0^{t_k} u(\tau) \beta_i d(\tau); i = \overline{0, n-1} \right\},$$

где  $\beta_i(-\tau): e^{-A\tau} = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i(-\tau) A^i$ .

Вычисления минимального  $\alpha_m\{W_y\}$  и максимального  $\alpha_M\{W_y\}$  сингулярных чисел дают количественную оценку в виде минорант и мажорант управляемости ОУ с парой матриц  $(A, B)$ . Связанные с этими сингулярными числами элементы  $U_m\{W_y\}$  и  $V_m\{W_y\}$  левого сингулярного базиса определяют положения подпространств наилучшей и наихудшей управляемости. Если матрицы ОУ зависят от вектора параметров  $q = q_0 + \Delta q$ , то пара  $\{A(q), B(q)\}$  порождает матрицу управляемости

$$\begin{aligned} W_y(q) &= \\ &= [B(q) \quad A(q)B(q) \quad A^2(q)B(q) \quad L \quad A^{n-1}(q)B(q)] \end{aligned} \quad (2.2.149)$$

Как следствие, зависимыми от  $q$  становятся и элементы алгебраического спектра  $\sigma\{W_y(q)\} = \{\alpha_{yi}(q); i = \overline{1, n}\}$  сингулярных чисел, вычисление их функций чувствительности  $\alpha_{yiq_j} (j = \overline{1, p})$  в точ  $q = q_0$  позволяет построить матрицу чувствительности  $S_\alpha\{W_y\}$ , нормы

$\|S_{\alpha_j}\{W_y\}\|$  ( $j = \overline{1, p}$ ) столбцов которой позволяет ранжировать параметры  $q_j$  по степени влияния на эллипсоидные оценки управляемости.

К задаче вида (2.2.128) приводят задачи конструирования на тройке матриц  $(A, B, C)$  системы управления (2.2.136) системных грамианов, вид которых приведен в приложении 7. Задача сводится к схеме с использованием мажорант и минорант, какими являются максимальное и минимальное сингулярные числа данного системного грамиана. Если тройки матриц ОУ и системы зависят от вектора параметров  $q$  так, что они принимают вид  $\{A(q), B(q), C(q)\}, \{A(q), G(q), C(q)\}$  соответственно, то функции чувствительности эллипсоидных мажорант и минорант эллипсоидных покрытий, порождаемых эволюционирующими грамианами, определяются в силу алгоритмов вычисления функций чувствительности корня квадратного  $\alpha_M^{1/2}(\ast)$  и  $\alpha_m^{1/2}$  экстремальных сингулярных чисел системного грамиана  $(\ast)$ .

К задаче вычисления системных грамианов примыкает задача вычисления матриц дисперсий (ковариаций) вектора состояния

$$D_x = M\{x(t)x^T(t)\}, \quad (2.2.150)$$

где  $M\{(\ast)\}$  – операция вычисления математического ожидания процесса  $(\ast)$ , системы (2.2.136), возбуждаемой внешним стохастическим воздействием  $g(t) = \omega(t)$ , стационарным в широком смысле, с матрицей интенсивности  $Q$  как решения матричного уравнения типа уравнения Ляпунова

$$F \cdot D_x + D_x \cdot F^T = -G \cdot Q \cdot G^T \quad (2.2.151)$$

Если построить SVD-разложение матрицы дисперсий  $D_x$ , выделить две согласованные тройки  $\{\alpha_M(D_x), U_M, V_M\}$  и  $\{\alpha_m(D_x), U_m, V_m\}$ , то эллипсоидные мажоранты и миноранты эллипсоидов правдоподобия хорошо скаляризуют векторные стохастические процессы. Зависимость  $F(q), G(q)$  матриц системы (2.2.136) от вектора параметров  $q = q_0$  порождает задачу параметрической чувствительности эллипсоидных показателей качества процессов по дисперсии вектора состояния  $\alpha_M\{D_x(q)\}$  и  $\alpha_m\{D_x(q)\}$ , которая решается с использованием аппарата функций чувствительности сингулярных чисел. Нетрудно видеть, что в случае необходимости анализировать поведение системы по стохастическим компонентам вектора  $y(t)$  эта задача сводится к предыдущей. Действительно, оказывается справедливой цепочка равенств

$$\begin{aligned} D_y &= M\{y(t)y^T(t)\} = C \cdot M\{x(t) \cdot x^T(t)\} \cdot C^T = \\ &= C \cdot D_x \cdot C^T \end{aligned} \quad (2.2.152)$$

В случае зависимости  $y(t, q)$  в силу  $F(q), G(q)$  становится справедливым соотношение

$$D_y(q) = C \cdot D_x(q) \cdot C^T, \quad (2.2.153)$$

и задача с помощью эллипсоидных мажоранты и миноранты сводится к анализу чувствительности сингулярных чисел матрицы  $D_y(q)$ .

Задача анализа параметрической чувствительности корреляционных свойств стохастических процессов по вектору состояния и выхода системы также сводится к анализу чувствительности сингулярных чисел корреляционных матриц  $R_x(\tau)$  и  $R_y(\tau)$ , для которых оказываются справедливыми соотношения

$$\begin{aligned} R_x(\tau)^\Delta &= M\{x(t+\tau) \cdot x^T(t)\} = M\{e^{F\tau} x(t) x^T(t)\} = \\ &= e^{F\tau} \cdot D_x, \tau > 0, \end{aligned} \quad (2.2.154)$$

$$\begin{aligned} R_y(\tau)^\Delta &= M\{y(t+\tau) y^T(t)\} = C e^{F\tau} D_x C^T = \\ &= C \cdot R_x(\tau) c^T, \tau > 0, \end{aligned} \quad (2.2.155)$$

Экстремальные элементы алгебраических спектров сингулярных чисел корреляционных матриц  $R_x(\tau)$  и  $R_y(\tau)$  порождают скалярные мажоранту и миноранту корреляционных функций, с помощью которых строится мажоранта  $\tau_{KM}$  и миноранта  $\tau_{km}$  интервала корреляции. Если матричные компоненты модели системы (2.2.136) оказываются параметризованными вектором  $q = q_0 + \Delta q$  в форме  $F(q)$  и  $G(q)$ , то становятся параметризованы  $q$  и матрицы в (2.2.154), (2.2.155), что приводит к представлениям

$$\begin{aligned} R_x(\tau, q) &= e^{F(q) \cdot \tau} \cdot D_x(q); R_y(\tau, q) = C \cdot R_x(q \cdot \tau) \cdot c^T, \tau > \\ &> 0, \end{aligned} \quad (2.2.156)$$

Дальнейшее исследование параметрической чувствительности корреляционных свойств системы (2.2.136) должно быть произведено применительно к сингулярным числам  $\alpha_M\{R_y(\tau, q)\}$ ,  $\alpha_m\{R_x(\tau, q)\}$  и  $\alpha_m\{R_x(\tau, q)\}$ .

И наконец, завершая рассмотрение возможностей аппарата чувствительности сингулярных чисел, рассмотрим сферу его применения на матрицы спектральных плотностей ММО-систем вида (2.2.136), опираясь на положения следующего утверждения.

**Утверждение 2.11.** Матрицы спектральных плотностей системы (2.136) по состоянию  $S_x(j\omega)$  и по выходу  $S_x(j\omega)$ , определяемые соотношениями

$$S_x(j\omega)^\Delta = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (2.2.157)$$

$$\begin{aligned}
S_y(j\omega)^\Delta &= \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} R_y(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \\
&= \int CR_x(\tau)C^T e^{-j\omega\tau} d\tau = CS_x(j\omega)C^T,
\end{aligned}
\tag{2.2.158}$$

могут быть вычислены с помощью выражений

$$S_x(j\omega) = -2F(F^2 + \omega^2 I)^{-1}D_x, \tag{2.2.159}$$

$$S_y(j\omega) = CS_x(j\omega)C^T = -2CF(F^2 + \omega^2 I)^{-1}D_x C^T \tag{2.2.160}$$

Доказательство утверждения 2.11 приведено в приложении 4.

Полученные матрицы скаляризуются элементами алгебраических спектров их сингулярных чисел  $\sigma_\alpha\{S_x(j\omega)\}$  и  $\sigma_\alpha\{S_y(j\omega)\}$ , причем использование их экстремальных элементов становится основой конструирования  $S_{xM}(j\omega)$ ,  $S_{xm}(j\omega)$ ,  $S_{yM}(j\omega)$ ,  $S_{ym}(j\omega)$  – соответственно эллипсоидных мажорант и минорант функций спектральных плотностей ММО-систем по состоянию и выходу. Вариация  $\Delta q$ , вектора параметров  $q = q_0 + \Delta q$  матричных компонентов представления системы (2.2.136) приводит к вариациям эллипсоидных мажорант и минорант спектральных плотностей, которые могут быть оценены с помощью аппарата функций чувствительности сингулярных чисел.

Таким образом, аппарат функций чувствительности алгебраических и геометрических спектров проблемноориентированной критериальной матрицы решает основные задачи анализа процессов в динамических системах, допускающих линейное (локально-линейное) модельное представление (2.2.136), а также объекта управления на предмет априорного ранжирования его параметров, которые могут претерпевать вариации. Более того, результаты получены в терминах функций чувствительности, а с небольшой модификацией могут быть записаны и в терминах конечных приращений.

### ***Оценка чувствительности с помощью чисел обусловленности матриц***

Число обусловленности как одна из количественных характеристик квадратных матриц является одним из матричных неинвариантов, т.е. существенным образом зависит от базиса представления матрицы. Это обстоятельство обнаружило возможность использования чисел обусловленности матриц для решения большого круга алгебраических задач, связанных с оценкой чувствительности матричных процедур к погрешностям представления компонентов этих процедур. Ниже рассматриваются возможности использования числа обусловленности для

оценки потенциальной чувствительности модельных представлений объектов и систем управления с целью построения робастных моделей, а также для оценки вариаций элементов алгебраического спектра собственных значений матрицы состояния динамической системы при оцененной погрешности представления этой матрицы. Полученные оценки относятся к классу экспресс-оценок, они должны конструироваться на начальном этапе процесса математического проектирования системы.

Основные результаты изложим в виде системы утверждений.

**Утверждение 2.12.** Рассмотрим линейную алгебраическую задачу (ЛАЗ)

$$k = N\chi, \quad (2.2.161)$$

в которой векторы  $k, \chi \in R^m$ ,  $N$  – квадратная матрица, согласованная по размерности с вектором  $k$  и  $\chi$ ,  $N \in R^{m \times m}$ .

Предположим, что вектор  $\chi$  в результате процедур измерения компонентов, округления, представления в вычислительной среде компьютера и т.д. получил погрешность  $\Delta\chi$  его представления. Предположим, что по тем же причинам с погрешностью  $\Delta N$  известна и матрица  $N$ . Как следствие, решение линейной алгебраической задачи (2.2.161) в виде вектора  $k$  приобретает вариацию, удовлетворяющую матричному уравнению в вариациях

$$\Delta k = N\Delta\chi + \Delta N\chi + \Delta N\Delta\chi. \quad (2.2.162)$$

Если перейти от абсолютных погрешностей (вариаций)  $\Delta k, \Delta N, \Delta\chi$  к относительным, задав их соотношениями

$$\delta_\Theta = \frac{\|\Delta k\|}{k}; \delta_N = \frac{\|\Delta N\|}{N}; \delta_\chi = \frac{\|\Delta\chi\|}{\chi}, \quad (2.2.163)$$

то относительные погрешности (2.2.163) в силу (2.2.162) оказываются связанными неравенством

$$\delta_\Theta \leq C\{N\} \cdot (\delta_k + \delta_N + \delta_N\delta_\chi), \quad (2.2.164)$$

где  $C\{N\}$  – число обусловленности матрицы  $N$ , задаваемое соотношением

$$C\{N\} = \|N\| \|N^{-1}\|. \quad (2.2.165)$$

Доказательство утверждения 2.12 приведено в приложении 4.

Заметим, что число обусловленности (2.2.165) матрицы  $N$  численно зависит от выбранной матричной нормы, но при любой норме минимальное его значение равно единице ( $\min_N C\{N\} = 1$ ), что соответствует случаю идеальной обусловленности матрицы  $N$ , а максимальное его значение равно бесконечности ( $\max_N C\{N\} = \infty$ ), что соответствует случаю вырожденности

матрицы  $N$ . Если в качестве матричных норм  $\|N\|$  и  $\|N^{-1}\|$  при вычислении числа обусловленности (2.2.165) используются спектральные нормы матриц  $N$  и  $N^{-1}$ , то (2.2.165) принимает вид

$$C\{N\} = \|N\| \cdot \|N^{-1}\| = \alpha_M(N) \cdot \alpha_m^{-1}(N), \quad (2.2.166)$$

где  $\alpha_M(N)$  и  $\alpha_m(N)$  – соответственно наибольшее и наименьшее сингулярные числа матрицы  $N$ . Выражение (2.2.166) имеет прозрачную геометрическую интерпретацию. Так, если с помощью (2.2.161) отображается сфера  $\|\chi\| = \text{const}$  в эллипсоид с полуосями максимальной длины  $\alpha_M(N)\|\chi\|$  и минимальной длины  $\alpha_m(N)\|\chi\|$ , то число обусловленности, вычисленное в силу (2.166), определяет степень деформации сферы при этом отображении. Если в SVD разложении матрицы  $N$  выделить две тройки  $U_m, \alpha_m(N), V_m$  и  $U_M, \alpha_M(N), V_M$ , то максимальная относительная погрешность  $\delta_k$  в задаче (2.2.161) имеет место, когда номинальный вектор  $\chi \in \varphi\{V_m\}$ , а вектор погрешности  $\Delta\chi \in \varphi\{V_M\}$ , где  $\varphi\{*\}$  – линейная оболочка, натянутая на систему векторов (\*). Следует сказать, что число обусловленности в форме (2.2.166) допускает расширение его трактовки путем введения отдельных чисел  $C_1\{N\}$  обусловленности матрицы  $N$ , определяемых как

$$C_1\{N\} = \alpha_M(N) \cdot \alpha_1^{-1}(N), \quad (2.2.167)$$

где  $\alpha_1^{-1}(N)$  –  $1$ -е сингулярное число, совпадающее с глобальным (2.2.166), когда "1" принимает смысл "m". Наличие отдельных чисел обусловленности (2.2.167) позволяет контролировать всю картину деформации сферы  $\|\chi\| = \text{const}$  при отображении (2.2.161) с матрицей  $N$ .

Возвращаясь к основному результату утверждения 2.12 (2.2.164), следует сказать, что содержательно число обусловленности  $C\{N\}$  представляет собой коэффициент усиления относительных ошибок  $\delta_\chi$  и  $\delta_N$  задания (знания) компонентов ЛАЗ (2.2.161). Следует также заметить, что в силу определения (2.2.165) числа обусловленности прямая (2.161) и обратная ЛАЗ  $\chi = N^{-1}q$  оказываются обусловленными так, как

$$C_1\{N^{-1}\} = \|N^{-1}\| \|(N^{-1})^{-1}\| = \|N^{-1}\| \|N\| = C\{N\}. \quad (2.2.168)$$

Если матрица  $N$  является не квадратной, а прямоугольной, то для нее может быть введено обобщенное число обусловленности, задаваемое в форме

$$C\{N\} = \|N\| \|N^+\|, \quad (2.2.169)$$

где  $N^+$  – матрица, псевдообратная к исходной матрице  $N$ .

Как указывалось в начале параграфа, одной из областей применения аппарата чисел обусловленности является построение хорошо обусловленных модельных представлений объектов и систем управления, обладающих матричными компонентами с минимальными числами

обусловленности, а, следовательно, являющихся модельно робастными. Задача построения робастного модельного представления динамических систем в основном решается с помощью выбора базиса представления матриц системы и разумной ее размерности. Наибольшей модельной робастностью обладает внутреннее сбалансированное модельное (ВСМ) представление конструируемое на основе системного кроссграмиана. Близкими к ВСМ представлению обладает представление, использующее диагональную (или блочно-диагональную) форму записи матрицы состояния системы. Низкой модельной робастностью обладает представление системы, использующее в матрице состояния Фробениусов базис. Проблемы модельной робастности заметно возрастают с ростом размерности системы. Уже системы четвертого порядка требуют повышенного внимания к обусловленности матричных компонентов модели состояния, при размерностях системы 6–8 и выше проблема требует сверхвысокого внимания, особенно если алгоритмическое обеспечение задач синтеза опирается на решение линейных матричных уравнений.

Так, если в процессе синтеза закона управления приходится решать линейное матричное уравнение вида

$$C\{N\} = \|N\| \|N^+\|,$$

относительно матрицы  $Q$ , то в качестве оценки обусловленности этого уравнения с помощью числа обусловленности используется значение, вычисленное в силу соотношения

$$C\{MY\} = \max_{i,j} \{\alpha_i(P) + \alpha_j(R)\} \left[ \min_{i,j} \{\alpha_i(P) + \alpha_j(R)\} \right]^{-1}. \quad (2.2.170)$$

где  $C\{MY\}$  – число обусловленности матричного уравнения (МУ) вида (2.2.169), к коим относятся уравнения Ляпунова и Сильвестра.

Завершая рассмотрение затронутой проблемы, следует заметить, что числа  $C\{(*)\} \geq 500 - 1000$  уже должны настораживать.

**Пример 2.9.** Рассмотрим ЛАЗ (2.2.161) с вектором  $\chi$  и матрицей  $N$ , имеющими реализацию

$$\chi = \begin{bmatrix} 4.1 \\ 9.7 \end{bmatrix}; N = \begin{bmatrix} -66 & 28 \\ 970 & -41 \end{bmatrix}.$$

Точное решение ЛАЗ (2.2.161) дает результат  $\kappa = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ .

Возмутим задачу погрешностью  $\Delta\chi$  вектора  $\chi$ :  $\Delta\chi = \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0 \end{bmatrix}$ .

Таким образом, относительная погрешность  $\delta_\chi$  задания вектора  $\chi$  в силу (2.2.163), если воспользоваться абсолютной нормой компонентов

$$\|\Delta\chi\| = \left\| \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0 \end{bmatrix} \right\| = 0.01; \|\chi\| = \left\| \begin{bmatrix} 4.1 \\ 9.7 \end{bmatrix} \right\| = 13.8,$$

составляет

$$\delta_x = \frac{0.01}{13.8} = 7.246 \cdot 10^{-4} (0.0724\%).$$

Оценим ожидаемую относительную погрешность  $\delta_\Theta$  ЛАЗ (2.2.161), определяемую (2.2.164) при  $\delta_N = 0$ ,

$$\delta_\Theta \leq C\{N\} \cdot \delta_x$$

Для этого вычислим число обусловленности  $C\{N\}$ , используя столбцовую матричную норму для матрицы  $N$  и  $N^{-1}$ , имеющей представление

$$N^{-1} = \begin{bmatrix} 4.1 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix}$$

так, что  $\|N\| = 163$ ,  $\|N^{-1}\| = 13.8$ , в результате чего для числа обусловленности  $C\{N\}$  получаем в силу (2.2.165)

$$C\{N\} = \|N\| \cdot \|N^{-1}\| = 163 \cdot 13.8 = 2249.9$$

Таким образом, для  $\delta_k$  получим мажорирующую оценку

$$\delta_k \leq 2249.9 \cdot 7.246 \cdot 10^{-4} = 1.63 (163\%)$$

Нетрудно видеть, что если неравенство близко к равенству, то следует ожидать мультиплицирования относительной ошибки  $\delta_x$  неточности знания вектора  $x$  в относительную ошибку  $\delta_\Theta$  вычисления в ЛАЗ (2.2.161) в 2249,4 раз. Проверим это точным решением возмущенной задачи (п. 6.35), которая в приращениях в силу (2.2.162) при  $\Delta N = 0$  принимает вид

$$\Delta\Theta = N \cdot \Delta x = \begin{bmatrix} -66 & 28 \\ 37 & -41 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.66 \\ 0.97 \end{bmatrix}$$

Вычисление абсолютных норм для векторов  $\Delta k$  и  $k$  дает

$$\|\Delta k\| = \left\| \begin{bmatrix} -0.66 \\ 0.97 \end{bmatrix} \right\| = 1.63; \|k\| = \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\| = 1.$$

Для относительной погрешности  $\delta_\Theta = \frac{\|\Delta\Theta\|}{\|\Theta\|} = \frac{1.63}{1} = 1.63 (163\%)$ .

Сконструируем оценку  $\hat{C}\{N\}$  с помощью неравенства (2.2.164) в предположении его близости к равенству, тогда получим

$$\hat{C}\{N\} = \frac{\delta_k}{\delta_x} = \frac{1.63}{7.246} \cdot 10^4 = 2249.4$$

Таким образом, оценка  $\hat{C}\{N\}$  числа обусловленности  $C\{N\}$ , полученная на основе содержательного его определения как коэффициента усиления относительной погрешности ЛАЗ (2161), совпала с вычисленной на основе определения (2.2.165) значением  $C\{N\}$ .



Итак, погрешность представления вектора  $\chi$  в 0.07246%, в результате плохой обусловленности матрицы  $N(C\{N\} = 2249.4)$  породила погрешность вычисленного вектора  $q$  в 163%, что ровно в 2249.4 раза больше погрешности исходных данных.

Теперь воспользуемся возможностями числа обусловленности матриц для оценки абсолютных вариаций элементов алгебраического спектра собственных значений при оцененной по норме погрешности представления исследуемой матрицы. Проблемно эта задача сориентирована на исследование модальной робастности, т.е. робастности спектра собственных значений матрицы  $F = A - B \cdot K$  состояния системы ((2.2.137).

Для решения поставленной задачи воспользуемся следующим утверждением.

**Утверждение 2.13.** Пусть матрица  $F$  состояния системы является матрицей простой структуры, тогда оценка  $\|\Delta F\|$  вариации  $\Delta F$  матрицы  $F$  и оценка  $\|\Delta\chi\|$  вариации  $\Delta\chi = \text{col}\{\Delta\chi_i; i = \overline{1, n}\}$  вектора собственных значений  $\chi = \text{col}\{\chi_i; \det(\lambda \cdot I - F) = 0; i = \overline{1, n}\}$ , порождаемая вариацией  $\Delta F$ , связаны неравенством

$$\|\Delta\chi\| \leq C\{M\} \cdot \|\Delta F\|, \quad (2.2.1711)$$

где  $C\{M\}$  – число обусловленности матрицы  $M$  приведения матрицы  $F$  к диагональному виду

$$\Lambda = \text{diag}\{\chi_i; i = \overline{1, n}\} \quad (2.2.1722)$$

в силу матричного условия подобия

$$M \cdot \Lambda = F \cdot M, \quad (2.2.173)$$

где  $M: \|M_i\| = 1; i = \overline{1, n}; M_i$  –  $i$ -й столбец  $M$ .

Доказательство утверждения приведено в приложении

Следует заметить, что если на неравенстве (2.2.171) построить оценку  $\Delta\chi_M$  сверху для оценки  $\|\Delta\chi\|$  вариации  $\Delta\chi$ , определив ее соотношением

$$\Delta\chi_M = C\{M\} \cdot \|\Delta F\|, \quad (2.2.174)$$

то неравенство (2.2.171), записанное в форме

$$\|\Delta\chi\| \leq \Delta\chi_M, \quad (2.2.175)$$

будет в общем случае обладать заметной достаточностью. Действительно, в силу цепочки равенств и неравенств (п. 6.51), появившейся при доказательстве (2.2.171), итоговый ее фрагмент имеет вид

$$\|\Delta\chi\| \leq \|M^{-1} \cdot \Delta F \cdot M\| \leq \|M^{-1}\| \cdot \|\Delta F\| \cdot \|M\| = C\{M\} \cdot \|\Delta F\|, \quad (2.2.176)$$

в котором содержится переход от нормы произведения матриц к произведению норм матриц. Этот переход обладает в общем случае большой достаточностью.

**Пример 2.10.** В качестве примера рассматривается матрица  $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -7 \end{bmatrix}$ , такая, что  $\sigma\{F\} = \{\chi_1 = -2; \chi_2 = -5\}$ . Матрица приобретает вариацию  $\Delta F$ , имеющую представление  $F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix}$  так, что возмущенная матрица  $F + \Delta F$  имеет реализацию  $F + \Delta F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9.5 & -7 \end{bmatrix}$  со спектром собственных значений

$$\sigma\{F + \Delta F\} = \{\chi_1 + \Delta\chi_1 = -1.8334; \chi_2 + \Delta\chi_2 = -5.1667\}$$

Вычисления компонентов неравенства (2.171) дают:

$$\|\Delta F\| = 0.5;$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \chi_1 & \chi_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (1 + \chi_1^2)^{-0.5} & 0 \\ 0 & (1 + \chi_2^2)^{-0.5} \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} 0.4472 & 0.1961 \\ -0.8944 & -0.9806 \end{bmatrix}$$

Спектр  $\sigma_\alpha\{M\} = \{\alpha_1 = 4.7329; \alpha_2 = 0.6326\}$ , откуда для спектрального числа обусловленности имеем  $C\{M\} = \alpha_M(M) \cdot \alpha_M^{-1}(M) = 7.48$ . Тогда оценочное неравенство (2.171) принимает вид  $\|\Delta\chi\| \leq C\{M\} \cdot \|\Delta F\| = 7.48 \cdot 0.5 = 3.74$ . Если полученную оценку рассматривать как оценку экстремальной векторной нормы  $\|\Delta\chi = \text{col}\{\Delta\chi_1, \Delta\chi_2\}\| = \max_{i=1,2} |\Delta\chi_i| = 3.74$ , то в силу этой оценки для  $\chi_i + \Delta\chi_i$  получим оценку интервалов принадлежности

$$\chi_1 + \Delta\chi_1 \in [-2 - 3.74 = -5.74, -2 + 3.74 = 1.74]$$

$$\chi_2 + \Delta\chi_2 \in [-5 - 3.74 = -8.74, -5 + 3.74 = 1.26]$$

Заметим, что если бы матрица  $M$  была идеально обусловлена и характеризовалась числом обусловленности  $C\{M\} = 1$ , то оценочное неравенство (2.2.171) приняло бы вид  $\|\Delta\chi\| \leq C\{M\} \cdot \|\Delta F\| = 1 \cdot 0.5 = 0.5$ , как следствие,  $\chi_i + \Delta\chi_i$  принадлежали бы интервалам

$$\chi_1 + \Delta\chi_1 \in [-2 - 0.5 = -2.5, -2 + 0.5 = -1.5]$$

$$\chi_2 + \Delta\chi_2 \in [-5 - 0.5 = -5.5, -5 + 0.5 = -4.5]$$

Уменьшение числа обусловленности уменьшает достаточность оценки (2.2.171), но она сохраняется, что легко обнаруживается при сравнении с

$$\begin{aligned} \sigma\{F + \Delta F\} &= \\ &= \{\chi_1 + \Delta\chi_1 = -2 + 0.1667 = -1.8333; \chi_2 + \Delta\chi_2 = \\ &= -5 - 0.1667 = -5.1667\} \end{aligned}$$

Следует заметить, что обнаруженная избыточность не является методической. Действительно, если воспользоваться начальным фрагментом (п. 6.51), построенным на равенствах, то получим

$$\begin{aligned} \|\Delta\chi\| &= \|\text{col}\{(M^{-1} \cdot \Delta F \cdot M)_{\ddot{u}}; i = \overline{1, n}\}\| = \\ &= \|\text{diag}\{(M^{-1} \cdot \Delta A_{\Sigma} \cdot M)_{\ddot{u}}; i = \overline{1, n}\}\| \end{aligned}$$

Для формирования этих равенств построим матричный блок

$$\begin{aligned} (M^{-1} \cdot \Delta F \cdot M &= \\ &= \begin{bmatrix} 3.727 & 0.7453 \\ -3.3993 & -1.6997 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix} \cdot \\ &\cdot \begin{bmatrix} 0.4472 & 0.1961 \\ -0.8944 & -0.9806 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1666 & 0.073 \\ -0.38 & -0.1666 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

откуда для элементов приведенного равенства получаем

$$\begin{aligned} \Delta\lambda &= \begin{bmatrix} \Delta\chi_1 \\ \Delta\chi_2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0.1666 \\ -0.1666 \end{bmatrix}; \text{diag}\{(M^{-1} \cdot \Delta A \cdot M)_{\ddot{u}}; i = 1, 2\} = \\ &= \begin{bmatrix} 0.1666 & 0 \\ 0 & -0.1666 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

при этом  $\|\Delta\chi\|_{\infty} = \|\text{diag}\{(M^{-1} \cdot \Delta A \cdot M)_{\ddot{u}}; i = \overline{1, 2}\}\| = 0.1666$ , что в точности совпадает с оценкой вариации  $\Delta\chi_1$  и  $\Delta\chi_2$ , полученной вычислением спектра  $\sigma\{F + \Delta F\}$ . Но уже  $\|\text{diag}\{(M^{-1} \cdot \Delta A \cdot M)_{\ddot{u}}; i = \overline{1, 2}\}\|_{\lambda} = 0.1666 \langle \|M^{-1} \cdot \Delta A \cdot M\|_{\lambda} = 0.453$ . И, наконец,  $\|M^{-1} \cdot F \cdot M\|_{\lambda} \langle \|M^{-1}\| \cdot \|F\| \cdot \|M\| = C\{M\} \cdot \|F\| = 7.48 \cdot 0.5 = 3.74$ .

В заключение данного параграфа рассмотрим проблемную область теории управления, связанную с конструированием систем сравнения в классе экспоненциальных покрытий минимальной достаточности. В системах сравнения минимальной достаточности в классе экспоненциальных покрытий, конструируемых в функциональном базисе фундаментальной матрицы исследуемой системы, число обусловленности оказывается одним из ключевых показателей. Системы сравнения являются эффективным способом сжатия информации о процессах по вектору состояния систем высокого порядка. В основном практическое использование нашли мажорирующие системы сравнения. Идея конструирования мажорирующей системы сравнения состоит в экспоненциальной мажоризации, осуществляемой средствами функционального базиса фундаментальной матрицы системы, максимального сингулярного числа этой матрицы для каждого момента

времени. Проиллюстрируем эту идею на примере свободного движения системы (2.2.137)  $\frac{dx(t)}{dt} = F \cdot x(t) + G \cdot g(t); x(0)$ , где  $F$  – гурвицева матрица простой структуры. Основные положения изложим с помощью утверждений.

**Утверждение 2.14.** Пусть  $\zeta_M(t)$  – решение однородной мажорирующей скалярной экспоненциальной системы сравнения (СЭСС)

$$\frac{d\zeta_M(t)}{dt} + \mu_M \cdot \zeta_M(t) = 0; \zeta_M(0) \geq \beta_M \cdot \|x(0)\|. \quad (2.2.177)$$

Тогда оказываются справедливыми оценочные для решений  $x(t) = x(t, x(0), g(t) \equiv 0) = x(t, x(0))$  однородной версии системы (2.2.137) неравенства

$$\|x(t, x(0))\| \leq \alpha_M \{e^{F \cdot t}\} \cdot \|x(0)\| \leq \zeta_M(t), \quad (2.2.178)$$

при этом экспоненциальное покрытие  $\zeta_M(t)$  обладает минимальной достаточностью, т.е. максимальной близостью к эллипсоидной мажоранте, если параметры СЭСС (2.2.177) определены в силу соотношений

$$\mu_M = \min_i \{|\operatorname{Re}(\lambda_i)|\}, \beta_M = C\{M\}, \quad (2.2.179)$$

где  $\lambda_i, M_i$  – соответственно собственные значения и вектор матрицы  $F, \|M_i\| = 1, C\{M\}$  – число обусловленности модальной матрицы  $M$ , построенной на собственных векторах  $M_i$  единичной нормы.

Доказательство утверждения 2.14 приведено в приложении 4.

Теперь допустим, что линейная (локально линейная) система (2.2.137) такова, что матрица  $F$ , зависящая от  $p$ -мерного вектора параметров  $q \in R^p, q = q_0 + \Delta q$ , претерпевает вариации, порожденные вариациями  $\Delta q$  вектора параметров относительно его номинального значения так, что

$$F(q) = F(q = q_0 + \Delta q) \neq F(q_0) = F. \quad (2.2.180)$$

Тогда однородная версия системы (2.2.136) при  $q \neq q_0$  принимает вид

$$\frac{dx(t, q)}{dt} = F(q) \cdot x(t, q); x(t, q)|_{t=0} = x(0), \quad (2.2.181)$$

при этом  $\Delta q$  такова, что сохраняется корректность аппарата теории чувствительности в рамках функций чувствительности первого порядка  $\Delta q \in [\underline{\Delta q}, \overline{\Delta q}]$ , матрица  $F(q)$  – гурвицева и простой структуры при вариациях  $\Delta q$  в указанных пределах.

Оценим вариации, которые претерпевают параметры мажорирующей скалярной экспоненциальной системы сравнения. Очевидно, для свободного движения параметрически возмущенной системы (2.2.181)  $x(t, x(0), q = q_0 + \Delta q)$  оказываются справедливыми положения следующего утверждения.

**Утверждение 2.15.** Мажорирующая СЭСС минимальной достаточности, конструируемая над функциональным базисом фундаментальной матрицы системы (2.2.181), имеет представление

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta_M(t, q)}{dt} + \mu_M(q) \cdot \zeta_M(t, q) &= 0; \zeta_M(0, q) \geq \\ &\geq \beta_M(q) \cdot \|x(0)\|, \end{aligned} \quad (2.2.182)$$

где

$$\begin{aligned} \beta_M(q) &= C\{M(q)\}^\Delta = \|M(q)\| \cdot \|M^{-1}(q)\| = \\ &= \alpha_M(q) \cdot \alpha_m^{-1}(q), \end{aligned} \quad (2.2.183)$$

$\alpha_M(q), \alpha_m^{-1}(q)$  – экстремальные сингулярные числа матрицы  $M(q)$  собственных векторов матрицы  $F(q)$ ,

$$\mu_M(q) = \min_i \{ |Re \lambda_i(q)|; i = \overline{1, n} \} C\{M(q)\} \quad (2.2.184)$$

в том смысле, что мажорирующее неравенство

$$\|x(t, x(0), q)\| \leq \beta_M(q) \cdot e^{-\mu_M(q) \cdot t} \cdot \|x(0)\| \quad (2.2.185)$$

обладает минимальной достаточностью.

Доказательство утверждения 2.15 строится по той же схеме, что и доказательство 2.14, с учетом факта  $q \neq q_0$ .

Для конструирования глобальной мажорирующей СЭСС на векторе вариаций  $\Delta q \in [\underline{\Delta q}, \overline{\Delta q}]$  воспользуемся положениями следующего утверждения.

**Утверждение 2.16.** Глобальная мажоранта минимальной достаточности для процессов по норме  $\|x(t, x(0), q)\|$  однородной версии параметрически возмущенной системы (2.2.181) представима на решениях СЭСС (2.2.177), (2.2.182) в форме

$$\begin{aligned} \max_{\Delta q} \zeta_M(t, q) &= \\ &= \zeta_M(t) + \\ &+ \sum_{j=1}^p \left. \frac{\partial \zeta_M(t, q)}{\partial q_j} \right|_{q=q_0} \cdot |\Delta q_j| \operatorname{sgn} \left. \frac{\partial \zeta_M(t, q)}{\partial q_j} \right|_{q=q_0} = \beta_M \cdot \\ &\cdot \left\{ 1 + \sum_{j=1}^p \left( \alpha_M^{-1} \cdot \alpha_{M_{q_j}} - \alpha_{m_{q_j}}^{-1} - \mu_{M_{q_j}} \cdot t \right) \right\} \cdot \\ &\cdot |\Delta q_j| \operatorname{sgn} \left\{ \alpha_M^{-1} \cdot \alpha_{M_{q_j}} - \alpha_{m_{q_j}}^{-1} \cdot \alpha_{q_j} - \mu_{M_{q_j}} \cdot t \right\} \cdot e^{M_M t} \cdot \\ &\cdot \|x(0)\|, \end{aligned} \quad (2.2.186)$$

где

$$\alpha_{M_{q_j}} = \left( U_M^T \cdot M_{q_j} \cdot V_M \right)_{11}; \alpha_{m_{q_j}} = (U_M^T \cdot M_{q_j} \cdot V_M)_{nn}, M = (2.2.187) \\ = U_M \cdot \Sigma_M \cdot V_M^T$$

$$\Sigma_{M_{q_j}} = \text{diag}\{\alpha_i; i = \overline{1, n}\}; M_{q_j} = \text{row}\{M_{iq_j}; i = \overline{1, n}\}; j = (2.2.188) \\ = \overline{1, p},$$

$$M_{q_j} = (M^{-1} \cdot F_{q_j} \cdot M)_{11}; j = \overline{1, p}, (2.2.189)$$

Доказательство утверждения 2.16 строится на непосредственном дифференцировании по элементам  $q_j$  вектора параметров решения (2.2.182) и выборе сочетания знаков вариаций  $\Delta q$ , дающих максимальное отклонение возмущенной мажоранты от номинальной.

Нетрудно видеть, что конструирование глобальной мажоранты

$$\max_{\Delta q} \zeta_M(t, q) \geq \|x(t, q)\| (2.2.190)$$

строится с использованием функций чувствительности  $C_{q_j}\{M(q)\}|_{q=q_0}$  числа обусловленности матрицы собственных векторов, что в итоге сводится к вычислению функций чувствительности собственных векторов, ее минимального по модулю собственного значения, а также сингулярных чисел матрицы собственных векторов. Полученная оценка совокупного эффекта вариаций параметров  $\Delta q_j$  относительно  $q_0$  обладает минимальной достаточностью и может быть в силу структуры (2.186) оценена в процентах.

