

УДК 536.2.01

**ДИФФУЗИОННО-КИНЕТИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ  
В НЕРАВНОВЕСНЫХ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ  
СИСТЕМАХ С ИСТОЧНИКАМИ ЭНЕРГИИ  
ЧАСТЬ 1. ДИСПЕРСИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ  
ТЕПЛОВЫХ ВОЛН**

**О. Н. ШАБЛОВСКИЙ, Д. Г. КРОЛЬ, И. А. КОНЦЕВОЙ**

*Учреждение образования «Гомельский государственный  
технический университет имени П. О. Сухого»,  
Республика Беларусь*

**Ключевые слова:** возбуждение колебаний, тепловой резонатор, кинетика подвижной границы, нелинейная 2D структура.

**Введение**

Фундаментальные уравнения теории теплопереноса (волновое уравнение, уравнение теплопроводности), содержащие нелинейные по температуре источники, позволяют моделировать разнообразные физические процессы, происходящие при энергетическом воздействии на материал. В данной работе мы рассматриваем процессы теплопереноса в системе «среда – источник энергии». Важным элементом динамической теории неравновесных состояний вещества является гиперболическое уравнение теплопроводности, получаемое с помощью вариационных принципов [1], [2] и учитывающее конечную скорость распространения тепловых возмущений:

$$c \left( \frac{\partial \tau}{\partial t} + \gamma \frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} \right) = \lambda \left( \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2} \right) + q_v, \quad (1)$$

где  $t$  – время;  $x, y, z$  – декартовы координаты;  $\tau = T - T^0$  есть отклонение температуры от ее отсчетного значения  $T^0 \equiv \text{const}$ ;  $c$  – объемная теплоемкость;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности;  $\gamma$  – время релаксации теплового потока;  $q_v$  – мощность внутренних источников и стоков энергии; скорость распространения тепловых возмущений равна  $w = (\lambda / c\gamma)^{1/2}$ . Физические аспекты обоснования уравнения (1) изложены в [3]. Частным случаем модели (1) является волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} = w^2 \left( \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2} \right) + k_v; \quad (2)$$

$$k_v(\tau, x, y, z, t) = q_v / (c\gamma); \quad c, \gamma, w - \text{const}.$$

Это уравнение описывает быстрые процессы, в которых волновой механизм переноса тепла преобладает над диффузионным:  $\gamma \partial / \partial t \gg 1$ . Одномерное волновое уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} = w^2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} + k_v. \quad (3)$$

Здесь следует обратить внимание на класс автомодельных решений типа распространяющейся волны:

$$d^2\tau/d\xi = Q(\tau); \quad (4)$$

$$\xi = A_*x + B_*t; \quad A_*, B_* - \text{const}; \quad Q(\tau) = k_v(\tau)/[w^2 A_*^2 (M^2 - 1)], \quad M^2 = N^2/w^2.$$

Скорость перемещения  $\xi$ -линии равна  $N = dx/dt = -B_*/A_*$ , причем  $N^2 \neq w^2$ , т. е.  $\xi$ -линия не является характеристикой;  $M^2$  есть квадрат теплового числа Маха. Автономная динамическая система (4) обладает свойством инверсии: знак функции источника  $k_v$  меняется (при одном и том же  $Q$ ) на противоположный при переходах «дозвук  $\leftrightarrow$  свержзвук». Отметим следующие варианты:

1)  $Q(\tau) > 0$ , если в свержзвуковом процессе ( $M^2 > 1$ ) имеем источник энергии ( $k_v(\tau) > 0$ ) либо если в дозвуковом процессе ( $M^2 < 1$ ) имеем сток энергии ( $k_v(\tau) < 0$ );

2)  $Q(\tau) < 0$ , если  $M^2 > 1$ ,  $k_v(\tau) < 0$  либо если  $M^2 < 1$ ,  $k_v(\tau) > 0$ .

Кроме того, имеем два важных частных случая:

1) одномерный стационарный процесс при  $A_* = 1$ ,  $B_* = 0$ , т. е.  $\xi \equiv x$ ;

2) нестационарный и однородный по координате  $x$  тепловой процесс при  $A_* = 0$ ,  $B_* = 1$ , т. е.  $\xi \equiv t$ .

Еще одним объектом нашего исследования являются стационарные состояния 2D систем «среда – источник энергии»:

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2} + R_v(x, \tau) = 0, \quad R_v = q_v/\lambda. \quad (5)$$

Стационарная двухкомпонентная система с зацепляющимися источниками энергии определяется уравнениями:

$$\frac{\partial^2 \tau_\sigma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_\sigma}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau_\sigma}{\partial z^2} + R_v^{(\sigma)}(x, \tau_1, \tau_2) = 0; \quad (6)$$

$$\tau_\sigma = T_\sigma - T_\sigma^0, \quad R_v^{(\sigma)} = q_v^{(\sigma)}/\lambda_\sigma,$$

где индекс  $\sigma = 1, 2$  указывает номер компоненты.

