УДК 681.5:519.711.3

МЕТОД УПРОЩЕНИЯ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ТРЕНАЖЕРНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

МЭН ЦИН-СУН
Белорусский государственный университет, г. Минск

Введение

Системы управления технических тренажеров сложны и многомерны. Благодаря тому, что упрощение моделей тренажерных систем может облегчить нагрузки имитации и регулирования без нарушения точности и устойчивости управляющих систем, оно стало важным научным направлением в области автоматического управления.

При построении тренажерных комплексов решается задача адаптации математических моделей динамических объектов, процессов, происходящих в системах управления для решения в реальном времени. Один из путей достижения требуемого результата это исключение слабо влияющих компонентов уравнений без различимых потерь в поведении объектов.

В настоящее время существуют разные методы для упрощения моделей, но одни из них не в состоянии обеспечивать устойчивость систем при заданной точности, другие не могут применяться в многомерных системах.

Основная мысль работы автора заключается в том, что на основании вещественного разложения Шура (Schur) [1] упрощены с использованием аппроксимации передаточной функции математические модели для линейных и многомерных систем с асимптотической устойчивостью [2], полной управляемостью и наблюдаемостью [3]. Сначала преобразовываем матрицу исходной системы в блочно-диагональную посредством линейного оператора при помощи вещественного разложения Шура, и разделяем исходную систему на две независимых части. Затем отбрасываем слабые состояния системы, мало воздействующие на регулируемые величины. Наконец, чтобы получить равные первоначальные значения и приближенные установившиеся значения для упрощенной модели по сравнению с моделью исходной системы, необходимо ввести аппроксимацию передаточной функции. Такого типа упрощение проводится в результате сохранения главных полюсов исходных систем.

1. Метод упрощения математических моделей систем

1.1. Алгоритмы и погрешность упрощения

Передаточная функция практической системы помимо устойчивых полюсов часто содержит звенья интегрирующего типа (т. е. $s = 0$). Для линейных стационарных и многомерных систем со звеном интегрирующего типа необходимо сохранять все полюсы, чтобы упрощенная система как можно ближе была к исходной системе. Поскольку Грамианы (Grammian) управляемости и наблюдаемости [2] для такой системы не существуют, далее рассмотрим системы двух типов, встречающиеся на практике.

1.1.1. Система без звеньев интегрирующего типа. Рассматриваем линейную стационарную систему, асимптотически устойчивую, полностью управляемую и полностью наблюдаемую

$$S_1 : \begin{cases} \dot{X} = AX + BU, \\ Y = CX, \end{cases} \tag{1}$$

где $X \in R^{n\times 1}, U \in R^{m\times 1}, Y \in R^{p\times 1}$ – векторы фазовых координат, управляющих и регулируемых величин, $A \in R^{n\times n}$, $B \in R^{n\times m}$, $C \in R^{p\times n}$ – матрицы постоянных коэффициентов.

Обозначаем собственные значения матрицы A, расположенные в убывающем порядке по вещественным частям, в виде $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ и $\mathrm{Re}\{\lambda_k\} >> \mathrm{Re}\{\lambda_{k+1}\}$, где $k < n$.

Вещественный вариант теоремы разложения Шура описывается следующим образом: для любой матрицы $A \in R^{n\times n}$ существует вещественная ортогональная матрица $U \in R^{n\times n}$ такая, что

$$U^T A U = \begin{bmatrix} A_1 & * & \cdots & * \\ 0 & A_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_k \end{bmatrix},$$

где для каждого i матрица A_i $(i = 1, 2, ..., k)$ имеет размер 1×1 или 2×2, отвечая соответственно вещественному собственному значению или невещественной паре комплексно-сопряженных собственных значений матрицы A. Блоки A_i можно расположить в любом заданном порядке [1].