### ***Сведение задачи чувствительности к задаче анализа структурных свойств – управляемости, наблюдаемости и инвариантности***

Возможность сведения задачи исследования чувствительности объектов и систем управления к вариации параметров их функциональных компонентов к анализу структурных свойств динамических систем: управляемости по состоянию и выходу уже рассматривалась в разделе, посвященном аппарату функций траекторной чувствительности. При этом предметом исследования была составная система "номинальный объект – модель траекторной чувствительности". В настоящем разделе эта проблема решается в рамках исследуемого объекта или системы управления с использованием факторизации вариации матричных компонентов векторно-матричного модельного представления, позволяющей введя рассмотрение внешний "параметрический" вход.

Рассмотрим непрерывный объект управления вида (2.39), который представлен в таком базисе, что вариация параметров приводит к

возмущению только матрицы состояния ОУ так, что он получает модельное представление

$$x(t) = (A + \Delta A) \cdot x(t) + D \cdot u(t), y(t) = C \cdot x(t). \quad (2.2.191)$$

Представим вариацию  $\Delta A$  матрицы состояния ОУ в аддитивной форме

$$\Delta A = \sum_{j=1}^p \Delta A_j, \quad (2.2.192)$$

где каждый  $j$ -й матричный компонент  $\Delta A_j$  полной вариации удовлетворяет условию

$$\text{rang} \Delta A_j = 1, j = \overline{1, p}. \quad (2.2.193)$$

Удовлетворение  $(n \times n)$ -матричных компонентов  $\Delta A_j$  условию (2.2.193) позволяет записать

$$\Delta A_j = d_j \cdot h_j^T \quad (2.2.194)$$

где  $d_j, h_j \in R^n$ , при этом представление в форме (2.2.194) не является единственным. Необходимо отметить, что каждое из представлений (2.2.194) может характеризоваться своим значением  $p$ , определяемым числом компонентов  $\Delta A_j$  в структуре параметрически неопределенной матрицы состояния объекта (2.2.191), характером их размещения в строках матрицы и выбранным базисом. Так, в случае использования фробениусова базиса со строчным представлением сопровождающей формы матрицы число  $p$  компонентов (2.2.192) может равняться единице, в случае диагонального –  $n$ , а в случае произвольного базиса достигать значения  $n^2$ .

Если теперь (2.2.194), (2.2.192) подставить в (2.2.191), то получим

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= \\ &= A \cdot x(t) + \sum_{j=1}^p d_j \cdot h_j^T \cdot x(t) + B \cdot u(t); y(t) = C \cdot x(t) \end{aligned} \quad (2.2.195)$$

Введем в рассмотрение  $p$ -мерную векторную переменную

$$\xi(t) = \text{col}\{\xi_j(t) = h_j^T \cdot x(t); j = \overline{1, p}\} \quad (2.2.196)$$

а также  $(n \times p)$ -матрицу  $D$ , сконструированную на столбцах  $d_j$  в форме

$$D = \text{row}\{d_j; j = \overline{1, p}\} \quad (2.2.197)$$

Введенные с помощью (2.2.196) и (2.2.197) вектор  $\xi(t)$  и матрица  $D$  позволяют представить (2.2.195) векторно-матричной моделью

$$\frac{dx(t)}{dt} = A \cdot x(t) + D \cdot \xi(t) + B \cdot u(t); y(t) = C \cdot x(t), \quad (2.2.198)$$

где вектор  $\xi(t)$  будем именовать внешним параметрическим воздействием. Сформулируем следующую концепцию.

**Концепция 2.1.** Компонент  $Y_l(t); l = \overline{1, m}$ , будет робастным по отношению к вариации  $\Delta A_j; j = \overline{1, p}$ ,  $j$ -го компонента матрицы  $A$ , т.е. обладать нулевой чувствительностью к вариации  $\Delta A_j$ , если  $l$ -ый компонент  $y_l(t)$ ; вектора  $y(t)$  будет полностью неуправляемым по  $j$ -му входу приложения внешнего параметрического воздействия, или тройка матриц  $\{D_j, A, C^l\}$  была бы полностью неуправляемой, другими словами, если  $l$ -ый компонент  $y_l(t)$  вектора  $y(t)$  будет инвариантен относительно  $j$ -го компонента внешнего параметрического воздействия.

Составим на указанной тройке матриц матрицу управляемости " $l$ -й выход –  $j$ -й параметрический вход"

$$w_{ylj} = \Delta [C^l \cdot D_j \quad C^l \cdot A \cdot D_j \quad C^l \cdot A^2 \cdot D_j \quad \dots \quad C^l \cdot A^{n-1} \cdot D_j]. \quad (2.2.199)$$

Полная неуправляемость  $y_l(l = \overline{1, m})$  по входу  $\xi_j(j = \overline{1, p})$  означает вырождение  $W_{ylj}$  в -матрицу – строку

$$W_{ylj} = \text{row}\{(W_{ylj})_j = 0; i = \overline{1, n}\}. \quad (2.2.200)$$

Если полной неуправляемости выходов  $y_l(l = \overline{1, m})$  по всем входам  $\xi_j(j = \overline{1, p})$  не наблюдается, т.е. все матрицы  $W_{ylj}(l = \overline{1, m}; j = \overline{1, p})$  не вырождаются в нулевые и представляют собой  $n$ -мерные вектор-строки, то для них можно вычислить нормы и построить матрицу весов

$$P_s = \text{row}\{\text{col}[\|W_{ylj}\|; l = \overline{1, m}; j = \overline{1, p}]\}, \quad (2.2.201)$$

при этом для сравнимости результатов в (2.194) следует положить

$$h_j: \|h_j\| = 1 \text{ для всех } j = \overline{1, p}.$$

Матрица  $P_s$ (2.2.201) позволяет ранжировать параметры  $q_j(j = \overline{1, p})$ , порождающие вариации  $\Delta A_j$  матрицы  $A$ , по степени управляемости

$l$ -го выхода этим параметром. Доминирующий параметр (доминирующая вариация  $\Delta A_j$ ) определяется по максимальной норме столбцов матрицы  $P_s$ , а наиболее управляемый (чувствительный) выход – по максимальной норме строк этой матрицы.

Таким образом,

$$\text{dom}\{\Delta A_j V q_j\} = \arg \max_j \left\| \text{col}[\|(W_{yli})\|; l = \overline{1, m}] \right\|, \quad (2.2.202)$$



$$\text{domsens} \{y_1\} = \arg \max_l \| \text{row} \| W_{y_l i} \|; j = \overline{1, p}. \quad (2.2.203)$$

В (2.2.202) и (2.2.203)  $\text{dom}\{(*)\}$  определяет элемент  $l$  максимальным эффектом реализации управляемости по всем выходам средствами элемента  $(*)$ ,  $\text{domsens}\{(\bullet)\}$  определяет собой выход  $(\bullet)$  на котором наблюдается максимальный совокупный эффект управления по всем  $j = \overline{1, p}$  параметрическим входам.

Для целей дальнейших исследований, а также поиска путей синтеза алгоритмов управления, доставляющих неуправляемость  $l$  – го выхода  $y_l(t)$  по входу  $\zeta_j(t)$ , сформулируем утверждение.

**Утверждение 2.16.** Для полной неуправляемости тройки матриц  $\{D_j, A, C^l\}$ , где  $C^l$  –  $l$  – я строка матрицы  $C$ , формирующая выход  $y_l(t)$ ,  $D_j$  –  $j$  – й столбец матрицы  $D$  приложения параметрического входа  $\zeta_j(t)$ , достаточно, чтобы:

1. столбец  $D_j$  был собственным вектором матрицы  $A$ ;
2. выполнялось условие

$$C^l D_j = 0. \quad (2.2.204)$$

Доказательство утверждения 2.16 приведено в приложении 6.

Нетрудно видеть, что тот же результат можно сформулировать в терминах передаточных функций сепаратного канала “ $\zeta_j - y_l$ ” ОУ (2.2.198).

**Утверждение 2.17.** Для того, чтобы передаточная функция  $\varphi_{y_l \zeta_j}(s)$  сепаратного канала управления ОУ (2.184) “ $\zeta_j - y_l$ ” связывающего  $j$  – й вход приложения параметрического внешнего воздействия  $\zeta_j(t)$  и  $l$  – й выход, равнялась нулю, т.е. выполнялось равенство

$$\varphi_{y_l \zeta_j}(s) = C^l (sI - A)^{-1} D = 0_j, \quad (2.2.205)$$

достаточно, чтобы выполнялись условия утверждения 2.16.

Доказательство в форме утверждений 2.17 приведено в приложении 4.

Результат в форме утверждений 2.16 и 2.17 использует неполную управляемость пары матриц  $(A, D_j)$ , пространство управляемости которого характеризуется рангом, равным единице. Очевидно, тот же результат может быть получен на неполной наблюдаемости пары  $(C^l, A)$ , когда ранг матрицы наблюдаемости этой пары оказывается равным единице, а подпространство наблюдаемости совпадает с линейной оболочкой, натянутой на вектор  $(C^l)^T$ .

**Утверждение 2.18.** Для полной нечувствительности  $l$  – того компонента  $y_l(t)$  вектора выхода к  $j$  – той вариации  $\Delta A_j$  полной вариации  $\Delta A$  матрицы состояния ОУ (2.2.198), достигаемой выполнением условий (2.2.200) или (2.2.205), достаточно:

1. чтобы матрица  $C^l$  была левым собственным вектором матрицы  $A$  объекта управления (2.2.198),
2. выполнения матричного соотношения (2.2.204) .□

Доказательство утверждения 2.18 приведено в приложении 4.

Необходимо отметить, сравнивая условия утверждений 2.16 и 2.18, что второе требует от исходного объекта управления неполной наблюдаемости, что в случае неполной непосредственной измеримости вектора состояния ОУ не позволит построить динамическое наблюдающее устройство для оценки неизмеримых компонентов этого вектора. В этой связи пользовательской ценностью обладают положения лишь утверждения 2.16, которые и будут далее разрабатываться при синтезе закона управления ОУ (2.2.191).

Ограничимся ЗУ в виде линейной композиции составляющих вектора  $U(t)$  управления ОУ (2.2.191), одна из которых порождается прямой связью с матрицей  $K_g$  по вектору внешнего воздействия  $g(t)$ , а другая – отрицательной обратной связью с матрицей  $K$  по вектору состояния  $x(t)$  ОУ так, что закон принимает вид

$$u(t) = K_g g(t) - Kx(t). \quad (2.2.206)$$

Агрегирование ОУ (2.2.191) и ЗУ (2.2.206) образует систему

$$\frac{d}{dt}x(t) = Fx(t) + \Delta Fx(t) + Gg(t); y(t) = Cx(t), \quad (2.2.207)$$

где  $F = A - BK$ ;  $G = BK_g$

Нетрудно видеть, что оказывается справедливым следующее утверждение.

**Утверждение 2.19.** Если параметрическая неопределенность исходного ОУ (2.2.39) такова, что она проявляется в форме вариации  $\Delta A$  матрицы состояния объекта, то эта вариация оказывается инвариантной относительно реализаций матриц  $K_g$  и  $K$  закона управления (2.2.206), агрегирование которого с объектом управления (2.2.191) образует систему (2.2.207) так, что

$$\Delta F = \Delta A. \quad (2.2.208)$$

В силу (2.2.208) сохраняется факторизация вариации  $\Delta F = \Delta A$  матрицы состояния системы в формах (2.2.192) и (2.2.194). Сохраняется концепция введения в систему внешнего «параметрического» входа  $\zeta(t)$  так, что система в итоге получает описание

$$\frac{d}{dt}x(t) = Fx(t) + D\zeta(t) + Gg(t); y(t) = Cx(t), \quad (2.2.209)$$

Постановка задачи синтеза ЗУ в форме (2.2.206) предъявляет к его матричным компонентам  $K$  и  $K_g$  следующие требования.

Матрица  $K$ , если она, к примеру, синтезируется методами модального управления, должна доставлять матрице  $F$  желаемый спектр собственных значений  $\sigma\{F\} = \{\lambda_{Fi}; i = \overline{1,4}\}$ , обеспечивающий необходимые динамические и точностные показатели, а также элементы геометрического спектра собственных векторов  $\{\xi_j\}$  матрицы  $F$  с тем, чтобы они совпадали со столбцами матрицы  $D$  так, чтобы выполнялось равенство

$$\xi_j = D_j; j = \overline{1,p}. \quad (2.2.210)$$

Требование выполнения условия (2.2.210) для всех  $j$  от 1 до  $p$  является очень сильным, при его реализации будет наблюдаться резкое ослабление управляемости системы (2.2.207) со стороны всех компонентов вектора  $\xi(t)$  "параметрического" внешнего воздействия. Теоретически это может быть достигнуто лишь при ранге матрицы  $B$  управления ОУ (2.2.39), (2.2.191), равном размерности его вектора состояния.

Практически это недостижимо, поэтому при формировании ОУ (2.2.39) необходимо изыскивать все возможности максимизировать ранг матрицы управления, что достигается путем максимизации числа регулирующих органов. Если возможности размещения на ОУ большого количества регулирующих органов ограничены, то надо стараться структурными методами обеспечивать ОУ (2.2.39), (2.2.177) с парой матриц  $(A, B)$  свойства нормальности этой пары, при котором оказываются полностью управляемыми все пары  $(A, B_k; k = \overline{1,r})$ . Если и это невозможно, то у разработчика системы остается еще одна возможность: "обмен части динамических показателей на робастность", т.е. обмен требований к элементам геометрического спектра  $\{\xi_j\}$  собственных векторов матрицы  $F$  на некоторое "ухудшение" структуры  $\sigma\{F\} = \{\lambda_{Fi}; i = \overline{1,n}\}$  собственных значений этой матрицы системы. Но в любом случае все параметры исходного ОУ, приводящие к вариациям  $\Delta A_j, j = \overline{1,p}$ , должны быть проранжированы с помощью матрицы весов  $P_s$  (2.2.201)

Как всегда, к матрице  $K_g$  предъявляется требование правильной ориентации системы (2.2.143), (2.2.209) относительно внешнего воздействия  $g(t)$  с тем, чтобы гарантировалось свойство равенства входа и выхода системы в неподвижном положении. Что касается необходимости выполнения условия (2.2.204), то при формировании исходного объекта (2.2.39), (2.2.191) следует предусмотреть возможность введения передаточных нулей  $(j, l)$  - сепаратных каналов, связывающих  $j$ -ый параметрический вход  $\zeta_j$  и  $l$ -ый выход  $u_i$

По существу, сказанное выше содержит доказательство следующего утверждения.

**Утверждение 2.20.** Система управления (2.2.209), образованная агрегатным объединением ОУ (2.2.191), (2.2.198) и закона управления (2.2.206), нечувствительна к вариации  $\Delta A_j$  матрицы состояния объекта, если матричные компоненты ЗУ (2.2.206) выбраны из соображений

$$K = \arg \left\{ D_j = \xi_j; F \xi_j = \lambda_{\Sigma j} \xi_j; j = \overline{1, p} \frac{d}{dt} C D_j = 0 \right\}, \quad (2.2.211)$$

$$K_g = \arg \{ \Phi(0) = -C F^{-1} B k_g = I; F = A - B K \}. \quad (2.2.212)$$

Если исходный ОУ (2.2.39) не позволяет параметрическую неопределенность представить только в виде вариации  $\Delta A$  матрицы состояния, то на входе ОУ достаточно включить буферную систему

$$\frac{d}{dt} x(t) = A_B x_B(t) + B_B u_B^{\%}(t); y(t) = C_B^{\%} x_B^{\%}(t), \quad (2.2.213)$$

минимальной размерности  $\dim x_B = \dim u = r$ , тем самым задача сводится к рассмотренному случаю. Действительно, если ввести в рассмотрение составной вектор  $x^{\%} = \text{col}\{x, x_B\}$ , то получим систему

$$\frac{d}{dt} x^{\%}(t) = A^{\%} x^{\%}(t) + B^{\%} u^{\%}(t); y(t) = C^{\%} x^{\%}(t), \quad (2.2.214)$$

где

$$A^{\%} = \begin{bmatrix} A & B C_B \\ 0 & A_B \end{bmatrix}; B^{\%} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_B \end{bmatrix}; C^{\%} = [C \ 0]. \quad (2.2.215)$$

Вариации  $\Delta A$  или  $\Delta B$  матричных компонентов  $A$  и  $B$  исходного ОУ (2.2.39) представим вариацией  $\Delta A$  матрицы  $A^{\%}$ , следовательно, (2.2.214) приводим к виду

$$x^{\%}(t) = A^{\%} x^{\%}(t) + D^{\%} \zeta(t) + B^{\%} u^{\%}(t); y(t) = C^{\%} x^{\%}(t).$$

При этом, следуя методологии обобщенного изодромного управления, в качестве буферной системы (2.212) следует использовать или интеграторы в каждом сепаратном канале управления для повышения порядка астатизма, или модель источника конечномерного компонента входного воздействия.

В заключение заметим, что полученные условия нечувствительности  $l$ -го выхода  $y_l(t)$  системы (2.2.209) к вариации  $\Delta A_j$  матрицы состояния объекта в общесистемной постановке можно трактовать как условие инвариантности выхода  $y_l(t)$  относительно "параметрического" внешнего входа  $\zeta_j(t)$ . Систему (2.2.209), обладающую такими свойствами, можно именовать параметрически инвариантной полностью или частично.

**Пример 2.11.** В качестве примера рассматривается ОУ

$$\frac{d}{dt}x(t) = (A + \Delta A)x(t) + Bu(t); y(t) = Cx(t)$$

с матричными компонентами

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \Delta A = \Delta A(q) = \begin{bmatrix} q & q & 0 \\ -2q & -2q & 0 \\ 4q & 4q & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; C = [2 \quad 3 \quad 1].$$

При  $\forall q \text{ rang} \Delta A(q) = 1$ , поэтому определенности ради положим  $q = 1$ , тогда получим факторизацию  $\Delta A(q)$  в форме

$$\begin{aligned} \Delta A(q)|_{q=1} = \Delta A &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} [1 \quad 1 \quad 0] = \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} [1 \quad 0 \quad 0] + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} [0 \quad 1 \quad 0] \end{aligned}$$

так, что ОУ в форме (2.2.191) характеризуется

$$D_1 = D_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}; h_1 = [1 \quad 0 \quad 0]; h_2 = [0 \quad 1 \quad 0];$$

$\zeta_1 = h_1 x; \zeta_2 = h_2 x$ , при этом в силу  $D_1 = D_2$  положим, что (2.2.191) характеризуется  $D = D_1 = D_2; \zeta = \zeta_1 + \zeta_2$ .

Проверка условия (2.2.204) показывает его выполнимость, так как

$$CD = [2 \quad 3 \quad 1][1 \quad -2 \quad 4]^T = 0.$$

Сконструируем закон управления (2.206):

$$u(t) = K_g(t) - K_x(t),$$

где

$$\begin{aligned} K &= \\ &= \arg \left\{ F = A - BK; \sigma\{F\} = \right. \\ &= \left. \{\lambda_1 = -2; \lambda_2 = -3; \lambda_3 = -5\}; \frac{d}{dt}FD = \lambda_1 D \right\}, \end{aligned}$$

так что для  $K$  получаем  $K = [30 \quad 31 \quad 9]$ , то дает матрицу  $F$  вида

$$\begin{aligned} F = A - BK &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -30 & -31 & -10 \end{bmatrix}; \sigma\{F\} = \\ &= \{\lambda_1 = -2; \lambda_2 = -3; \lambda_3 = -5\}, \end{aligned}$$

а также собственный вектор  $\xi_1: A\xi_1 = \lambda_1\xi_1$ , такой, что  $\xi_1 = D$ . Действительно,

$$FD = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -30 & -31 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -8 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \lambda_1 D.$$

Матрица прямых связей  $K_g$  ищется из условия

$$K_g = \arg\{C(SI - F)^{-1}BK_g|_{s=0} = -CF^{-1}BK_g = I\},$$

получаем реализацию  $K_g = [15]$ .

Таким образом, условие нулевой параметрической чувствительности выхода системы  $y(t)$  к вариации  $\Delta A = \Delta A(q)$  при  $\forall q$ , которое было формализовано как условие полной неуправляемости по выходу системы со стороны параметрического внешнего входа  $\zeta(t)$  в сочетании с выполнением условия  $CD = 0$ , выполнено, что подтверждается матрицей управляемости сепаратного канала " $\zeta - y$ "

$$W_{y\zeta} = [CD \quad CFD \quad CF^2D] = [0 \quad 0 \quad 0].$$

Подтвердим достигнутый результат вычислением передаточных функций сепаратного канала " $\zeta - y$ ": исходного объекта управления

$$\Phi_{y\xi}(S) \triangleq \frac{y(s)}{\zeta(s)} \Big|_{K=[0 \quad 0 \quad 0]} = C(SI - A)^{-1}D = \frac{4}{s^2}$$

и спроектированной системы

$$\begin{aligned} \Phi_{y\xi}(S) &\triangleq \frac{y(s)}{\zeta(s)} \Big|_{K=[30 \quad 31 \quad 9]} = C(SI - F)^{-1}D = \\ &= \frac{0}{(s+2)(s+3)(s+5)} = 0. \end{aligned}$$

### 2.2.3. Системы с интервальными параметрами. Метод В.Л. Харитонова

Рассматривается линейная динамическая система вида (2.2.55) с тем отличием, что ее модельное представление характеризуется параметрической неопределенностью задания только матрицы состояния так, что векторно - матричное описание такой системы принимает вид

$$\frac{d}{dt}x(t) = F(q)x(t) + Gg(t); x(0); y(t) = Cxt. \quad (2.2.216)$$

В (2.2.216) матрица

$$F(q) = \text{row}\{\text{col}[A_{ij}(q_{ij}); i = \overline{1, n}; j = \overline{1, n}]\}, \quad (2.2.217)$$

при этом системный параметр  $A_{ij}(q_{ij})$  задается в форме

$$A_{ij}(q_{ij}) = \underline{A}_{ij} \cdot (1 - q_{ij}) + \bar{A}_{ij} \cdot q_{ij}; \quad q_{ij} \in [0,1] \quad (2.2.218)$$

Таким образом,

$$A_{ij}(q_{ij}) \in [\underline{A}_{ij}, \bar{A}_{ij}]: \underline{A}_{ij} \leq \bar{A}_{ij}, \quad (2.2.219)$$

при этом переменная  $q_{ij}$  в (2.2.219) выполняет функцию интервализирующего параметра, изменение которого в пределах интервала  $[0,1]$  порождает континуум реализаций  $A_{ij}(q_{ij})$ . Значения  $\underline{A}_{ij}, \bar{A}_{ij}$  представляют собой граничные реализации  $A_{ij}(q_{ij})$ , медианная реализация характеризуется медианным значением

$$A_{0ij} = 0.5 (\underline{A}_{ij} + \bar{A}_{ij}), \quad (2.2.220)$$

которое наблюдается при медианном значении  $q_{0ij} = 0.4$  параметра  $q_{ij}$ .

Нетрудно видеть, что если в системе (2.2.216) в качестве номинальных значений системных параметров принять медианные (2.2.220), представить интервализирующий параметр  $q_{ij}$  в вариациях  $\Delta q_{ij}$  относительно медианного значения  $q_{ij}$  в форме

$$q_{ij} = q_{0ij} + \Delta q_{ij}, \quad |\Delta q_{ij}| \leq 0.5, \quad (2.2.221)$$

то будет подготовлена схема использования аппарата теории чувствительности в любой из приведенных в разделе 2.3 реализаций.

Однако заметим, что максимальная относительная вариация  $\delta_{q_{ij}} = \frac{\Delta q_{ij}}{q_{0ij}}$  интервализирующего параметра составляет 100%. В этом диапазоне вариаций  $\Delta q_{ij}$  аппарат теории чувствительности в рамках функций чувствительности первого порядка становится некорректным. Тем не менее, разработчик получит полезную информацию о динамической системе, если построит или вычислит функции чувствительности траекторий, собственных значений матрицы состояния  $F$  и показателей качества системы (2.2.216).

Для решения задачи при значениях системных параметров во всем диапазоне их вариаций, задаваемом (2.2.216), несколько сузим ее, ограничившись проблемой робастной устойчивости в рамках гурвицевой устойчивости (Н-устойчивости). С этой целью введем в рассмотрение характеристический полином  $D(\lambda, q)$  матрицы состояния  $F(q)$  (2.2.217) системы (2.2.216)

$$\begin{aligned}
D(\lambda, q) &= \det(\lambda I - F(q)) = \\
&= \lambda^n + a_1(q_1)\lambda^{n-1} + a_2(q_2)\lambda^{n-2} + L + a_{n-1}(q_{n-1})\lambda + \\
&+ a_n(q_n),
\end{aligned} \tag{2.2.222}$$

Где

$$a_1(q_1) = \underline{a}_1(1 - q_1) + \overline{a}_1: q_1 \in [0,1]. \tag{2.2.223}$$

Таким образом,

$$a_1(q_1) \in [\underline{a}_1, \overline{a}_1]: \underline{a}_1 \leq \overline{a}_1; 1 = \overline{1, n}, \tag{2.2.224}$$

где  $\underline{a}_1, \overline{a}_1$  - граничные значения системного параметра  $a_1(q_1)$ . Нетрудно видеть, что в пространстве системных параметров  $a = \text{col}\{a_1; 1 = \overline{1, n}\}$  полная совокупность из  $n$  параметров образует выпуклый многогранник типа прямоугольного параллелепипеда  $Q$ , каждое ребро которого задано в параметризованной форме (2.2.223).

Под задачей робастной устойчивости в этом случае будем понимать задачу отыскания условий, при выполнении которых оказываются Н-устойчивыми все полиномы  $D(\lambda, q)$ , принадлежащие континууму полиномов с коэффициентами из многогранника  $Q$ .

Для решения задачи робастной устойчивости заметим, что многогранник  $Q$ , представляющий собой прямоугольный параллелепипед в  $n$  – мерной параметрическом пространстве с ребрами (2.2.223), обладает целочисленными характеристиками в виде числа углов  $N_c = 2^n$  и числа ребер  $N_R = n2^{n-1}$ .

В задаче робастной устойчивости встает важная технологическая проблема поиска возможности перехода от континуума полиномов к выборке конечной мощности из этого континуума. Первый результат в этой области получен Л. Заде. Работая над проблемой робастной устойчивости полиномов (2.2.222) в частотной области, т.е. используя характеристический комплекс

$$\begin{aligned}
D(j\omega, q) &= \\
&= (j\omega)^n + a_1(q_1)(j\omega)^{n-1} + a_2(q_2)(j\omega)^{n-2} + L + \\
&+ a_{n-1}(q_{n-1})(j\omega) + a_n(q_n)
\end{aligned} \tag{2.2.225}$$

Л. Заде сформировал следующее утверждение.

**Утверждение 2.21.** Любое ребро прямоугольного параллелепипеда  $Q$ , отображается в отрезок на комплексной плоскости значений  $D(j\omega, q)$ , при этом концы этого отрезка суть образы соседних углов, между которыми находится отображаемое ребро.



**Доказательство.** Зафиксируем в (2.2.225) значение частоты  $\omega$  и  $n - 1$  интервализирующих параметров  $q_1 1 = \overline{1, n} \frac{d1}{dt} \neq \mu$ , оставив изменяющимся только  $q_\mu$ , тогда (2.2.225) примет вид

$$D(j\omega, q_\mu) = (1 - q_\mu)D(j\omega, \underline{a}_\mu) + q_\mu D(j\omega, \overline{a}_\mu). \quad (2.2.226)$$

Нетрудно видеть, что (2.2.226) задает отрезок прямой на плоскости  $D(j\omega)$  при  $\omega = fix$ , концы которого задаются векторами  $D(j\omega, \underline{a}_\mu)$  и  $D(j\omega, \overline{a}_\mu)$ .

Если теперь для анализа устойчивости полинома  $D(\lambda, q)$  (2.2.222) воспользоваться критерием устойчивости А.В. Михайлова, то на основании утверждения 2.21 становится справедливым утверждение.

**Утверждение 2.22.** Характеристический полином  $D(\lambda, q)$  (2.2.222) оказывается строго устойчивым для всех  $q \in Q$ , если будут удовлетворять условиям устойчивости критерия устойчивости А.В. Михайлова все годографы построенные на комплексной плоскости в силу  $D(j\omega, q)$  при  $\omega \in [0, \infty)$  для всех  $2^n$  угловых реализаций параметра  $q$ .

Позже результат Л. Заде был подкреплён так называемой реберной теоремой А.С. Бартлетта. Таким образом, задача робастной устойчивости сводится к обеспечению устойчивости интервального характеристического полинома (ИХП)  $[D(\lambda)]$ , задаваемого в форме

$$\begin{aligned} [D(\lambda)] &= \det(\lambda I - [F]) = \\ &= [a_0]\lambda^n + [a_1]\lambda^{n-1} + [a_2]\lambda^{n-2} + L + [a_{n-1}]\lambda + [a_n], \end{aligned} \quad (2.2.227)$$

где  $[F]$  – интервальная матрица состояния системы (2.2.222), представляемая в форме

$$[F] = row\{col([F_{ij}] = [\underline{F}_{ij}, \overline{F}_{ij}]; i = \overline{1, n}); j = \overline{1, n}\}, \quad (2.2.228)$$

$$[a_0] = [1, 1] = 1, [a_1] = [\underline{a}_1, \overline{a}_1]. \quad (2.2.229)$$

Правила математических преобразований выражений, содержащих интервальные компоненты  $[(*)] = [(\underline{*}), \overline{(*)}]$ , где  $(*)$  принимает смысл скаляров, векторов и матриц, приведены в приложении 7, более подробная информация об интервальной арифметике содержится в приложении 5.

Переход от континуума характеристических полиномов (2.2.222) к множеству угловых реализаций ИХП (2.2.227), мощность которого составляет величину  $2^n$ , где  $n = \dim x$ , заметно сократил объем вычислительных проблем при решении задачи робастной устойчивости в условиях параметрической неопределенности. Однако этот объем достаточно велик и растет с увеличением размерности  $n$  системы.

Конструктивный прорыв в этой проблеме совершил профессор Санкт-Петербургского государственного университета В.Л. Харитонов, опубликовавший в 1978 году работу, которая составляет суть его метода.

Для целей дальнейших исследований рассмотрим полином с вещественными фиксированными коэффициентами

$$D(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + L + a_{n-1} z + a_n (a_0 \neq 0). \quad (2.2.230)$$

Представим полином (2.2.230) в факторизованной форме

$$D(z) = h(z^2) + zg(z^2). \quad (2.2.231)$$

Поставим задачу выяснить, каким требованиям должны удовлетворять полиномы  $h(\zeta)$  и  $g(\zeta)$  с тем, чтобы полином  $D(z)$  (2.2.230) был бы гурвицевым. Заметим, что полиномы  $h(\zeta)$  и  $g(\zeta)$  имеют степень  $\nu$ , если  $n = 2\nu + 1$ , а в случае  $2\nu$   $h(\zeta)$  имеет степень  $\nu$ , а полином  $g(\zeta)$  – степень  $(\nu - 1)$ . Ответ на поставленный вопрос содержится в теореме Эрмита–Билера.

**Теорема Эрмита–Билера.** Чтобы полином  $D(z) = h(z^2) + zg(z^2)$  был гурвицевым, необходимо и достаточно, чтобы полиномы  $h(\zeta)$  и  $g(\zeta)$  составляли положительную пару, т.е. чтобы корни этих полиномов, соответственно  $h_i$  и  $g_j$ , при  $i = \overline{1, \nu}; j = \overline{1, \nu}$  в случае  $n = 2\nu + 1$  и при  $i = \overline{1, \nu}; j = \overline{1, \nu - 1}$  в случае  $n = 2\nu$  были простыми, вещественными, отрицательными и перемежались следующим образом:

$$g_1 \langle h_1 \langle g_2 \langle h_2 \langle L \langle g_\nu \langle h_\nu \langle 0 \text{ при } n = 2\nu + 1, \quad (2.2.232)$$

$$g_1 \langle h_1 \langle g_2 \langle h_2 \langle L \langle g_{\nu-1} \langle h_\nu \langle 0 \text{ при } n = 2\nu, \quad (2.2.233)$$

Доказательство теоремы Эрмита–Билера в терминах вещественнозначных представлений можно найти в литературе, тем не менее, дадим следующий комментарий. Нетрудно видеть, что теорема Эрмита–Билера содержит вещественнозначную версию критерия устойчивости А.В. Михайлова, сформулированного в форме требования перемежаемости корней на положительной вещественной оси ( $\omega \in [0, \infty)$ ) вещественной  $\text{Re}D(j\omega)$  и мнимой  $\text{Im}D(j\omega)$  частей характеристического полинома  $D(j\omega)$ . Действительно, если в (2.2.231) положить  $z = j\omega$ , то получим для  $D(j\omega)$  представление

$$D(j\omega) = h(-\omega^2) + j\omega g(-\omega^2) = \text{Re}D(j\omega) + j\text{Im}D(j\omega). \quad (2.2.234)$$

Если в (2.2.234) придавать значения  $\omega \in [0, \infty)$ , то в случае гурвицевости полинома  $D(z)$  корни уравнений

$$\text{Im}D(j\omega) = \omega g(-\omega^2) = 0, \quad (2.2.235)$$

$$\operatorname{Re}D(j\omega) = h(-\omega^2) = 0, \quad (2.2.236)$$

начиная с корня  $\omega = 0$  уравнения (2.2.235), будут чередоваться. Исключим из рассмотрения нулевой корень (2.2.236) и произведем в (2.2.225) и (2.2.226) замену  $-\omega^2 = \zeta$ , тогда получим условие теоремы Эрмита–Билера. При этом в полном соответствии с критерием устойчивости А.В. Михайлова ближайшим слева к нулю корень будет корень  $\zeta = h_v$  уравнения  $h(\zeta) = 0$ , что представлено условием (2.2.232) и (2.2.233).

Вернемся к интервальному характеристическому полиному  $[D(\lambda)]$  (2.2.227), на котором построим четыре угловых реализации полиномов  $h(\zeta)$  и  $g(\zeta)$  вида

$$h(\zeta, \underline{a}_n) = \underline{a}_n + \bar{a}_{n-2}\zeta + \underline{a}_{n-4}\zeta^2 + \bar{a}_{n-6}\zeta^3 + L, \quad (2.2.237)$$

$$h(\zeta, \bar{a}_n) = \bar{a}_n + \underline{a}_{n-2}\zeta + \bar{a}_{n-4}\zeta^2 + \underline{a}_{n-6}\zeta^3 + L, \quad (2.2.238)$$

$$g(\zeta, \underline{a}_{n-1}) = \underline{a}_{n-1} + \bar{a}_{n-3}\zeta + \underline{a}_{n-5}\zeta^2 + \bar{a}_{n-7}\zeta^3 + L, \quad (2.2.239)$$

$$g(\zeta, \bar{a}_{n-1}) = \bar{a}_{n-1} + \underline{a}_{n-3}\zeta + \bar{a}_{n-5}\zeta^2 + \underline{a}_{n-7}\zeta^3 + L. \quad (2.2.240)$$

Построим на  $[D(\lambda)]$  также интервальные версии  $[h(\zeta)]$  и  $[g(\zeta)]$  полиномов  $h(\zeta)$  и  $g(\zeta)$ , записываемые в форме

$$[h(\zeta)] = [a_n] + [a_{n-2}]\zeta + [a_{n-4}]\zeta^2 + [a_{n-6}]\zeta^3 + L, \quad (2.2.241)$$

$$[g(\zeta)] = [a_{n-1}] + [a_{n-3}]\zeta + [a_{n-5}]\zeta^2 + [a_{n-7}]\zeta^3 + L. \quad (2.2.242)$$

Если теперь воспользоваться схемой доказательства утверждения 2.19 применительно к вещественно-значимым функциям  $h(\zeta)$  и  $g(\zeta)$  для значений  $\zeta \in [0, -\infty)$ , то обнаруживается справедливость положений следующего утверждения.

**Утверждение 2.23.** Для области значений аргумента  $\zeta \in [0, -\infty)$  значения всех угловых реализаций  $(h(\zeta))_{cl}$  и  $(g(\zeta))_{cl}$  интервальных полиномов  $[h(\zeta)]$  и  $[g(\zeta)]$  удовлетворяют неравенствам

$$h(\zeta, \underline{a}_n) \leq (h(\zeta))_{cl} \leq h(\zeta, \bar{a}_n); \quad g(\zeta, \underline{a}_{n-1}) \leq (g(\zeta))_{cl} \leq g(\zeta, \bar{a}_{n-1}),$$

$$1 = \overline{1,2}^v. \quad (2.2.243)$$

Утверждение 2.21, в свою очередь, делает справедливым положение следующего утверждения.

**Утверждение 2.24.** Если четыре пары полиномов  $\{h(\zeta, \underline{a}_n), g(\zeta, \underline{a}_{n-1})\}$ ,  $\{h(\zeta, \underline{a}_n), g(\zeta, \bar{a}_{n-1})\}$ ,  $\{h(\zeta, \bar{a}_n), g(\zeta, \underline{a}_{n-1})\}$  и  $\{h(\zeta, \bar{a}_n), g(\zeta, \bar{a}_{n-1})\}$  являются положительными в смысле теоремы Эрмита–Билера, то образуют положительные пары любые композиции

$$\{(h(\zeta))_{cl}, g(\zeta)\}, c, p = \overline{1, 2}^v \quad (2.2.244)$$

угловых реализаций  $(h(\zeta))_{cl}$  и  $(g(\zeta))_{cl}$  интервальных полиномов  $[h(\zeta)]$  и  $[g(\zeta)]$ .

Последнее утверждение позволяет сформулировать основной результат исследования робастной устойчивости системы (2.2.216), сведенный к обеспечению гурвицевости интервального характеристического полинома (2.2.227), влекущей за собой гурвицевость континуума характеристических полиномов  $D(\lambda, q)$  вида (2.2.222), в форме теоремы В.Л. Харитонова.