Линия сильного разрыва теплового поля может иметь разнообразную физическую природу. В частности, она является эффективной моделью технологического устройства, оказывающего высокоинтенсивное энергетическое воздействие на материал. Динамические условия совместности на линии сильного разрыва имеют вид [4]:

$$W = \{q - \rho N c_p T\}, \quad (7)$$

где фигурные скобки означают разность значений заключенной в скобки величины по обе стороны разрыва;  $q$  – удельный тепловой поток;  $N$  – скорость перемещения линии разрыва;  $W$  – поверхностная плотность распределения на разрыве внешнего для среды притока энергии. Для размерных и безразмерных уравнений применяем одинаковую форму записи, полагая:

$$\lambda \rightarrow \bar{\lambda}\lambda'; \quad c \rightarrow \bar{c}c'; \quad \gamma \rightarrow \gamma'; \quad q_v \rightarrow \bar{q}_v q'_v;$$

$$T \rightarrow T'; \quad q \rightarrow q'; \quad x \rightarrow x'; \quad y \rightarrow y'; \quad z \rightarrow z'; \quad t \rightarrow t',$$

где штрихом отмечены безразмерные величины. Безразмерные комплексы:

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda_b T_b}{x_b q_b} = 1; \quad \bar{c} = \frac{c_b T_b x_b}{t_b q_b} = 1; \quad \bar{q}_b = \frac{(q_v)_b x_b}{q_b} = 1$$

составлены из масштабов величин (они отмечены индексом  $b$ ), применяемых для обезразмеривания:  $T = T' T_b$ ,  $\gamma = \gamma' t_b$  и т. д. Все расчеты выполнены в безразмерных переменных.

Прикладные аспекты нашей работы связаны с двумя задачами: 1) локализованное в пространстве (например, вдоль фиксированной линии) тепловое воздействие на материал; 2) теплоперенос при росте кристалла из переохлажденного расплава [5]–[8]. Дело в том, что знакопеременный источник  $k_v(\tau)$  моделирует два процесса: тепловыделение ( $k_v > 0$ ) на фронте кристаллизации и отвод тепла ( $k_v < 0$ ) от твердой фазы во внешнюю среду. Современное состояние математических исследований волнового уравнения с нелинейными источниками представлено в статьях [9]–[13].

Данная работа состоит из трех частей и имеет следующие цели: изучить дисперсионные свойства волн, возбуждаемых в слое материала периодическим во времени тепловым потоком; проанализировать закономерности влияния на среду нелинейного знакопеременного источника, обладающего пространственно-временной неоднородностью; построить 2D и 3D структуры, формирующиеся при возбуждении колебаний на сильном разрыве теплового поля.

**Тепловой резонатор.** В работе [14] получены следующие точные решения уравнения (4):

$$\text{I. } T - T_0 \equiv \tau = 4 \arctg u, \quad Q(\tau) = -\sin(\tau) + 2m \sin(\tau/2),$$

$$u = \left( \frac{1-m}{m} \right)^{1/2} \frac{1}{\cos(\xi \sqrt{1-m})}, \quad 0 < m < 1. \quad (8)$$

$$\text{II. } T - T_0 \equiv \tau = 4 \arctg u, \quad Q(\tau) = -\sin(\tau) + 2(m-1) \sin(\tau/2),$$

$$u = \left( \frac{1-m}{m} \right)^{1/2} \cos(\xi \sqrt{m}), \quad 0 < m < 1. \quad (9)$$

$$\text{III. } T - T_0 \equiv \tau = \ln[A_1 + 2\bar{\alpha} \cos(m\xi)]^2, \quad A_1^2 > 4\bar{\alpha}^2,$$

$$Q(\tau) = (2m^2 A_1^2 - A) \exp(-\tau) - 2m^2 A_1 \exp(-\tau/2), \quad (10)$$

$$A = 8m^2 \bar{\alpha}^2,$$

где  $\bar{\alpha}$ ,  $m$  – произвольные постоянные.

Формулы I, II, III – это автомодельные решения волнового уравнения теплопереноса с нелинейными источниками. Дадим этим решениям теплофизическую интерпретацию. Рассмотрим взаимодействие теплового резонатора с системой «среда – источник энергии», описываемой решением (8). На конечном отрезке  $x \in [x_1, 0]$ ,  $-\infty < x_1 < 0$  находится слой материала, обладающего локально-неравновесными тепловыми свойствами. На границе  $x = x_1$  периодический по времени тепловой поток

$q_1 = q_1(t)$  возбуждает колебания. Допустим, что в результате этого воздействия температура материала при  $x = 0$  определяется решением (8):

$$u(x = 0, t) = u_0 = \frac{1}{a \cos \omega t}, \quad a = a(\omega); \quad (11)$$

$$\tau(x = 0, t) = 4 \arctg u_0(t), \quad t \geq 0.$$

Это означает, что при  $x = 0$  температура совершает пилообразные колебания во времени; функция арктангенс испытывает разрыв в те моменты времени, когда  $\cos \omega t = 0$ . В качестве примера отметим, что периодические акустические возмущения, которые распространяются в нелинейных недиспергирующих средах, на больших расстояниях трансформируются в «пилу» [15]. Зависимость амплитуды вынужденных колебаний  $a = a(\omega)$  от частоты обусловлена теплофизическими свойствами материала. Для сред с локально-неравновесными тепловыми свойствами этот вопрос изучен в [16].