Итак,

$$U^T A U = S = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix},$$

где $A_{11} \in R^{k\times k}$, $A_{22} \in R^{(n-k)\times(n-k)}$, $\lambda_i(A_{11}) = \lambda_i(A), i = 1, 2, ..., k$, $U^T = U^{-1} \in R^{n\times n}$, а $\lambda(A_{11}), \lambda(A)$ – собственные значения матриц A_{11} и A.

Проведем преобразование подобия для матрицы S, чтобы перевести ее в блочную диагональную $diag(A_{11}, A_{22})$. При этом введем трансформирующую матрицу V как

$$V = \begin{bmatrix} I_k & \widetilde{X} \\ 0 & I_{n-k} \end{bmatrix}_{n\times n},$$

где $\widetilde{X} \in R^{k\times(n-k)}$. А обратная матрица V^{-1} определится в виде:

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} I_k & -\widetilde{X} \\ 0 & I_{n-k} \end{bmatrix}_{n\times n}.$$

Чтобы

$$V^{-1} S V = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix},$$

необходимо решить уравнение Сильвестра (Sylvester) [4]:

$$A_{11}\widetilde{X} + A_{12} - \widetilde{X}A_{22} = 0.$$

При неособом преобразовании $Z = T^{-1}X$, исходная система S_1 примет вид:

$$S_2 : \begin{cases} \dot{Z} = A_t Z + B_t U \\ Y = C_t Z \end{cases}, \tag{2}$$

где $T = UV$, $A_t = T^{-1}AT \in R^{n\times n}$, $B_t = T^{-1}B \in R^{n\times m}$, $C_t = CT \in R^{p\times n}$, $Z \in R^{n\times 1}$, A_t, B_t, C_t – матрицы постоянных коэффициентов.

Обозначаем

$$A_t = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix},\ B_t = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix},\ C_t = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix},\ Z = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix}, \tag{3}$$

где $A_{11} \in R^{k\times k}$, $A_{22} \in R^{(n-k)\times(n-k)}$, $B_1 \in R^{k\times m}$, $B_2 \in R^{(n-k)\times m}$, $C_1 \in R^{p\times k}$, $C_2 \in R^{p\times(n-k)}$, $Z_1 \in R^{k\times 1}$.

В связи с тем, что свойства управляемости и наблюдаемости не зависят от выбора системы координат [3], система S_2 асимптотически устойчива, полностью управляема и наблюдаема.

Обозначаем

$$G(s) = C(sI_n - A)^{-1}B = C_t(sI_n - A_t)^{-1}B_t ,$$

$$G_1(s) = C_1(sI_k - A_{11})^{-1}B_1 ,$$

$$G_2(s) = C_2(sI_{n-k} - A_{22})^{-1}B_2 .$$

Итак, имеем вид:

$$G(s) = G_1(s) + G_2(s) ,$$

т. е. исходная система S_1 разделена на две независимые подсистемы ($G_1(s)$ и $G_2(s)$) и получена упрощенная система S_3 , содержащая главные полюсы, в следующей форме

$$S_3 : \begin{cases} \dot{Z}_1 = A_{11}Z_1 + B_1 U \\ \hat{Y} = C_1 Z_1 \end{cases},$$

где $\hat{Y} \in R^{p\times 1}$ и требование $\hat{Y} \approx Y$.

Если дано определение Ганкелевых (Hankel) сингулярных чисел для моделей S_2 и $G(s)$ как

$$\sigma_i\left[G(s)\right] = \left\{\lambda(P_t Q_t)\right\}^{1/2}, i = 1, 2,..., n ,$$

и условно $\sigma_i(\cdot) \geq \sigma_{i+1}(\cdot)$, где P_t, Q_t – Грамианы управляемости и наблюдаемости системы S_2 , то верхняя граница погрешности данного алгоритма определена [5] в виде:

$$\left\|G(j\omega)-G_1(j\omega)\right\|_{L^\infty}=\left\|G_2(j\omega)\right\|_{L^\infty}\le 2\sum_{i=1}^{n-k}\lambda_i^{1/2}(P_{22}Q_{22}),$$