**Теорема В.Л. Харитонова.** Чтобы интервальный характеристический полином (2.2.227) был гурвицевым, необходимо и достаточно, чтобы были гурвицевыми четыре его угловые версии, имеющие представления

$$D_1(\lambda) = \underline{a}_n + \underline{a}_{n-1}\lambda + \bar{a}_{n-2}\lambda^2 + \bar{a}_{n-3}\lambda^3 + \underline{a}_{n-4}\lambda^4 + L \quad (2.2.245)$$

$$D_2(\lambda) = \bar{a}_n + \underline{a}_{n-1}\lambda + \underline{a}_{n-2}\lambda^2 + \bar{a}_{n-3}\lambda^3 + \bar{a}_{n-4}\lambda^4 + L \quad (2.2.246)$$

$$D_3(\lambda) = \bar{a}_n + \bar{a}_{n-1}\lambda + \underline{a}_{n-2}\lambda^2 + \underline{a}_{n-3}\lambda^3 + \bar{a}_{n-4}\lambda^4 + L \quad (2.2.247)$$

$$D_4(\lambda) = \underline{a}_n + \bar{a}_{n-1}\lambda + \bar{a}_{n-2}\lambda^2 + \underline{a}_{n-3}\lambda^3 + \underline{a}_{n-4}\lambda^4 + L \quad (2.2.248)$$

В завершении рассмотрения метода В.Л. Харитонова, который позволил свести задачу робастной устойчивости системы

$$\frac{dx(t)}{dt} = [F](q)x(t) + Gg(t); x(0); y(t) = Cx(t) \quad (2.2.249)$$

с интервальной матрицей  $[F]$  состояния системы к обеспечению гурвицевости четырех характеристических полиномов (2.2.245)–(2.2.248), затронем проблемы оценки показателей качества процессов в системе (2.2.216), сводящихся к проблемам устойчивости. Первоочередным показателем качества процессов динамической системы вида (2.2.216) является темп, с которым процессы сходятся к равновесному состоянию. Этот темп в основном определяется степенью устойчивости  $\eta$ . Для обеспечения системе (2.2.216) степени устойчивости  $\eta$  достаточно обеспечить эту степень устойчивости интервальной матрице  $[F]$ . Для этого воспользуемся свойством спектра собственных значений матричных функций  $f(N)$  от квадратной матрицы  $N$ . В соответствии с этим свойством, если  $(n \times n)$  –матрица  $N$  обладает спектром собственных значений  $\sigma\{N\} = \{\lambda_{ni}, i = \overline{1, n}\}$ , то спектр собственных значений матрицы  $f(N)$  принимает вид  $\sigma\{f(N)\} = \{f(\lambda_{ni}); i = \overline{1, n}\}$ .

Сконструируем матричную функцию  $f(N)$  от матрицы  $N$  вида

$$f(N) = \eta I + N, \quad (2.2.250)$$

порожденную скалярной функцией  $f(\alpha) = \eta + \alpha$ . Алгебраический спектр  $\sigma\{f(N)\}$  собственных значений матрицы  $f(N) = \eta I + N$  принимает вид  $\sigma\{f(N)\} = \{f(\lambda_{ni}) = \eta + \lambda_{ni}; i = \overline{1, n}\}$ . Таким образом, доказана справедливость следующего утверждения.

**Утверждение 2.25.** Чтобы система (2.2.216) обладала степенью устойчивости  $\eta$ , достаточно, чтобы интервальная матрица  $[F] + \eta I$  была гурвицевой или чтобы гурвицевым был ИХП этой матрицы

$$\begin{aligned} \det\{(\lambda - \eta) I - [F]\} = \\ = [a_0](\lambda - \eta)^n + [a_1](\lambda - \eta)^{n-1} + L + [a_{n-1}](\lambda - \eta) + \\ + [a_n] \end{aligned} \quad (2.2.251)$$

Нетрудно видеть, что после приведения ИХП (2.2.241) к каноническому виду  $[D\%(\lambda)] = [a_0]\lambda^n + [a_1]\lambda^{n-1} + L + [a_{n-1}]\lambda + [a_n]$  можно воспользоваться теоремой В.Л. Харитонова, в соответствии с которой проверить гурвицевость полиномов (2.2.245)–(2.2.248). Гурвицевость этих полиномов гарантирует наличие у системы (2.2.249), а, следовательно, и (2.2.216) степени устойчивости не ниже заданной  $\eta$ . Возможна и обратная задача, если в соответствии с (2.2.251) составить четыре полинома В.Л. Харитонова (2.2.245)–(2.2.248), параметризованные  $\eta$ , в форме

$$\begin{aligned} D_1(\lambda, \eta) = \\ = \underline{a}_n + \underline{a}_{n-1}(\lambda - \eta) + \bar{a}_{n-2}(\lambda - \eta)^2 + \bar{a}_{n-3}(\lambda - \eta)^3 + \\ + \underline{a}_{n-4}(\lambda - \eta)^4 + L, \end{aligned} \quad (2.2.252)$$

$$\begin{aligned} D_2(\lambda, \eta) = \\ = \bar{a}_n + \underline{a}_{n-1}(\lambda - \eta) + \underline{a}_{n-2}(\lambda - \eta)^2 + \bar{a}_{n-3}(\lambda - \eta)^3 + \\ + \bar{a}_{n-4}(\lambda - \eta)^4 + L, \end{aligned} \quad (2.2.253)$$

$$\begin{aligned} D_3(\lambda, \eta) = \\ = \bar{a}_n + \bar{a}_{n-1}(\lambda - \eta) + \underline{a}_{n-2}(\lambda - \eta)^2 + \underline{a}_{n-3}(\lambda - \eta)^3 + \\ + \bar{a}_{n-4}(\lambda - \eta)^4 + L, \end{aligned} \quad (2.2.254)$$

$$\begin{aligned} D_4(\lambda, \eta) = \\ = \underline{a}_n + \bar{a}_{n-1}(\lambda - \eta) + \bar{a}_{n-2}(\lambda - \eta)^2 + \underline{a}_{n-3}(\lambda - \eta)^3 + \\ + \underline{a}_{n-4}(\lambda - \eta)^4 + L, \end{aligned} \quad (2.2.255)$$

Если найти на множестве значений  $\eta$  для каждого полинома (2.2.252)–(2.2.255) условие границы устойчивости, то получим четыре оценки  $\eta$ , а которых строится ее интервальное представление  $[\eta] = [\underline{\eta}, \bar{\eta}] = \eta_0 + [\underline{\Delta\eta}, \bar{\Delta\eta}]$ .

Если желаемое значение  $\eta$  не достигается реализацией матриц закона управления (2.57), рассчитанных на основе медианной версии  $A_0$  матрицы ОУ, то эти матрицы следует модифицировать.

Развивая тот же подход, можно сконструировать вещественнозначимую матричную функцию от матрицы  $f(N) = N^K$ , где  $K$  – целое нечетное положительное число. Алгебраический спектр  $\sigma\{f(N) = N^K\}$  собственных значений принимает вид  $\sigma\{f(N)\} = \{f(\lambda_{ni}) = \lambda_{Ni}^K; i = \overline{1, n}\}$ . Таким образом, становится очевидной справедливость следующего утверждения.

**Утверждение 2.26.** Пусть гурвицева матрица  $N$  в своем спектре  $\sigma\{f(N)\} = \{f(\lambda_{ni}) = \lambda_{Ni}^K; i = \overline{1, n}\}$  собственных значений содержит комплексносопряженные компоненты, в результате чего распределение  $\{\lambda_{ni}; i = \overline{1, n}\}$  собственных значений этой матрицы характеризуется колебательностью  $\mu$ , при этом матрица  $N^K$  также гурвицева, но близка к границе устойчивости колебательного типа при значении

$$K = \max \arg\{\operatorname{Re}(\lambda_{Ni}^K) \mid \operatorname{Re}(\lambda_{Ni}^K) = 0; i = \overline{1, n}\}, \quad (2.2.256)$$

тогда для колебательности  $\mu$  матрицы  $N$  справедливо оценочное неравенство

$$\mu \leq \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2\nu} \right) = \hat{\mu}. \quad (2.2.257)$$

Применительно к системам (2.2.216), (2.2.249) оказывается справедливым утверждение.

**Утверждение 2.27.** Если ИХП интервальной матрицы  $[F^K]$ , где  $K$  – целое нечетное положительное число, является гурвицевым, при этом  $K$  – максимальное число, при котором гурвицевость матрицы  $[F^K]$  сохраняется, тогда система (2.2.216), (2.2.249) обладает колебательностью  $\mu$  определяемой (2.2.257).

Необходимо теперь остановиться на проблемах объема вычислений при формировании ИХП  $[D(\lambda)]$  интервальной матрицы  $[F]$  системы. Очевидно, если размерность матрицы  $[F]$  составляет  $(n \times n)$ , тогда максимальная мощность множества  $\{(F)_c\}$  глобальных реализаций матрицы  $[F]$  составляет  $2^{n \times n}$ , а минимальная мощность этого множества составляет  $2^n$ , что имеет место при использовании таких канонических представлений матрицы, как диагональное и фробениусово. Однако независимо от базиса мощность множества  $\{(F)_c\}$  угловых реализаций может быть зафиксирована на уровне  $2^p$ , где  $p$  – число исходных интервальных физических параметров. Мощность множества угловых реализаций может быть заметно сокращена, если разработчик проведет предварительное ранжирование первичных

физических параметров с помощью процедуры, предложенной в параграфе 2.3.4.

Следует также заметить, что в силу формализма правил интервальной арифметики (см. приложение 5) в процессе математических преобразований выражений, содержащих интервальные компоненты, может происходить резкий рост ширины  $wid[a_1]$  системных интервальных параметров  $[a_1]$ . Наибольший вклад в этот рост вносят операции вычисления разности  $[a_1] - [a_1]$  и частного от деления  $[a_1]/[a_1]$ . Очевидно, в силу параметризованных представлений (2.2.218)  $a_1(q) - a_1(q) = 0$  и  $a_1(q) = 1$ , в том числе и при  $q = 0$  и  $q = 1$ . Таким образом, без нарушения существа интервальных вычислений они могут быть модифицированы допущением  $a_1(q) - a_1(q) = 0, \frac{[a_1]}{[a_1]} = 1$ .

**Пример 2.12.** В качестве примера рассматривается ОУ с интервальной матрицей состояния  $[A] = A_0 + [\Delta A]$ , для которого спроектирован регулятор, реализующий закон управления (2.57) так, что матрица состояния системы (2.2.216), (2.2.249) имеет вид  $[F] = F_0 + [\Delta F] = (A_0 - BK) + [\Delta A]$ .

Пусть ЗУ (2.2.57) доставляет медианной части  $F_0$  распределение мод Баттерворта порядка  $n = 3$  с характеристической частотой  $\omega_0 = 4c^{-1}$  так, что матрица  $F_0$ , заданная во фробениусовом базисе, имеет вид

$$F_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -64 & -32 & -8 \end{bmatrix}.$$

Пусть интервальная часть  $\Delta F = [\Delta A]$  матрицы состояния имеет представление

$$[\Delta A] = [\underline{\Delta A}, \overline{\Delta A}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ [-25,25] & [-15,15] & [-10,10] \end{bmatrix},$$

так что

$$[F] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ [-89,-39] & [-47,-17] & [-18,2] \end{bmatrix}.$$

Матрица  $[F]$  обладает ИХП

$$[D(\lambda)] = [a_0]\lambda^3 + [a_1]\lambda^2 + [a_2]\lambda + [a_3],$$

$$[a_0] = [1,1]; [a_1] = [-2,18]; [a_2] = [17,47]; [a_3] = [39,89].$$

Полиномы В.Л. Харитонова (2.2.245)–(2.2.248) в этом случае записываются в форме

$$D_1(\lambda) = 39 + 17\lambda + 18\lambda^2 + \lambda^3,$$

$$D_2(\lambda) = 89 + 17\lambda - 2\lambda^2 + \lambda^3,$$

$$D_3(\lambda) = 89 + 47\lambda - 2\lambda^2 + \lambda^3,$$

$$D_4(\lambda) = 39 + 47\lambda + 18\lambda^2 + \lambda^3,$$

Нетрудно видеть, что ИХП  $[D(\lambda)]$  не является гурвицевым. Модифицируем матричные компоненты закона управления (2.2.57) с тем, чтобы он обеспечивал распределение мод Баттерворта порядка  $n = 3$  с характеристической частотой  $\omega_0 = 10c^{-1}$ . Тогда медианная часть интервальной матрицы  $[F] = F_0 + [\Delta F] = F_0 + [\Delta A]$  примет вид

$$F_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1000 & -200 & -20 \end{bmatrix}.$$

Так как  $[\Delta F] = [\Delta A]$ , то для  $[F]$  получим

$$[F] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ [-1025, -975] & [-215, -185] & [-30, -10] \end{bmatrix}.$$

ИХП новой версии  $[F]$   $[D(\lambda)] = \det(\lambda I - [F]) = [a_0]\lambda^3 + [a_1]\lambda^2 + [a_2]\lambda + [a_3]$  обладает интервальными коэффициентами  $[a_0] = [1, 1]$ ;  $[a_1] = [10, 30]$ ;  $[a_2] = [185, 215]$ ;  $[a_3] = [975, 1025]$ . Полиномы (2.2.244)–(2.2.248) записываются в форме

$$D_1(\lambda) = 975 + 185\lambda + 30\lambda^2 + \lambda^3,$$

$$D_2(\lambda) = 1025 + 185\lambda + 10 + \lambda^3,$$

$$D_3(\lambda) = 1025 + 215\lambda + 10\lambda^2 + \lambda^3,$$

$$D_4(\lambda) = 975 + 215\lambda + 30\lambda^2 + \lambda^3.$$

Все полиномы В.Л. Харитонова гурвицевы, следовательно, гурвицев ИХП  $[D(\lambda)]$ . Система робастно устойчива.



## **2.3. Неадаптивные методы управления объектами с параметрическими неопределенностями**

### **2.3.1. Основные положения обобщенного модального управления**

Первоначально задача модального управления ставилась как задача обеспечения желаемой локализации собственных значений (мод) матрицы состояния проектируемой системы, которая доставляла бы последней требуемое качество переходных и установившихся процессов. Алгоритмически задача модального управления (МУ) в такой постановке, в основном, решалась путем приведения матрицы состояния модели объекта управления (ОУ) к канонической фробениусовой форме. Такой способ синтеза модального управления себя оправдывал для случая систем типа "одномерный вход–выход" (SISO-типа), для случая управления ОУ типа "многомерный вход–выход" (MIMO-типа) способ столкнулся с заметными трудностями. Для преодоления возникших трудностей разработчиками использовались достаточно громоздкие конструкции приведения матриц MIMO объектов управления к представлению во фробениусовом базисе. При этом с ростом размерности многомерных ОУ заметно росло число обусловленности матриц приведения подобия, что порождало проблемы вычислительной устойчивости алгоритмов в целом.

Поиск методов синтеза модального управления, инвариантных относительно базиса представления и размерности входов–выходов, привел к модификации первичной постановки задачи модального управления. В модифицированном виде задача получила формулировку обеспечения векторного и матричного подобия процессов и модальных представлений в синтезируемой системе процессам и модальным представлениям некоторой эталонной системы с желаемой модальной моделью (ММ). В такой постановке алгоритмическое обеспечение процедуры синтеза модального управления определяется как решение неоднородного матричного уравнения Сильвестра.

Использование уравнения Сильвестра при синтезе обнаруживало и заметное расширение возможностей МУ, состоящее в достижении как желаемой структуры мод, так и собственных векторов матрицы состояния проектируемой системы. Попытки предъявления требований к структуре собственных векторов матрицы состояния проектируемой системы при условии обеспечения желаемой локализации мод стали появляться по мере интенсификации исследований по использованию геометрических методов в теории управления.

К настоящему моменту потребность разработки алгоритмического обеспечения синтеза обобщенного модального управления (ОМУ), которое

доставляет проектируемой системе желаемые структуры мод и собственных векторов, содержательно оформилась.

Возможность обеспечения системе желаемой структуры собственных значений и требуемых значений оценок областей неопределенности их локализации, именуемого задачей обеспечения модальной робастности, средствами ОМУ в условиях параметрической неопределенности объекта является предметом исследования этого типа неадаптивного управления.

Если в задачу необобщенного модального управления включить необходимость обеспечения таких элементов геометрического спектра собственных векторов матрицы состояния проектируемой системы, которые совпадают со столбцами матрицы входа, соответствующими доминирующим внешним "параметрическим" входам, то достижима параметрическая инвариантность выходов такой системы.

Более того, управление алгебраическим спектром собственных значений и геометрическим спектром собственных векторов матрицы состояния проектируемой системы позволяет контролировать затраты на управление и меру неравномерности распределения этих затрат на сфере начальных состояний  $\|x(0)\| = const$  системы. При этом удается решать задачу робастности в общесистемной постановке в соответствии с концепцией: чем меньшими затратами на управление достигается желаемый эффект управления и чем равномернее они распределены на сфере начальных состояний, тем большей робастностью в целом, т.е. по совокупности факторов, вносящих в исходный объект управления неопределенность, обладает спроектированная система.

Проблемы синтеза обобщенного модального управления изложим в виде системы утверждений.

**Утверждение 3.1.** Пусть тройка матриц  $(A, B, C)$  с управляемой  $(A, B)$  и наблюдаемой  $(A, C)$  парой задает непрерывный объект управления в виде (2.2.39).

Пусть наблюдаемая пара матриц  $(\Gamma, H)$  задает модальную модель. Перечисленные матрицы имеют следующие характеристики:  $A, \Gamma \in R^{n \times n}$  – матрицы состояния соответственно ОУ и ММ;

$B, H^T \in R^{n \times r}$  – матрицы управления ОУ и выхода ММ соответственно;

$C \in R^{n \times m}$  – матрица выхода ОУ.

Потребуем выполнения следующего условия:  $\sigma\{A\} = \{\lambda_{A_i}; i = \overline{1, n}\}$  и  $\sigma\{\Gamma\} = \{\lambda_{\Gamma_i}; i = \overline{1, n}\}$ , алгебраические спектры собственных значений матриц  $A$  и  $\Gamma$  не пересекаются  $\{\sigma\{A\} \cap \sigma\{\Gamma\} \neq 0\}$ , или, что то же самое, характеристические полиномы  $\det(\lambda \cdot I - A)$  и  $\det(\lambda \cdot I - \Gamma)$  не являются взаимно аннулирующими.

Тогда матрица  $K$  вычисляемая в форме

$$K = H \cdot M^{-1}, \quad (2.3.1)$$

где  $M$  является решением неоднородного матричного уравнения Сильвестра

$$M \cdot \Gamma - A \cdot M = -B \cdot H, \quad (2.3.2)$$

доставляет матрице

$$F = A - B \cdot K \quad (2.3.3)$$

матричное подобие, записываемое в форме:

$$M \cdot \Gamma = F \cdot M \quad (2.3.4)$$

следствием которого является совпадение алгебраических спектров собственных значений этих матриц  $\sigma\{F\} = \sigma\{\Gamma\}\sigma\{F\}$ .

Доказательство утверждения 3.1 приведено в приложении 6.

Сформулируем утверждение, имеющее важное технологическое значение.

**Утверждение 3.2.** Если матрица  $\Gamma$  модальной модели является матрицей простой структуры и задается в диагональной форме

$$\Gamma = \Lambda = \text{diag}\{\lambda_i; i = \overline{1, n}\}, \quad (2.3.5)$$

то столбцы  $M_i$  матрицы  $M$  являются собственными векторами матрицы  $F$ .

Доказательство утверждения строится на столбцовой форме записи (2.3.1), в результате чего в силу структуры (П.6.81) столбцы  $\Lambda_i$  матрицы  $\Lambda$  получим:

$$F \cdot M_i = \lambda_i \cdot M_i; i = \overline{1, n}. \quad (2.3.6)$$

Сформулированные утверждения (2.3.1) и (2.3.2) составляют основу построения алгоритмического обеспечения решения задачи обобщенного модального управления. Очевидно, задача ОМУ может иметь две модификации.

В первой модификации задача ОМУ является полной, под которой понимается обеспечение полной структуры желаемых мод  $\sigma(F) = \{\lambda_i; i = \overline{1, n}\}$  и полной структуры желаемых собственных векторов  $\{\xi_i = M_i; F \cdot \xi_i; i = \overline{1, n}\}$  матрицы  $F$  состояния проектируемой системы.

Во второй модификации задачи ОМУ, которая называется неполной, требуется обеспечить полную структуру желаемых мод  $\sigma(F) = \{\lambda_i; i = \overline{1, n}\}$  и неполную структуру мощностью в  $l$  элементов собственных векторов  $\{\xi_i = M_i = \text{fix}, i = \overline{1, l}; l < n\}$  матрицы.

В этой связи сформулируем следующее утверждение.

**Утверждение 3.3.** Для решения полной задачи обобщенного модального управления достаточно, чтобы матрица управления  $B$  объекта обладала рангом, равным  $n = \dim x$ :

$$\text{rang} B = n. \quad (2.3.7)$$

При этом полная задача ОМУ решается с помощью обратной связи по состоянию ОУ с матрицей  $K$  вида

$$K = B^{-1} \cdot (A \cdot M - M \cdot \Lambda) \cdot M^{-1}. \quad (2.3.8)$$

Доказательство утверждения приведено в приложении 6.

**Утверждение 3.4.** Пусть  $\xi_i; i = \overline{1, l}; l \leq r$  где  $r = \text{rang} B, r < n; l$  – число желаемых собственных векторов, соответствующих их первым желаемым модам из числа  $n$  общей структуры желаемых мод  $\{\lambda_i; i = \overline{1, n}\}$

Тогда решение неполной задачи ОМУ достигается с помощью матрицы  $K$  обратной связи, задаваемой матричным выражением

$$\begin{aligned} K &= [\bar{H} : H^{\%}] \cdot [C : M^{\%}]^{-1} = \\ &= [(B^T \cdot B)^{-1} \cdot B^T \cdot (A \cdot \bar{M} - \bar{M} \cdot \bar{\Lambda}; H^{\%})] \cdot [\bar{M} : M^{\%}]^{-1}, \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

где

$$\bar{M} = \text{row}\{M_i = \xi_i; i = \overline{1, l}\}; \bar{\Lambda} = \text{diag}\{\lambda_i = \overline{1, l}\}, \quad (2.3.10)$$

а матрицы  $M^{\%}$  и  $H^{\%}$  связаны матричным уравнением Сильвестра

$$M^{\%} \cdot \Lambda^{\%} - A \cdot M^{\%} = -B \cdot H^{\%}, \quad (2.3.11)$$

в котором

$$\Lambda^{\%} = \text{diag}\{\lambda_i; i = \overline{l+1, n}\}. \quad (2.3.12)$$

Доказательство утверждения приведено в приложении 6.

Утверждения 3.3. и 3.4 составляют алгоритмическую основу обобщенного модального управления объектами с параметрическими неопределенностями, т.е. управления неадаптивными методами.

### 2.3.2. Модальноробастное управление многомерными объектами

Сформулируем постановку задачи модальноробастного управления многомерными объектами.

Рассматривается непрерывный многомерный (ММО-типа) объект управления, базис представления которого таков, что вся параметрическая неопределенность его физических компонентов модельно представлена в форме неопределенности матрицы состояния так, что он имеет векторно-матричное описание:

$$\frac{dx(t)}{dt} = (A + \Delta A) \cdot x(t) + B \cdot u(t); x(0); y(t) = C \cdot x(t). \quad (2.3.13)$$

Объект управления (2.3.13) агрегируется с законом управления (2.3.4)

$$u(t) = K_g \cdot g(t) - K \cdot x(t), \quad (2.3.14)$$

образуя тем самым систему

$$\frac{dx(t)}{dt} = (F + \Delta F) \cdot x(t) + G \cdot g(t), x(0), y(t) = C \cdot x(t), \quad (2.3.15)$$

где

$$F = A - B \cdot K, \Delta F = \Delta A, G = B \cdot K_g. \quad (2.3.16)$$

В силу параметрической неопределенности спроектированной системы (2.3.15), представленной матричным компонентом  $\Delta F$  ее матрицы состояния, будут обладать неопределенностью и элементы алгебраического спектра  $\sigma\{F + \Delta F\} = \{\lambda_i + \Delta\lambda_i; i = \overline{1, n}\}$  собственных значений. Построим на системных компонентах (матрица состояния, алгебраический спектр собственных значений), обладающих параметрической неопределенностью, оценки их неопределенности.

**Определение 3.1.** Оценкой абсолютной параметрической неопределенности матрицы  $(F + \Delta F)$ , где  $F$  – номинальная составляющая этой матрицы, называется скалярная величина  $\Delta_F$ , определяемая выражением

$$\Delta_F =^{\Delta} \|\Delta F\|. \quad (2.3.17)$$

**Определение 3.2.** Оценкой относительной параметрической неопределенности матрицы  $(F + \Delta F)$  называется скалярная величина  $\delta_F$ , определяемая соотношением

$$\delta_F =^{\Delta} \frac{\|\Delta F\|}{\|F\|} = \frac{\Delta_F}{\|F\|} \quad (2.3.18)$$

**Определение 3.3.** Оценкой абсолютной параметрической неопределенности вектора  $(\lambda + \Delta\lambda) = col\{\lambda_i + \Delta\lambda_i; i = \overline{1, n}\}$  собственных векторов матрицы  $(F + \Delta F)$  называется скалярная величина  $\Delta_\lambda$ , определяемая соотношением

$$\Delta_\lambda =^{\Delta} \|\Delta\lambda = col\{\Delta\lambda_i; i = \overline{1, n}\}\|. \quad (2.3.19)$$

**Определение 3.4.** Оценкой относительной параметрической неопределенности вектора  $(\lambda + \Delta\lambda) = col\{\lambda_i + \Delta\lambda_i; i = \overline{1, n}\}$  собственных векторов матрицы  $(F + \Delta F)$  называется скалярная величина  $\delta_\lambda$ , определяемая выражением

$$\delta_\lambda =^{\Delta} \frac{\|\Delta\lambda\|}{\|\lambda\|} = \frac{\Delta_\lambda}{\|\lambda\|}. \quad (2.3.20)$$

Необходимо отметить, что в силу соотношений для оценки  $\Delta_F$  оказывается справедливой запись

$$\Delta_F =^{\Delta} \|\Delta F\| = \|\Delta A\|. \quad (2.3.21)$$

**Утверждение 3.5.** Оценки абсолютной параметрической неопределенности  $\Delta_F$  и  $\Delta_\lambda$  матрицы состояния системы (2.3.15) и ее алгебраического спектра собственных значений соответственно удовлетворяют неравенству

$$\Delta_\lambda \leq C\{M\}\Delta_F, \quad (2.3.22)$$

где  $C\{M\}$ — число обусловленности собственных векторов матрицы  $F$  единичной нормы так, что

$$M = \text{row} \left\{ F \cdot M_i = \lambda_i \cdot M_i \cdot \frac{d\|M_i\|}{dt} = 1; i = \overline{1, n} \right\} \quad (2.3.23)$$

Доказательство утверждения 3.5 с учетом (2.3.17) и (2.3.19) проводится по схеме доказательства утверждения 2.13.

Нетрудно видеть из (2.3.22) с учетом (2.3.21), что эффект введения регулятора с законом управления (2.3.14) при решении задачи обеспечения модальной робастности системы (2.3.15) в абсолютной постановке проявляется лишь в управлении числом обусловленности  $C\{M\}$ , минимальное значение которого  $C\{M\} = 1$  достигается на ортогональной структуре собственных векторов, доставляемой средствами ОМУ.

**Утверждение 3.6.** Оценка относительной параметрической неопределенности  $\delta_F$  и  $\delta_\lambda$  матрицы состояния (3.15) и ее алгебраического спектра собственных значений соответственно удовлетворяет неравенству

$$\delta_\lambda \leq C^2\{M\} \cdot \delta_F. \quad (2.3.24)$$

Доказательство утверждения 3.6 проведено в приложении 6.

Нетрудно видеть, что оценочное неравенство (2.3.24) с учетом (2.3.18) и (2.3.21) принимает вид

$$\delta_\lambda \leq C^2\{M\} \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|F\|} = C^2\{M\} \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|F - B \cdot K\|}. \quad (2.3.25)$$

Свяжем значения  $\delta_\lambda$  и  $\Delta A$  со значением  $\Lambda$  нормы матрицы состояния модели утверждением.

**Утверждение 3.7.** Оценка относительной параметрической неопределенности  $\delta_\lambda$  алгебраического спектра собственных значений матрицы состояния спроектированной системы (2.3.15), вариация  $\Delta A$  матрицы состояния ОУ (2.3.13) и матрица  $\Lambda$  состояния ММ в нормах удовлетворяют неравенству

$$\delta_\lambda \leq C^3\{M\} \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|\Lambda\|} \quad (2.3.26)$$

Доказательство утверждения 3.7 приведено в приложении 6.

Положим неравенство (2.3.26) в основу формирования требований к значению  $\|\Lambda\|$ , для чего (2.3.26) запишем в форме

$$\delta_\lambda \leq C^3\{M\} \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|\Lambda\|} = \delta_{\lambda R}, \quad (2.3.27)$$

где  $\delta_{\lambda R}$  – требуемое значение оценки модальной робастности системы (3.15). Из (3.27) для требуемого значения  $\|\Lambda\|_R$  нормы матрицы состояния модальной модели получим:

$$\|\Lambda\| \geq \|\Lambda\|_R = C^3\{M\} \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\delta_{\lambda R}}. \quad (2.3.28)$$

Соотношение (2.3.28) и набор требований к динамическим свойствам номинальной реализации системы (2.3.15) составляют основу алгоритма синтеза ЗУ вида (2.3.14) методами обобщенного модального управления. Для случая реализуемости полной задачи ОМУ может быть предложен следующий алгоритм синтеза модальноробастных систем вида (2.3.15).

### Алгоритм 3.1.

1. Построение  $(A, B, C)$  – номинального матричного представления некоторого ОУ в базисе, в котором неопределенность физических параметров приводит к неопределенности значения только матрицы состояния объекта в форме матричного компонента  $\Delta A$  так, что становится справедливым модальное представление (2.3.13).
2. Задание требований к качеству переходных и установившихся процессов номинальной версии проектируемой системы, а также величины  $\delta_{\lambda R}$  требуемого значения оценки модальной робастности в форме оценки  $\delta_\lambda$  относительной параметрической неопределенности алгебраического спектра собственных значений матрицы  $(F + \Delta F)$  системы (2.3.15).
3. Формирование матрицы  $\Lambda$  состояния модальной модели из условия

$$\Lambda = \arg \left\{ \|\Lambda\| \geq \|\Lambda\|_r = C^3\{M\} \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\delta_{\lambda R}} \cdot \frac{d\sigma\{\Lambda\}}{dt} = \sigma\{\Lambda\} \right\} \quad (2.3.29)$$

в предположении, что  $C\{M\} = 1$ .

4. Формирование ортогональной матрицы  $M$  собственных векторов номинальной версии матрицы состояния  $A_\Sigma$  системы (2.3.15) из условия

$$M = \arg\{C\{M\} = 1\}. \quad (2.3.30)$$

Для формирования ортогональной матрицы  $M$  размерности  $(n \times n)$  достаточно взять любую невырожденную  $(n \times n)$  -матрицу  $N$  и построить ее SVD-разложение

$$N = U_N \sum_N V_N^T,$$

где  $U_N \cdot U_N^T = U_N^T \cdot U_N = I, V_N \cdot V_N^T = V_N^T \cdot V_N = I$ .

Тогда в качестве матрицы  $M$  может быть взята любая из матриц левого  $U_N$  или правого  $V_N$  сингулярных базисов.

5. Вычисление матрицы  $K$  закона управления (2.3.14) в силу соотношения (2.3.8).
6. Вычисление матрицы  $K_g$  прямой связи по внешнему воздействию ЗУ (2.3.14) с помощью соотношения

$$\begin{aligned} K_g &= \arg\{-C \cdot F^{-1} \cdot B \cdot K_g = (1 - \delta) \cdot I\} = \\ &= -(1 - \delta) \cdot (C \cdot F^{-1} \cdot B)^{-1} = -(1 - \delta) \cdot (CMA^{-1}M^{-1})^{-1} \end{aligned} \quad (2.3.31)$$

где  $\delta$  – величина статизма отношения "вход–выход" номинальной версии системы (2.3.15).

7. Вычисление апостериорного значения оценки  $\delta_g$  в форме (2.3.20), где с целью минимизации достаточности оценок целесообразно использование бесконечных векторных норм.
8. Формирование реализационной версии закона управления (2.3.14), записываемой в форме

$$u(t) = K_\varepsilon \cdot \varepsilon(t) - K_x \cdot x(t), \quad (2.3.32)$$

где  $\varepsilon(t) = g(t) - y(t), K_\varepsilon = K_g$ , а матрица  $K_x$  ищется по аналогии с (2.65) в форме

$$K_x = K - K_\varepsilon \cdot C = K + (1 - \delta) \cdot (C \cdot F^{-1} \cdot B)^{-1}. \quad (2.3.33)$$

Необходимо сделать к приведенному алгоритму следующее примечание. Нетрудно видеть, что множество матриц  $M$ , удовлетворяющих условию (2.3.30) для случая реализуемости полной задачи ОМУ, образует континуум. В этой связи наложим на выбор матрицы  $M$ , которая по существу определяет в силу (2.3.8) выбор матрицы  $K = K(M)$  обратной связи по состоянию ОУ, ограничение в форме

$$M = \arg \min_M \{J_M = C^{1/2} \{W_u\} \alpha_M^{1/2} \{W_u\}\}. \quad (2.3.34)$$

В соотношении (3.34)  $W_u$  – грамиан затрат на управление, которое при  $g(t) \equiv 0$  как элемент функционального пространства  $L_T^p$  при  $p = 2, \tau = [0, \infty]$  на множестве свободных движений, порождаемых сферой начальных состояний  $\|x(0)\| = const$ , характеризуется нормой  $\|u(t)\|$ , удовлетворяющий соотношениям:



$$\begin{aligned}
\|u(t)\|^2 &= \\
&= \int_0^\infty u^T(t) \cdot u(t) dt = \\
&= x^T(0) \int_0^\infty E^{A_\Xi^T t} \cdot K^T K e^{A_\Xi t} dx(0) = x^T W_u x(0).
\end{aligned}$$

Грамиан  $W_u$  затрат на управление вычисляется в силу матричного уравнения типа уравнения Ляпунова:

$$F^T \cdot W_u + W_u \cdot F = -K^T \cdot K. \quad (2.3.32)$$

В (2.3.34)  $\alpha_M\{W_u\}$  – максимальное сингулярное число грамиана  $W_u$  затрат на управление  $C\{W_u\}$  – его число обусловленности. Таким образом, функционал  $J_M$  в (2.3.34) контролирует затраты на управление и обусловленность их распределения на сфере  $\|x(0)\| = const$ .

В связи со сказанным п. 4 алгоритма 3.1 должен быть модифицирован и записан в следующей форме:

4. Формирование матрицы  $M$  собственных векторов матрицы  $A_\Xi$  состояния системы (3.15) из условия

$$M = \left\{ C\{M\} = 1 \frac{d}{dt} \min_M \left\{ J_M = C^{1/2}\{W_u\} \alpha_M^{1/2}\{W_u\} \right\} \right\}. \quad (2.3.33)$$

Теперь рассмотрим случай реализуемости лишь неполной задачи обобщенного модального управления. Этому случаю соответствует ситуация  $\text{rang} B = r < n$ . При неполной задаче ОМУ исчезает возможность свободного назначения структуры мод матрицы  $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_i \cdot i = \overline{1, n}\}$ . Управление числом обусловленности матрицы  $M$  осуществляется в форме

$$\text{Место для уравнения.} \quad (2.3.34)$$

$$\text{Место для уравнения.} \quad (2.3.35)$$

$$\begin{aligned}
C\{M\} &= \\
&= C\{M(H): M \cdot \Lambda - A \cdot M = -B \cdot H: \Lambda = \text{dix}, H = \text{var}\}
\end{aligned} \quad (2.3.37)$$

путем модификации матрицы  $H$  в классе наблюдаемых пар  $(\Lambda, H)$  при фиксированной матрице  $\Lambda$ . Причем модификация  $H$  осуществляется в силу алгоритмов линейного программирования, таких как алгоритм Нелдера–Мида. Заметим, что в качестве начальной пары матриц  $M$  и  $H$  может быть взята пара, конструируемая в соответствии с положениями утверждения 3.4.

В итоге матрица  $M$  ищется с помощью итерационной процедуры, приводящей к выполнению условия

Место для уравнения. (2.3.36)

Место для уравнения. (2.3.37)

$$\begin{aligned}
 M &= \\
 &= \arg \min_H \{C\{M(H)\}: M \cdot \Lambda - A \cdot M = -BH: \Lambda = \text{fix}, H = \\
 &= \text{var}\}. \quad (2.3.38)
 \end{aligned}$$

Таким образом, для случая реализуемости лишь неполной задачи ОМУ может быть предложен следующий алгоритм синтеза модальноробастных систем вида (2.3.15).

### Алгоритм 3.2.

1. Выполнение п.п. 1–3 алгоритма 3.1.
2. Нахождение пары матриц  $(M, H) = \operatorname{argmin}\{C\{M(H)\}\}$  с помощью итерационной процедуры, опирающейся на (2.3.38). Если  $\min_H C\{M(H)\}: \|M_i\| = 1; i = \overline{1, n}\} = 1$ , то переход к п. 5 алгоритма, иначе – п. 3.
3. Возвращение к п. 3 алгоритма 3.1 с целью формирования новой версии матрицы  $\Lambda$  при заданных  $\|\Delta F\| = \|\Delta A\|$ , требуемого значения  $\delta_{\lambda R}$  модальной робастности и полученного в п. 2 значений числа обусловленности  $C\{M\}$  в силу соотношения (2.3.29).
4. Фиксация результата в форме тройки матриц  $(\Lambda, H, M)$ , где  $\Lambda$  удовлетворяет (3.29) при паре  $((H, M)$ , удовлетворяющей (3.38), выполнение которого позволяет осуществить переход к п. 5, иначе – к п. 2;
5. Выполнение п.п. 5–8.