Возьмем для определенности  $\xi \geq 0$ . Зависимость  $\tau(\xi)$  в (8) содержит последовательность волн  $\xi_j \sqrt{1-m} = 2\pi n_0$  и последовательность скачков (сильных разрывов)  $\xi_r \sqrt{1-m} = (\pi/2) + 2\pi n_0$ , где  $n_0 = 0, 1, 2, \dots$  – целое положительное число. На каждом сильном разрыве  $x = x_r(t)$  баланс энергии (7) имеет вид:  $A_* x_r = -B_* t + [(\pi/2) + 2\pi n_0] / \sqrt{1-m}$ . Тепловой поток подсчитывается по формуле  $q = (\lambda NT / \gamma) + q_0$ , а выбор константы  $q_0$  обусловлен начальными условиями процесса. Нашей целью является изучение дисперсии тепловой волны, поэтому достаточно рассмотреть решение (8) при  $x \in [0, x_j]$ , где  $x = 0$  – неподвижная стенка, а правая граница  $\xi_j = 0$ ,  $x_j(t) = (-B_* / A_*)t$  подвижна, ее скорость перемещения описывается нелинейным кинетическим соотношением

$$N_j \equiv N(T_j) = \mu [\sin^2(\tau/4)]^r, \quad \mu > 0, \quad r > 0, \quad (12)$$

где положительные константы  $\mu$ ,  $r$  характеризуют физические свойства данного процесса. Нижним индексом  $j$  отмечаем значение функций на правой границе. Согласно (8) имеем:

$$u = 1/[a \cos(\omega t - kx)],$$

$$a^2 = m/(1-m), \quad \omega = B_* \sqrt{1-m}, \quad k = -A_* \sqrt{1-m}, \quad 0 < m < 1,$$

где  $a$  – амплитуда;  $k$  – волновое число;  $\omega$  – круговая частота. Отсюда получаем фазовую скорость:

$$N = -B_* / A_* = \omega / k = \mu(1-m)^r.$$

Учитывая, что  $1 + a^2 = 1/(1-m)$ , записываем дисперсионное соотношение между  $\omega$  и  $k$  в следующем виде:

$$k\mu = \omega(1+a^2)^r. \quad (13)$$

Известно, что вид дисперсии определяется знаком производной  $d(\omega/k)/d\omega$ . В данном случае этот знак противоположен знаку производной  $da/d\omega$ . При

$da/d\omega > 0$  имеем  $dN/d\omega < 0$ , и дисперсия нормальная. Если же  $da/d\omega < 0$ , то дисперсия аномальная (положительная):  $dN/d\omega > 0$ . Далее будет показано, что вид дисперсии (отрицательный, положительный) определяется не только амплитудно-частотными свойствами резонатора. Принципиальное значение имеет характер возбуждаемых колебаний. В данном случае важно, что колебания (8), (11) – разрывные.

Изучим свойства дисперсионного соотношения (13), взяв обычную колоколообразную корреляцию между амплитудой и круговой частотой:

$$a(\omega) = a_1 \exp[-p(\omega - \omega_1)^2], \tag{14}$$

где  $a_1, p, \omega_1$  – положительные и постоянные величины;  $\omega_1$  – резонансная частота возбуждающих колебаний. Простые аналитические оценки показывают, что зависимость  $k = k(\omega)$  имеет по меньшей мере один экстремум, который находится в сверхрезонансной области частот:  $\omega = \omega' > \omega_1$ ;  $dk/d\omega = 0$  при  $\omega = \omega'$ . Тип этого экстремума – максимум  $k_{\max} = k(\omega = \omega')$ , если  $0 < r < 1$ ,  $2p(\omega' - \omega_1)^2 < 1$ . Более подробные результаты исследования представлены на рис. 1. Кинетическая зависимость  $N_j = N(\tau)$  имеет две монотонные ветви, расположенные симметрично относительно вертикальной оси; горизонтальные участки линий на этих графиках соответствуют скачку температуры. Типичный пример поведения дисперсионной кривой (13) дан на рис. 1, в, г. Видно, что перемена знака производной  $dk/d\omega$  происходит в правой окрестности резонансной частоты  $\omega = \omega_1$ .