и

$$\sum_{i=k+1}^{n}\sigma_i\left[G(s)\right]\le\sum_{i=1}^{n-k}\sigma_i\left[G_2(s)\right]\le\sum_{i=1}^{n-k}\sigma_i\left[G(s)\right].$$

1.1.2. Система со звеньями интегрирующего типа. Рассматриваем систему S_1 (1) в предположении, что матрица A имеет m нулевых собственных значений $(1\le m<n)$ и $(n-m)$ собственных значений с отрицательными вещественными частями. Идея упрощения системы со звеньями интегрирующего типа такая: сначала разделим исходную систему на две независимые подсистемы $\{A_0,B_0,C_0\}$ и $\{A_1,B_1,C_1\}$, где A_0 – нулевая матрица; A_1 – матрица, вещественные части всех собственных значений для которой являются отрицательными; затем применим указанный выше метод упрощения к подсистеме $\{A_1,B_1,C_1\}$ и получим упрощенную подсистему $\{A_r,B_r,C_r\}$; окончательная упрощенная система будет иметь вид: $\{A_r,B_r,C_r\}$ + $\{A_0,B_0,C_0\}$.

1. Разделим исходную систему на две подсистемы путем Сингулярного разложения (SVD – singular value decomposition) [1].

Пусть

$$A=U\begin{bmatrix}\Sigma & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}V^T,$$

где $U^T=U^{-1}\in R^{n\times n}$, $V^T=V^{-1}\in R^{n\times n}$, $\Sigma\in R^{(n-m)\times(n-m)}$ – матрица с положительными диагональными элементами.

Итак,

$$V^TAV=V^TU\begin{bmatrix}\Sigma & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}V^TV=\begin{bmatrix}A_1 & 0\\ A_2 & 0\end{bmatrix}_{n\times n},$$

где $A_1\in R^{(n-m)\times(n-m)}; A_2\in R^{m\times(n-m)}$.

Если $A_2\ne 0$, то пусть матрица P_s имеет вид:

$$P_s=\begin{bmatrix}I_{n-m} & 0\\ A_2A_1^{-1} & I_m\end{bmatrix},$$

а ее обратная матрица:

$$P_s^{-1}=\begin{bmatrix}I_{n-m} & 0\\ -A_2A_1^{-1} & I_m\end{bmatrix}.$$

В результате получено:

$$P_s^{-1}V^TAVP_s=P_s^{-1}\begin{bmatrix}A_1 & 0\\ A_2 & 0\end{bmatrix}\cdot P_s=\begin{bmatrix}A_1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Если $A_2 = 0$, то берем $P_s = I_n$ и обозначаем $T_f = VP_s$.

При этом

$$A_f = T_f^{-1} A T_f = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_0 \end{bmatrix},$$

$$B_f = T_f^{-1} B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_0 \end{bmatrix}, C_f = C T_f = \begin{bmatrix} C_1 & C_0 \end{bmatrix},$$

где $A_0 = 0_m, B_1 \in R^{(n-m)\times m}, B_0 \in R^{m\times m}$, $C_1 \in R^{p\times(n-m)}, C_0 \in R^{p\times m}$;

2. Упростим систему $\{A_1, B_1, C_1\}$ посредством разложения Шура.

Если обозначаем Ганкелевы сингулярные числа системы $\{A_1, B_1, C_1\}$ знаками σ_i $(i = 1, 2, ..., n-m)$ и удовлетворено условие

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_k > \sigma_{k+1} \geq \cdots \geq \sigma_{n-m} > 0,$$

то можем получить k – мерную $(k < n-m)$ упрощенную модель $\{A_r, B_r, C_r\}$ посредством вещественного разложения Шура.