Следует заметить, что для сокращения объема вычислений при организации итерационной процедуры в теле алгоритма 3.2 целесообразно использовать параметризованное характеристической частотой  $\omega_0$  представление используемого распределения мод. Необходимо также отметить, что, если в результате синтеза достигается выполнение условия  $\delta_\lambda \leq \delta_{\lambda R}$ , то становится справедливым аппарат теории чувствительности в рамках функций чувствительности первого порядка. В связи с этим при вычислениях в п. 7 алгоритма 3.1 апостериорного значения  $\delta_\lambda$  в силу определения (3.20) в последнем целесообразно  $\Delta_\lambda = \|\Delta\lambda\|$  вычислять с помощью соотношения (П.6.51) в форме

$$\|\Delta\lambda\| = \|\operatorname{col}\{(M^{-1}\Delta F \cdot M)_{ii}; i = \overline{1, n}\}\|. \quad (2.3.39)$$

**Пример 3.1.** Процедуру синтеза модальноробастной системы методами ОМУ проиллюстрируем на примере многомерного объекта

управления, допускающего решение полной задачи ОМУ. Тогда, следуя алгоритму 3.1, выполним следующие действия.

1. Построение  $(A, B, C)$  – номинального представления ОУ, характеризующегося матрицами

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Параметрическая неопределенность проявляется в появлении нежелательных антисимметричных перекрестных связей так, что

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ -0.5 & 0 \end{bmatrix}; \|A\| = 0.5; \delta_A = \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} = 0.5.$$

2. Формирование технических требований в форме:

- время переходного процесса  $t_n \leq 0.45$ ;

- перерегулирование  $\sigma \leq 5\%$ ;

- требуемая величина оценки модальной робастности  $\delta_{\lambda R} = 0.02$ .

3. Выбор в качестве желаемого распределения мод проектируемой системы распределения мод Баттерворта второго порядка, которое в параметризованной характеристической частотой  $\omega_0$  форме позволяет для матрицы  $\Lambda$  записать

$$\Lambda = \omega_0 \begin{bmatrix} -0.707 & 0.707 \\ -0.707 & -0.707 \end{bmatrix}.$$

Значение характеристической частоты  $\omega_0$  определяется в силу (2.3.29) и технических требований к проектируемой системе (2.3.15) из условия

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \\ &= \max \left\{ \omega_0 \geq \frac{4.5}{t_n} = 10c^{-1}; \omega_0 \geq \frac{\|\Delta A\|}{\delta_{\lambda R}} = \frac{0.5}{0.02} = \right. \\ &= 25c^{-1} \left. \right\} = 25c^{-1}. \end{aligned}$$

В итоге матрица  $\Lambda$  принимает вид

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -17.677 & 17.677 \\ -17.677 & -17.677 \end{bmatrix}.$$

4. Формирование ортогональной матрицы  $M: C\{M\} = 1$ , которое приводит к матрице

$$M = \begin{bmatrix} 0.8053 & -0.5928 \\ 0.5928 & 0.8053 \end{bmatrix}.$$

Вычисление матрицы  $K$  обратных связей по состоянию закона управления (2.3.14) в силу соотношения (2.3.8) приводит к результату

$$K = \begin{bmatrix} 0 & -36.3553 \\ 17.6777 & 18.6777 \end{bmatrix}.$$

5. Вычисление матрицы  $K_g$  прямых связей по внешнему воздействию  $g(t)$  закона управления (2.3.14) в силу соотношения (2.3.8) для случая  $\delta = 0$ , позволяющее записать:

$$K = \begin{bmatrix} 0 & -36.3553 \\ 17.6777 & 18.6777 \end{bmatrix}.$$

6. Вычисление апостериорного значения оценки  $\delta_\lambda$  модальной робастности в силу определения (2.3.20)  $\delta_\lambda = \frac{\|\Delta\lambda\|}{\|\lambda\|}$  характеризующееся компонентами  $\|\lambda\| = \omega_0 = 25$  и  $\|\Delta\lambda\| = 0.5$ , полученными с помощью (2.3.39), приводит к величине  $\delta_\lambda = 0.02$
7. Представление спроектированной системы (2.3.15) номинальной тройкой матриц  $(F, G, C)$ , имеющих реализацию

$$F = \begin{bmatrix} -17.677 & 17.677 \\ -17.677 & -17.677 \end{bmatrix}; G = \begin{bmatrix} 17.677 & -17.677 \\ 17.677 & 17.677 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Параметрическая неопределенность проявляется в вариации  $\Delta F = \Delta A$  матрицы состояния, которая для спроектированной системы характеризуется оценкой относительной неопределенности  $\delta_F$  (3.18), компоненты которой  $\Delta_F = \|\Delta F\|$  и  $\|F\|$  принимают значения  $\|\Delta F\| = \|\Delta A\| = 0.5$ ;  $\|F\| = 25$ , что приводит к величине  $\delta_F = 0.02$ .

Закон управления (2.3.14) не изменил оценки абсолютной неопределенности матрицы состояния, но при этом в двадцать пять раз уменьшил значение оценки относительной параметрической неопределенности этой матрицы.

В заключение следует заметить, что если параметрическая неопределенность исходных физических параметров проявляется в неопределенности системных параметров, которыми оказываются элементы как матрицы состояния, так и матрицы управления ОУ, то в этом случае следует воспользоваться приемом, предложенным в параграфе 2.3.4. Этот прием состоит во включении на входе объекта управления буферной системы вида (2.2.199).

### **2.3.3. Синтез параметрически инвариантных систем**

Рассматриваются задачи синтеза систем управления, минимизация нежелательного эффекта параметрической неопределенности матричных компонентов модельного представления объектов управления которых достигается в классе неадаптивных законов управления, доставляющих

системе инвариантность отношения "параметрический вход – выход (ошибка)". Базовые концепции сведения задачи чувствительности переменных динамической системы к параметрической неопределенности матриц модели ОУ к задаче анализа системных свойств синтезируемой системы (управляемости, наблюдаемости и инвариантности) отношения "параметрический вход – системные переменные" изложены в параграфе 2.3.4. В случае достижения неуправляемости этого отношения, т.е. нулевой его передаточной функции, наблюдается инвариантность его выхода ко входу, что позволяет называть такую систему параметрически инвариантной. Параметрическая инвариантность будет полной, если она зафиксирована на всех сепаратных отношениях отмеченного типа, в противном случае она является частичной.

В настоящем параграфе рассматривается проблема погружения процедуры синтеза законов неадаптивного управления, доставляющих системе параметрическую инвариантность с одновременным удовлетворением требований к динамическим свойствам процессов в ней, в алгоритмическую среду синтеза обобщенного модального управления. Это погружение осуществляется на примере двух типов законов неадаптивного управления: модального управления, ориентированного в форме (2.3.14) относительно внешнего задающего воздействия произвольного вида, и обобщенного изодромного управления для случая конечномерного задающего воздействия.

Для случая синтеза закона управления в форме (2.3.14) методами обобщенного модального управления, доставляющего проектируемой системе параметрическую инвариантность с одновременным обеспечением требуемых показателей в переходном и установившемся режимах отношению задающий внешних вход – выход системы, может быть предложен следующий алгоритм.

### **Алгоритм 3.3.**

1. Построение  $(A, B, C)$  – номинального векторно-матричного представления объекта управления в базисе, в котором неопределенность физических параметров представлена неопределенностью задания только матрицы состояния в форме матричного компонента  $\Delta A$  так, что становится справедлива векторно-матричная модель ОУ (2.2.191), (2.3.13). При этом предпочтительны такие базисы, в которых параметризуемые системные элементы матрицы  $A$ , т.е. отличные от нуля и единицы элементы этой матрицы, были размещены в минимальном числе строк. Примеров такого базиса является фробениусов базис строчной версии. Желательно, чтобы матрица  $C$  выхода объекта принимала в выбранном базисе вид

$$C = \text{diag} \left\{ [1 | 0_{n_l-1}^T]; l = \overline{1, m}; \sum_{l=1}^m n_l = n \right\}, \quad (2.3.40)$$

Здесь  $n_l$  – размерность вектора состояния сепаратного  $l$  –го канала ОУ ММО-типа.

2. Построение факторизованного представления матричного компонента  $\Delta A$  в форме (2.2.192)

$$\Delta A = \sum_{j=1}^p \Delta A_j, \Delta A_j: \text{rang} \Delta A_j = 1; j = \overline{1, p} \quad (2.3.41)$$

с максимальным значением  $p$ , равным числу ненулевых элементов  $A$ . Единичное значение ранга матрицы  $\Delta A_j$  позволяет представить последнюю в форме (2.2.194)

$$\Delta A_j = d_j \cdot h_j^T: \|h_j\| = 1; j = \overline{1, p}, \quad (2.3.42)$$

представление (2.2.194), (2.3.42) позволяет ввести в рассмотрение  $p$ -мерный вектор  $\zeta(t) = \text{col}\{\zeta_j(t) = h_j^T \cdot x(t); j = \overline{1, p}\}$  внешнего "параметрического" воздействия так, что исходный ОУ (2.2.191) с параметрической неопределенностью  $\Delta A$  задания матрицы состояния

$$\frac{dx(t)}{dt} = (A + \Delta A) \cdot x(t) + B \cdot u(t); y(t) = Cx(t),$$

получает номинальное векторно-матричное описание (2.2.198), имеющее вид

$$\frac{dx(t)}{dt} = A \cdot x(t) + D \cdot \zeta(t) + B \cdot u(t); y(t) = Cx(t), \quad (2.3.43)$$

где  $D = \text{row}\{D_j = d_j; j = \overline{1, p}\}$  –  $n \times p$ -матрица внешнего "параметрического" входа.

3. Формирование матрицы весов  $P_s$  (2.2.201) в виде

$$P_s = \text{row}\{\text{col}[\|W_{ylj}\|; l = \overline{1, m}]; j = \overline{1, p}\}, \quad (2.3.44)$$

где  $W_{ylj}$  – матрица управляемости, построенная на тройке матриц  $(C^l, A, D_j)$ ,  $C^l$  –  $l$ -ая строка матрицы  $C$ ,  $D_j$  –  $j$ -ый столбец  $D$ , с целью ранжирования параметрических входов  $\zeta_j (j = \overline{1, p})$ , а, следовательно, матричных компонентов  $\Delta A_j$  по степени их влияния на выходы  $y_l(t) (l = \overline{1, m})$  объекта, оцениваемой с помощью норм  $\|P_{sj}\| (j = \overline{1, p})$  столбцов матрицы весов.

4. Модификация представления (2.3.41) матричного компонента  $\Delta A$ , а, следовательно, матрицы  $D$ , с целью минимизации  $p$  – числа столбцов

$D_j (j = \overline{1, p})$  этой матрицы путем аддитивного агрегирования доминирующих параметрических входов в (2.3.43) с одновременным обеспечением выполнения условия (2.204) так, что  $D$  ищется из условия

$$D = \arg \left\{ C \cdot D_j = 0; l = \overline{1, m} \frac{dp}{dt} = \right. \\ \left. = \min_p \arg(\Delta A = \sum_{j=1}^p \Delta A_j; rang \Delta A_j = 1) \right\}. \quad (2.3.45)$$

5. Формирование требований к качеству процессов по выходным переменным  $y_l(t) (l = \overline{1, m})$  в переходном и установившемся режимах при задающем внешнем воздействии  $g(t)$  номинальной версии проектируемой системы

$$\frac{dx(t)}{dt} = F \cdot x(t) + G \cdot g(t) + D \cdot \zeta(t), y(t) C \cdot x(t) \quad (2.3.46)$$

где

$$F = A - B \cdot K, G = B \cdot K_g, \quad (2.3.47)$$

выход  $y(t)$  инвариантен относительно  $\zeta(t)$  так, что выполняются соотношения

$$y(t) = y\{t, g(t), \zeta(t) \neq 0\} = y\{t, g(t), \zeta(t) = 0\}. \quad (2.3.48)$$

Представление сформулированных требований в виде желаемой структуры мод  $\sigma\{F\} = \{\lambda_i; i = \overline{1, n}\}$ .

6. Проверка условия

$$\dim \zeta(t) = p \leq r = rang B. \quad (2.3.49)$$

В случае его выполнения переход к п. 7 алгоритма, иначе – к п. 11.

7. Конструирование матрицы  $K$  отрицательной обратной связи по состоянию ОУ (2.2.191), (2.3.43) закона управления (2.3.14), задаваемого выражением

$$u(t) = K_g \cdot g(t) - K \cdot x(t) \quad (2.3.50)$$

методами обобщенного модального управления, опирающегося на решение матричного уравнения Сильвестра, так что для  $K$  можно записать

$$K = H \cdot M^{-1}; M = \arg\{M\Lambda - A \cdot M = -B \cdot H\}, \quad (2.3.51)$$

где  $(\Lambda, H) = \arg\{\Lambda = diag\{\lambda_i; i = \overline{1, n}\} \cdot \frac{d}{dt} observ(\Lambda, H)\}$

Уравнение Сильвестра в (2.3.51) в силу специфики задачи синтеза, связанной с обеспечением параметрической инвариантности выходу  $u_l(t) (l = \overline{1, m})$  относительно параметрических внешних воздействий  $\zeta_j(t) (j = \overline{1, p})$ , которая решается с использованием положений утверждения 2.19 в виде выражения (2.2.210), приводимого в форме

$$K = \arg \left\{ D_j = \xi_j; F \xi_j = \lambda_j \xi_j; j = \overline{1, p} \frac{d\sigma\{F\}}{dt} = \sigma\{\Lambda\} \right\}, \quad (2.3.52)$$

следует представить в факторизованном по геометрическому и алгебраическому спектрам матрицы  $F$  виде

$$[D|\tilde{M}] \begin{bmatrix} \Lambda_p & 0 \\ 0 & \tilde{\Lambda} \end{bmatrix} - A[D|\tilde{M}] = -B[H_p|\tilde{H}]. \quad (2.3.53)$$

Представление уравнения Сильвестра (2.3.53) в декомпозированном на два уравнения Сильвестра виде

$$D \cdot \Lambda_p - A \cdot D = -B \cdot H_p, \quad (2.3.54)$$

$$M^\% \cdot \Lambda^\% - A \cdot M^\% = -B \cdot H^\%. \quad (2.3.55)$$

В матричных уравнениях (2.3.54), (2.3.55)

$$\begin{aligned} (\Lambda_p, \Lambda^\%): \Lambda &= \\ &= \text{diag}\{\Lambda_p = \text{diag}(\lambda_i; i = \overline{1, p}); \Lambda^\% = \text{diag}(\lambda_i; i = \\ &= \overline{p+1, n})\}, \end{aligned} \quad (2.3.56)$$

$$H^\% = \arg\{\text{observ}(\Lambda^\%, H)\}. \quad (2.3.57)$$

Решение уравнения Сильвестра (2.3.54) относительно матрицы  $H_p$  в форме

$$H_p = (B^T \cdot B)^{-1} \cdot B^T \cdot (A \cdot D - D \cdot \Lambda_p). \quad (2.3.58)$$

Решение уравнения Сильвестра (2.3.55) относительно матрицы  $M^\% = M^\%(H^\%)$ . Конструирование матрицы  $K$  обратной связи по состоянию ОУ в силу (2.3.51), (2.3.55) и (2.3.58), определяемой выражением

$$K = [(B^T \cdot B)^{-1} \cdot B^T \cdot (A \cdot D - D \cdot \Lambda_p)|H^\%] \cdot [D|M^\%]^{-1} \quad (2.3.59)$$

8. Конструирование матрицы  $K_g$  прямой связи по внешнему задающему воздействию  $g(t)$  из условия ориентации системы относительно  $g(t)$  средствами  $K_g$ , удовлетворяющей соотношению

$$K_g = \arg \left\{ \Phi(s) = C \cdot (sI - F)^{-1} \cdot BK_g|_{s=0} = I \right\},$$



что приводит к выражению

$$K_g = -(CF^{-1} \cdot B)^{-1} = -\{C \cdot [D|M^%]\Lambda^{-1} \cdot [D|M^%]^{-1}\}^{-1}, \quad (2.3.60)$$

9. Построение реализационной версии ЗУ (2.3.50), приводящей к структуре системы с единичной по выходу обратной связи, задаваемой выражением

$$u(t) = K_\varepsilon \varepsilon(t) - K_x x(t), \quad (2.3.61)$$

где  $K_\varepsilon = K_g, \varepsilon(t) = g(t) - y(t)$  – ошибка воспроизведения задающего воздействия, матрица  $K_x$  модифицированной обратной связи по состоянию ОУ удовлетворяет в силу (3.50), (3.61) соотношению  $K = K_\varepsilon \cdot C + K_x$ , позволяющему вычислить матрицу  $K_x$  с помощью выражения

$$K_x = K - K_\varepsilon \cdot C. \quad (2.3.62)$$

10. Проверка эффективности спроектированного закона неадаптивного управления в формах (2.3.50), (2.3.61) на предмет удовлетворения техническим требованиям показателей качества процессов по выходу  $y(t)$  и ошибке  $\varepsilon(t)$  номинальной версии системы (2.3.46) (при  $\zeta(t) \equiv 0$ ) в переходном и установившемся режимах средствами среды моделирования Matlab. Проверка наличия у системы параметрической инвариантности средствами среды моделирования Matlab осуществляется путем придания матрице состояния системы параметрической неопределенности в виде аддитивных матричных компонентов  $\Delta A_j (j = \overline{1, r})$  при контроле вариаций траекторий системы на ее выходе.

В случае положительного результата проверки переход к п. 16 алгоритма, иначе – к п. 1.

11. Выделение  $r$  доминирующих матричных компонентов  $\Delta A_j$  в представлении (2.3.41) по степени их влияния на выходы  $y_l(t) (l = \overline{1, m})$ , оцениваемой с помощью норм  $\|P_{sj}\| (j = \overline{1, r})$  столбцов матрицы весов (2.3.44) и формирования редуцированной матрицы  $D$  ранга  $r$ , столбцы которой согласованы с доминирующими компонентами  $\Delta A_j (j = \overline{1, r})$  в силу (2.3.45).

12. Расширение технических требований к проектируемой системе требованием к величине  $\delta_F = \frac{\|\Delta A\|}{F}$  оценки относительной параметрической неопределенности матрицы состояния проектируемой системы в форме выполнения условия  $\delta_F \leq \delta_{FR}$ , где задаваемая величина  $\delta_{FR}$  допускает использование аппарата теории чувствительности в рамках функций  $\|\Lambda\|$  диагональной матрицы чувствительности первого порядка. Отображение заданной величины на

требование к норме  $\|\Lambda\|$  диагональной матрицы  $\{\Lambda = \text{diag}\{\lambda_i; i = \overline{1, n}\}\}$  состояния модальной модели, являющейся носителем желаемых мод  $\sigma\{F\} = \{\lambda_i; i = \overline{1, n}\}$  проектируемой системы, в виде условия

$$\|\Lambda\| \geq \frac{\|\Delta A\|}{\delta_{FR}} C\{M\} \quad (2.3.63)$$

В итоге – выбор матрицы  $\Lambda$  из условия

$$\Lambda = \arg \left\{ \sigma\{\Lambda\} = \sigma\{F\} = \{\lambda_i; i = \overline{1, n}\} \frac{d}{dt} \|\Lambda\| \geq \frac{\|\Delta A\|}{\delta_{FR}} C\{M\} \right\} \quad (2.3.64)$$

13. Допущение в (2.3.64)  $C\{M\} = 1$  и конструирование матрицы  $K$  закона управления (2.3.50) с помощью процедуры, описанной в п. 7 алгоритма, положив в нем  $p = r$ , а также дополнение процедуры синтеза минимизацией числа обусловленности матрицы  $M$ , воспользовавшись свободой назначения матрицы  $\tilde{H}$  так, что последняя выбирается из условия

$$H^{\%} = \arg \left\{ C\{[D|M^{\%}(H^{\%})]\} = \min_{H^{\%}} \frac{d}{dt} \text{observ}(\Lambda^{\%}, H^{\%}) \right\}. \quad (2.3.65)$$

14. Выполнение п.п. 8 и 9 алгоритма.  
 15. Проверка эффективности спроектированного закона неадаптивного управления в формах (3.50), (3.61) по схеме п.10 алгоритма, дополнив его оценкой вариаций показателей качества методами теории чувствительности для вариаций системных параметров  $\Delta A_j = (j = \overline{r+1, p})$ , относительно которых параметрическая инвариантность выходов не обеспечена. В случае положительного результата проверки переход к п. 16 алгоритма, иначе – к п.12.  
 16. Техническая реализация алгоритма.

Прежде, чем решать задачу синтеза параметрически инвариантных систем в классе алгоритмов обобщенного издромного управления для случая конечномерного задающего воздействия, напомним его базовые концепции на примере номинальной реализации ОУ (2.2.191), (2.3.13), (2.3.43), записанной в форме

$$\frac{dx(t)}{dt} = A \cdot x(t) + B \cdot u(t); x(0); y(t) = C \cdot x(t). \quad (2.3.66)$$

Ставится задача синтеза закона управления, который обеспечивает слежение выхода  $y(t)$  за конечномерным входным задающим воздействием  $g(t)$ , который генерируется автономной системой

$$\frac{dz(t)}{dt} = E \cdot z(t); z(0); g(t) = P \cdot z(t) \quad (2.3.67)$$

с нулевой установившейся ошибкой  $\varepsilon(t) = g(t) - y(t)$ . В (2.3.67)  $E \in R^{k \times k}, P \in R^{m \times k}$  – соответственно матрица состояния и выхода источника внешнего воздействия (ИВВ).

Будем полагать, что объект управления сконструирован так, что спектры  $\sigma\{A\}$  и  $\sigma\{E\}$  собственных значений матриц состояния ОУ и ИВВ удовлетворяют условию включения

$$\sigma\{E\} \subset \sigma\{A\}. \quad (2.3.68)$$

Введем в рассмотрение  $n$ -мерный вектор  $\eta(t)$  ошибки слежения по состоянию, задав его соотношением

$$\eta(t) = T \cdot z(t) - x(t), \quad (2.3.69)$$

где  $T - (n \times k)$  - матрица в общем случае особого преобразования. Заметим, что вектор  $\eta(t)$ , представляющий собой линейную комбинацию векторов состояния, обладает свойствами состояния. Покажем, что поставленная задача слежения за конечномерным задающим воздействием может быть сведена с использованием переменной  $\eta(t)$  (2.3.69) к задаче управления по состоянию (регулятора), одной из версий которого является модальное управление. Для этих целей сформулируем следующее утверждение.

**Утверждение 3.8.** Если матрица  $T$  в (2.3.69) удовлетворяет матричным соотношениям

$$T \cdot E - A \cdot T = 0, P - C \cdot T = 0, \quad (2.3.70)$$

то оказывается справедливой модальное представление задачи по векторам  $\eta(t)$  и  $\varepsilon(t)$ , записываемое в форме

$$\begin{aligned} \frac{d\eta(t)}{dt} &= A \cdot \eta(t) - B \cdot u(t); \eta(0) = \\ &= T \cdot z(0) - x(0); \varepsilon(t) = C \cdot \eta(t). \end{aligned} \quad (2.3.71)$$

Доказательство утверждения строится на дифференцировании соотношения (2.3.69) и подстановке в полученное выражение (2.3.66) и (2.3.67), а также на представлении ошибки слежения  $\varepsilon(t)$  с использованием (2.3.69) в форме

$$\varepsilon(t) = C \cdot \eta(t) + (P - C \cdot T) \cdot z(t).$$

Использование матричных соотношений (2.3.70) приводит к (2.3.71), при этом гарантия нетривиального разрешения однородного уравнения Сильвестра в (2.3.70) заложена в (2.3.68).

Введем в рассмотрение закон управления в виде связи с матрицей  $K$  по вектору  $\eta(t)$

$$u(t) = K \cdot \eta(t). \quad (2.3.72)$$

Тогда агрегирование (2.3.71) и (2.3.72) дает решение

$$\frac{d\eta(t)}{dt} = F \cdot \eta(t); \eta(0) = T \cdot z(0) - x(0); \varepsilon(t) = C \cdot \eta(t), \quad (2.3.73)$$

где  $F = A - BK$ . Таким образом, задача обеспечения нулевой установившейся ошибки

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} C \cdot \eta(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} C \cdot e^{Ft} \cdot \eta(0) = 0 \quad (2.3.74)$$

решается структурой собственных значений  $\{F\} = \{\lambda_i; i = \overline{1, n}\}$  матрицы состояния автономной системы (2.3.73). Эта структура определяет темп и характер сходимости (2.3.74) ошибки слежения к нулю, при этом матрица  $K$  может быть сконструирована методами модального управления.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда исходный ОУ (2.3.66) обладает параметрической неопределенностью, представленной аддитивным матричным компонентом  $\Delta A$  в матрице состояния. Нетрудно видеть, что он будет присутствовать в модальном представлении (2.3.71) так, что последнее примет вид

$$\frac{d\eta(t)}{dt} = A \cdot \eta(t) + \Delta \cdot A \cdot \eta(t) \cdot \eta(0); \varepsilon(t) = C \cdot \eta(t). \quad (2.3.75)$$

Воспользуемся представлением  $\Delta A$  в форме (2.3.41) с последующим представлением  $\Delta A_j$  в форме (2.3.42) и введением  $p$ -мерного вектора  $\zeta(t) = \text{col}\{\zeta_j(t) = h_j^T \eta(t); j = \overline{1, p}\}$  внешнего "параметрического" воздействия так, что (2.3.75) имеет вид

$$\frac{d\eta(t)}{dt} = F \cdot \eta(t) + D \cdot \zeta(t) - B \cdot u(t); \eta(0); \varepsilon(t) = C \eta(t). \quad (2.3.76)$$

Введение в (2.3.76) закона управления (2.3.72) дает представление процессов по векторам  $\eta(t)$  и  $\varepsilon(t)$  ошибок, получающее вид

$$\frac{d\eta(t)}{dt} = F \cdot \eta(t) + D \cdot \zeta(t); \eta(0); \varepsilon(t) = C \cdot \eta(t) \quad (2.3.77)$$

Таким образом, задача обеспечения нулевой установившейся ошибки  $\varepsilon(t)$  в форме (2.3.74) будет решена, если система (2.3.77) будет параметрически инвариантной, т.е. будут выполняться условия

$$\varepsilon(t) = \varepsilon\{t, \eta(0), \zeta(t) \neq 0\} = \varepsilon\{t, \eta(0), \zeta(t) = 0\}. \quad (2.3.78)$$

Нетрудно видеть, что задача с точностью до замены переменных свелась к синтезу закона управления (3.50) при  $K_g = 0$ , который доставляет системе качество переходных процессов и параметрическую инвариантность методами обобщенного модального управления.

Для случая синтеза закона управления в форме (2.3.72) методами обобщенного модального управления, доставляющего решаемой задаче слежения за конечномерным внешним задающим воздействием с нулевой установившейся ошибкой средствами обобщенного изодромного управления в условиях параметрической неопределенности матрицы состояния ОУ параметрическую инвариантность ошибки с одновременным качеством сходимости этой ошибки к нулю, может быть предложен следующий алгоритм.

#### Алгоритм 3.4.

1. Построение  $(E, P)$  минимального векторно-матричного представления ИВВ (2.3.67), генерирующего на своем выходе внешнее задающее воздействие  $g(t)$ .
2. Выполнение п. 1 алгоритма 3.3, дополнив его контролем и обеспечением условия включения (2.3.68).
3. Решение матричных уравнений (2.3.70).
4. Конструирование матрицы  $K$  закона управления (2.3.72) в полном соответствии с конструированием матрицы  $K$  закона (2.3.50) в силу алгоритма 3.3.

В заключение заметим, что к виду (2.3.77) сводится задача слежения за конечномерным задающим воздействием, если имеется параметрическая неопределенность задания модели ИВВ (2.3.67), представимая аддитивным компонентом  $\Delta E$  его матрицы состояния. В этом случае параметрически возмущенная модель по векторам  $\eta(t)$  и  $\varepsilon(t)$ , в отличие от (2.3.75), примет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\eta(t)}{dt} &= \\ &= A \cdot \eta(t) - (T \cdot \Delta \cdot E) \cdot z(t) - B \cdot u(t); \eta(0); \varepsilon(t) = \\ &= C \cdot \eta(t) \end{aligned}$$

Что сводится к (2.3.77)

#### Пример 3.2.

В качестве примера рассматривается ОУ примера 2.11. Выход этого объекта  $y(t)$  должен с нулевой установившейся ошибкой воспроизводить внешнее задающее воздействие полиномиального типа  $q(t) = 1 + t$ .

Следуя алгоритму 3.4, осуществим следующие действия.

1. Построение минимального  $(E, P)$  представления ИВВ (2.3.67), которым оказывается цепочка из двух интеграторов так, что

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; P = [1 \quad 0]; \sigma\{E\} = \{\lambda_{E12} = 0\}$$

2. Построение  $(A + \Delta A, B, C)$  представления ОУ, которое дает

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \sigma\{A\} = \{\lambda_{A1,2} = 0; \lambda_{A3} = -1\};$$

$$\Delta A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} [1 \ 1 \ 0]; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; C = [2 \ 3 \ 1].$$

Нетрудно видеть, что условие включения (2/3.68)  $\sigma\{E\} \subset \sigma\{A\}$  выполняется.

3. Декомпозиция вариации  $\Delta A$  в форме  $\Delta A = dh$  с целью конструирования матрицы  $D = d$ , которая дает

$$D^T = d^T = [1 \ -2 \ 4], h = [1 \ 1 \ 0].$$

4. Проверка условия  $C \cdot D = 0$ , которая показывает его выполнимость:

$$C \cdot D = [2 \ 3 \ 1][1 \ -2 \ 4]^T = 0.$$

5. Решение матричных уравнений (2.3.70)

$TE - AT = 0, P - CT = 0$ , в результате которого получим матрицу  $T$

$$T = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ -0.75 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

6. Задание матрицы  $\Gamma$  модальной модели для синтеза обобщенного модального управления в диагональной форме,

$$\Gamma = \Lambda = \text{diag}\{\lambda_1 = -2; \lambda_2 = -3; \lambda_3 = -5\}.$$

7.  $\sigma\{\Lambda\}$  не пересекается с  $\sigma\{A\}$ , поэтому уравнение Сильвестра  $M \cdot \Lambda - A \cdot M = -B \cdot H$ , где  $M = [D|M^%]; H = [H_p|H^%]$ , представим в декомпозированном виде

$$D \cdot \Lambda_p - A \cdot D = -B \cdot H_p, M^% \cdot \Lambda^% - A \cdot M^% = -B \cdot H^%.$$

8. Решение уравнения Сильвестра  $D\Lambda_p = [-2]$  относительно матрицы  $H_p$ , что дает

$$H_p = (B^T B)B^T(AD - D\Lambda_p) = [0 \ 0 \ 1] \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} \right\} = 4$$

9. Решение матричного уравнения  $M^% \Lambda^% - AM^% = -BH^%$  с матрицей  $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_2 = -3; \lambda_3 = -5\}$  и матрицей  $H^% = [2 \ 4]$ , образующей с  $\tilde{\Lambda}$  наблюдаемую пару  $(\tilde{\Lambda}, \tilde{H})$ , которое дает

$$M^{\%} = \begin{bmatrix} 1/9 & -1/3 & 1 \\ 1/25 & -1/5 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

10. В агрегированном виде матрицы  $M = [D|M^{\%}]$  и  $H = [H_p|H^{\%}]$  имеют представления

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1/9 & 1/25 \\ -2 & -1/3 & -1/5 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}; H = [4 \quad 2 \quad 1].$$

11. Вычисление матрицы  $K$  в силу  $K = HM^{-1}$ , где

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 8/3 & 1/3 \\ -45 & -63/2 & -9/2 \\ 25 & 125/6 & 25/6 \end{bmatrix},$$

дает  $K = [30 \quad 31 \quad 9]$ .

12. Конструирование матрицы  $F = A - BK$ , которое приводит к

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -30 & -31 & -10 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - F) &= \lambda^3 + 10\lambda^2 + 31\lambda + 30 = \\ &= (\lambda + 2)(\lambda + 3)(\lambda + 5). \end{aligned}$$

13. Построение модели ошибки в форме (3.77), которое приводит к представлению

$$\frac{d\eta(t)}{dt} = F \cdot \eta(t) + D \cdot \zeta(t); \varepsilon(t) = C \cdot \eta(t),$$

где  $\eta(t) = Tz(t) - x(t) = [0.5z_1 - 0.75z_2 - x_1 \quad 0.5z_2 - x_2 \quad -x_3]^T$ .

14. Проверка эффекта достижения параметрической инвариантности системы, т.е. инвариантности  $\varepsilon(t)$  относительно параметрического внешнего воздействия  $\zeta(t)$  путем вычисления передаточной функции

$$\begin{aligned} \Phi_{\varepsilon\zeta}(s) &\triangleq \frac{\varepsilon(s)}{\zeta(s)} = C \cdot (sI - F)^{-1} \cdot D = \\ &= \frac{0}{(s + 2) \cdot (s + 3) \cdot (s + 5)}, \end{aligned}$$

которая подтверждает выполнение равенства  $\Phi_{\varepsilon\zeta}(s) = 0$ .

#### 2.3.4. Алгебраические проблемы параметрической инвариантности: аналитические

## **возможности аппарата траекторной чувствительности**

Рассмотрим непрерывный ОУ с неопределенными параметрами. Предположим, что существует такой базис его модельного описания, в котором неопределенность исходных физических параметров ОУ представляется неопределенностью системных параметров только матрицы состояния. В этом случае векторно-матричное описание ОУ принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{dx(t, q)}{dt} &= A(q) \cdot x(t, q) + B \cdot u(t); x(t)|_{t=0} = \\ &= x(0), y(t, q) = C \cdot x(t, q) \geq 0 \end{aligned} \quad (2.3.79)$$

в котором  $x \in R^n, u \in R^r, y \in R^m$  - векторы состояния, управления и выхода,  $A(q) \in R^{n \times n}, B \in R^{n \times r}, C \in R^{m \times n}$  - матрицы состояния,  $q \in R^p$  - вектор параметров вида  $q = q_0 + \Delta q$ , где  $\Delta q$  - вариация вектора  $q$  относительно его номинальной реализации  $q_0$ ; элементы матрицы  $A(q)$  гладко зависят от вектора параметров  $q$ . Назовем ОУ (2.3.79) при  $q = q_0$  номинальным и запишем его представление в форме

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= A \cdot x(t) + B \cdot u(t); x(t)|_{t=0} = x(0); A = \\ &= A(q_0); y(t) = C \cdot x(t). \end{aligned} \quad (2.3.80)$$

Функционирование ОУ (2.3.79) в составе системы состоит в воспроизведении на его выходе  $y(t)$  экзогенного задающего воздействия  $g(t)$  с требуемыми показателями качества. Закон управления построим применительно к номинальной версии ОУ (2.3.80) в форме прямой связи (ПС) по задающему воздействию с матрицей  $K_g$  и отрицательной обратной связи (ОС) по вектору состояния с матрицей  $K$ . Предположим также, что переменные состояния и задающее воздействие доступны измерению. Тогда ЗУ принимает вид

$$u(t) = K_g \cdot g(t) - K \cdot x(t), \quad (2.3.81)$$

и номинальная версия системы, образованной объединением номинального ОУ (1.2) и ЗУ (1.3), записывается как

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= F \cdot x(t) + G \cdot g(t); x(t)|_{t=0} = x(0); y(t) = \\ &= C \cdot x(t) \end{aligned} \quad (2.3.82)$$

где  $F = A - B \cdot K, G = B \cdot K_g$ .

Требования к показателям качества системы (2.3.82) в переходном и установившемся режимах отражены на структуру мод  $\sigma\{F\} = \{\lambda_i; \det(\lambda I - F) = 0; i = \overline{1, n}\}$  матрицы  $F$  состояния системы и на матрицу ПС  $K_g$ .



Носителем желаемой структуры мод  $\sigma\{F\}$  назначим матрицу  $\Gamma$  состояния модальной модели (ММ), задаваемой наблюдаемой парой матриц  $(\Gamma, L)$ , где  $\sigma\{\Gamma\} = \sigma\{F\}$ , а матрица  $L$  выхода ММ имеет такие же размеры, что и  $B^T$ . Модальная форма представления требований к динамическим показателям системы (2.3.82) в переходном и установившемся режимах позволяет вычислить матрицу  $K$  ЗУ (2.3.81) методом модального управления, алгоритмически основанном на использовании решения матричного уравнения Сильвестра так, что

$$K = \arg \left\{ K \cdot M = L \frac{d}{dt} M \cdot \Gamma - A \cdot M = -B \cdot L \right\} = L \cdot M^{-1}, \quad (2.3.83)$$

где матрица  $M$  – матрица преобразования подобия матриц  $\Gamma$  и  $F$ .

Простейшим требованием к матрице  $K_g$ , которое удовлетворяет очень широкому кругу практических задач, является требование обеспечения равенства выхода и входа в неподвижном состоянии, что позволяет формировать матрицу  $K_g$  в силу условия

$$\begin{aligned} K_g = \arg \{ \Phi(s) = C \cdot (s \cdot I - F)^{-1} \cdot B \cdot K_{g|s=0} = -C \cdot F^{-1} B \cdot \\ K_g = I \} = (-C \cdot F^{-1} B)^{-1}, \end{aligned} \quad (2.3.84)$$

где обратимость матрицы  $F$  гарантирована ее структурой мод, расположенных в левой полуплоскости.