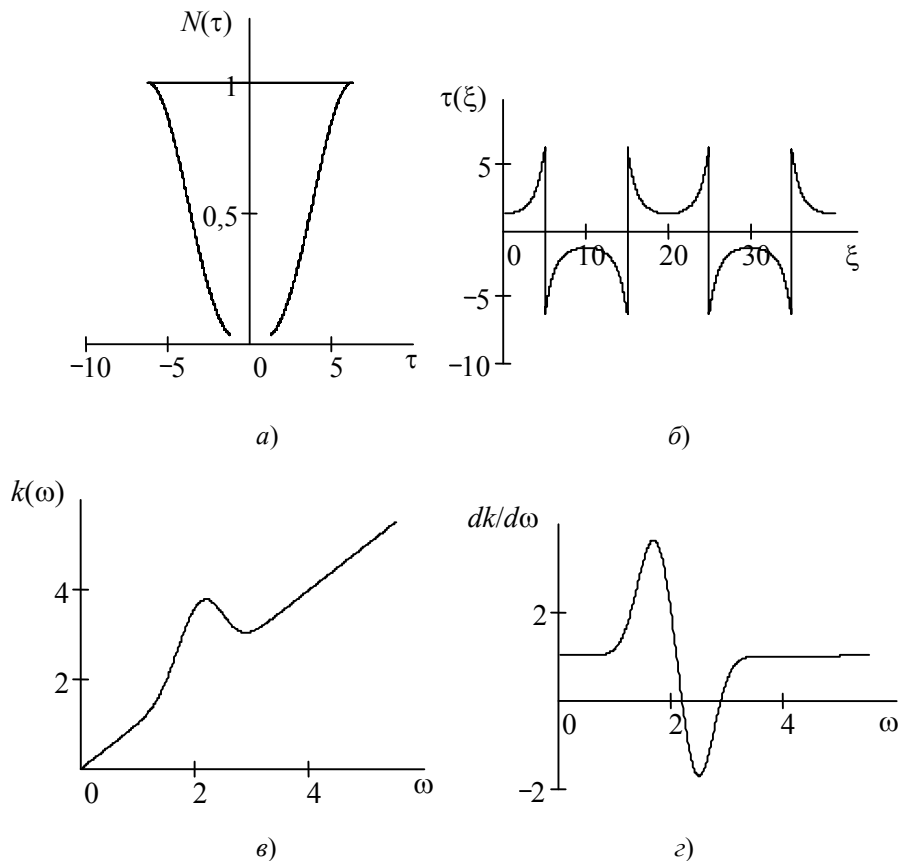


Рис. 1. Кинетические и дисперсионные свойства тепловой волны (12) в пилообразном режиме (11) возбуждения колебаний:

$a, б - r = 1,5, \mu = 1, m = 0,9$ ;  $в, г - r = 0,5, a_1 = 1,5, p = 2, \omega_1 = 2$

Для решения II [см. (9)] физическая интерпретация выполняется аналогичным образом. При  $x = 0$  имеем гармоническое колебание:

$$u_0 \equiv u(x = 0, t) = a \cos(\omega t), \quad a = a(\omega), \quad (15)$$

$$0 < m < 1, \quad a^2 = (1 - m)/m, \quad \tau(x = 0, t) = 4 \operatorname{arctg} u_0.$$

Решение II определяет тепловой процесс при  $x \in [0, x_j]$ , где  $x_j = (-B_* / A_*)t$ , и скорость перемещения подвижной правой границы характеризуется кинетическим соотношением (12). Дисперсионное соотношение имеет вид:

$$k\mu = \omega \left( 1 + \frac{1}{a^2} \right)^r; \quad (16)$$

$$\omega = B_* \sqrt{m}, \quad k = -A_* \sqrt{m}, \quad N = -B_* / A_* = \omega / k.$$

В данном случае знаки производных  $dN/d\omega$  и  $da/d\omega$  одинаковые. При  $da/d\omega > 0$  дисперсия аномальная (положительная), при  $da/d\omega < 0$  дисперсия нормальная (отрицательная) [см. (14)]. Эти свойства асимметричны тем, что наблюдались для решения I. А именно: кинетический закон (12) в обоих случаях один и тот же, но в решении I [см. (8), (11)] колебания температуры при  $x = 0$  пилообразные, а не гладкие, как в случае (15). Если  $(1 + a_1^2) > rp\omega_1^2$ , то  $k = k(\omega)$  – монотонная функция. Точки экстремумов  $\omega = \omega'$ ,  $\omega = \omega''$  существуют, если  $rp\omega_1^2 > (1 + a_1^2)$ :

$$\omega', \omega'' = \frac{1}{2rp} \left[ rp\omega_1 \pm \sqrt{r^2 p^2 \omega_1^2 - rp(1 + a^2)} \right],$$

где  $\omega'$  получается при знаке «минус» перед корнем,  $\omega''$  – при знаке «плюс». По отношению к резонансной частоте  $\omega = \omega_1$  эти корни расположены следующим образом:  $\omega' < (\omega_1 / 2) < \omega'' < \omega_1$ , т. е. обе частоты  $\omega', \omega''$  находятся в субрезонансной области. На рис. 2, а указан пример кинетической зависимости  $N_j = N(\tau)$  при гладком возбуждающем режиме колебаний (15). Дисперсионные свойства тепловой волны даны на рис. 2, в, г. Здесь важно то, что перемена знака производной  $dk/d\omega$  происходит в субрезонансном интервале частот (см. для сравнения рис. 1).