1.2. Аппроксимация передаточных функций между моделями упрощенной и исходной систем. Если в динамических характеристиках системы содержатся составляющие, соответствующие малым собственным значениям $\lambda_i (i = k+1, k+2, ..., n)$, то будем считать $\dot{Z}_2 = 0$. Затем из формул (2) и (3) получим:

$$\dot{Z}_1 = A_{11} Z_1 + B_1 U, 0 = A_{22} Z_2 + B_2 U, Y = C_1 Z_1 + C_2 Z_2. \qquad (4)$$

Дальше рассмотрим два случая:

1) если A_{22} обратима, то после замены Z_2 формула (4) будет иметь вид:

$$S_4 : \begin{cases} \dot{Z}_1 = A_R Z_1 + B_R U \\ Y = C_R Z_1 + D_R U \end{cases},$$

где $Z_1 \in R^{k\times 1}$, а A_R, B_R, C_R, D_R – постоянные матрицы; $A_R = A_{11}$, $B_R = B_1$, $C_R = C_1$, $D_R = -C_2 A_{22}^{-1} B_2$;

2) если A_{22} необратима, то заменим матрицу A_{22}^{-1} обобщенной обратной A_{22}^{+}.

Нетрудно заметить, что упрощенная модель S_4 отличается от исходной системы S_1, а поскольку матрица $(-C_2 A_{22}^{-1} B_2)$ принципиально не равна нулевой матрице в исходной системе, то и первоначальные значения выходных величин системы при модели S_4 не равны нулевым значениям исходной системы. Одним словом, форма упрощенной модели S_4 должна быть изменена, чтобы существующие подходы к упрощению модели улучшились по первоначальным значениям систем.

Чтобы получить равные первоначальные значения и приближенные установившиеся значения для упрощенной модели S_4 по сравнению с моделью исходной системы S_1, необходимо ввести поправку на форму S_4 следующим образом:

Сначала записываем упрощенную модель S_4 в виде:

$$S_5:\begin{cases}\dot{Z}_1 = A_R Z_1 + B_R U \\ Y = C'_R Z_1\end{cases},$$

где $C'_R \in R^{p\times k}$, затем введем аппроксимацию передаточных функций между моделями упрощенной и исходной систем.

Раскладываем матрицы передаточной функции для исходной и упрощенной систем в виде:

$$G(s) = C(sI_n - A)^{-1}B = -CA^{-1}B - CA^{-2}Bs - CA^{-3}Bs^2 - \dots .$$

$$G_R(s) = C'_R(sI_k - A_R)^{-1}B_R = -C'_R A_R^{-1}B_R - C'_R A_R^{-2}B_R s - C'_R A_R^{-3}B_R s^2 - \dots .$$

Приблизим $G_R(s)$ к $G(s)$ и определим матрицу C'_R при согласовании соответствующих членов.

Необходимо удовлетворить следующему условию, чтобы обеспечить равные или более приближенные установившиеся значения для двух моделей (S_1 и S_5).

$$\left[CA^{-1}B \quad CA^{-2}B \quad \dots \quad CA^{-j}B\right] = C'_R\left[A_R^{-1}B_R \quad A_R^{-2}B_R \quad \dots \quad A_R^{-j}B_R\right],\ j = 1, 2, \dots, \tag{5}$$

где $G_R(s) = C'_R(sI_k - A_R)^{-1}B_R = -\sum_{i=0}^{\infty} C'_R A_R^{-i-1} B_R s^i$; $G(s) = C(sI_n - A)^{-1}B = -\sum_{i=0}^{\infty} CA^{-i-1}Bs^i$ – матрицы передаточной функции для моделей S_5 и S_1.

Пусть

$$C'_R = \begin{bmatrix} c'_{11} & c'_{12} & \cdots & c'_{1k} \\ c'_{21} & c'_{22} & \cdots & c'_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c'_{p1} & c'_{p2} & \cdots & c'_{pk} \end{bmatrix}_{p\times k}.$$

Это значит, что уравнение матрицы (5) содержат $p \times k$ неизвестных величин ($c'_{ij}, i = 1, 2, \dots, p, j = 1, 2, \dots, k$), $p \times (j \times m)$ скалярных уравнений. Необходимо решить уравнение матрицы (5), чтобы получить матрицу C'_R и окончательную упрощенную модель S_5.