Поставим задачу обеспечения параметрической инвариантности выхода системы к параметрической неопределенности объекта управления (2.3.79). Указанная задача требует рассмотрения системы, образованной объединением ОУ (2.3.79) и ЗУ (2.3.81)

$$\begin{aligned} \frac{dx(t, q)}{dt} = F(q) \cdot x(t, q) + G \cdot g(t); x(t)|_{t=0} = \\ = x(0), y(t, q) = C \cdot x(t, q), \end{aligned} \quad (2.3.85)$$

где  $F(q) = A(q) - B \cdot K$ .

Очевидно, исходная постановка задачи обеспечения параметрической инвариантности выхода системы (2.3.85) к параметрической неопределенности ОУ (2.3.79) принимает вид

$$y(t, g(t), q_0 + \Delta q) = y(t, g(t), q_0), \forall \Delta q \neq 0, \forall t \geq 0. \quad (2.3.86)$$

Для решения задачи обеспечения параметрической инвариантности выхода системы (2.3.85) будем использовать аналитические возможности аппарата траекторной чувствительности. Запишем параметрически возмущенное движение системы по выходу в форме

$$\begin{aligned} y(t, g(t), q_0 + \Delta q) = y(t, g(t), q_0) + \Delta y(t, g(t), q_0, \Delta q) = \\ = y(t, g(t)) + \Delta y(t, g(t), q_0, \Delta q), \forall \Delta q \neq 0, \forall t \geq 0. \end{aligned} \quad (2.3.87)$$

Цепочка равенств (2.3.87) позволяет сформулировать задачу обеспечения параметрической инвариантности выхода системы (2.3.85) к параметрической неопределенности  $\Delta q$  в форме

$$\Delta y(t, g(t), q_0, \Delta q) = 0 \text{ при } \forall t \geq 0 \quad (2.3.88)$$

где  $g(t)$  - измеримые функции.

Если вариация  $\Delta q$  вектора параметров такова, что можно использовать функции чувствительности первого порядка, то отклонение  $\Delta y(t, g(t), q_0, \Delta q)$  может быть выражено через функции траекторной чувствительности  $\eta_j(t, g(t), q_0)$  первого порядка выхода системы (2.3.85) (1.7) к вариации  $j$  - го компонента  $q_j (j = \overline{1, p})$  вектора параметров  $q$  в виде

$$\Delta y(t, g(t), q_0, \Delta q) \approx \sum_{j=1}^p \eta_j(t, g(t), q_0) \Delta q_j, \quad (2.3.89)$$

где  $\eta_j(t, g(t), q_0) = \left. \frac{\partial y(t, g(t), q)}{\partial q_j} \right|_{q=q_0}$ ;  $\Delta q_j$  - вариация  $j$  - го компонента  $q_j (j = \overline{1, p})$  вектора параметров  $q$  относительно его номинального значения  $q_{0j}$ .

Теперь с помощью (2.3.89) сформулируем условие, выполнение которого необходимо для обеспечения параметрической инвариантности выхода системы (2.3.85) к параметрической неопределенности  $\Delta q$  в первом приближении:

$$\eta_j(t, g(t), q_0) = 0 \text{ для } \forall t, \forall g(t) \forall j = \overline{1, p} \quad (2.3.90)$$

Приведем определения правых и левых собственных векторов, которые помогут понять дальнейших результаты.

**Определение 3.5.** Ненулевой вектор  $\xi$  называется правым собственным вектором квадратной  $(n \times n)$  - матрицы  $F$ , если выполняется векторно-матричное соотношение

$$F \cdot \xi = \lambda \cdot \xi; \lambda \in \sigma\{F\} = \{\lambda_i; \det(\lambda I - F) = 0; i = \overline{1, n}\}. \quad (2.3.91)$$

**Определение 3.6.** Ненулевая вектор-строка  $\zeta^T$  называется левым собственным вектором квадратной  $(n \times n)$  - матрицы  $F$ , если выполняется векторно-матричное соотношение

$$\begin{aligned} \zeta^T \cdot F &= \lambda \cdot \zeta^T; \lambda \in \sigma\{F\} = \\ &= \{\lambda_i; \det(\lambda \cdot I - F) = 0; i = \overline{1, n}\}. \end{aligned} \quad (2.3.92)$$

**Утверждение 3.9.** Правые собственные векторы матрицы простой структуры  $F$  состояния номинальной версии (2.3.82) системы (2.3.85) в силу уравнения

$$M \cdot \Lambda = F \cdot M \quad (2.3.93)$$

являются столбцами  $M_i = i = \overline{1, n}$  матрицы  $M$  приведения подобия матрицы  $F$  к диагональному виду  $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_i; \det(\lambda \cdot I - F) = 0; i = \overline{1, n}\}$ .

**Утверждение 3.10.** Левые собственные векторы матрицы  $F$  являются строками  $(M^{-1})^k (k = \overline{1, n})$  матрицы  $M^{-1}$  - обратной матрице  $M$  преобразования подобия (2.3.93).

**Утверждение 3.11.** Левый собственный вектор-строка  $\zeta^T$  матрицы  $F$  совпадает с транспонированным  $\theta^T$  правым собственным вектором  $\theta$  матрицы  $F^T$ , соответствующим тому же собственному значению  $\lambda$  так, что оказывается справедливым соотношение

$$\theta^T = \zeta^T. \quad (2.3.94)$$

С использованием положений утверждения 3.11 можно обеспечить желаемые левые собственные векторы матрицы  $F$ , процедура формирования которых оформлена в виде алгоритма, приведенного в **Приложении 2**.

В основу решения проблемы обеспечения параметрической инвариантности выхода системы (2.3.85) относительно параметрической неопределенности исходного ОУ (2.3.79) в первом приближении положим условие (2.3.90). Введем в рассмотрение агрегированные системы, образованные номинальной версией (2.3.82) синтезируемой системы и моделями траекторной чувствительности к вариации  $j$ -го компонента  $q_j (j = \overline{1, p})$  вектора параметров  $q$  относительно его номинального значения  $q_{0j}$ , имеющими векторно-матричное описание

$$\begin{aligned} \sigma_j(t) &= F \cdot \sigma_j(t) + F_{q_j} \cdot x(t), \sigma_j(0) = 0, \eta_j(t) = \\ &= C \cdot \sigma_j(t); j = \overline{1, p}; \end{aligned} \quad (2.3.95)$$

в котором  $F_{q_j} = \frac{\partial F(q)}{\partial q_j} \Big|_{q=q_0}$ ;  $\sigma_j(t) = \frac{\partial x(t, q)}{\partial q_j} \Big|_{q=q_0}$  -  $j$ -го вектор-функция траекторной чувствительности вектора состояния  $x(t)$ . Агрегированные системы с вектором состояния  $x_j(t) = \text{col}\{x(t), \sigma_j(t)\}$  и выходом  $\eta_j(t)$  имеют описание

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{x}(t)}{dt} &= \tilde{F}_j \cdot \tilde{x}(t) + \tilde{G} \cdot g(t), \tilde{x}(t)|_{t=0} = \tilde{x}(0), \eta_j(t) = \\ &= \tilde{C} \tilde{x}(t); j = \overline{1, p}; \end{aligned} \quad (2.3.96)$$

где матричные компоненты представимы как

$$\tilde{F}_j = \begin{bmatrix} F & 0 \\ F_{q_j} & F \end{bmatrix}, \tilde{G} = \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix}, \tilde{C} = [0 \quad C]. \quad (2.3.97)$$

Сформируем  $\Phi_j(s)$  – передаточную матрицу  $j$  – й агрегированной системы, связывающую переменную  $\eta_j(t)$  и экзогенное задающее воздействие  $g(t)$  с учетом (2.3.97)

$$\begin{aligned} \Phi_j(s) &= \tilde{C} \cdot (sI - \tilde{F}_j)^{-1} \cdot \tilde{G} = \\ &= [0 \quad C] \begin{bmatrix} s \cdot I - F & 0 \\ -F_{q_j} & s \cdot I - F \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix} / \end{aligned} \quad (2.3.98)$$

В развернутом виде передаточная матрица  $\Phi_j(s)$  (3.98 4) получает представление

$$\begin{aligned} \Phi_j(s) &= [0 \quad C] \begin{bmatrix} s \cdot I - F & 0 \\ -F_{q_j} & s \cdot I - F \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= C \cdot (s \cdot I - F)^{-1} \cdot F_{q_j} \cdot (s \cdot I - F)^{-1} \cdot G. \end{aligned} \quad (2.3.99)$$

Произведем параметризацию матрицы состояния  $A(q)$  ОУ (1.1) безразмерными параметрам  $q_j (j = \overline{1, p})$ , где  $p$  в зависимости от базиса представления матрицы  $A(q)$  и поставленной задачи исследования удовлетворяет неравенству  $1 \leq p \leq n^2$ . Очевидно, если ставится задача анализа инвариантности выхода относительно неопределенности задания всех ненулевых элементов матрицы  $A(q)$  одновременно, то выполняется условие  $p = 1$ . Если матрица  $A(q)$  имеет ненулевыми все  $n^2$  элементов и ставится задача анализа инвариантности выхода относительно неопределенности отдельно каждого из ненулевых элементов матрицы  $A(q)$ , то выполняется условие  $p = n^2$ . Если матрица  $A(q)$  задана во фробениусовом базисе, то в зависимости от постановки задачи выполняется неравенство  $1 \leq p \leq n$ .

Будем рассматривать в дальнейшем случай, когда каждый элемент матрицы  $A_{lv}(q_j; j = \overline{1, p}), l, v = \overline{1, n}$ , а следовательно, и матрицы состояния  $F_{lv}(q_j)$  системы (1.7), зависит от своего безразмерного параметра  $q_j$ . При параметризации такого вида матрица чувствительности  $F_{q_j}$  обладает рангом, равным единице так, что становится справедливой запись

$$F_{q_j} = D_v \cdot h^l, \quad (2.3.100)$$

Где  $D_v, h^l$  – соответственно  $v$  – й столбец и  $l$  – я строка матрицы  $F_{q_j}$ , на пересечении которых размещается производная  $\frac{\partial F_{lv}(q)}{\partial q_j} \Big|_{q=q_0}$ . Представления (2.3.99), (2.3.100) позволяют записать выражение для передаточной матрицы  $\tilde{\Phi}_j(s)$  в форме

$$\begin{aligned}\widetilde{\Phi}_j(s) &= C \cdot (s \cdot I - F)^{-1} \cdot D_v \cdot h^l \cdot (s \cdot I - F)^{-1} \cdot G = \\ &= C \cdot (s \cdot I - F)^{-1} \cdot D_v \cdot h^l (s \cdot I - F)^{-1} \cdot B \cdot K_g.\end{aligned}$$

Следует напомнить, что передаточная матрица  $\widetilde{\Phi}_j(s)$  связывает переменную  $\eta_j(t)$  и экзогенное задающее воздействие  $g(t)$  как

$$\begin{aligned}\eta_j(s) &= \widetilde{\Phi}_j(s) \cdot g(s) = \\ &= C \cdot (s \cdot I - F)^{-1} \cdot D_v \cdot h^l (s \cdot I - F)^{-1} B \cdot K_g \cdot g(s),\end{aligned}\quad (2.3.101)$$

где  $\eta_j(s), g(s)$  – преобразования Лапласа соответственно функции  $\eta_j(t)$  траекторной чувствительности выхода системы к вариации  $j$ -го компонента  $q_j (j = \overline{1, p})$  вектора параметров  $q$  относительно его номинального значения  $q_{oj}$  и экзогенного задающего воздействия  $g(t)$ .

Соотношение (2.3.101) позволяет сформулировать еще одну постановку задачи параметрической инвариантности выхода  $y(t)$  к вариации  $j$ -го компонента  $q_j (j = \overline{1, p})$  вектора параметров  $q$  относительно его номинального значения  $q_{oj}$  в первом приближении в форме выполнения равенства

$$\widetilde{\Phi}_j(s) = C \cdot (s \cdot I - F)^{-1} D_v \cdot h^l \cdot (s \cdot I - F)^{-1} B \cdot K_g = 0. \quad (2.3.102)$$

Нетрудно видеть, что для выполнения соотношения (2.3.102) достаточно выполнения одного из равенств

$$C \cdot (s \cdot I - F)^{-1} \cdot D_v = 0, \quad (2.3.103)$$

$$h^l (s \cdot I - F)^{-1} \cdot B \cdot K_g = 0. \quad (2.3.104)$$

Оценим, какими алгебраическими свойствами должны обладать матричные компоненты равенств (2.3.103) и (2.3.104) для того, чтобы они выполнялись, а система (2.3.85) обладала параметрической инвариантностью выхода  $y(t)$  к вариации  $j$ -го компонента  $q_j (j = \overline{1, p})$  вектора параметров  $q$ . Для этой цели сформулируем утверждения.

**Утверждение 3.12.** Для того, чтобы система (2.3.85) обладала инвариантностью выхода  $y(t)$  к вариации  $j$ -го компонента  $q_j (j = \overline{1, p})$  вектора параметров  $q$  относительно его номинального значения  $q_{oj}$  достаточно, чтобы:

1. столбцы  $D_v$ , соответствующие компоненту  $q_j$ , были бы правыми собственными векторами матрицы  $F$ ;
2. столбцы  $D_v$  принадлежали ядру матрицы  $C$ , т.е. выполнялось соотношение

$$C \cdot D_v = 0 \quad (2.3.105)$$

**Доказательство.** Если  $D_\nu$  является правым собственным вектором матрицы  $F$ , соответствующим ее собственному значению  $\lambda_\nu$ , то становится справедливой запись

$$F \cdot D_\nu = \lambda_\nu \cdot D_\nu. \quad (2.3.106)$$

Использование свойства матричной функции  $f((*, s))$  от матрицы (\*) охранять спектр собственных векторов исходной матрицы (\*) и иметь в качестве элементов алгебраического спектра собственных значений компоненты  $f(\lambda_\nu, s)$  делает справедливим соотношение

$$f(F, s) \cdot D_\nu = f(\lambda_\nu, s) \cdot D_\nu. \quad (2.3.107)$$

В рассматриваемом случае матричной функцией  $f(F, s)$  от матрицы  $F$  является резольвента  $f(F, s) = (s \cdot I - F)^{-1}$ , применение которой к соотношениям (2.3.106), (2.3.107) позволяет для выражения (2.3.103) записать цепочку равенств

$$\begin{aligned} C \cdot f(F, s) \cdot D_\nu &= C \cdot (s \cdot I - F)^{-1} \cdot D_\nu = \\ &= C \cdot (s \cdot I - F)^{-1} \cdot D_\nu = (s - \lambda_\nu)^{-1} \cdot C \cdot D_\nu. \end{aligned} \quad (2.3.108)$$

Подстановка в (2.3.108) условия (2.3.105) утверждения приводит к выполнению равенства (2.3.103).

**Утверждение 3.13.** Для того, чтобы система (2.3.85) обладала инвариантностью выхода  $y(t)$  относительно вариации  $j$ -го компонента  $q_j (j = \overline{1, p})$  вектора параметров  $q$  относительно его номинального значения  $q_{oj}$  путем выполнения условия (2.3.104) достаточно, чтобы:

1. строки  $h^l$  были бы левыми собственными векторами матрицы  $F$ ;
2. строки  $h^l$  принадлежали левому ядру матрицы  $B$ , т.е. выполнялось соотношение

$$h^l \cdot B = 0. \quad (2.3.109)$$

**Доказательство** утверждения 3.13 аналогично доказательству утверждения 3.12.

Утверждения 3.10–3.13 содержат алгоритмическую основу синтеза параметрически инвариантных по выходу систем вида (2.3.85), полученных агрегированием ОУ (2.3.79) с АФСУ вида (2.3.81), матричные компоненты которого вычисляются с помощью матричных соотношений (2.3.83) и (2.3.84) с той лишь разницей, что в матричном уравнении Сильвестра в (2.3.83) матрицу состояния модальной модели следует задать в диагональной форме, положив  $\Gamma = \Lambda$ , а  $M$  задать в форме  $M = \text{row}\{D, \bar{M}\}$ , где  $D = \text{row}\{D_\nu; \nu = \overline{1, n}\}$ , для случая (2.3.103) или  $M^{-1} = \text{col}\{H, T\}$ , где  $H = \text{col}\{h^l; l = \overline{1, n}\}$ , для случая (2.3.104).

**Пример 3.3.** Рассмотрим объект управления вида (2.3.79) с матрицами

$$A(q) = \begin{bmatrix} q & q+1 & 0 \\ -2q & -2q & 1 \\ 4q & 4q & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [2 \ 3 \ 1],$$

в которых матрица  $A(q)$  отвечает случаю  $p = 1$ ; параметр  $q$  относительно его номинального значения  $q_0$ ;  $A = A(q)|_{q=q_0=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ . Пара матриц  $(A, B)$  – управляемая.

Для этого ОУ сконструируем замкнутую систему, обладающую параметрической инвариантностью выхода. Заметим, что матрица  $A$  объекта оказывается заданной во фробениусовой форме, а матрица управления  $B$  такова, что матрица состояния  $F = A - BK$  проектируемой системы сохраняет фробениусову форму. Известно, что собственные вектора матрицы, представленной во фробениусовой форме, строятся по схеме Вандермонда, в соответствии с которой правый собственный вектор  $\xi_i$  может иметь вид

$$\xi_i = \text{col}\{\lambda_i^k; k = \overline{0, n-1}\}.$$

Сформируем матрицу–столбец  $D$ . Для этого вычислим матрицу

$$F_{q_j} = \frac{\partial F(q)}{\partial q_j} \Big|_{q=q_0} \quad (j = 1):$$

$$F_{q_j} = \frac{\partial F(q)}{\partial q_j} \Big|_{q=q_0} = \frac{\partial (A(q) - BK)}{\partial q} \Big|_{q=q_0} = \frac{\partial A(q)}{\partial q} \Big|_{q=q_0};$$

$$F_q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} [1 \ 1 \ 0], \text{ откуда } D = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что столбец  $D$  остроен по схеме Вандермонда для  $\lambda_D = -2$ , поэтому для того, чтобы столбец  $D$  был бы собственным вектором матрицы  $F$ , в спектр ее собственных значений должно быть включено  $\lambda_D = -2$ . В соответствии со сказанным зададим спектр мод матрицы состояния  $F$  проектируемой системы как  $\sigma\{F\} = \{\lambda_1 = -2; \lambda_2 = -5; \lambda_3 = -7\}$ . В рассматриваемом примере ограничимся равенством (2.3.103), т.е. утверждениями 3.10 и 3.12.

Обеспечим выполнение первого условия утверждения 3.12. Для этого воспользуемся утверждением 1 и преобразуем уравнения (2.3.83) с учетом представления матриц  $M, L$  и  $\Lambda$  как  $M = \text{row}\{D, \bar{M}\}, L = \text{row}\{L_D, \bar{L}\},$

$$\Lambda = \Gamma = \text{diag}\{\Lambda_D, \bar{\Lambda}\} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}, \Lambda_D = [-2], \bar{\Lambda} = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}.$$

Уравнение  $D\Lambda_D - AD = -BL_D$  решим при заданной матрице  $D = [1 \ -2 \ 4]^T$ , в результате чего получим  $L_D = 4$ . Уравнение  $\bar{M}\bar{\Lambda} - A\bar{M} = -B\bar{L}$  решим относительно  $\bar{M}$ , задавая  $\bar{L} = [1 \ 1]$ , тогда  $\bar{M} = \begin{bmatrix} 0,01 & 1/294 \\ -1/20 & -1/42 \\ 1/4 & 1/6 \end{bmatrix}$ . Матрицы  $M$  и  $L$  исходного уравнения Сильвестра (2.3.83)

принимают вид  $M = \begin{bmatrix} 1 & 0,01 & 1/294 \\ -2 & -1/20 & -1/42 \\ 4 & 1/4 & 1/6 \end{bmatrix}$  и  $L = [4 \ 1 \ 1]$ . Рассчитаем

матрицу  $K = [70 \ 59 \ 13]$ . В соответствии с (2.3.84) матрица  $K_g = 35$ . Матрица состояния  $F$  номинальной версии спроектированной системы

принимает вид  $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -70 & -59 & -14 \end{bmatrix}$ ; матрица  $F(q) =$

$\begin{bmatrix} q & q+1 & 0 \\ -2q & -2q & 1 \\ -70+4q & -59+4q & -14 \end{bmatrix}$ . Проверим теперь, является ли  $D$

собственным вектором  $F$ , воспользовавшись (2.3.106):

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -70 & -59 & -14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}. \text{Т.о., } D \text{ является собственным}$$

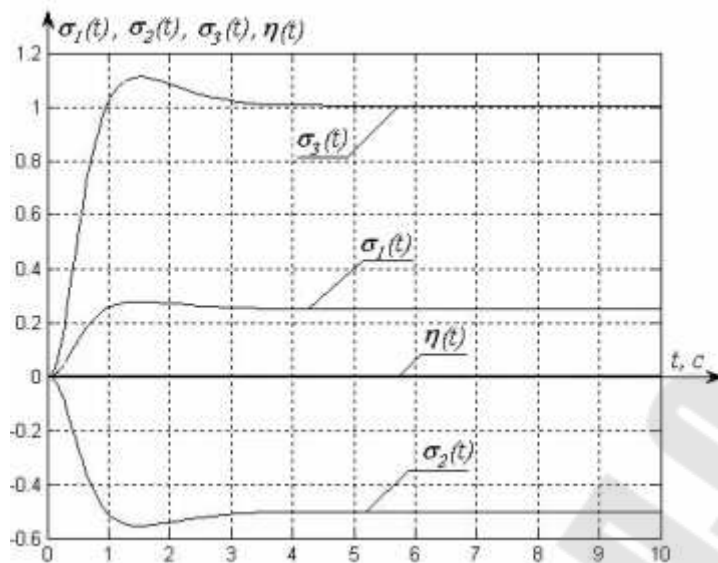
вектором матриц  $F$ , соответствующим значению  $\lambda_1 = -2$ .

Проверим выполнение соотношения (2.3.105): произведение матриц  $C = [2 \ 3 \ 1]$  и  $D = [1 \ -2 \ 4]^T$  оказывается нулевым.

Следовательно, утверждения 1 и 4 выполняются, и спроектированная система должна обладать параметрической инвариантностью выхода, что означает равенство нулю функции траекторной чувствительности  $\eta(t)$  по выходу  $y(t)$ . Дополним модель номинальной версии системы моделью траекторной чувствительности к вариации параметра  $q$  и произведем моделирование полученной агрегированной системы.

Результаты моделирования иллюстрируют равенство нулю функции траекторной чувствительности по выходу при единичном ступенчатом (рис. 3.1) и гармоническом экзогенном задающем воздействии  $g(t)$  (рис. 3.2).





**Рис. 3.1** Функции траекторной чувствительности по состоянию и выходу при  $g(t) = 1$  для параметрически инвариантной системы

Рассмотрим теперь контрпример. Сравним полученную систему с системой, матрица состояния которой обладает спектром собственных значений  $\sigma\{F\} = \{\lambda_1 = -3; \lambda_2 = -5; \lambda_3 = -7\}$ , при этом утверждения 3.10 и 3.12 не выполняются. В этом случае матрицы  $F, K$  и  $K_g$  принимают вид

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -105 & -71 & -15 \end{bmatrix}, K = [105 \quad 71 \quad 14], K_g = 52,632.$$

Результаты моделирования, представленные на рис.3.3, показывают, что выход модели траекторной чувствительности не равен нулю, то есть эта система не обладает параметрической инвариантностью выхода относительно неопределенности параметров ее матрицы состояния и вариация выхода примет вид

$$\Delta y(t, q(t), q_0, \Delta q) = \eta(t, g(t), q_0) \Delta q|_{\Delta q \neq 0} \neq 0.$$

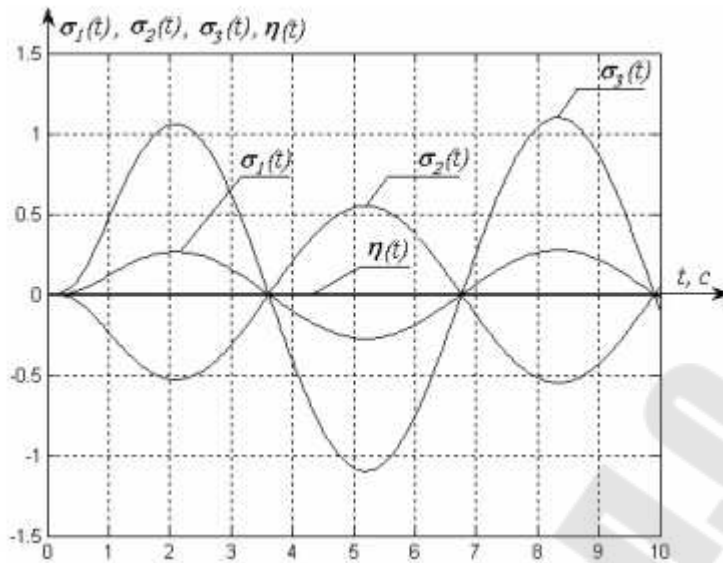


Рис. 3.2 Функции траекторной чувствительности по состоянию и выходу при  $g(t) = \sin t$  для параметрически инвариантной системы

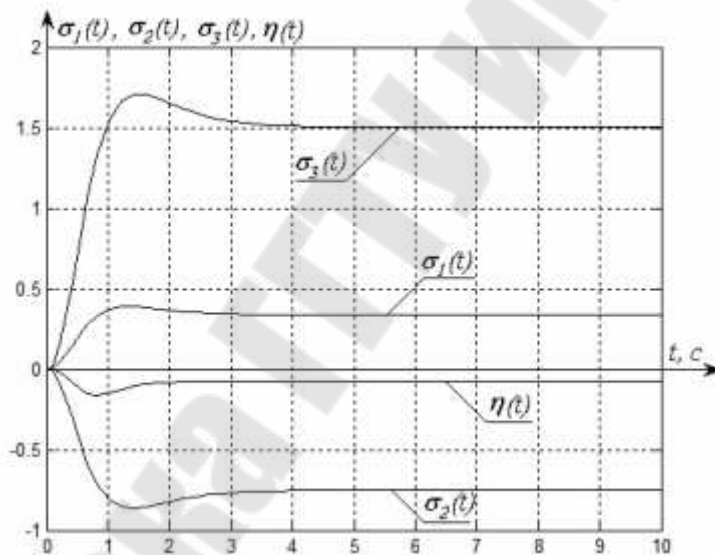


Рис.3.3 Функции траекторной чувствительности по состоянию и выходу при  $g(t) = 1$  для параметрически неинвариантной системы

**Примечание.** Для обеспечения желаемого левого собственного вектора-строки  $\zeta_R^T$  матрицы состояния системы  $F$ , соответствующего собственному значению  $\lambda_\zeta$ , можно предложить следующий алгоритм. Предполагается, что заданы матрицы  $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_i; i = \overline{1, n-1}; \lambda_n = \lambda_\zeta\}$  и  $L$ , желаемый левый собственный вектор  $\zeta_R^T$  обладающий единичной нормой и соответствующий собственному значению  $\lambda_\zeta$ , требуемое значение  $\Delta_{\zeta R}$  невязки  $\Delta_\zeta = \|\zeta_R^T - \theta_\zeta^T\|$  левых векторов матрицы  $F$ , пара  $(\Lambda, L)$  наблюдаема, размерность  $L$  равна размерности  $B^T$ .

### Алгоритм 3.5.

Шаг 1. Вычислить матрицу  $M = \arg\{M \cdot \Lambda - A \cdot M = -B \cdot L \cdot \&\|M_i\| = 1; i = \overline{1, n}\}$ .

Шаг 2. Вычислить матрицу состояния системы  $F = M \Lambda M^{-1}$ .

Шаг 3. Вычислить и произвести нормирование правого собственного вектора  $\theta_\zeta$  матрицы  $F^T$ , соответствующего собственному значению  $\lambda_\zeta$ , обеспечив тем самым ему единичную норму  $\|\theta_\zeta\| = 1$ .

Шаг 4. Вычислить функцию  $\Delta_\zeta = \|\zeta_R^T - \theta_\zeta^T\|$  невязки собственных левых векторов матрицы  $F$ .

Шаг 5. Проверить выполнение неравенства  $\Delta_\zeta \leq \Delta_{\zeta R}$ , где  $\Delta_{\zeta R}$  – требуемое значение невязки

Шаг 6. Если неравенство шага 7 не выполняется, то с помощью методов недифференцируемой оптимизации (метод деформированного многогранника, Нелдера-Мида) сформировать вариацию  $\Delta L(k)$  матрицы  $L$ , где  $k$  – номер итерации алгоритма, и вернуться к шагу 1 алгоритма, в противном случае перейти к шагу 7.

Шаг 7. Вычислить матрицы формирователя сигнала управления (ФСУ):  $K = L \cdot M^{-1}$ ,  $M = \arg\{M \cdot \Lambda - A \cdot M = -B \cdot L \cdot \&\|M_i\| = 1; i = \overline{1, n}\}$ ;  $K_g = \arg\{-C \cdot F^{-1} B_g = I\}$ , причем обратимость матрицы  $F$  обеспечивается тем, что все ее собственные значения являются ненулевыми.

Шаг 8 Сформировать систему, образованную объединением ОУ и ФСУ  $u(t) = K_g \cdot g(t) - K \cdot x(t)$ ,  $x \cdot \frac{d}{dt} = F \cdot x(t) + G \cdot g(t)$ ,  $y(t) = C \cdot x(t)$ , в которой  $F = a - B \cdot K$ ,  $G = B \cdot K_g$ , при этом матрица  $F$  системы обладает желаемым левым собственным вектором  $\zeta_R^T$ .

### 2.3.5. Робастное интервальное управление

Рассматриваются многомерные непрерывные объекты управления, матричные компоненты векторно-матричного представления которых характеризуются параметрической неопределенностью, задаваемой в интервальной форме. Предполагается, что модельная параметрическая неопределенность может быть за счет выбора базиса или включения на входе буферной системы с фиксированными параметрами представлена неопределенностью (интервальностью) задания только матрицы состояния объекта управления. Таким образом, объект управления с интервальными параметрами задается векторно-матричной моделью

$$x \cdot \frac{d}{dt} = [A] \cdot x(t) + B \cdot u(t); x(0); y(t) = C \cdot x(t), \quad (2.3.110)$$

где  $x \in R^n$ ,  $u \in R^r$ ,  $y \in R^m$  – соответственно векторы состояния, управления и выхода ОУ;  $[A]$ ,  $B$ ,  $C$  – интервальная матрица состояния,

матрица управления и выхода, согласованные по размерности с переменными модели (2.3.110). Для интервальной матрицы  $[A]$  состояния используются два представления:

$$[A] = [\underline{A}, \overline{A}]: \underline{A} = \text{row} \{ \text{col}(\underline{A}_{ij}; i = \overline{1, n}); j = \overline{1, n} \}; \quad (2.3.111)$$

$$\overline{A} = \text{row} \{ \text{col}(\overline{A}_{ij}; i = \overline{1, n}); j = \overline{1, n} \}; \quad (2.3.112)$$

$$[A] = A_0 + [\Delta A] = A_0 + [\underline{\Delta A}, \overline{\Delta A}], \quad (2.3.113)$$

где

$$A_0 = \text{row} \{ \text{col}(\underline{A}_{0ij}; i = \overline{1, n}); j = \overline{1, n} \}; \quad (2.3.114)$$

$$\underline{\Delta A} = \text{row} \{ \text{col}(\underline{\Delta A}_{ij}; i = \overline{1, n}); j = \overline{1, n} \}; \quad (2.3.115)$$

$$\overline{\Delta A} = \text{row} \{ \text{col}(\overline{\Delta A}_{ij}; i = \overline{1, n}); j = \overline{1, n} \}; \quad (2.3.116)$$

$$\begin{aligned} A_{0ij} &= 0.5 \cdot (\underline{A}_{ij} + \overline{A}_{ij}); \underline{\Delta A}_{ij} = \underline{A}_{ij} - A_{0ij}; \overline{\Delta A}_{ij} = \\ &= \overline{A}_{ij} - A_{0ij}. \end{aligned} \quad (2.3.117)$$

В приведенных выражениях  $A_0, A_{0ij}$  - медианные компоненты соответственно интервальных матрицы  $[A]$  и её  $(i, j)$ -го компонента  $[A_{ij}]$ ;  $[\Delta A], [\Delta A_{ij}]$  - интервальные матричный элемент и его  $(i, j)$ -й скалярный компонент задающие  $m(\text{wid}[A]), (\text{wid}[A_{ij}])$  соответственно интервальной матрицы  $[A]$  и её  $(i, j)$ -го интервального скалярного компонента  $[A_{ij}]$ . Будем именовать  $A_0$  и  $[\Delta A]$  соответственно медианой и интервальной составляющей интервальной матрицы  $[A]$ .

Ставится задача синтеза неадаптивного регулятора, реализующего закон управления в виде обратной связи с матрицей  $K$  по состоянию  $x(t)$  и прямой связи с матрицей  $K_g$  по внешнему задающему воздействию  $g(t)$ , записываемый в форме

$$u(t) = K_g \cdot g(t) - K \cdot x(t). \quad (2.3.118)$$

Здесь  $K_g, K$  - матрицы с фиксированными параметрами, так что их интервальные представления  $[K_g] = [K_g, K_g], [K] = [K, K]$  характеризуются медианами  $K_{g0} = K_g, K_0 = K$  и нулевой шириной  $\text{wid}[K_g] = 0, \text{wid}[K] = 0$ . Закон управления (3.115) должен доставить системе

$$x \cdot \frac{d}{dt} = F \cdot x(t) + G \cdot g(t); x(0); y(t) = C \cdot x(t), \quad (2.3.119)$$

образованной агрегированием ОУ (3.109) и ЗУ (2.3.118), значения показателей  $\{I_p; \rho = \overline{1, \mu}\}$  качества процессов в переходном и установившемся режимах, которые, будучи интервальными и представимыми в формах

$$[\pi_\rho] = [\underline{\pi}_\rho, \overline{\pi}_\rho] = \pi_{0\rho} + [\Delta\underline{\pi}_\rho, \Delta\overline{\pi}_\rho]; (\rho = \overline{1, \mu}),$$

удовлетворяли бы по медианной составляющей квалификационному неравенству  $\pi_{0\rho} \leq \pi_{0\rho R}$  и характеризовались шириной  $wid[\pi_\rho] = 2|\Delta\underline{\pi}_\rho| = 2\Delta\overline{\pi}_\rho$  которая удовлетворяет технологический процесс, в который встраивается проектируемая система.

Основная часть публикаций, связанных с проблемами синтеза законов неадаптивного управления вида (2.3.118), использует формулировку задачи синтеза, сводящую ее к проблеме робастной устойчивости, факт достижения которой контролируется методом В.Л. Харитонов. Необходимо отметить, что при представлении интервальных матриц в основном, за редким исключением, используется форма (3.110).

Вернемся к модели (2.3.119) спроектированной системы, в которой для интервальной матрицы состояния  $[F]$  запишем

$$[F] = [\underline{F}, \overline{F}] = F_0 + [\Delta F], \quad (2.3.120)$$

$$\begin{aligned} [F] &= [A] - B \cdot K = A_0 + [\Delta A] - B \cdot K = \\ &= A_0 - B \cdot K + [\Delta A]. \end{aligned} \quad (2.3.121)$$

Матричные соотношения (2.3.87), (2.3.88), по существу, содержат доказательство следующего утверждения.

**Утверждение 3.13.** Закон управления вида (2.3.118) изменяет лишь медианную составляющую  $F_0$  интервальной матрицы  $[F]$  состояния системы (2.3.119) в силу соотношения

$$F_0 = A_0 - B \cdot K, \quad (2.3.122)$$

оставляя неизменной ее интервальную составляющую так, что выполняется равенство

$$[\Delta F] = [\Delta A]. \quad (2.3.123)$$

Отметим важное свойство интервальной составляющей  $[\Delta(*)]$  интервальной матрицы  $[(*)]$ .

**Свойство 3.1.** Норма  $\|[\Delta(*)]\|$  интервальной составляющей  $[\Delta(*)]$  интервальной матрицы  $[(*)]$  не является интервальной и совпадает с нормой

любой ее угловой реализации  $\left| \left\{ (\Delta(*))_c \right\}_v \right|$ ;  $v = \overline{1, 2^{n \times n}}$  так, что выполняется равенство

$$\|[\Delta(*)]\| = \left| \left\{ (\Delta(*))_c \right\}_v \right|; v = \overline{1, 2^{n \times n}}. \quad (2.3.124)$$

Теперь введем две характеристики интервальной матрицы  $[(*)]$ , задав их с помощью определений.

**Определение 3.5.** Оценкой абсолютной интервальности интервальной матрицы  $[(*)] = (*)_0 + [\Delta(*)]$  называется положительное число  $\Delta_I(*)$ , задаваемое соотношением

$$\Delta_I(*) \triangleq \|[\Delta(*)]\|. \quad (2.3.125)$$

**Определение 3.6.** Оценкой относительной интервальности интервальной матрицы  $[(*)] = (*)_0 + [\Delta(*)]$  называется положительное число  $\delta_I(*)$

$$\delta_I(*) = \frac{\|[\Delta(*)]\|}{\|(*)_0\|} = \frac{\Delta_I(*)}{\|(*)_0\|}.$$

Нетрудно видеть, что введенные оценки интервальности интервальной матрицы  $[(*)]$  применительно к  $[(*)] = [F]$  интервальной матрице состояния спроектированной системы (2.3.119) совместно с положениями утверждения 3.13 содержат доказательство следующего утверждения.