Перейдем к изучению дисперсии волн, которые описываются решением III [см. (10)]. Температура при  $x = 0$  равна:

$$\tau(x = 0, t) = \ln[A_1 + a \cos(\omega t)]^2, \quad 2\bar{\alpha} = a(\omega), \quad \omega = mB_*, \quad A_1^2 > a^2.$$

Рассматриваем тепловое поле при  $x \in [0, x_j]$ , где  $x = 0$  – неподвижная стенка, правая граница  $\xi_j = 0$ ,  $x_j = (-B_* / A_*)t$  имеет скорость

$$N_j \equiv N(T_j) = \mu \exp[r(T - T_0)], \quad \mu, r - \text{const.} \quad (17)$$

Здесь, как и прежде,  $\omega$  – круговая частота,  $k = -mA_*$  есть волновое число. Дисперсионное соотношение между  $\omega$  и  $k$  имеет вид:

$$k\mu = \omega / (A_1 + a)^{2r}. \quad (18)$$

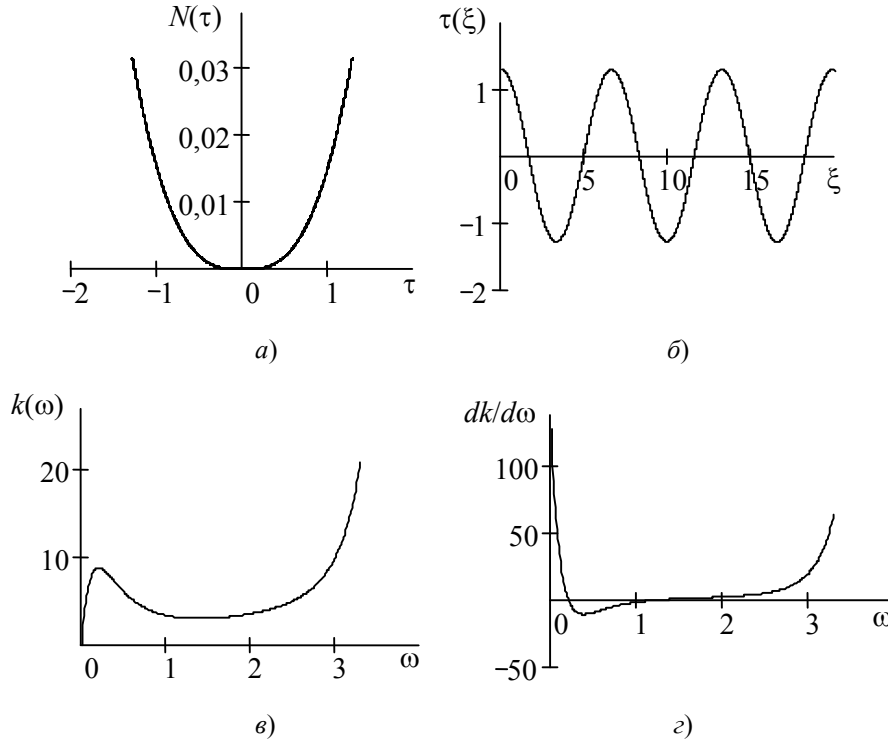


Рис. 2. Кинетические и дисперсионные свойства тепловой волны (12) в режиме непрерывных (15) колебаний температуры:  
*a, б* –  $r = 1,5, \mu = 1, m = 0,9$ ; *в, г* –  $r = 1,5, a_1 = 1,5, p = 0,5, \omega_1 = 2$

Анализ показывает, что если  $A_1 = a[4rp(\omega_1 - \omega) - 1]$ , то функция  $k = k(\omega)$  в (18) имеет один экстремум, который расположен либо в субрезонансной области  $\omega = \omega' < \omega_1$ , либо в сверхрезонансной области  $\omega = \omega'' > \omega_1$ .