Рассмотрим задачу решения уравнения матрицы (5) в двух случаях.

Случай 1. Если $k/m = j$, а j равно целому числу, то матрица C'_R определена единственно после отсечения первых j столбцов в уравнении матрицы (5).

Случай 2. Если $k/m = j$, а j не равно целому числу, то после отсечения первых k столбцов получим близкие решения уравнения матрицы (5). Кстати, можно использовать также метод наименьших квадратов для решения уравнения матрицы (5).

2. Пример имитации

Динамическая модель линеаризованной системы одного из типов самолета (при постоянной высоте 2000 м со скоростью 38 м/с) по продольному движению известна в следующей матричной форме S_1

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -0{,}0709x_1 + 0{,}2077x_2 - 0{,}2513x_4 - 0{,}0118u_1 + u_2, \\ \dot{x}_2 = -0{,}4605x_1 - 2{,}7721x_2 + x_3 + 0{,}1522u_1, \\ \dot{x}_3 = 0{,}3314x_1 - 40{,}0949x_2 - 3{,}1369x_3 - 29{,}0386u_1, \\ \dot{x}_4 = x_3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_4, \end{cases}$$

где x_1, x_2, x_3, x_4 – фазовые координаты системы; u_1, u_2 – управляющие величины; y_1, y_2 – регулируемые величины; x_1 – летная скорость; x_2 – угол навстречу направлению; x_3 – угловая скорость по тангажу; x_4 – угол отклонения тангажа; u_1 – угол отклонения руля высоты; u_2 – выходная величина акселератора; y_1 – летная скорость; y_2 – угол отклонения тангажа.

Сначала получим сингулярные числа при помощи команд Matlab svd=sqrt(eig(*Wc***Wo*)) (*Wc*,*Wo* – Грамианы управляемости и наблюдаемости системы):

svd=21,1428; 21,9341; 0,2365; 0,4190

По распределению этих сингулярных чисел выбираем порядок упрощенной системы – 2, и в это время первые два сингулярных числа составляют $\sum_{i=1}^{2}\sigma_i / \sum_{j=1}^{4}\sigma_j \approx 98{,}5$ %.

По формуле (4) получим модель системы S_4 (при $D_4 = 0_{2\times 2}$):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -0{,}0246x_1 + 0{,}3170x_2 + 0{,}3320u_1 - 0{,}9640u_2, \\ \dot{x}_2 = -0{,}3117x_1 - 0{,}0407x_2 - 1{,}3329u_1 - 0{,}0837u_2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = -1{,}0172x_1 - 0{,}2240x_2, \\ y_2 = -0{,}0700x_1 + 1{,}3166x_2. \end{cases}$$

После аппроксимации передаточной функции получим упрощенную модель S_5:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -0{,}0246x_1 + 0{,}3170x_2 + 0{,}3320u_1 - 0{,}9640u_2, \\ \dot{x}_2 = -0{,}3117x_1 - 0{,}0407x_2 - 1{,}3329u_1 - 0{,}0837u_2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = -1{,}0158x_1 - 0{,}2237x_2, \\ y_2 = 0{,}0134x_1 + 1{,}3337x_2. \end{cases}$$

С помощью программы Matlab 6.5 получим графики разностей переходных функций между моделями систем S_1 и S_5, также между моделями S_1 и S_4 (рис. 1).

Видно, что полученная модель S_5 после применения указанного выше метода лучше приблизилась к исходной системе S_1 по сравнению с моделью S_4.