**Утверждение 3.14.** Закон управления (2.3.118) не изменяет значения оценки абсолютной интервальности матрицы состояния, так что выполняется равенство

$$\Delta_I \cdot F = \Delta_I \cdot A, \quad (2.3.126)$$

но при этом изменяется значение оценки относительной интервальности интервальной матрицы  $[F]$  состояния системы (2.3.119) в силу соотношения – сконструировать матрицы

$$\delta_I F = \frac{\|[\Delta A]\|}{\|F_0\|} = \frac{\|[\Delta A]\|}{\|A_0 - B \cdot K\|}.$$

Теперь сформулируем постановку задачи синтеза закона управления объектом с интервальными параметрами  $K$  и  $K_g$  закона управления (2.3.118) такие чтобы:

1. медианная составляющая  $F_0 = A_0 - B \cdot K$  матрицы  $[F]$  спроектированной системы (2.3.119) доставляла медианные значения  $\pi_{0\rho}$  ( $\rho = \overline{1, \mu}$ ) показателей качества процессов в переходном и установившемся режимах, удовлетворяющих требованиям

$$\pi_{0\rho} \leq \pi_{0\rho R} (\rho = \overline{1, \mu}); \quad (2.3.127)$$

2. оценка относительной интервальности  $\delta_I F$  матрицы  $[F]$  состояния спроектированной системы (2.3.119) удовлетворяла условию

$$\delta_I \cdot F \leq \delta_I \cdot F_R, \quad (2.3.128)$$

при этом  $\delta_I F_R$  была такой, что становится корректным использование аппарата теории чувствительности в рамках функций чувствительности первого порядка;

3. для медианной составляющей  $F_0$  матрицы состояния  $[F]$  выполнялось условие обеспечения единичного отношения "вход – выход" в неподвижном состоянии

$$\begin{aligned} K_g &= \left\{ \arg \Phi_0(s) = C \cdot (sI - F_0)^{-1} \cdot B \cdot K_g \Big|_{s=0} = I \right\} = \\ &= -(C \cdot F_0^{-1} B)^{-1}. \end{aligned} \quad (2.3.129)$$

Для решения поставленной задачи воспользуемся возможностями обобщенного модального управления (ОМУ). При этом, как указывалось ранее, в зависимости от ранга матрицы  $B$ , когда ранг матрицы  $B = n$ , возможно решение полной задачи ОМУ так, что свободно назначаются желаемые спектры собственных значений медианной версии  $\sigma\{F_0\} = \{\lambda_i; i = \overline{1, n}\}$  матрицы  $F$  системы и собственных векторов  $\{\xi_i = M_i; M \cdot \Lambda = F_0 \cdot M; i = \overline{1, n}\}$  этой матрицы. В противном случае, когда  $\text{rang} B = r < n$ , возможно решение неполной задачи ОМУ, в которой назначается спектр  $\sigma\{F_0\}$ , а матрица  $M$  собственных векторов  $M = \text{row} M_i = \xi_i; F_0 \xi_i = \lambda_i \xi_i; i = \overline{1, n}$ , ищется из соображений

$$M = \arg \min \{C\{M\}\}. \quad (2.3.130)$$

Напомним, что потребность контролировать число обусловленности  $C\{M\}$  матрицы собственных векторов вызвана поиском возможности априори с помощью оценки нормы  $\|\Lambda\|$  матрицы состояния модальной модели, задаваемой наблюдаемой парой  $(\Lambda, H)$ , оценить норму  $F_0 = \|A_0 - B \cdot K\|$  с тем, чтобы удовлетворить требованию (2.3.128).

В основу этой оценки кладутся соотношения матричного подобия

$$M \cdot \Lambda = F_0 \cdot M, \quad (2.3.131)$$

которые в нормах приводят к оценочным неравенствам

$$C^{-1} \cdot \{M\} \cdot \|\Lambda\| \leq \|F_0\| \leq C \cdot \{M\} \cdot \|\Lambda\|, \quad (2.3.132)$$

и требованию (2.3.128), записываемому в силу (2.3.132) в виде

$$\delta_I \cdot F = \frac{\|[\Delta A]\|}{\|A_{\Sigma 0}\|} \leq \delta_I \cdot F_R. \quad (2.3.133)$$

Объединение (2.3.132) и (2.3.133) порождает цепочку неравенств

$$\delta_I \cdot F = \frac{\|[\Delta A]\|}{\|A_{\Sigma 0}\|} \leq \delta_I \cdot F_R. \quad (2.3.134)$$

Правая часть неравенства (2.3.134) приводит к оценке требуемой нормы  $\|\Lambda\|$  матрицы состояния ММ

$$\|\Lambda\| \geq C \cdot \{M\} \cdot \frac{\|[\Delta A]\|}{\delta_I \cdot F_R}. \quad (2.3.135)$$

Полученные соотношения позволяют предложить алгоритм синтеза закона управления в виде (2.3.118) методами обобщенного модального управления для случая  $\text{rang } B = n$ .

### Алгоритм 3.5

1. Построение  $(A, B, C)$  представления ОУ в базисе, в котором интервальность первичных физических параметров приводит к интервальности только матрицы состояния так, что объект получает  $([A], B, C)$  представление. Запись интервальной матрицы  $[A]$  в форме  $[A] = A_0 + [\Delta A]$ .
2. Формирование требований к показателям качества процессов в переходном и установившемся режимах в виде набора их медианных значений  $\{\pi_{0\rho} (\rho = \overline{1, \mu})\}$  для системы с медианной матрицей состояния  $F_0$ , а также задания требуемой величины  $\delta_I F_R$ , оценки относительной интервальности интервальной  $[F]$  проектируемой системы  $\delta_I \cdot F = \frac{\|[\Delta A]\|}{\|F_0\|} \leq \delta_I \cdot F_R$ .
3. Формирование требований к матрице состояния  $\Lambda$  модальной модели, задаваемой в диагональной форме  $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_i; i = \overline{1, n}\}$  со структурой и реализацией  $\lambda_i$ , доставляющих системе набор требуемых показателей качества  $\{\pi_{0\rho} (\rho = \overline{1, \mu})\}$ , образующих вектор  $\pi_0$  так, что  $\Lambda = \Lambda(\pi_0)$ .
4. Формирование матрицы  $\Lambda$  модальной модели со структурой мод п. 3 алгоритма, но с нормой  $\|i\|$  при известной  $\|[\Delta A]\|$  норме интервальной составляющей матрицы состояния  $[A]$  ОУ (3.109) в силу (2.3.134), в котором в силу достижимости произвольной матрицы  $M$  собственных векторов следует положить  $C\{M\} = 1$ , что приводит (2.3.134) к виду

$$\|\Lambda\| \geq \frac{\|[\Delta A]\|}{\delta_I \cdot F_R}. \quad (2.3.136)$$



5. Конструирование окончательной версии матрицы  $\Lambda$  состояния модальной модели из условия

$$\Lambda = \arg \max \left\{ \|\Lambda\| = \|\Lambda(\pi_0)\|, \|\Lambda\| \geq \frac{\|[\Delta A]\|}{\delta_I \cdot F_R} \right\}. \quad (2.3.137)$$

6. С использованием SVD-процедуры произвольной невырожденной ( $n \times n$ )-матрицы формирование матрицы

$$M = \arg \{C \cdot \{M\}\} = 1. \quad (2.3.138)$$

7. Решение уравнение Сильвестра  $M \cdot \Lambda - A_0 \cdot M = -B \cdot H$  относительно матрицы  $H$  в форме

$$H = B^{-1} \cdot (A_0 \cdot M - M \cdot \Lambda). \quad (2.3.139)$$

8. Формирование матрицы ОС  $K$  закона управления (3.115), вычисленной в силу соотношения

$$K = H \cdot M^{-1} = B^{-1} \cdot (A_0 \cdot M - M \cdot \Lambda) \cdot M^{-1}. \quad (2.3.140)$$

Примечание 3.1. Так как п. 6 порождает континуум матриц  $M$ , то, как и в случае синтеза модально-робастного управления (см. параграф 3.1), на  $M$  следует наложить ограничения на затраты по управлению в виде  $\|u(t)\|$  для  $t \in [0, \infty)$  и равномерности их распределения на сфере  $\|x(0)\| = \text{fix}$ . Тогда  $M$  ищется из условия

$$\begin{aligned} M &= \\ &= \arg \left\{ K = \right. \\ &= B^{-1} \cdot A_0 \cdot M - M \cdot \Lambda \cdot M^{-1} \cdot \\ &\cdot \left. \min_M \left\{ J_n = C^{\frac{1}{2}} \{W_n\} \cdot \alpha_M^{\frac{1}{2}} (W_n) \right\} \right\}, \end{aligned} \quad (2.3.141)$$

где  $W_n$  – грамиан затрат на управление, вычисляемый с помощью уравнения Ляпунова

$$F_0^T \cdot W_n + W_n \cdot F_0 = -K^T \cdot K. \quad (2.3.142)$$

9. Формирование матрицы  $K_g$  прямой связи с помощью соотношения (2.3.129), которому можно придать вид

$$K_g = -(C \cdot M \cdot \Lambda^{-1} \cdot M^{-1} \cdot B)^{-1}. \quad (2.3.143)$$

10. Вычисление реально достигнутой величины оценки  $\delta_I F$  относительной интервальности матрицы  $[F]$  системы в соответствии с определением (2.3.127) и условием (2.3.124) и проверка неравенства (2.3.133)

$$\delta_I F = \frac{\|[\Delta A]\|}{\|F_0 = A_0 - B \cdot K\|} \leq \delta_R F_R. \quad (2.3.144)$$

11. Построение реализационной версии ЗУ (2.3.118), записываемой в форме

$$u(t) = K_\varepsilon \varepsilon(t) - K_x x(t), \quad (2.3.145)$$

где

$$K_\varepsilon = K_g, K_x = K - K_x \cdot C. \quad (2.3.146)$$

12. Представление элементов  $[F_{\ddot{U}}] = F_{\ddot{U}0} + [\Delta F_{\ddot{U}}]$  матрицы состояния спроектированной системы  $[F] = F_0 + [\Delta F]$  в параметризованном параметром  $q_{\ddot{U}}$  виде

$$F_{\ddot{U}}(q_{\ddot{U}}) = 0,5(\underline{F}_{\ddot{U}} + \overline{F}_{\ddot{U}}) + (\overline{F}_{\ddot{U}} - \underline{F}_{\ddot{U}})q_{\ddot{U}}, \quad (2.3.147)$$

где  $q_{\ddot{U}} \in [-0,5; 0,5]$ ;  $q_{\ddot{U}} = 0$ , так, что

$$F_{\ddot{U}}(q_{\ddot{U}})|_{q_{\ddot{U}}=-0,5} = 0,5(\underline{F}_{\ddot{U}} + \overline{F}_{\ddot{U}}) - (\overline{F}_{\ddot{U}} - \underline{F}_{\ddot{U}})0,5 = \underline{F}_{\ddot{U}},$$

$$F_{\ddot{U}}(q_{\ddot{U}})|_{q_{\ddot{U}}=0,5} = 0,5(\underline{F}_{\ddot{U}} + \overline{F}_{\ddot{U}}) + (\overline{F}_{\ddot{U}} - \underline{F}_{\ddot{U}})0,5 = \overline{F}_{\ddot{U}}.$$

13. Вычисление функций чувствительности показателей качества

$$\pi_{\rho q_{ij}} \triangleq \left. \frac{\partial \pi_\rho(q_{i,j})}{\partial q_{i,j}} \right|_{q_{i,j}=0}. \quad (2.3.148)$$

Построение на функциях чувствительности (2.3.148) полных экстремальных вариаций

$$\Delta \pi_\rho = \sum_{i,j}^n |\pi_{\rho q_{ij}}| 0,5. \quad (2.3.149)$$

Вычисление медианного значения  $\pi_{\rho 0}$  показателя  $\pi_\rho$  с целью конструирования достигнутой оценки  $\delta_I \pi_\rho$  относительной интервальности показателя

$$\delta_I \pi_\rho = \frac{\Delta \pi_\rho}{\pi_{\rho 0}}. \quad (2.3.150)$$

При неудовлетворении  $\delta_I \pi_\rho$  по основным показателям по основным показателям требованиям технологического процесса, в который встраивается проектируемая система, осуществить переход к п.3 алгоритма, иначе п. 14.)

14. Техническая реализация регулятора с законом управления (2.3.145)

Для случая, когда  $\text{rang} B = r < n$ , возможно достижение решения лишь задачи неполного обобщенного модального управления, которая не позволяет при заданной структуре мод  $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_i; i = \overline{1, n}\}$  свободно назначать геометрический спектр  $\{\xi_i\}$  собственных векторов образующих матрицу. В теле алгоритма появляется итерационная процедура при конструировании матрицы

$$M = M(H) = \arg \min \{C \{M\} = C \{M(H)\}\}. \quad (2.3.151)$$

В основном предлагаемый для этого случая алгоритм совпадает с алгоритмом 3.5.

### Алгоритм 3.6

1. Выполнение п.п. 1–5 алгоритма 3.5.
2. Организация итерационной процедуры с целевой функцией (2.3.151) на решениях уравнения Сильвестра

$$M \cdot \Lambda - A_0 \cdot M = -B \cdot H. \quad (2.3.152)$$

Фиксация значения  $C \{M\}$ , если  $C \{M\} \neq 1$ , то переход к п.5 алгоритма 3.5 с целью увеличения нормы  $\|\Lambda\|$  в  $C \{M\}$  раз, иначе – переход к п. 8 алгоритма 3.5.

3. Выполнение п.п.8–11 алгоритма 3.5.

В заключении следует отметить, что интервальное представление может быть использовано для "интервальной линеаризации" нелинейных систем. Для иллюстрации такого подхода рассмотрим нелинейный ОУ

$$x \cdot \frac{d}{dt} = f(x(t)) + B \cdot u(t); x(0); y(t) = C \cdot x(t). \quad (2.3.153)$$

Введем в рассмотрение сферу  $S_x$

$$S_x: \|x\| \leq d_s, \quad (2.3.154)$$

Покрывающую область пространства состояния  $R^n$  процессов  $x\{x(0), g(t), t\}$ , где  $g(t)$  – внешнее конечномерное задающее воздействие. Найдем такие  $[A_{ij}] = [\underline{A}_{ij} + \overline{A}_{ij}]$ , что в области, покрываемой сферой (2.3.154), выполняются условия

$$\sum_{j=1}^n \underline{A}_{ij} x_j \leq f_i(x) \leq \sum_{j=1}^n \overline{A}_{ij} x_j. \quad (2.3.155)$$

Тогда на элементах  $[A_{ij}] = [\underline{A}_{ij} + \overline{A}_{ij}]$  может быть сконструирована матрица

$$[A] = \text{row}\{\text{col}(\underline{A}_{ij}; i = \overline{1, n}); j = \overline{1, n}\}, \quad (2.3.156)$$

порождающая линейное интервальное представление нелинейного ОУ (3.150) записываемое в форме  $x \cdot \frac{d}{dt} = [A] \cdot x(t) + B \cdot u(t); x(0); y(t); = Cx(t)$ , к которому могут быть применены предложенные алгоритмы синтеза ЗУ.

**Пример 3.3.** В качестве примера рассматривается задача синтеза закона управления (2.3.118) для объекта ММО типа "двумерный вход – двумерный выход" с вектором состояния третьего порядка, таким образом  $rank B = r = 2, n = 3$ . В связи с этим воспользуемся алгоритмом 3.6 синтеза ЗУ неадаптивного управления на основе ОМУ, следуя которому, выполним следующие действия.

1. Формирование  $([A], B, C)$  – представления ОУ (2.3.110) с матрицами

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ [-0.5; 0.5] & 1 & 0 \\ 0 & [-0.5; 0.5] & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

где  $A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; [\Delta A] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ [-0.5; 0.5] & 0 & 0 \\ 0 & [-0.5; 0.5] & 0 \end{bmatrix}$ , которые

характеризуются  $|A_0| = 1; |[\Delta A]| = 0.5; \Delta_I A = 0.5; \delta_I A = 0.5$ .

2. Формирование требований к системе, которая должна доставлять переходной характеристике медианной версии системы (2.3.119) время переходного процесса  $t_{\Pi} \leq 0,45$  с, перерегулирование  $\sigma \leq 5\%$ , а также обладать оценкой  $\delta_I F$  относительной интервальности интервальной матрицы  $[F]$  состояния не более  $\delta_I F_R = 0.02$ .

3. Назначение матрицы  $\Lambda$  модальной модели с распределением мод Баттерворта, характеризующееся характеристической частотой  $\omega_0$  такой, что  $|\Lambda| = \omega_0$ . Тогда в силу (2.3.137) получим:

$$\begin{aligned} \Lambda &= \\ &= \arg \max \left\{ |\Lambda| = \arg \{t_{\Pi}(\omega_0) \leq 0.45; \sigma \leq 5\% \} = \right. \\ &= 13.88; |\Lambda| \geq \frac{|[\Delta A]|}{\delta_I A_{\Sigma R}} = 25 \left. \right\} = \\ &= \begin{bmatrix} -31.0024 & 0 & 0 \\ 0 & -15.5012 & 26.8489 \\ 0 & -26.8489 & -15.5012 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

4. Организация итерационной процедуры на паре матриц  $(M, H)$  такой, что  $(M, H) = \arg \min \{C\{M\} = C\{M(H)\}; M \cdot \Lambda - A_0 \cdot H = -B \cdot H\}$ , которая дает

$$H = \begin{bmatrix} 30.9515 & 29.6993 & 8.8293 \\ -0.6588 & -9.4584 & 0.5003 \end{bmatrix},$$

$$M = \begin{bmatrix} -0.0535 & 0.0020 & -0.0269 \\ -0.0206 & -0.0211 & -0.0041 \\ -0.9984 & 0.2323 & 0.9720 \end{bmatrix}; C\{M\} = 66.4814.$$

В соответствии с алгоритмом 3.6 в случае  $C\{M\} \neq 1$  рекомендуется вернуться к п. 3 с тем, чтобы в  $C\{M\}$  раз увеличить  $|\Lambda|$ . Однако в связи с тем, что оценка нормы  $\|F_0\|$  (2.3.137) обладает заметной достаточностью, рискнем не менять  $|\Lambda|$ , предполагая тем самым возможность замыкания алгоритма после вычисления реально достижимой  $\delta_I F$ .

5. Формирование матрицы  $K$  обратной связи в законе (2.3.118) в силу

$$K = HM^{-1} = \begin{bmatrix} 16.7683 & -1361.1055 & 3.8349 \\ 21.4862 & 37.6836 & 1.2675 \end{bmatrix}.$$

6. Формирование матрицы  $K_g$  прямых связей по задающему внешнему воздействию в законе (2.3.118) в силу (2.3.143), которое дает

$$K_g = \begin{bmatrix} 16.7683 & -1357.22 \\ 21.4862 & 37.9511 \end{bmatrix}.$$

7. Формирование  $(F_0, G, C)$  представления спроектированной системы, которое приводит к матрицам

$$F_0 = \begin{bmatrix} -21.4863 & -37.6836 & -0.2675 \\ -21.4863 & -36.6836 & -1.2675 \\ -16.7684 & 1361.055 & -3.8349 \end{bmatrix}; G =$$

$$= \begin{bmatrix} 21.4862 & 37.9512 \\ 21.4862 & 37.9512 \\ 16.7683 & -1357.22 \end{bmatrix}$$

при этом  $\|F_0\| = 1435.3727$ , что близко к мажорантной оценке  $C\{M\}|\Lambda| = 2060.9234$ .

8. Вычисление достигнутой оценки относительной интервальности интервальной матрицы  $[F]$  состояния спроектированной системы дает

$$\delta_I F = \frac{\|[\Delta A]\|}{\|F_0\|} = 3.48 * 10^{-4}. \quad (2.3.157)$$

9. В качестве параметра  $\pi_\rho$  приняты собственные значения  $\pi_\rho = \lambda_\rho (\rho = \overline{1,3})$  с целью вычисления функций чувствительности  $\lambda_q = (M^{-1}A_qM)_{\rho\rho}$  и оценки их полных авиаций для угловой реализации интервальной матрицы  $[\Delta A]$  с последующим вычислением

относительной интервальности  $\delta_l \lambda = \frac{\|\Delta \lambda\|}{\|\lambda\|}$ , что в итоге дало значение этой оценки  $\delta_l = 0.011$  (1.1%).

10. 1 Формирование реализационной версии ЗУ (3.115) в форме (2.3.145), что дает для его матриц  $K_\varepsilon = K_g$ ;  $K_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3.8349 \\ 0 & 0 & 1.2675 \end{bmatrix}$ .

11. Передача синтезированного закона неадаптивного управления в среду технической реализации

**Примечание 3.2.** Заканчивая рассмотрение возможностей неадаптивных методов достижения параметрической инвариантности выхода системы относительно неопределенности модели объекта управления вида (3.13), приводимого к виду (2.3.47), и переходя к рассмотрению возможностей адаптивных методов, необходимо сформулировать алгебраическое условие реализуемости адаптивных алгоритмов. Очевидно, этим алгебраическим условием является включение  $D \in \text{Im}(B)$ .

## 2.4. Адаптивное и робастное управление

### 2.4.1. Пример управления объектом первого порядка

#### Постановка задачи

Знакомство с методами адаптивного и робастного управления начнем с простого примера. Рассмотрим скалярный объект

$$x \cdot \frac{d}{dt} = q \cdot x + u, \quad (2.4.1)$$

где  $x$  – регулируемая переменная,  $u$  – сигнал управления,  $q$  – постоянный параметр. Пусть качество слежения за задающим воздействием  $g(t)$  (представленным ограниченной кусочно-непрерывной функцией времени) определяется *эталонной моделью*

$$x \cdot \frac{d}{dt} = -\lambda \cdot x_M + \lambda g, \quad (2.4.2)$$

где сигнал  $x_M$  носит название *эталонного выхода*, а положительная постоянная  $\lambda$  определяет желаемые динамические свойства замкнутой системы. Очевидно, что модель (5.2) можно переписать в виде

$$x_M = \frac{1}{T_p + 1} \cdot g,$$

где  $T = 1/\lambda$  – постоянная времени апериодического звена первого порядка. Введение эталонной модели позволяет формализовать постановку задачи, потребовав выполнения целевого условия

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - x_M(t)) = 0 \quad (2.4.3)$$

для любых задающих воздействий  $g(t)$ . Другими словами, необходимо синтезировать управление  $u$ , обеспечивающее нулевое установившееся значение *ошибки слежения за эталонной моделью*

$$\varepsilon = x - x_M. \quad (2.4.4)$$

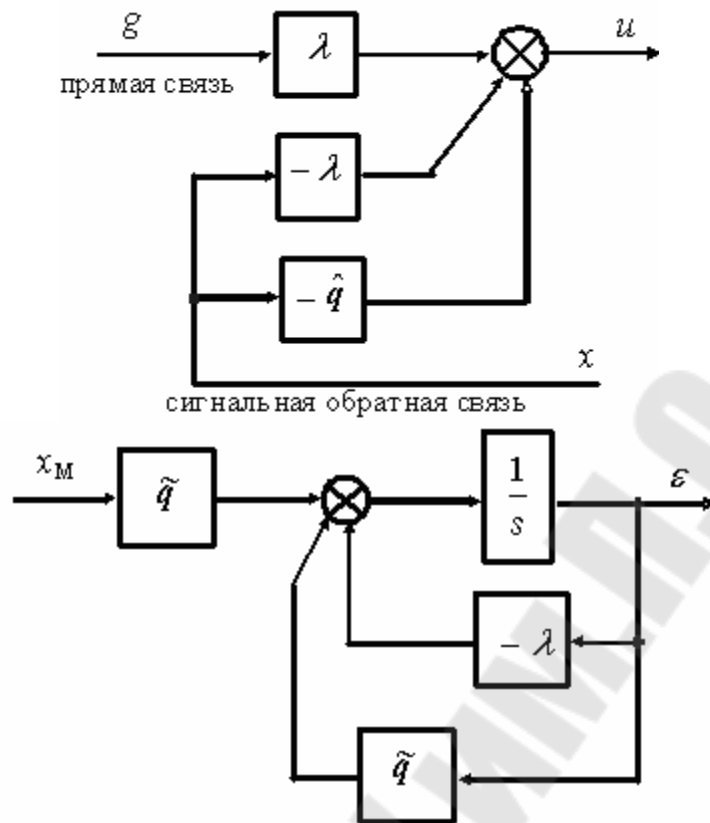
Рассмотрим три возможных решения поставленной задачи, основанные на использовании классической теории управления, а также методов адаптивного и робастного управления.

### ***Неадаптивное управление***

Используем регулятор комбинированного управления

$$u = -\lambda \cdot x - q_0 \cdot x + \lambda_g, \quad (2.4.5)$$

где  $q_0$  – номинальное значение (оценка) параметра  $q$ . Отметим, что регулятор (2.4.4) содержит стабилизирующую обратную связь  $\lambda x$ , компенсирующую обратную связь  $q_0 x$  и прямую связь по задающему воздействию  $\lambda_g$  (см. рис. 4.1, а). Наличие в структуре регулятора прямых и обратных связей объясняет его название – регулятор *комбинированного* управления. Так как коэффициенты регулятора  $\lambda$  и  $q_0$  полагаются фиксированными (ненастраиваемыми), то регулятор (2.4.5) будем также называть *неадаптивным*.



**Рис. 4.1.** Неадаптивное управление: а) структура регулятора; б) эквивалентная модель ошибки

Найдем модель ошибки замкнутой системы. Сначала, подставляя (2.4.5) в (2.4.1), получим модель замкнутого объекта управления

$$x \cdot \frac{d}{dt} = -\lambda \cdot x + q_0 \cdot x + \lambda g, \quad (2.4.6)$$

где  $q = \theta - q_0$  – параметрическая ошибка. Вычитая далее (2.4.2) из (2.4.6), получаем искомую модель ошибки замкнутой системы

$$\varepsilon \cdot \frac{d}{dt} = -\lambda \cdot \varepsilon + q.$$

С учетом равенства (4.4) окончательно имеем (см. рис. 4.1, б)

$$\varepsilon \cdot \frac{d}{dt} = -(\lambda - q) \cdot \varepsilon + q_M. \quad (2.4.7)$$

На основе анализа модели (2.4.7) можно сделать следующие выводы о свойствах неадаптивного регулятора (2.4.5).

Если  $q = q_0$ , то модель ошибки замкнутой системы принимает вид



$$\varepsilon \cdot \frac{d}{dt} = -\lambda \cdot \varepsilon,$$

откуда следует стремление  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Другими словами, при равенстве номинального значения параметра истинному замкнутая система является асимптотически (экспоненциально) устойчивой, а установившаяся ошибка слежения за эталонной моделью равна нулю.

Если  $q \neq q_0$ , но  $q < \lambda$ , то из уравнения (2.4.7) следует асимптотическая устойчивость замкнутой системы (т.к.  $(\lambda - q) > 0$ ) и возможность появления ненулевой установившейся ошибки слежения за счет слагаемого  $q_M$ . Другими словами, малые параметрические возмущения не нарушают устойчивости замкнутой системы, но могут ухудшить ее точностные свойства.

Если  $q \neq q_0$  и  $|q| > \lambda$ , то замкнутая система может потерять устойчивость в случае отрицательного значения величины  $(\lambda - q)$ . Как обеспечить устойчивость системы и высокое качество слежения за эталонной моделью в том случае, если параметр  $q$  является неизвестным или известен с высокой степенью приближенности?

### ***Адаптивное управление***

Алгоритм адаптивного управления удобно представить в виде двух блоков:

– настраиваемого регулятора

$$u = -\lambda \cdot x - \hat{q} \cdot x + \lambda_g, \quad (2.4.8)$$

– алгоритма адаптации

$$q = \tau(\varepsilon, x). \quad (2.4.9)$$

Структура алгоритма адаптации  $\tau(\varepsilon, x)$  будет определена позже. В уравнениях (2.4.8), (2.4.9)  $\hat{q}$  – настраиваемый параметр регулятора, генерируемый алгоритмом адаптации из условия минимизации ошибки слежения  $\varepsilon$ . Особо отметим, что порядок замкнутой системы повысился за счет включения в ее структуру динамического блока – алгоритма адаптации (2.4.9). Поэтому при исследовании устойчивости замкнутой системы необходимо расширить вектор состояния, добавив новую координату – *параметрическую ошибку*  $q$ .

Подставляя (2.4.8) в (2.4.1), вычитая из полученного уравнения (2.4.2) и принимая во внимание условие, что  $q \frac{d}{dt} = q \frac{d}{dt} - q \frac{d}{dt} = -q \frac{d}{dt}$ , получим следующую модель замкнутой системы в координатах  $\varepsilon$  и  $q \frac{d}{dt}$  (т.е. *модель ошибки* – см. **рис. 4.2, б**):

$$\varepsilon \cdot \frac{d}{dt} = -\lambda \cdot \varepsilon + q, \quad (2.4.10)$$

$$q \cdot \frac{d}{dt} = -\tau(\varepsilon, x). \quad (2.4.11)$$

Для выбора структуры алгоритма адаптации  $\tau(\varepsilon, x)$  применим функцию Ляпунова вида

$$V(\varepsilon, q) = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon^2 + \frac{1}{2\gamma} \cdot q, \quad (2.4.12)$$

где  $\gamma$  – произвольный положительный коэффициент (его назначение будет пояснено позже). Тогда производная функции (2.4.12) в силу уравнений (2.4.10) и (2.4.11) после элементарных преобразований принимает вид

$$V(\varepsilon, q) = -\lambda \cdot \varepsilon^2 + q \cdot \varepsilon \cdot x - \frac{1}{\gamma} \cdot q \cdot \tau(\varepsilon, x). \quad (2.4.13)$$

Очевидно, что при выборе  $\tau(\varepsilon, x) = \gamma \varepsilon x$  после сокращения одинаковых слагаемых получаем

$$V \cdot \frac{d}{dt}(\varepsilon, q) = -\lambda \cdot \varepsilon^2 \leq 0. \quad (2.4.14)$$

Из последнего неравенства следует устойчивость по Ляпунову состояния равновесия  $(\varepsilon, q) = (0, 0)$  (в силу теоремы П2.1 из приложения 2) и выполнение равенства

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0$$

(в силу теоремы П2.4 из приложения 2), что означает выполнение целевого условия (2.4.3).

Другими словами, алгоритм адаптивного управления (рис. 4.2, а)

$$u = -\lambda \cdot x - q \cdot x + \lambda_g, \quad (2.4.15)$$

$$q \cdot \frac{d}{dt} = \gamma \cdot \varepsilon \cdot x \quad (2.4.16)$$

обеспечивает асимптотическое слежение за эталонной моделью для параметрически неопределенного объекта (2.4.1). При этом коэффициент  $\gamma$  определяет скорость настройки параметра  $q_0$  и носит название *коэффициента адаптации*. В структуре алгоритма адаптации выделяют также *сигнал ошибки слежения*  $\varepsilon(t)$  и *регрессор*  $x(t)$ . Особо отметим, что в общем случае выполнение целевого условия (2.4.3) не гарантирует *сходимости по параметрам*, т.е. выполнение равенства

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = 0.$$

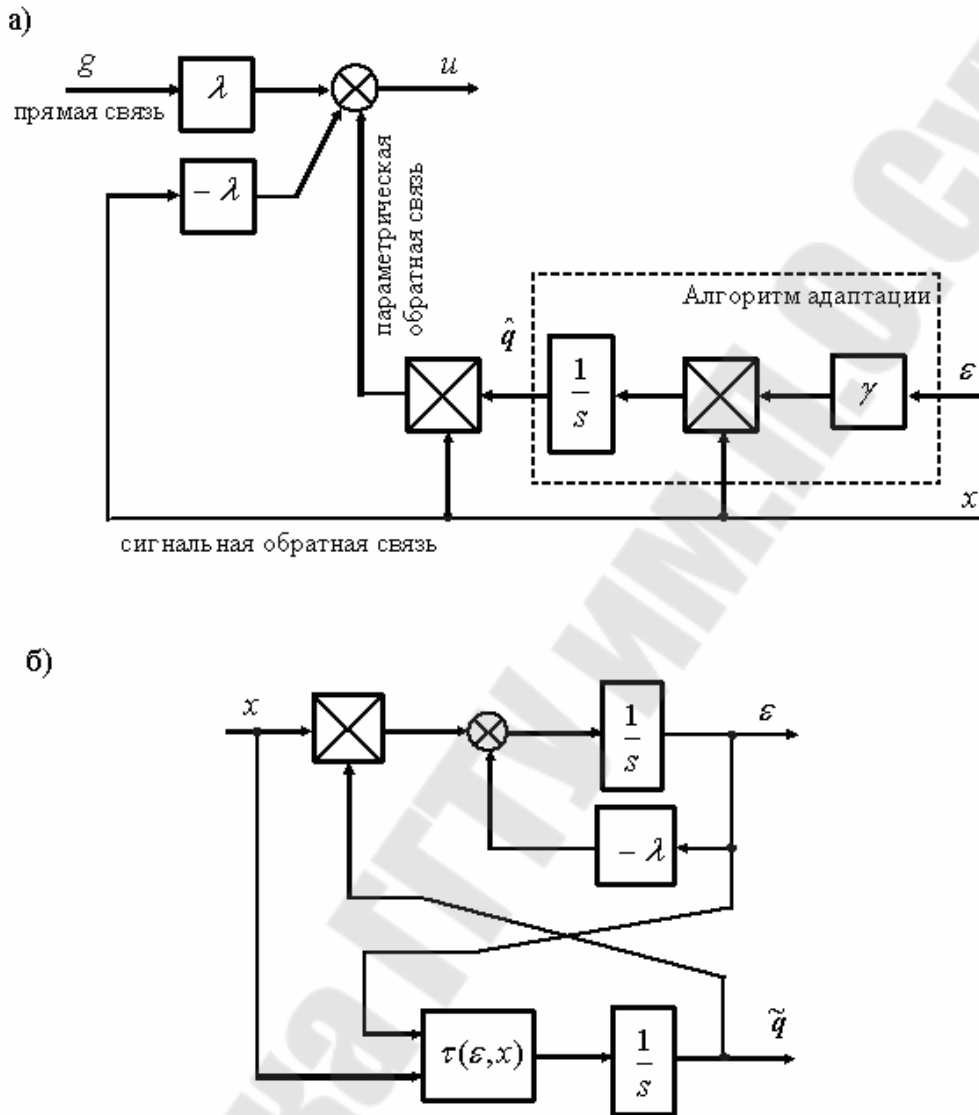


Рис. 4.2. Адаптивное управление: а) структура регулятора; б) эквивалентная модель ошибки

Действительно, как было показано выше, состояние равновесия  $(\varepsilon, q) = (0, 0)$  замкнутой адаптивной системы является только устойчивым по Ляпунову (но не асимптотически устойчивым). Для обеспечения сходимости по параметрам необходимо выполнение дополнительного условия, накладываемого на свойства регрессора (в данном случае на свойства переменной  $x(t)$ ) и получившего название *условия исчезающего возбуждения*. Говорят, что регрессор  $x(t)$  является *исчезающим* (или удовлетворяет условию исчезающего возбуждения), если существуют

такие положительные числа  $T$  и  $\alpha$ , что для всех  $t > 0$  справедливо неравенство

$$\frac{1}{T} \cdot \int_t^{t+T} x^2(\tau) d\tau > \alpha.$$

Приведенное неравенство означает, что на любом интервале времени  $[t, t + T]$  сигнал  $x(t)$  *интегрально отделен от нуля*, т. е. значение соответствующего интеграла больше некоторой положительной константы  $\alpha$ .

Условие неисчезающего возбуждения допускает следующее объяснение. Если регрессор с течением времени стремится к нулю, то скорость настройки параметра  $\hat{q}$  может уменьшаться быстрее, чем скорость уменьшения ошибки слежения  $\varepsilon$  (из формулы (2.4.16) видно, что скорость настройки параметра  $\hat{q}$  пропорциональна произведению  $x$  на  $\varepsilon$ ). Поэтому настраиваемый параметр  $\hat{q}$  может «не успеть» сойтись к истинному значению  $q$  до «обнуления» ошибки  $\varepsilon$ .

Отметим, что в рассматриваемой задаче слежения характер поведения регрессора  $x(t)$  определяется характером задающего воздействия  $g(t)$ . Поэтому условие неисчезающего возбуждения в задачах адаптивного слежения может быть переформулировано в терминах задающего воздействия.

Основной недостаток адаптивного регулятора становится очевидным из выражения (2.4.14), если вспомнить, что свойство устойчивости по Ляпунову не является грубым. На практике это проявляется в высокой чувствительности адаптивных систем к структурным и сигнальным возмущениям.

Рассмотрим объект, подверженный воздействию внешнего возмущения  $\delta(t)$ :

$$x \cdot \frac{t}{dt} = q \cdot x + u + \delta(t). \quad (2.4.17)$$

Пусть возмущение  $\delta(t)$  является ограниченным, т. е.  $|\delta(t)| < \bar{\delta}$  для всех  $t > 0$  и некоторой положительной константы  $\bar{\delta}$ . Используем для управления объектом (2.4.17) адаптивный регулятор (2.4.15), (2.4.16). Тогда модель ошибки замкнутой системы примет вид

$$\varepsilon \cdot \frac{t}{dt} = -\lambda \cdot \varepsilon + q \cdot x + \delta, \quad (2.4.18)$$

$$q \cdot \frac{t}{dt} = -\gamma \cdot x \cdot \varepsilon. \quad (2.4.19)$$

Вычисляя производную функции Ляпунова (2.4.13) в силу уравнений (2.4.18), (2.4.19), получим

$$V \cdot \frac{t}{dt}(\varepsilon, q) = -\lambda \cdot \varepsilon^2 + \varepsilon \cdot \delta \leq -\lambda \cdot \varepsilon^2 + \bar{\delta} \cdot |\varepsilon|. \quad (2.4.20)$$

ак как  $V \cdot \frac{t}{dt} < 0$  при  $|\varepsilon| > \bar{\delta}/\lambda$ , то из (2.4.20) следует ограниченность ошибки слежения  $\varepsilon$ . Однако параметрическая ошибка  $q$  может неограниченно расти при малых значениях  $\varepsilon$ , когда  $V \cdot \frac{t}{dt} > 0$ . Поэтому при наличии внешних возмущений, несмотря на ограниченность ошибки слежения  $\varepsilon$ , может наблюдаться неограниченный параметрический дрейф (состоящий в неограниченном росте значения настраиваемого параметра  $\hat{q}$ ). Естественно, что с практической точки зрения такая ситуация является неприемлемой. Поэтому проблема управления параметрически неопределенным объектом в условиях внешних возмущений требует применения других, специальных методов.