Согласно (10), здесь должно быть выполнено ограничение  $|A_1| > a$ . Тогда в сверхрезонансной области возможны два варианта: 1)  $r > 0$ ; 2)  $r < 0$  и такое, что  $2rp(\omega_1 - \omega'') > 1$ . Условие экстремума  $dk/d\omega = 0$  в субрезонансном случае выполнено в одном из двух вариантов: 1)  $r < 0$ ; 2)  $r > 0$  и такое, что  $rp\omega_1^2 > 2$ , причем  $\omega' \in (\omega_2, \omega_3)$ , где  $0 < \omega_2 < \omega_3 < \omega_1$ , а  $\omega_2$  и  $\omega_3$  – положительные корни квадратного уравнения  $2rp\omega^2 - 2rp\omega_1\omega + 1 = 0$ . Тип экстремумов многовариантным образом зависит от параметров процесса. Например, в сверхрезонансной области при  $r < 0$  и малой величине  $(\omega'' - \omega_1)^2$  имеем  $k_{\max} = k(\omega = \omega'')$ . Знак производной  $dN/d\omega$  совпадает со знаком произведения:

$$\delta_j = \frac{da}{d\omega} \frac{dN}{dT_j},$$

поэтому при  $\delta_j < 0$  дисперсия нормальная, а при  $\delta_j > 0$  дисперсия аномальная. Следовательно, вид дисперсии мультипликативным образом определяется амплитудно-частотными свойствами резонатора и кинетическими свойствами подвижной границы. На рис. 3 представлены расчеты дисперсионных параметров (18) для положительного и отрицательного наклонов  $dN/d\tau$  кинетической кривой (17). Производная  $dk/d\omega$  – немонотонная функция частоты  $\omega$ , и характер расположения ее экстремумов зависит от знака  $dN/d\tau$ : это хорошо видно при сопоставлении левой и правой частей рис. 3.