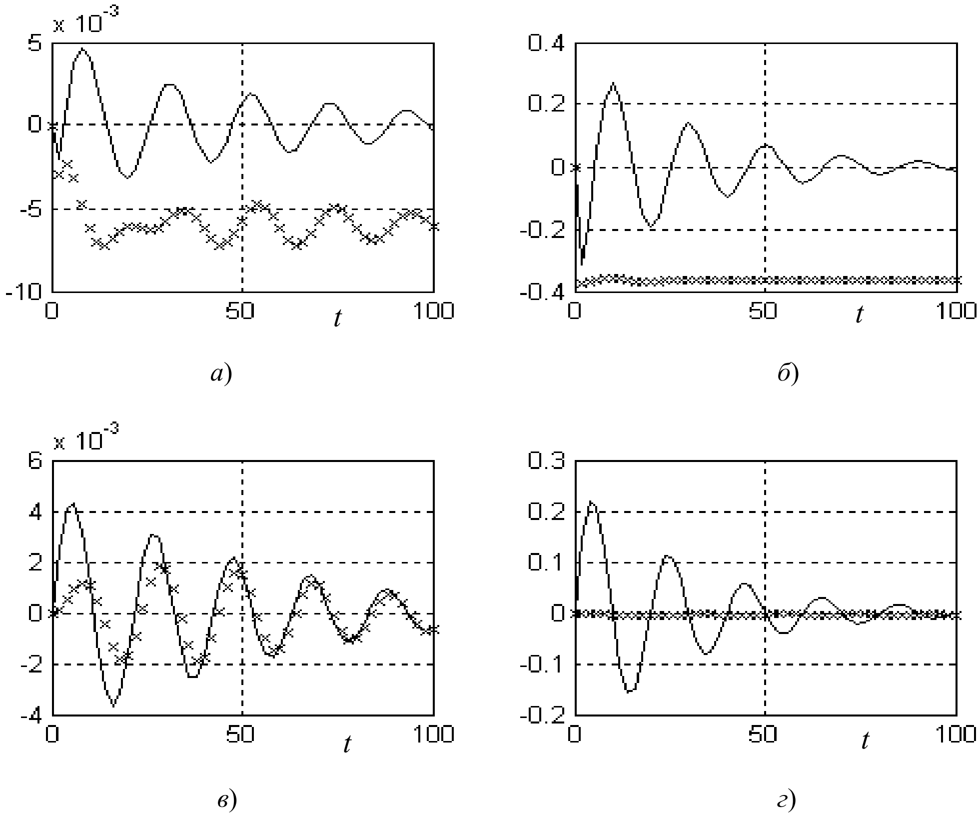

Рис. 1. Графики разностей переходных функций между моделями систем S_1 и S_5, также между S_1 и S_4, соответствующие сплошной линии и линии с крестообразными символами: *а* – y_1 от u_1; *б* – y_2 от u_1; *в* – y_1 от u_2; *г* – y_2 от u_2; *t*, с; y_1, y_2, углы (град.)

Заключение

Посредством метода аппроксимации передаточной функции модель линейной и многомерной системы упрощена. Предложенный метод упрощения математических моделей систем позволяет повысить точность приближения упрощенной модели к исходной модели по переходным и установившимся значениям. Суммарные затраты в проектировании, имитации и регулировании систем стали меньше в значительной мере. Указанный выше теоретический анализ и имитация примера доказывают эффективность этого метода упрощения.

Литература

1. Хорн, Р. Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон. – Москва : Мир, 1989.
2. Андреев, Ю. Н. Управление конечномерными линейными объектами / Ю. Н. Андреев. – Москва : Наука, 1976.
3. Теория автоматического управления. Ч. 2 / Воронов А. А. [и др.]. – Москва : Высш. шк., 1986. – С. 304–318.
4. Голуб, Дж. Матричные вычисления / Дж. Голуб, Ч. Ван Лоун. – Москва : Мир, 1999. – С. 343–352.
5. Glover, K. All optimal Hankel-norm approximation of linear multivariable systems and their L^∞-error bounds / K. Glover // Int. J. Control. 1984. Vol. 39, No. 6. Pp. 1115–1193.

Получено 23.10.2008 г.