### **Нелинейное робастное управление**

Алгоритм нелинейного робастного управления объектом (2.4.17) имеет вид (см. рис. 4.3, а)

$$u = -\lambda \cdot x - \gamma \cdot x^2 \cdot \varepsilon + \lambda \cdot g. \quad (2.4.21)$$

В этом случае модель ошибки замкнутой системы описывается уравнением (см. рис. 4.3, б)

$$\varepsilon \cdot \frac{t}{dt} - \lambda \cdot \varepsilon + q \cdot x - \gamma \cdot x^2 \cdot \varepsilon + \delta. \quad (2.4.22)$$

Вычисляя производную функции Ляпунова

$$V(\varepsilon) = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon^2 \quad (2.4.23)$$

в силу уравнения (2.4.22), получим

$$\begin{aligned} V \cdot \frac{t}{dt}(\varepsilon) &= -\lambda \cdot \varepsilon^2 + q \cdot x \cdot \varepsilon - \gamma \cdot x^2 \cdot \varepsilon^2 + \delta \cdot \varepsilon \leq \\ &\leq -\lambda \cdot \varepsilon^2 + q \cdot x \cdot \varepsilon - \gamma \cdot x^2 \cdot \varepsilon^2 + \bar{\delta} \cdot |\varepsilon| \end{aligned}$$

Выделим в последнем уравнении полные квадраты разности, добавив и вычтя слагаемые  $q^2/(4\gamma)$  и  $\bar{\delta}^2/(2\gamma)$ :

$$\begin{aligned}
V \cdot \frac{t}{dt}(\varepsilon) &= \\
&= -\frac{\lambda}{2} \cdot \varepsilon^2 - \left( \gamma \cdot x^2 \cdot \varepsilon^2 - q \cdot x \cdot \varepsilon + \frac{q^2}{4\gamma} \right) + \frac{q^2}{4\gamma} - \\
&- \left( \frac{\lambda}{2} \cdot \varepsilon^2 - |\varepsilon| \cdot \bar{\delta} + \frac{1}{2\lambda} \cdot \bar{\delta}^2 \right) + \frac{1}{2\lambda} \cdot \bar{\delta}^2 = \\
&= -\frac{\lambda}{2} \cdot \varepsilon^2 - \left( \sqrt{\gamma} \cdot x \cdot \varepsilon - \frac{q}{2\sqrt{\gamma}} \right)^2 + \frac{q^2}{4\gamma} - \\
&- \left( \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \cdot |\varepsilon| - \sqrt{\frac{1}{2\lambda}} \cdot \bar{\delta} \right)^2 + \frac{\bar{\delta}^2}{2\lambda}.
\end{aligned}$$

Пренебрегая в последнем выражении квадратными слагаемыми, получим

$$V \cdot \frac{t}{dt}(\varepsilon) \leq -\frac{\lambda}{2} \cdot \varepsilon^2 + \frac{q^2}{4\gamma} + \frac{\bar{\delta}^2}{2\lambda}.$$

Учитывая далее равенство  $\lambda\varepsilon^2/2 = \lambda V$  и рассматривая переменную  $V$  в качестве функции времени, можно записать

$$V \cdot \frac{t}{dt}(t) \leq -\lambda \cdot V(t) + \frac{q^2}{4\gamma} + \frac{\bar{\delta}^2}{2\lambda}. \quad (2.4.24)$$

Решая дифференциальное уравнение (2.4.24), получим

$$V(t) \leq e \cdot x \cdot p(-\lambda t) \cdot V(0) + \frac{q^2}{4\gamma \cdot \lambda} + \frac{\bar{\delta}^2}{2\lambda^2}$$

Учитывая далее зависимость (2.4.23) и переходя в последнем выражении к норме ошибки слежения  $\varepsilon$ , окончательно получаем

$$|\varepsilon(t)| \leq \exp\left(-\frac{\lambda}{2}t\right) |\varepsilon(0)| + \Delta, \quad (2.4.25)$$

где  $\Delta = \frac{|q|}{\sqrt{2\gamma \cdot \lambda}} + \frac{\bar{\delta}}{\lambda}$ . Неравенство (2.4.25) задает экспоненциальную мажоранту переходного процесса по норме ошибки слежения  $\varepsilon(t)$  (см. рис. 4.4).

Основные свойства робастного регулятора (2.4.21) могут быть сформулированы следующим образом. Для произвольного положительного коэффициента нелинейной обратной связи  $\gamma$  регулятор (2.4.21) обеспечивает ограниченность всех сигналов и экспоненциальную сходимость ошибки слежения к предельному установившемуся значению  $\Delta$ .

При отсутствии внешних возмущений (т. е. при  $\delta(t) = 0$ ) величина предельного установившегося значения может быть сделана произвольно малой за счет увеличения коэффициента нелинейной обратной связи  $\gamma$ . Во многих практических случаях такие свойства замкнутой системы являются вполне приемлемыми.

В завершение параграфа отметим, что сравнение структурных схем алгоритма адаптивного управления (рис. 4.2, а) и нелинейного робастного управления (рис. 4.3, а) позволяет определить простое правило получения нелинейного робастного управления из адаптивного. Для этого достаточно исключить из структуры алгоритма адаптации интегратор, заменив интегральную обратную связь на статическую нелинейную.

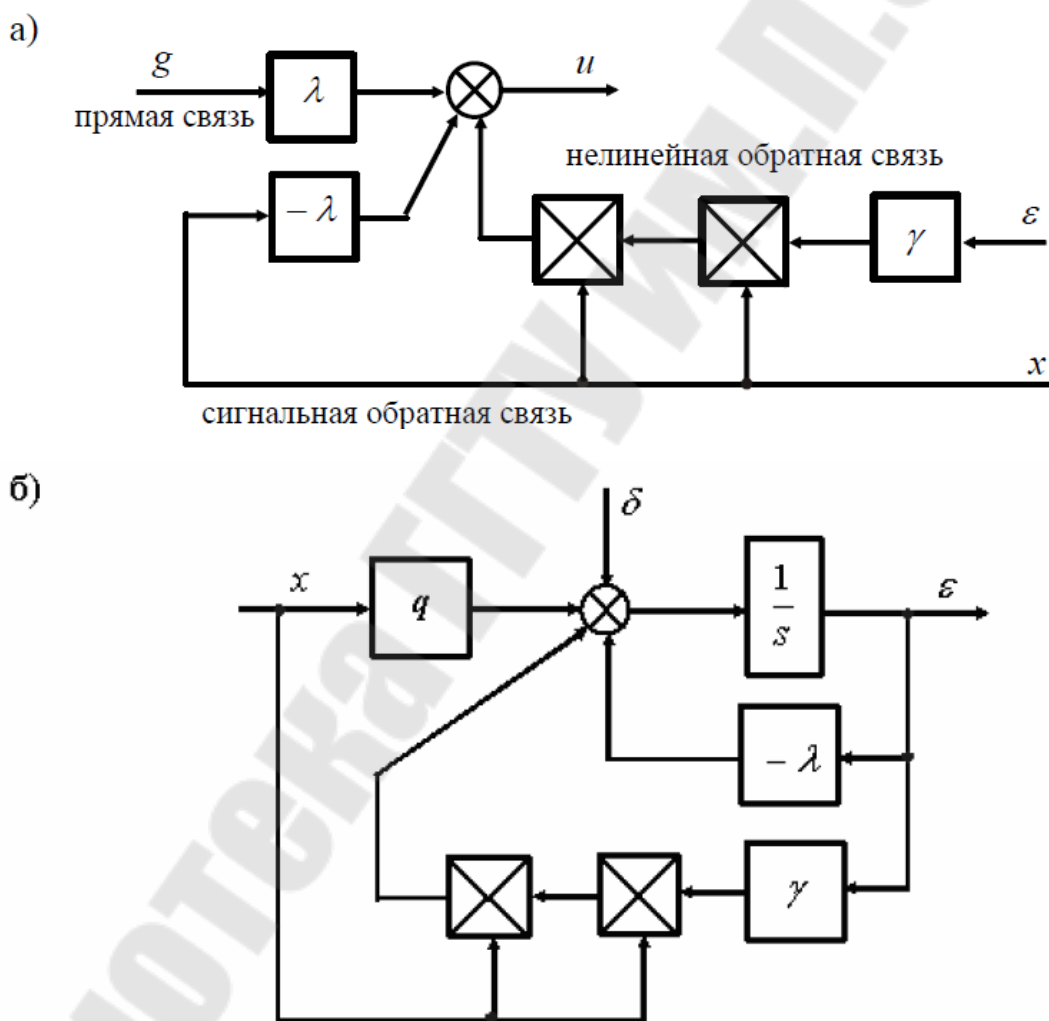


Рис. 4.3. Нелинейное робастное управление:  
а) структура регулятора; б) эквивалентная модель ошибки

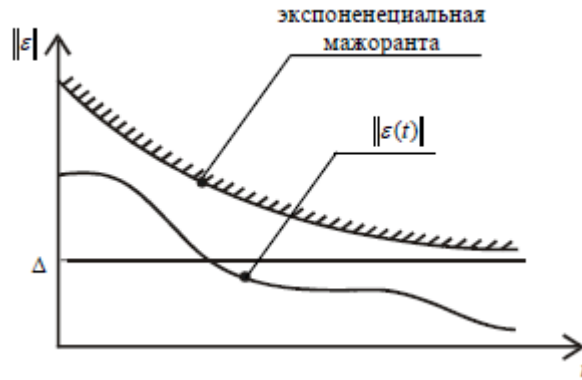


Рис. 4.4. Мажоранта переходного процесса по норме ошибки слежения  $\varepsilon(t)$

## 2.4.2. Принципы построения систем адаптивного управления

### Этапы синтеза адаптивных систем

Рассмотрим последовательность синтеза системы адаптивного управления параметрически неопределенным объектом общего вида

$$x \cdot \frac{t}{dt} = f(x, u, q), \quad (2.4.26)$$

где  $x$  — вектор состояния,  $u$  — сигнал управления,  $q$  — вектор неизвестных параметров. Пусть цель управления состоит в обеспечении асимптотического слежения вектора состояния  $x(t)$  за эталонным состоянием  $x_M(t)$ , т.е. в обеспечении целевого условия

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0, \quad (2.4.27)$$

где  $e = x - x_M$  — ошибка слежения (или сигнальная ошибка).

*Этап 1: синтез ненастраиваемого регулятора.* В предположении, что параметры  $q$  являются известными, синтезируется регулятор

$$u = U(x, x_M, q), \quad (2.4.28)$$

обеспечивающий выполнение целевого условия (2.4.27). Регулятор может быть синтезирован любым методом современной теории автоматического управления.

*Этап 2: формирование адаптивного регулятора.* Неизвестные параметры  $q$  заменяются в регуляторе (2.4.28) настраиваемыми параметрами  $\hat{q}$ . Структура алгоритма адаптации, генерирующего настраиваемые параметры, будет определена на следующем этапе. Таким образом, получаем выражения для адаптивного регулятора

$$u = U(x, x_M, \hat{q}) \quad (2.4.29)$$



$$q \cdot \frac{t}{dt} = \Theta(x, e) \quad (2.4.30)$$

где структура алгоритма адаптации  $\Theta(x, e)$  подлежит определению. Метод формирования настраиваемого регулятора (2.4.29), основанный на непосредственной замене  $q$  на  $\hat{q}$ , получил название *метода непосредственной компенсации*. Им не исчерпываются все возможные способы формирования настраиваемых регуляторов. Другие методы (включающие итеративные процедуры синтеза) можно найти в литературе.

*Этап 3: получение модели ошибки.* Подставляя (2.4.29) в (2.4.26) и дифференцируя выражения для сигнальной  $e(t) = x(t) - x_M(t)$  и параметрической  $q(t) = q - \hat{q}(t)$  ошибок, получаем модель ошибки замкнутой системы

$$e \cdot \frac{t}{dt} = \Psi(e, \tilde{q}, t), \quad (2.4.31)$$

$$q \cdot \frac{t}{dt} = -\Theta(e, t). \quad (2.4.32)$$

*Этап 4: синтез алгоритма адаптации.* Выбирается функция Ляпунова  $V(e, q)$  и вычисляется ее производная в силу уравнений (2.4.31), (2.4.32). Далее на основе анализа выражения для  $V \cdot \frac{t}{dt}(e, q)$  выбирается структура алгоритма адаптации  $\Theta(e, t)$ , обеспечивающая достижение заданных свойств устойчивости замкнутой системы. Данный этап является во многом творческим, так как не существует универсальных методов выбора "подходящих" функций Ляпунова.

### **Базовые структуры алгоритмов адаптации**

Среди рассмотренных выше этапов синтеза адаптивных систем принципиально новым (с точки зрения классической теории управления) является этап синтеза алгоритма адаптации. Для его упрощения желательно получить некоторые базовые (стандартные) структуры алгоритмов, являющиеся применимыми для возможно более широких классов задач управления параметрически неопределенными объектами. Такие базовые структуры алгоритмов адаптации синтезируют на основе *канонических моделей ошибки*. К ним относятся: статическая модель ошибки, динамическая модель с измеряемым состоянием и динамическая модель с измеряемым выходом.

*Статическая модель ошибки* описывается уравнением (рис. 4.5.а)

$$\varepsilon = \omega^T \cdot q, \quad (2.4.33)$$

где  $\varepsilon$  – сигнальная ошибка,  $\omega(t)$  – вектор известных функций времени (регрессор),  $q = q - \hat{q}$  – вектор параметрических ошибок,  $q$  – вектор неизвестных параметров,  $\hat{q}$  – вектор настраиваемых параметров. Рассматриваемая задача состоит в выборе такого правила настройки параметров  $\hat{q}$ , чтобы все сигналы в замкнутой системе были ограниченными, и дополнительно

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0. \quad (2.4.34)$$

Статическая модель ошибки канонического вида (2.4.33) появляется в задачах идентификации линейных моделей и в задачах адаптивного управления по выходной переменной. В теории идентификации она получила название *линейной регрессионной модели*.

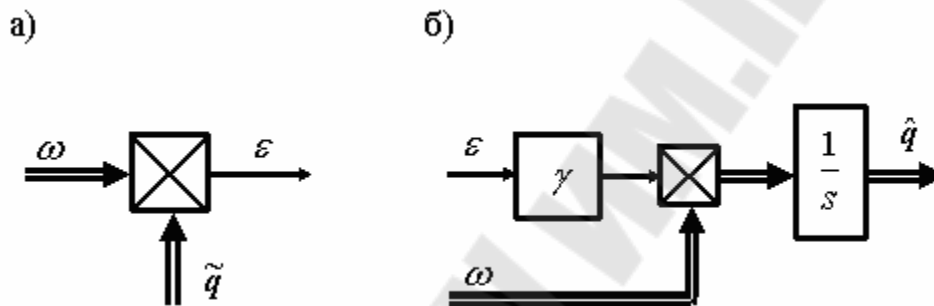


Рис. 4.5. Статическая модель ошибки (а) и соответствующий ей базовый алгоритм адаптации (б)

Базовый (стандартный) алгоритм адаптации модели (5.33) имеет вид (рис. 4.5.б)

$$q \cdot \frac{t}{dt} = \gamma \cdot \omega \cdot \varepsilon, \quad (2.4.35)$$

где  $\gamma > 0$  – коэффициент адаптации.

Для доказательства свойств устойчивости замкнутой модели (2.4.33), (2.4.35) используем функцию Ляпунова  $V(q) = \frac{1}{2\gamma} q^T \cdot q$ . Вычисляя ее производную по времени в силу уравнений (2.4.33) и (2.4.35), получим

$$\begin{aligned} V(0) &= \frac{1}{\gamma} \cdot q^T \cdot q \cdot \frac{t}{dt} = -\frac{1}{\gamma} \cdot q^T \cdot q \cdot \frac{t}{dt} = -q^T \cdot \omega \cdot \varepsilon = \\ &= -\varepsilon^2 \leq 0, \end{aligned}$$

откуда следует устойчивость по Ляпунову состояния равновесия  $q = 0$  и выполнение целевого условия (2.4.34).

Динамическая модель ошибки с измеряемым состоянием имеет вид (рис. 4.6, а)

$$e \cdot \frac{t}{dt} = A \cdot e + \omega \cdot w^T \cdot q, \quad (2.4.36)$$

где  $e$  – вектор ошибки слежения (вектор состояния модели ошибки),  $A$  – гурвицева матрица,  $ab$  – вектор постоянных коэффициентов (матрица  $A$  и вектор  $b$  полагаются известными). Как и раньше, рассматриваемая проблема состоит в выборе такого правила настройки параметров  $\hat{q}$ , чтобы все сигналы в замкнутой системе были ограниченными и дополнительно выполнялось целевое условие (2.4.34).

Динамическая модель ошибки канонического вида (2.4.36) появляется в задачах адаптивного управления по состоянию (см. также п. 4.3. настоящей книги).

Базовый (стандартный) алгоритм адаптации модели (2.4.36) имеет вид (рис. 4.6, б)

$$q \cdot \frac{t}{dt} = \gamma \cdot \omega \cdot b^T \cdot P \cdot e, \quad (2.4.37)$$

где симметрическая положительно определенная матрица  $P$  является решением уравнения

$$A^T \cdot P + P \cdot A = -Q \quad (2.4.38)$$

с произвольной симметрической положительно определенной матрицей  $Q$ . Для доказательства свойств устойчивости замкнутой модели (2.4.36)–(2.4.38) используем функцию Ляпунова

$$V(e, q) = \frac{1}{2} \cdot e^T \cdot P \cdot e + \frac{1}{2\gamma} \cdot q^T \cdot q.$$

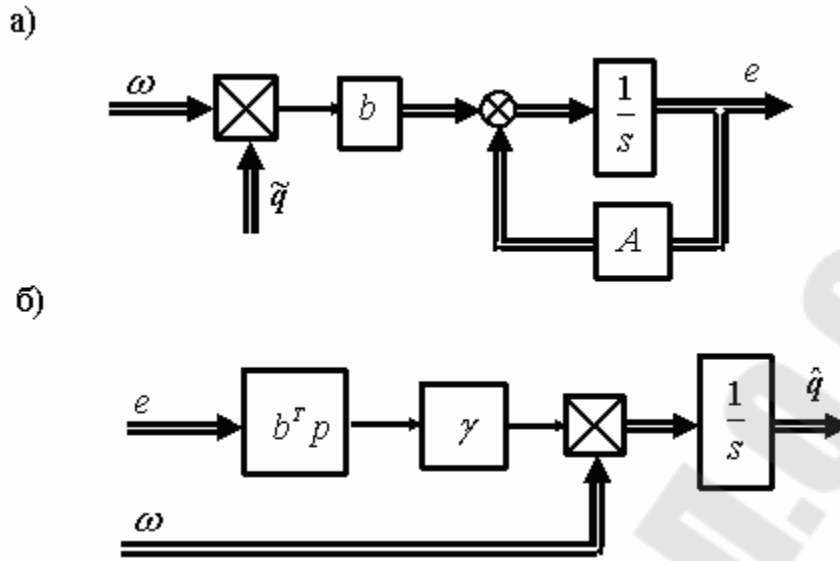


Рис. 4.6. Динамическая модель ошибки с измеряемым состоянием (а) и соответствующий ей базовый алгоритм адаптации (б)

Вычисляя ее производную по времени в силу уравнений (2.4.36)–(2.4.38), получим

$$\begin{aligned}
 V(e, q) &= \\
 &= \frac{1}{2} e^T \cdot (A^T \cdot P + P \cdot A) \cdot e + q^T \cdot \omega \cdot b^T \cdot P \cdot e - \frac{1}{\gamma} \cdot q^T \cdot \\
 &\cdot q \frac{t}{dt} = -\frac{1}{2} e^T \cdot Q \cdot e \leq 0,
 \end{aligned}$$

откуда следует устойчивость по Ляпунову состояния равновесия  $(e, q) = (0, 0)$  и выполнение целевого условия (2.4.34).

Динамическая модель ошибки с измеряемым выходом имеет вид

$$e \cdot \frac{t}{dt} = A \cdot e + b \cdot \omega^T \cdot q, \quad (2.4.39)$$

$$\varepsilon = c^T \cdot e, \quad (2.4.40)$$

где  $e$  – недоступный прямым измерениям вектор состояния модели ошибки,  $\varepsilon$  – измеряемая ошибка слежения,  $A$ ,  $b$  и  $c$  – гурвицева матрица и векторы известных постоянных коэффициентов.

Рассматриваемая задача состоит в выборе такого правила настройки параметров  $\hat{q}$ , чтобы все сигналы в замкнутой системе были ограниченными, и дополнительно выполнялось целевое условие (2.4.34).

Динамическая модель ошибки канонического вида (2.4.39), (2.4.40) появляется в задачах адаптивного управления по выходной переменной.

Очевидно, что модель (2.4.39), (2.4.40) может быть переписана в виде (рис. 4.7, а)

$$\varepsilon = H(s) \cdot \omega^T \cdot q, \quad (2.4.41)$$

где передаточная функция  $H(s)$  определяется выражением

$$H(s) = c^T \cdot (s \cdot I - A)^{-1} \cdot b. \quad (2.4.42)$$

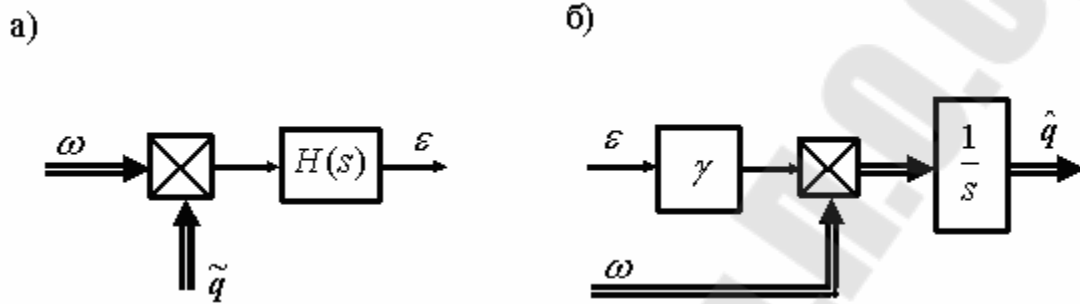


Рис. 4.7. Динамическая модель ошибки с измеряемым выходом (а) и алгоритм адаптации (б), применимый для СПВ-функций  $H(s)$

Исследуем сначала условия применимости стандартного алгоритма адаптации (2.4.37). Очевидно, что данный алгоритм в общем случае является неприменимым, так как вектор состояния модели ошибки  $e$  недоступен прямым измерениям. Однако, если удалось бы выбрать матрицу  $P$  таким образом, что

$$b^T \cdot P = c^T, \quad (2.4.43)$$

то алгоритм адаптации (2.4.37) принял бы вид (см. рис. 4.7, б)

$$q \cdot \frac{t}{dt} = \gamma \cdot \omega \cdot \varepsilon. \quad (2.4.44)$$

Алгоритм (2.4.44) является физически реализуемым, так как в нем используются только измеряемые сигналы.

Таким образом, условием применимости базового алгоритма адаптации вида (2.4.44) является существование симметрической положительно определенной матрицы  $P$ , удовлетворяющей одновременно двум уравнениям (2.4.38) и (2.4.43). В свою очередь, такая матрица может быть найдена не для всех моделей ошибки (2.4.39), (2.4.40), а только для моделей со строго положительно вещественной передаточной функцией.

**Утверждение 4.1.** Симметрическая положительно определенная матрица  $P$ , являющаяся решением одновременно двух уравнений (2.4.38) и (2.4.43), существует только в том случае, если передаточная функция модели ошибки (2.4.42) является строго положительно вещественной.

Определение строгой положительной вещественности дано в приложении 3. Из него видно, что СПВ-функции являются асимптотически устойчивыми, а вносимый ими фазовый сдвиг не превышает  $90^\circ$ . Насколько ограничительным является требование строгой положительной вещественности? Для ответа на этот вопрос учтем, что СПВ передаточная функция не может иметь относительную степень выше единицы (что определяется требованием предельного фазового сдвига в  $90^\circ$ ). Очевидно, что класс динамических систем с единичной относительной степенью является достаточно узким, и в него не попадают математические модели большинства реальных технических устройств. Таким образом, базовый алгоритм адаптации (2.4.44) может быть использован только в частных случаях, и необходимо получение универсальных алгоритмов адаптации, применимых ко всему классу моделей ошибки вида (2.4.39), (2.4.40).

В настоящее время предложено несколько различных решений задачи синтеза универсальных алгоритмов адаптации для динамической модели ошибки с измеряемым выходом. Мы остановимся только на методе *расширенной ошибки*. В соответствии с данным методом формируется дополнительный сигнал коррекции

$$\zeta = H(s) \cdot \omega^T(t) \cdot \hat{q}(t) - \hat{q}^T(t) \cdot H(s) \cdot \omega(t), \quad (2.4.45)$$

и сигнал *расширенной ошибки*

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon + \zeta, \quad (2.4.46)$$

где  $H(s)$  – передаточная функция модели ошибки (2.4.42). Структура схемы расширения приведена на [рис. 4.8, а](#).

Каковы свойства расширенной ошибки? Подставляя выражения для  $\varepsilon$  и  $\zeta$  из (2.4.41) и (2.4.45) в (2.4.46), получим

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon} &= \\ &= H(s) \cdot \omega^T(t) \cdot (\theta - \hat{q}(t)) + H(s) \cdot \omega^T(t) \cdot \hat{q}(t) - \hat{q}^T(t) \cdot \\ &\cdot H(s) \cdot \omega(t). \end{aligned}$$

Учтем, что в силу свойств линейных систем и стационарности вектора  $q$  он может быть вынесен за символ передаточной функции  $H(s)$ :

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon} &= \\ &= \theta^T \cdot H(s) \cdot \omega(t) - H(s) \cdot \omega^T(t) \cdot \hat{q}(t) + H(s) \cdot \omega^T(t) \cdot \\ &\cdot \hat{q}(t) - \hat{q}^T(t) \cdot H(s) \cdot \omega(t). \end{aligned}$$

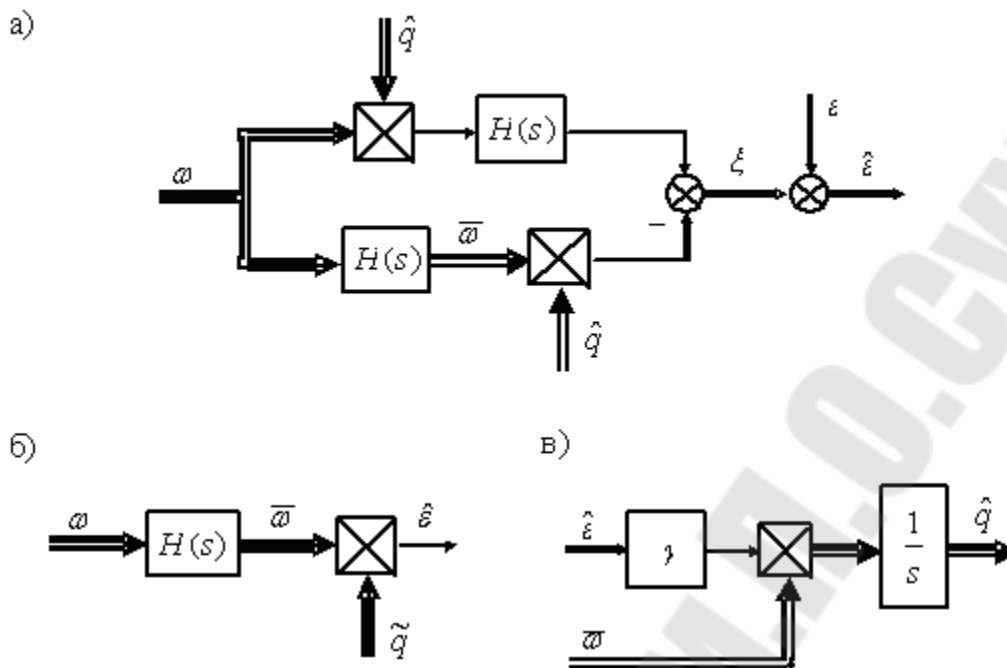


Рис. 4.8. Схема расширения сигнала ошибки (а), эквивалентная модель ошибки (б) и соответствующий ей базовый алгоритм адаптации (в)

После элементарных преобразований окончательно получаем (см. рис. 4.8, б)

$$\hat{\varepsilon} = \bar{\omega}^T \cdot q, \quad (2.4.47)$$

где  $\bar{\omega}(t) = H(s)\omega(t)$  – отфильтрованный регрессор. Таким образом, для расширенной ошибки слежения  $\hat{\varepsilon}$  получили статическую модель ошибки стандартного вида (2.4.33) (с точностью до замены  $\varepsilon$  на  $\hat{\varepsilon}$  и  $\omega$  на  $\bar{\omega}$ ). Поэтому для адаптивной настройки модели (2.4.47) можно использовать стандартный алгоритм (2.4.35), который в данном случае принимает вид (см. рис. 4.8, в)

$$q \cdot \frac{t}{dt} = \gamma \cdot \bar{\omega} \cdot \hat{\varepsilon}. \quad (2.4.48)$$

Таким образом, полностью алгоритм адаптации модели (2.4.39), (2.4.40) будет описываться уравнениями (2.4.45), (2.4.46) и (2.4.48).

В следующих параграфах будет показано, как базовые структуры алгоритмов адаптации могут быть использованы при решении конкретных задач управления неопределенными объектами.

### 2.4.3. Адаптивное управление многомерным объектом

#### Постановка задачи

Рассмотрим параметрически неопределенный объект управления

$$x \cdot \frac{t}{dt} = A \cdot x + b \cdot u, \quad (2.4.49)$$

$$y = c^T \cdot x, \quad (2.4.50)$$

где  $x$  –  $n$ -мерный вектор состояния, доступный прямым измерениям,  $u$  – сигнал управления,  $y$  – регулируемая переменная, и

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.4.51)$$

Можно показать, что передаточная функция объекта (2.4.49), (2.4.50) с матрицами (2.4.51) имеет вид

$$H(s) = \frac{b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}.$$

Параметры  $a_i$  и  $b_0 > 0$  объекта управления считаются неизвестными.

Пусть желаемый характер поведения регулируемой переменной  $y$  определяется эталонной моделью

$$x_M \cdot \frac{t}{dt} = A_M \cdot x_M + b_M \cdot g, \quad (2.4.52)$$

$$y_M = c^T \cdot x_M, \quad (2.4.53)$$

где  $x_M$  –  $n$ -мерный вектор состояния эталонной модели,  $y_M$  – эталонный выход,  $g$  – сигнал задания, и

$$A_M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_0^M & -a_1^M & -a_2^M & \dots & -a_{n-1}^M \end{bmatrix}.$$

При этом коэффициенты эталонной модели  $a_i^M$  могут быть выбраны методом стандартных характеристических полиномов на основе заданных показателей качества замкнутой системы – времени переходного процесса  $t_{\Pi}$  и перерегулирования  $\sigma$ . Коэффициент  $b_0^M$  выбирается из условия обеспечения заданного коэффициента усиления замкнутой системы.

Рассматриваемая задача состоит в синтезе управления, обеспечивающего в замкнутой системе ограниченность всех сигналов и выполнение целевого условия



$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y(t) - y_M(t)) = 0. \quad (2.4.54)$$

Так как параметры объекта управления являются неизвестными, то решение будем искать в классе адаптивных алгоритмов управления. При этом особо отметим, что динамические показатели качества, задаваемые эталонной моделью, будут обеспечены в замкнутой системе только после завершения переходных процессов настройки адаптивного регулятора.

### **Синтез регулятора**

В соответствии с методикой синтеза адаптивных систем, изложенной в п. 4.2.1, построим сначала неадаптивное управление в предположении, что параметры объекта точно известны. Для этого выведем модель ошибки слежения по состоянию

$$e = x - x_M. \quad (2.4.55)$$

Дифференцируя (2.4.55) по времени с учетом (2.4.49) и (2.4.52), имеем

$$e \cdot \frac{t}{dt} = A \cdot x - A_M \cdot x_M + b \cdot u - b_M \cdot g.$$

Учтем, что

$$\begin{aligned} A \cdot x - A_M \cdot x_M &= A_x - A_M \cdot x_M \pm A_M \cdot x = \\ &= A_M \cdot e + h \cdot \Delta^T \cdot x, \end{aligned}$$

$$b \cdot u - b_M \cdot g = b_0 \cdot h \cdot \left( u - \frac{b_0^M}{b_0} g \right),$$

где  $h^T = [0 \ 0 \ \dots \ 1]$ ,  $\Delta^T = [a_0^M - a_0 \ a_1^M - a_1 \ \dots \ a_{n-1}^M - a_{n-1}]$ .  
Вводя обозначение для вектора неизвестных параметров  $q$  и регрессора  $\omega$

$$q^T = \left[ -\frac{1}{b_0} \cdot \Delta^T \quad -\frac{b_0^M}{b_0} \right], \omega^T(t) = [x^T(t) \quad g(t)],$$

окончательно получаем

$$e \cdot \frac{t}{dt} = A_M \cdot e + b_0 \cdot h \cdot (u + \omega^T \cdot q). \quad (2.4.56)$$

Анализ модели (2.4.56) позволяет выбрать структуру ненастраиваемого регулятора в виде

$$u = -\omega^T \cdot q. \quad (2.4.57)$$

Действительно, при подстановке (2.4.57) в (2.4.56) получаем

$$e = A_M \cdot e,$$

откуда (в силу гурвицевости матрицы  $A_M$ ) следует асимптотическая устойчивость замкнутой системы и выполнение целевого условия (2.4.54).

Однако управление (2.4.57) является физически нереализуемым, так как вектор параметров  $q$  неизвестен. Поэтому заменим в регуляторе вектор неизвестных постоянных параметров  $q$  вектором настраиваемых параметров  $\hat{q}$ . Получим выражение для настраиваемого регулятора вида

$$u = -\omega^T \cdot \hat{q}. \quad (2.4.58)$$

Подставляя (2.4.58) в (2.4.56), выводим модель ошибки слежения для адаптивной системы (2.4.49), (2.4.53) и (2.4.58)

$$e \cdot \frac{t}{dt} = A_M \cdot e + \beta \cdot h \cdot \omega^T \cdot q, \quad (2.4.59)$$

где  $q = q - \hat{q}$ .

Модель (2.4.59) является типовой динамической моделью ошибки с измеряемым состоянием (см. выражение (2.4.36)). Для нее ранее уже был получен базовый алгоритм адаптации (2.4.37), (2.4.38). С учетом принятых в настоящем параграфе обозначений данный алгоритм принимает вид

$$q = \gamma \cdot \omega \cdot h^T \cdot P \cdot e, \quad (2.4.60)$$

где  $\gamma > 0$  – коэффициент адаптации (произвольная положительная константа), а симметрическая положительно определенная матрица  $P$  является решением уравнения

$$A_M^T \cdot P + P \cdot A_M = -Q, Q = Q^T > 0 \quad (2.4.61)$$

### **Свойства замкнутой системы**

Адаптивный регулятор (2.4.58), (2.4.60) обеспечивает следующие свойства замкнутой системы, содержащей объект (2.4.49), (2.4.50) и эталонную модель (2.4.52), (2.4.53) (доказательство этих свойств приведено в приложении 4):

1. нулевое состояние равновесия  $(e, q) = (0, 0)$  является устойчивым по Ляпунову, а, следовательно, все сигналы в замкнутой системе являются ограниченными;
2. для любых начальных условий и любых ограниченных сигналов задания  $g(t)$  справедливо равенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0, \quad (2.4.62)$$

а, следовательно, выполняется целевое условие (2.4.54);

3. если входное воздействие  $g(t)$  является «частотно богатым», чтобы обеспечить условие неисчезающего возбуждения, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = 0, \quad (2.4.63)$$

в частности, равенство (2.4.63) выполняется, если  $g(t)$  представляет собой сумму  $(n + 1)/2$  гармоник с различными частотами (отметим, что здесь  $(n + 1)$  – число неизвестных параметров в векторе  $q$ ).

Таким образом, несмотря на наличие неизвестных параметров в модели объекта управления, синтезированный регулятор обеспечил устойчивость замкнутой системы и выполнение целевого условия (2.4.54).