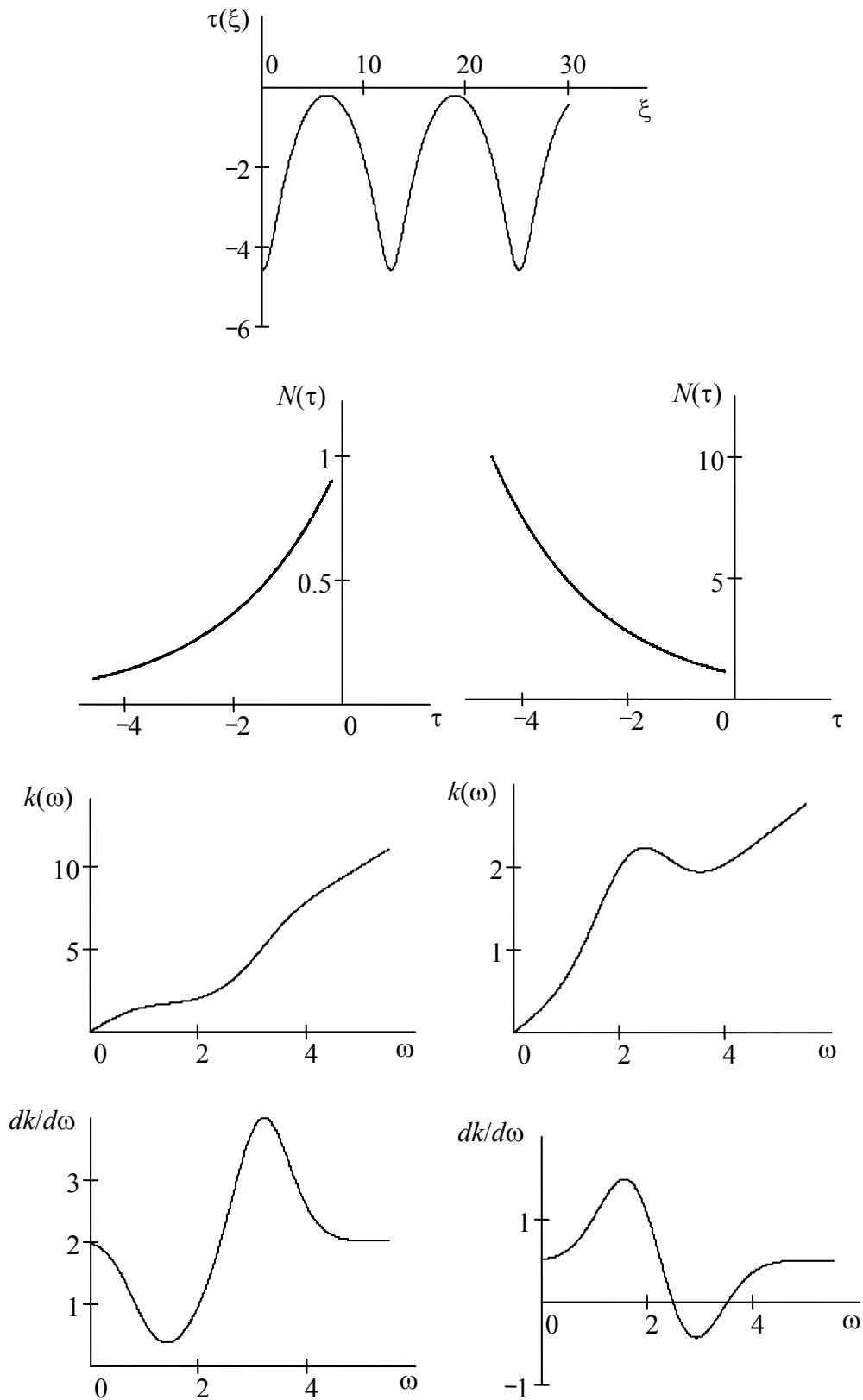


Рис. 3. Кинетические и дисперсионные свойства тепловой волны (17): левый столбец – положительный наклон  $dN/d\tau$  кинетической кривой при  $r = 0,5$ ,  $\mu = 1$ ,  $m = 0,5$ ,  $\bar{\alpha} = -0,2$ ,  $A_1 = 1$ ,  $a_1 = 0,5$ ,  $p = 1$ ,  $\omega_1 = 2$ ; правый столбец – отрицательный наклон  $dN/d\tau$  кинетической кривой при  $r = -0,5$ ,  $\mu = 1$ ,  $m = 0,5$ ,  $\bar{\alpha} = -0,2$ ,  $A_1 = 0,5$ ,  $a_1 = 0,5$ ,  $p = 1$ ,  $\omega_1 = 2$



**Стационарное состояние 2D системы.** Рассмотрим стационарный теплоперенос в плоской двухмерной области  $(x, y)$ , применяя уравнение (5). Возьмем класс температурных полей следующего вида:

$$\tau = \tau(\xi), \quad R_v = E^2 l_v(\tau), \quad E = \exp \delta x, \quad \xi = E \sin \delta y, \quad (19)$$

где  $\delta$  – произвольная отрицательная постоянная. Это дает возможность преобразовать (5) к автономному дифференциальному уравнению 2-го порядка:

$$d^2 \tau / d\xi^2 = -l_v / \delta^2 \equiv Q(\tau). \quad (20)$$

Значит, объемный источник энергии равен  $q_v(x, \tau) = -\lambda \delta^2 E^2 Q(\tau)$ , где  $\delta < 0$  – свободный параметр. В математическом отношении (20) аналогично уравнению (3). Отличие состоит в том, что теперь аргумент  $\xi$  имеет другой физический смысл. Ясно, что для уравнения (20) справедливы точные решения I, II, III [см. (8)–(10)].

Дадим пример физического истолкования представленных решений. Рассмотрим однокомпонентную стационарную 2D систему на плоскости  $(x, y)$  в двух областях. Область 1 – это правая полуплоскость  $x \geq 0$ ,  $\delta^{(1)} = \delta < 0$ . Область 2 – это левая полуплоскость  $x \leq 0$ ,  $\delta^{(2)} = -\delta > 0$ . Линию  $x = 0$  принимаем за неподвижный разрыв теплового поля, на котором действует внешний для данной среды источник энергии  $W$ . На таком разрыве должно быть выполнено динамическое условие совместности (7):

$$W = q_x^{(r)} - q_x^{(l)}.$$

Здесь  $q_x = -\lambda \partial T / \partial x$  – нормальная к разрыву составляющая вектора теплового потока; индексы  $r, l$  относятся к правой и левой сторонам разрыва. При  $x = 0$  температура и объемный источник энергии непрерывны; для одних и тех же значений  $|x|$  имеем:

$$T(x \leq 0; y) = T(x \geq 0; y), \quad q_v(x \leq 0; y) = q_v(x \geq 0; y), \quad -\infty < y < \infty.$$

На рис. 4 проиллюстрирована градиентная структура пространственно неоднородных тепловых полей, определяемых решениями (8)–(10) с учетом преобразования (19), (20). Здесь хорошо видна роль источника  $W$  в формировании двухмерного периодического по  $y$  температурного поля. Знак производной  $(\partial \tau / \partial x)_{x=0}$  существенно влияет на трехмерную конфигурацию  $\tau = \tau(x, y)$ ,  $q_v = q_v(x, y)$ .