**Пример 4.1.** Рассмотрим задачу адаптивного управления объектом второго порядка

$$\begin{aligned}x_1 \cdot \frac{t}{dt} &= x_2, \\x_2 \cdot \frac{t}{dt} &= -a_0 \cdot x_1 - a_1 \cdot x_2 + b_0 \cdot u, \\y &= x_1.\end{aligned}\tag{2.4.64}$$

Пусть заданы желаемые динамические показатели качества замкнутой системы – время переходного процесса  $t_{\Pi} = 2$  с и перерегулирование  $\sigma = 0\%$ . Методом стандартных характеристических полиномов выбираем характеристический полином эталонной модели

$$D_M(p) = p^2 + a_1^M \cdot p + a_0^M = p^2 + 5p + 6.25$$

и строим саму эталонную модель

$$\begin{aligned}x \cdot \frac{t}{dt_{M1}} &= x_{M2}, \\x \cdot \frac{t}{dt_{M2}} &= -6.25x_{M1} - 5x_{M2} + 6.25g, \\y_M &= x_{M1}.\end{aligned}\tag{2.4.65}$$

При этом коэффициент  $b_0^M$  выбран равным  $a_0^M$  для обеспечения единичного коэффициента передачи эталонной модели. Отметим также, что в рассматриваемом случае

$$A_M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6.25 & -5 \end{bmatrix}.$$

Легко убедиться, что управление (2.4.58) в этом случае принимает вид

$$u = -\hat{q}_1 \cdot x_1 - \hat{q}_2 \cdot x_2 - \hat{q}_3 \cdot g = -\omega^T \cdot \hat{q}.\tag{2.4.66}$$

Где

$$\hat{q} = [\hat{q}_1 \quad \hat{q}_2 \quad \hat{q}_3], \omega^T = [x_1 \quad x_2 \quad g]$$

Для расчета матрицы  $P$  зададимся симметрической положительно определенной матрицей  $Q$  вида

$$Q = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

Решая матричное уравнение (2.4.61) (например, с использованием команды `lyap(a,c)` библиотеки Control System Toolbox пакета MatLab получим

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 56.25 & 8 \\ 8 & 2.6 \end{bmatrix}.$$

Тогда, с учетом того факта, что  $h^T = [0 \ 1]$ , алгоритм адаптации (2.4.60) принимает вид

$$\begin{aligned} q_1 \cdot \frac{t}{dt} &= \gamma \cdot x_1 \cdot v, \\ q_2 \cdot \frac{t}{dt} &= \gamma \cdot x_2 \cdot v, \\ q_3 \cdot \frac{t}{dt} &= \gamma \cdot g \cdot v, \end{aligned} \tag{2.4.67}$$

где общий для всех трех цепей настройки сигнал обратной связи  $v$  рассчитывается по формуле

$$\begin{aligned} v &= h^T \cdot P \cdot e = p_{21} \cdot e_1 + p_{22} \cdot e_2 = \\ &= 8(x_1 - x_{M1}) + 2.6(x_2 - x_{M2}). \end{aligned}$$

Таким образом, адаптивный регулятор, обеспечивающий слежение параметрически неопределенного объекта (2.4.64) за эталонной моделью (2.4.65), описывается уравнениями (2.4.66) и (2.4.67).

Результаты моделирования переходных процессов в замкнутой системе при различных типах входных воздействий приведены на рис. 4.9 и 4.10. При моделировании были использованы следующие значения параметров:  $a_0 = 3$ ,  $a_1 = -1$ ,  $\beta = 2$ ,  $\gamma = 1$ . Начальные значения настраиваемых параметров  $\hat{q}$  были выбраны нулевыми.

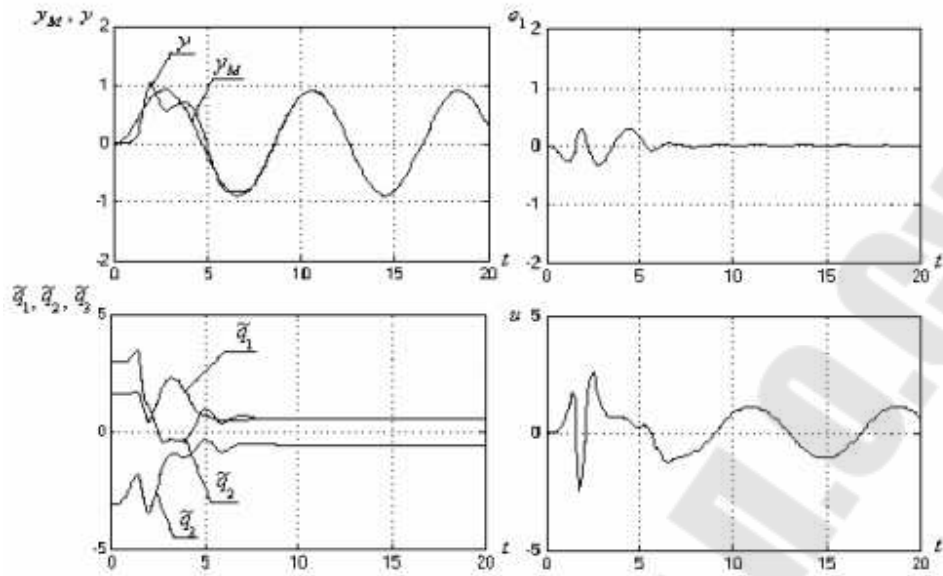


Рис. 4.9. Переходные процессы в адаптивной системе при  $g = \sin 0.8t$

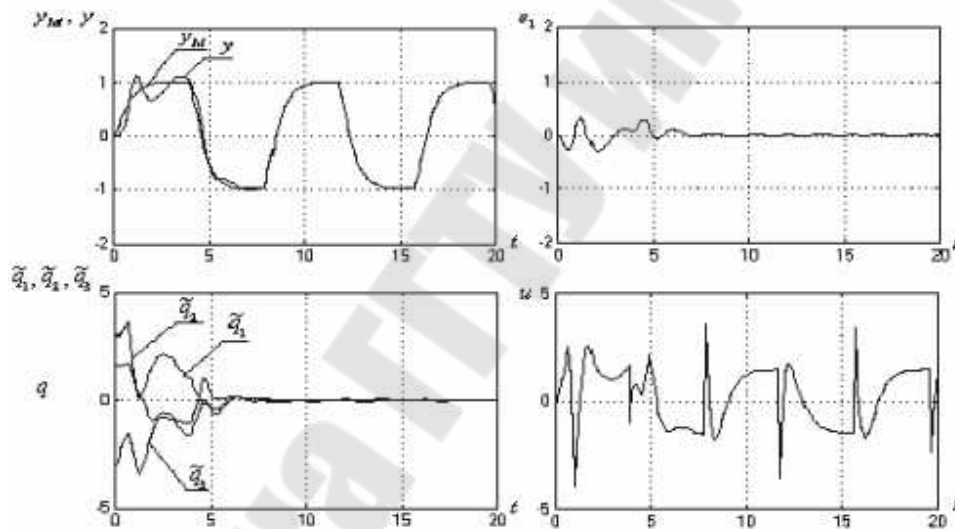


Рис. 4.10. Переходные процессы в адаптивной системе при  $g = \text{sign}(\sin 0.8t)$

Как видно из приведенных графиков асимптотическое слежение за эталонной моделью достигается для сигнала задания  $g(t)$  любого вида. Однако для обеспечения сходимости по настраиваемым параметрам необходимо, чтобы сигнал задания  $g(t)$  был достаточно богатым. На рисунке 4.9  $g(t) = \sin 0.8t$ , что не обеспечивает параметрической сходимости, так как число гармоник входного сигнала недостаточно для настройки трех параметров (сигнал  $g(t)$  содержит только одну гармонику). На рисунке 4.10 сигнал задания является прямоугольной волной (а именно,  $g(t) = \text{sign}(\sin 0.8t)$ ) и, следовательно, он может обеспечить параметрическую сходимость для неограниченного числа настраиваемых параметров.

## 2.4.4. Нелинейное робастное управление многомерным объектом

### Постановка задачи

Рассмотрим параметрически неопределенный объект управления, подверженный воздействию внешних возмущений

$$x = A \cdot x + b \cdot (u + \delta), \quad (2.4.68)$$

$$y = c^T \cdot x, \quad (2.4.69)$$

где  $x$  –  $n$ -мерный вектор состояния, доступный прямым измерениям,  $u$  – сигнал управления,  $y$  – регулируемая переменная,  $\delta$  – неизмеряемое внешнее возмущение, матрица  $A$  и векторы  $b$ ,  $c$  имеют вид (2.4.51). Параметры  $a_i$  и  $b_0 > 0$  объекта управления считаются неизвестными, а возмущение  $\delta(t)$  – ограниченным.

Пусть желаемый характер поведения регулируемой переменной  $y$  определяется эталонной моделью (2.4.52), (2.4.53).

Рассматриваемая задача состоит в синтезе управления, обеспечивающего в замкнутой системе ограниченность всех сигналов и экспоненциальное стремление ошибки слежения (2.4.55) к установившемуся значению. При этом желательно иметь возможность обеспечения произвольно малого значения установившейся ошибки слежения (хотя бы при некоторых определенных условиях).

### Синтез регулятора

Как было отмечено выше (см. п. 4.1.4), стандартный прием получения нелинейного робастного управления из адаптивного – это исключение интегратора из обратной связи. В рассматриваемом случае алгоритм адаптации для объекта (2.4.49) (без учета возмущения  $\delta$ ) имеет вид (2.4.60). Исключим из алгоритма (2.4.60) операцию интегрирования:

$$\hat{q} = \gamma \cdot \omega \cdot h^T \cdot P e. \quad (2.4.70)$$

Подставляя (2.4.70) в (2.4.58), получаем выражение для нелинейного робастного алгоритма управления

$$u = -\gamma \cdot \|\omega\|^2 \cdot h^T \cdot P e, \quad (2.4.71)$$

где положительный коэффициент  $\gamma$  носит название коэффициента нелинейной обратной связи, а симметрическая положительно определенная матрица  $P$  является решением уравнения (2.4.61).

### Свойства замкнутой системы

Нелинейный робастный регулятор (2.4.71) обеспечивает следующие свойства замкнутой системы, содержащей объект (2.4.68), (2.4.69) и

эталонную модель (2.4.52), (2.4.53) (доказательство этих свойств приведено в приложении 4):

1. для любых начальных условий, любых ограниченных сигналов задания  $g(t)$  и любых ограниченных возмущений  $\delta(t)$  – ограниченность всех сигналов и экспоненциальную сходимость ошибки слежения  $e = x - x_M$  к предельному установившемуся значению

$$\|e\|^2 \leq \frac{\beta}{2 \cdot \gamma \cdot \lambda_Q} \cdot \|q\|^2 + \frac{1}{\lambda_Q^2} \cdot \|Ph\|^2 \cdot \overline{\delta^2}; \quad (2.4.72)$$

2. если возмущение отсутствует (т.е.  $\delta(t) \equiv 0$ ), то, дополнительно к пункту (1), предельное установившееся значение ошибки слежения может быть сделано произвольно малым за счет увеличения коэффициента нелинейной обратной связи  $\gamma$ .

Таким образом, нелинейный робастный регулятор (2.4.71) обеспечивает работоспособность замкнутой системы (в смысле ограниченности всех сигналов) и приемлемые точностные характеристики для параметрически неопределенного объекта, подверженного внешним возмущениям.

**Пример 4.2.** Рассмотрим задачу робастного управления объектом (2.4.64) с неизвестными параметрами  $a_0$ ,  $a_1$  и  $b_0 > 0$ . Пусть цель управления состоит в обеспечении ограниченности всех сигналов и экспоненциальной сходимости ошибки слежения регулируемой переменной  $y$  за выходом эталонной модели  $y_M$  (2.4.65).

Для синтеза нелинейного робастного регулятора применим формальный прием – исключение интеграторов из цепей обратных связей адаптивного регулятора. Тогда из регулятора (2.4.66), (2.4.67) получим

$$\begin{aligned} u &= \\ &= -\gamma \cdot (x_1^2 + x_1^2 + g^2) \cdot \\ &\cdot (8 \cdot (x_1 - x_{M1}) + 2.6 \cdot (x_2 - x_{M2})). \end{aligned} \quad (2.4.73)$$

Таким образом, нелинейный робастный регулятор, обеспечивающий слежение параметрически неопределенного объекта (2.4.64) за эталонной моделью (2.4.65), описывается уравнением (2.4.73).

Результаты моделирования переходных процессов в замкнутой системе при различных значениях коэффициента обратной связи  $\gamma$  и  $g(t) = \text{sgn}(\sin 0.8t)$  приведены на **рис. 4.11**. При моделировании были использованы следующие значения параметров:  $a_0 = 3$ ,  $a_1 = -1$ ,  $\beta = 2$ .

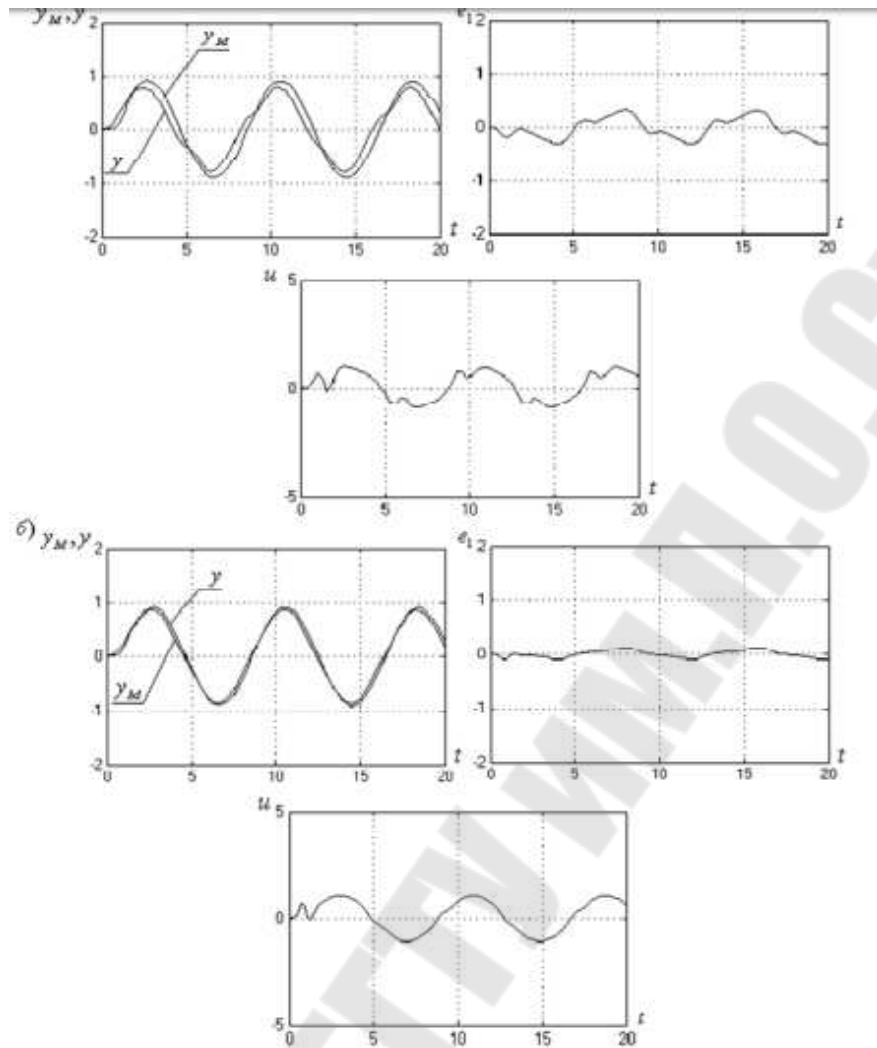


Рис. 4.10. Переходные процессы в нелинейной робастной системе а)  $\gamma = 0.5$ ; б)  $\gamma = 1.5$

Как видно из приведенных графиков, регулятор (2.4.73) обеспечивает слежение параметрически неопределенного объекта за эталонной моделью с малой установившейся ошибкой, величина которой может быть уменьшена за счет увеличения коэффициента обратной связи  $\gamma$ .

### 2.4.5. Адаптивная компенсация возмущений

#### Постановка задачи

Рассмотрим объект управления

$$\dot{x} = Ax + b \cdot (u + \delta), \quad (2.4.74)$$

где  $x$  –  $n$ -мерный вектор состояния, доступный прямым измерениям,  $u$  – сигнал управления,  $\delta$  – внешнее ограниченное возмущение. Пусть известная матрица  $A$  и известный вектор  $b$  образуют полностью управляемую пару  $(A, b)$ . Будем считать, что возмущение  $\delta$  может быть представлено в виде выхода линейного генератора



$$w = \Gamma \cdot w, \quad (2.4.75)$$

$$\delta = d^T \cdot w, \quad (2.4.76)$$

где  $w$  –  $\nu$ -мерный вектор состояния генератора,  $\Gamma$  –  $\nu \times \nu$  постоянная матрица,  $d$  –  $\nu \times 1$  вектор постоянных коэффициентов. Ни само возмущение  $\delta$ , ни вектор состояния генератора  $w$  не являются доступными для измерений.

Рассматриваемая задача управления состоит в асимптотической стабилизации нулевого значения вектора состояния  $x$  в условиях действия внешнего возмущения  $\delta$ .

В классической теории управления данная задача решается в предположении, что параметры генератора (2.4.75), (2.4.76) известны (т.е. известны матрица  $\Gamma$  и вектор  $d$ ). При этом все множество возможных реализаций возмущения  $\delta(t)$  определяется только различными начальными условиями  $w(0)$ . Однако на практике, как правило, приходится сталкиваться с ситуацией, когда заранее известен только достаточно широкий класс возможных возмущений  $\delta(t)$ , а не их точный вид. С математической точки зрения такая ситуация означает, что генератор (2.4.75), (2.4.76) является параметрически неопределенным. Это мотивирует использование методов адаптивного управления для компенсации внешнего неточно известного возмущения.

При синтезе управления будем считать выполненными следующие условия:

- параметры матрицы  $\Gamma$  и вектора  $d$  являются неизвестными, а размерность генератора  $q$  известна;
- пара  $d^T, \Gamma$  является полностью наблюдаемой;
- собственные значения матрицы  $\Gamma$  являются различными и лежат на мнимой оси.

Последнее условие гарантирует ограниченность возмущения  $\delta$  и, как следствие, является необходимым для обеспечения ограниченности сигнала управления  $u$ .

### ***Синтез регулятора***

В соответствии с методикой синтеза адаптивных систем, изложенной в п. 4.2.1, построим сначала неадаптивное управление в предположении, что параметры генератора (2.4.75) и (2.4.76) точно известны. Для этого приведем модель (2.4.75), (2.4.76) к некоторой удобной форме.

Выберем произвольную  $q \times q$  гурвицеву матрицу  $G$ ,  $q \times 1$  – вектор  $l$ , образующий с матрицей  $G$  полностью управляемую пару, и введем в рассмотрение линейное преобразование координат

$$\chi = M \cdot w, \quad (2.4.77)$$

где  $q \times q$  матрица  $M$  является решением уравнения

$$M \cdot \Gamma - G \cdot M = l \cdot d^T. \quad (2.4.78)$$

Тогда генератор (2.4.75), (2.4.76) в координатах  $\chi$  принимает вид

$$\dot{\chi} = G\chi + l\delta, \quad (2.4.79)$$

$$\delta = q \cdot T\chi, \quad (2.4.80)$$

где  $q$  – вектор постоянных коэффициентов.

Действительно, так как спектры матриц  $\Gamma$  и  $G$  не пересекаются, пара  $(d^T, \Gamma)$  является полностью наблюдаемой, а пара  $(G, l)$  является полностью управляемой, то уравнение (2.4.78) имеет единственное невырожденное решение. Продифференцируем (2.4.77) в силу уравнения (2.4.75):

$$\dot{\chi} = M \cdot \Gamma \cdot w.$$

С учетом (2.4.78) можно записать

$$\dot{\chi} = M \cdot \Gamma \cdot w = G \cdot M \cdot w + l \cdot d^T \cdot w = G\chi + l \cdot \delta,$$

откуда следует справедливость (2.4.79). Далее из (2.4.76) и (2.4.77) имеем

$$\delta = d^T \cdot w = d^T \cdot M^{-1} \cdot \chi = q^T \cdot \chi,$$

где  $q^T = d^T \cdot M^{-1}$

Таким образом, доказана справедливость представления (2.4.79), (2.4.80). Особо отметим, что в рамках рассматриваемой задачи матрица  $\Gamma$  и вектор  $d$  являются неизвестными, поэтому матрица преобразования координат  $M$  и вектор  $q$  также являются неизвестными.

Другими словами, в модели (2.4.79), (2.4.80) неопределенность внешнего возмущения  $\delta$  сведена к неопределенности вектора постоянных параметров  $q$ .

Представление (2.4.79), (2.4.80) позволяет построить наблюдатель вектора состояния генератора  $\chi$ . Сформируем оценку в виде

$$\hat{\chi} = \eta + N\chi, \quad (2.4.81)$$

где  $q \times n$  – матрица  $N$  удовлетворяет равенству

$$N \cdot b = l, \quad (2.4.82)$$

а  $q$  – мерный вектор  $\eta$  является состоянием динамической модели вида

$$\dot{\eta} = G\eta + (G \cdot N - N \cdot A) \cdot \chi - l\dot{\chi}. \quad (2.4.83)$$

Тогда для любых начальных условий  $\chi(0)$ ,  $\hat{\chi}(0)$  и  $x(0)$  справедливо равенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\chi(t) - \hat{\chi}(t)) = 0. \quad (2.4.84)$$

Действительно, введем в рассмотрение вектор ошибки оценки состояния генератора

$$\sigma = \chi - \hat{\chi} = \chi - \eta - N \cdot x.$$

Продифференцируем последнее выражение в силу уравнений (4.75), (2.4.79) и (2.4.83). Получим

$$\begin{aligned} \sigma &= \\ &= G\chi + l\delta - G\eta - G \cdot Nx + N \cdot Ax + lu - N \cdot Ax - N \cdot \\ &\cdot bu - N \cdot b\delta = G\chi - G\eta - G \cdot Nx, \end{aligned}$$

или окончательно

$$\dot{\sigma} = G\sigma.$$

Так как матрица  $G$  является гурвицевой, то последнее уравнение означает, что с течением времени ошибка  $\sigma$  стремится к нулевому значению. В свою очередь, это доказывает справедливость равенства (2.4.84).

Таким образом, с учетом полученных результатов модель объекта управления (2.4.74) может быть переписана в виде

$$\dot{x} = Ax + b \cdot (u + q^T \hat{\chi}), \quad (2.4.85)$$

где оценка  $\hat{\chi}$  формируется наблюдателем (2.4.81), (2.4.83).

Анализ выражения (2.4.85) мотивирует следующий выбор алгоритма адаптивного управления:

$$u = -k^T x - \hat{q}^T \hat{\chi}, \quad (2.4.86)$$

где  $n$  – мерный вектор постоянных коэффициентов  $k$  выбран таким образом, что матрица замкнутой системы  $F = A - bk^T$  является гурвицевой, а  $v$  – мерный вектор настраиваемых параметров  $\hat{q}$  формируется алгоритмом адаптации, который будет синтезирован позже.

Расчет вектора коэффициентов обратных связей  $k$  может быть осуществлен, например, методом модального регулятора. Для синтеза алгоритма адаптации получим модель ошибки замкнутой системы, подставив (2.4.86) в (2.4.85):

$$\dot{x} = Fx + b\hat{\chi}^T \cdot q. \quad (2.4.87)$$

Легко видеть, что модель (2.4.87) с точностью до обозначений является стандартной динамической моделью ошибки с измеряемым состоянием (см. формулу (2.4.36)). Поэтому для настройки параметров  $\hat{q}$  может быть использован базовый алгоритм адаптации (2.4.37), который в данном случае принимает вид

$$\hat{q} = \gamma \hat{\chi} \cdot b^T \cdot Px, \quad (2.4.88)$$

где симметрическая положительно определенная матрица  $P$  является решением уравнения

$$F^T \cdot P + P \cdot F = -Q \quad (2.4.89)$$

с произвольной симметрической положительно определенной матрицей  $Q$ .

Таким образом, регулятор, обеспечивающий адаптивную компенсацию внешнего заранее неизвестного возмущения  $\delta$ , действующего на объект (2.4.74), содержит в своей структуре следующие блоки (рис. 4.12): наблюдатель возмущения (2.4.81) и (2.4.83), собственно настраиваемый регулятор (2.4.86) и алгоритм адаптации (2.4.88).

Свойства замкнутой системы могут быть сформулированы следующим образом. Для любых начальных условий  $x(0)$ ,  $w(0)$  и  $\eta(0)$  и произвольного положительного коэффициента  $\gamma$  адаптивный регулятор (2.4.81), (2.4.83), (2.4.86) и (2.4.88) обеспечивает асимптотическую стабилизацию нулевого значения вектора состояния  $x$  объекта управления (2.4.74), подверженного воздействию внешнего заранее неизвестного возмущения  $\delta$ , генерируемого моделью (2.4.75), (2.4.76).

Пример 4.3. Рассмотрим задачу стабилизации нулевого значения вектора состояния объекта управления

$$x_1 = -x_1 + 5x_2, \quad (2.4.90)$$

$$x_2 = 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + u + \delta, \quad (2.4.91)$$

где возмущение  $\delta$  представляет собой гармоническую функцию с заранее неизвестной амплитудой, частотой и фазой. Очевидно, что в рассматриваемом случае порядок генератора (2.4.75), (2.4.76) равен двум (т. е.  $q = 2$ ), а матрица  $A$  и вектор  $b$  модели (2.4.74) имеют вид

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}, \quad b = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}.$$

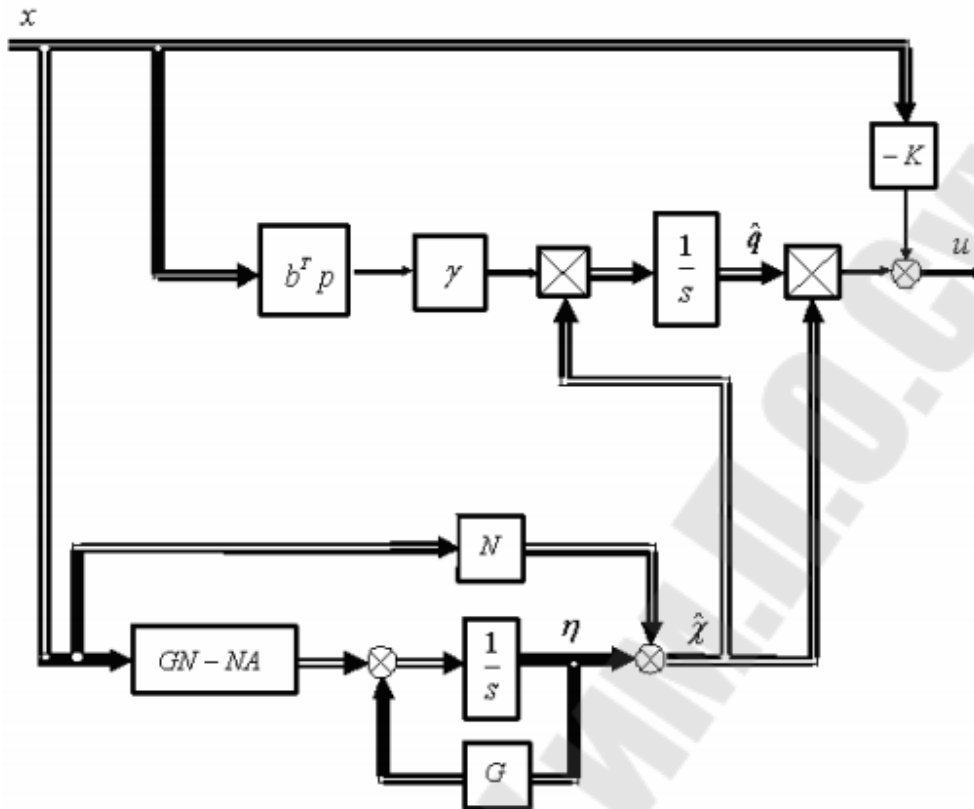


Рис. 4.12. Адаптивный регулятор компенсации возмущений

Выберем желаемые корни замкнутой системы  $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = -4$  и с помощью команды **place (A,B,P)** библиотеки Control System Toolbox пакета MatLab рассчитаем вектор коэффициентов обратных связей

$$k^T = [3.2 \ 9].$$

Тогда модальный регулятор

$$u = -k^T x = -3.2 \cdot x_1 - 9 \cdot x_2 \quad (2.4.92)$$

при отсутствии внешних возмущений (т.е. при  $\delta(t) \equiv 0$ ) будет обеспечивать асимптотическую стабилизацию нулевого значения вектора состояния (рис. 4.13, а). Однако воздействие внешнего возмущения вызывает появление ненулевой установившейся ошибки (рис.4.13, б).

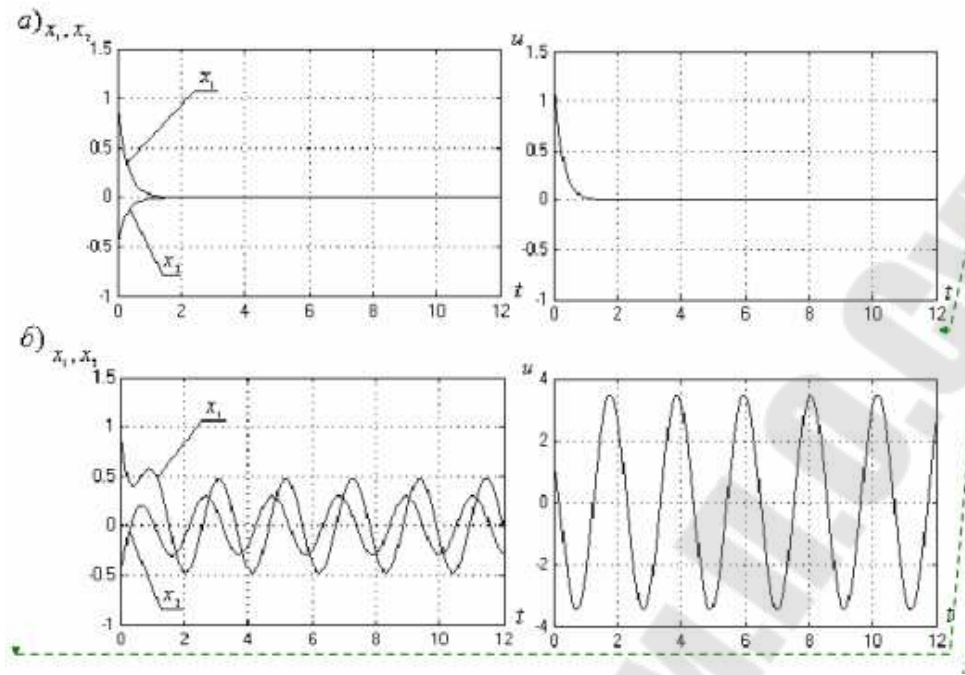


Рис. 4.13. Процессы стабилизации в системе, замкнутой модальным регулятором (5.33): а)  $\delta(t) = 0$ ; б)  $\delta(t) = 2\sin 3t$

Для синтеза регулятора с адаптивной компенсацией внешнего возмущения выберем

$$G = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -25 & -10 \end{vmatrix}, \quad l = \begin{vmatrix} 0 \\ 25 \end{vmatrix},$$

$$N = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 25 \end{vmatrix}, \quad Q = \begin{vmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 10 \end{vmatrix}.$$

Решая матричное уравнение (2.4.89), получим

$$P = \begin{vmatrix} 28.7 & 17.8 \\ 17.8 & 15.7 \end{vmatrix}.$$

Тогда алгоритм адаптивного управления (2.4.81), (2.4.82), (2.4.876) и (2.4.88) принимает вид

$$\hat{\chi}_1 = \eta_1, \quad \hat{\chi}_2 = \eta_2 + 25x_2, \quad (2.4.93)$$

$$\begin{aligned} \eta &= \eta_2 + 25x_2, \eta = \\ &= -25\eta_1 - 10\eta_2 - 50x_1 - 325x_2 - 25u, \end{aligned} \quad (2.4.94)$$

$$u = -3.2x_1 - 9x_2 - \hat{q}_1\hat{\chi}_1 - \hat{q}_2\hat{\chi}_2, \quad (2.4.95)$$

$$\begin{aligned} \hat{q}_2 &= \gamma\hat{\chi}_1(17.8x_1 + 15.7x_2), \\ \hat{q}_2 &= \gamma\hat{\chi}_2(17.8x_1 + 15.7x_2). \end{aligned} \quad (2.4.96)$$

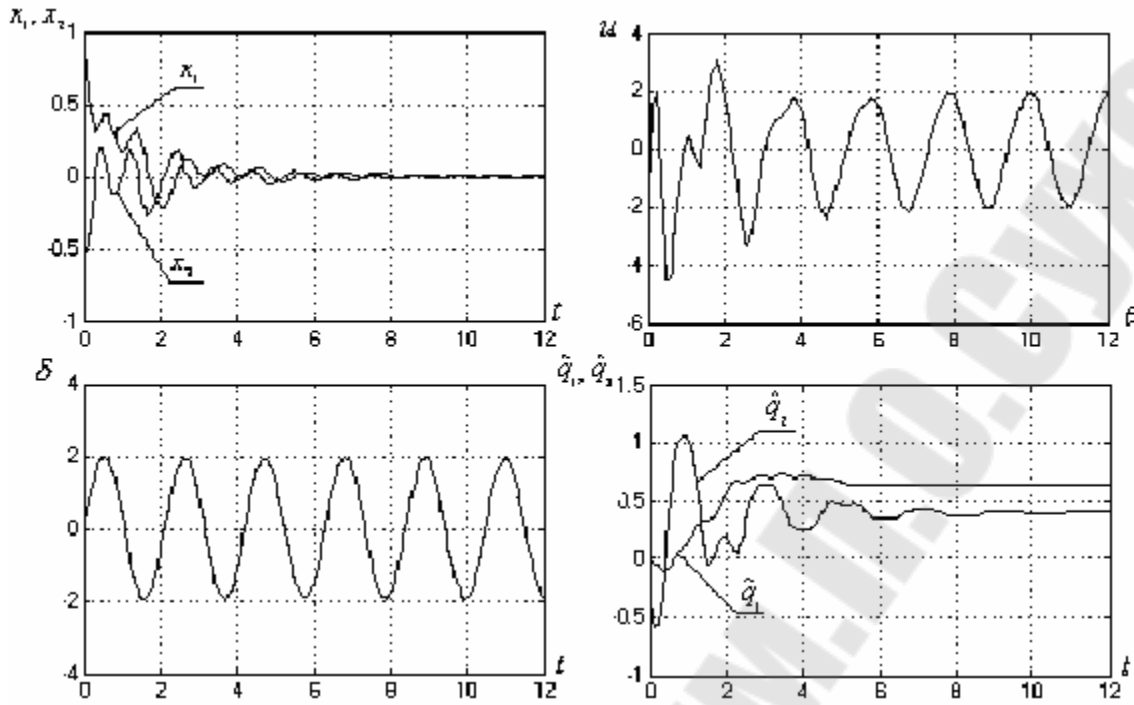


Рис. 4.14. Процессы стабилизации в системе, замкнутой адаптивным регулятором (4.94) – (4.97), при  $\delta(t) = 2\sin 3t$ ,  $\gamma = 0.1, 1.212$ ,  $\eta_1(0) = \eta_2(0) = \theta_1(0) = \theta_2(0) = 0$

Результаты моделирования переходных процессов в адаптивной системе приведены на рис. 4.14 и демонстрируют обеспечение асимптотической стабилизации нулевого значения вектора состояния в условиях воздействия внешнего заранее неизвестного возмущения  $\delta$ .

Особо отметим, что синтезированный адаптивный регулятор (2.4.93)–(2.4.96) будет обеспечивать асимптотическую стабилизацию объекта (2.4.94) для всех возмущений выделенного класса – т.е. для любых гармонических функций с заранее неизвестной амплитудой, частотой и фазой. Это положение иллюстрируется рис. 4.15, где приведены результаты моделирования замкнутой адаптивной системы, подверженной воздействию различных возмущений выделенного класса:

$$\delta(t) = 2 \quad \text{при } 0 \leq t < 15,$$

$$\delta(t) = 1.5 \sin(4t) \quad \text{при } 15 \leq t < 35,$$

$$\delta(t) = 2 \sin(2t) \quad \text{при } 35 \leq t < 50.$$

Как видно из графиков, каждый раз при изменении вида возмущающего воздействия и после завершения переходного процесса (после подстройки адаптивного регулятора) в системе устанавливается нулевое значение вектора состояния  $x$ .

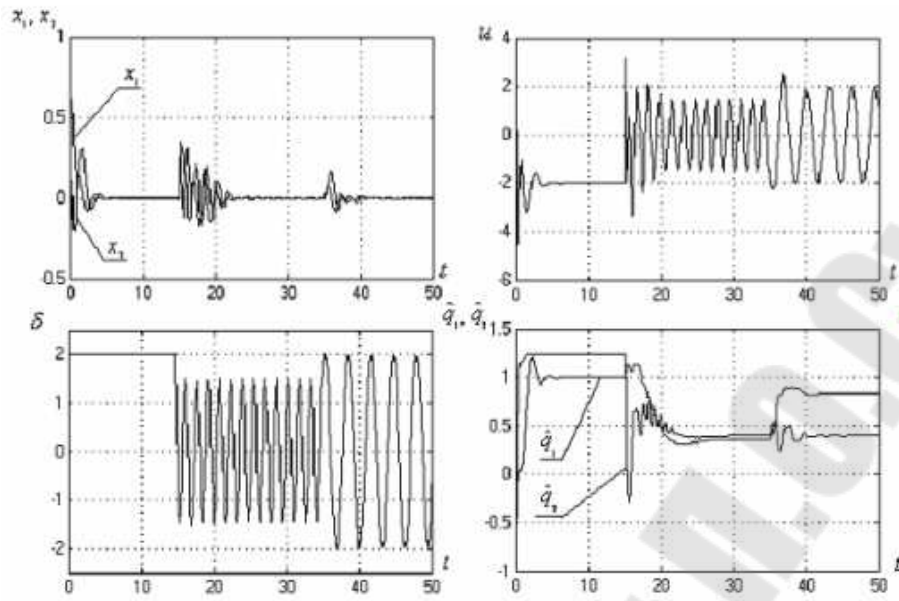


Рис. 4.15. Процессы стабилизации в системе, замкнутой адаптивным регулятором (4.94) – (4.97), при воздействии изменяющегося внешнего возмущения



# **ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ И РОБАСТНЫХ СИСТЕМ**

**Пособие**

**по одноименной дисциплине для студентов  
второй ступени высшего образования  
специальности 1-53 81 03 «Автоматизация  
и управление в технических системах»  
дневной и заочной форм обучения**

**Составитель Захаренко Владимир Сергеевич**

Подписано к размещению в электронную библиотеку  
ГГТУ им. П. О. Сухого в качестве электронного  
учебно-методического документа 06.04.21.

Рег. № 75Е.  
<http://www.gstu.by>