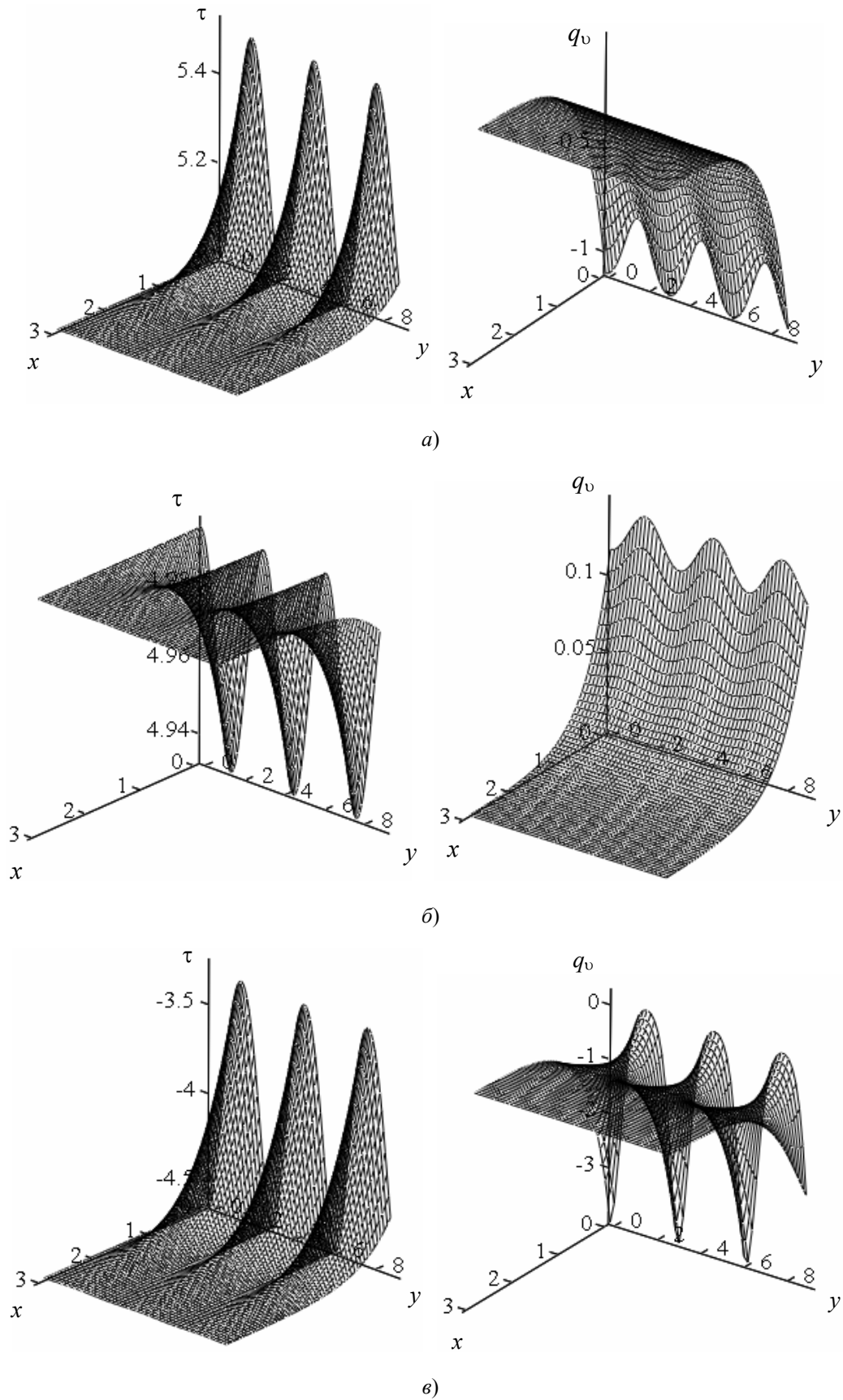


Рис. 4. Стационарное состояние 2D системы определяемое решением (19)–(20):  
 а–в – структуры (8)–(10) соответственно; а, б –  $m = 0,1$ ,  $\delta = -1$ ,  $\lambda = 1$ ;  
 в –  $\bar{\alpha} = -0,2$ ,  $m = 0,7$ ,  $A_1 = 0,5$ ,  $\delta = -1$ ,  $\lambda = 1$

### Заключение

Изучена дисперсия тепловых волн в одномерной системе «среда – источник энергии». Нелинейные свойства этих теплофизических систем обусловлены зависимостью объемных источников энергии от температуры. На левой границе области тепловой резонатор возбуждает колебания температуры, а скорость движения правой границы подчиняется кинетическому соотношению, содержащему нелинейную [тригонометрическую (12) либо экспоненциальную (17)] зависимость от температуры самой границы. Подробно изучены три примера (8)–(10) волнового теплопереноса в таких системах. Получены дисперсионные соотношения. Установлен характер влияния теплофизических параметров системы на вид дисперсии (нормальный либо аномальный). Показано, что при одном и том же кинетическом законе движения границы вид дисперсии определяется не только амплитудно-частотными свойствами резонатора: принципиальное значение имеет характер возбуждаемых колебаний. А именно: для установления вида дисперсии важно знать, являются эти колебания гладкими, непрерывными либо пилообразными, разрывными.

Для 2D систем «среда – источник энергии» представлены три примера пространственно-периодических стационарных состояний (19), содержащих разрыв, на котором действует внешний для данной среды источник энергии. Приведены результаты численных расчетов, демонстрирующие градиентные свойства построенных температурных полей.

Во второй части статьи будет дано аналитическое и численное описание тепловых структур, формирующихся в однокомпонентных и двухкомпонентных системах при воздействии пространственно-неоднородных источников энергии.

### Литература

1. Глазунов, Ю. Т. Вариационный принцип явлений взаимосвязанного тепло- и массопереноса, учитывающий конечную скорость распространения возмущений / Ю. Т. Глазунов // Инженер.-физ. журн. – 1981. – Т. 40, № 1. – С. 134–138.
2. Яворский, Н. И. Вариационный принцип для вязкой теплопроводной жидкости с релаксацией / Н. И. Яворский // Изв. АН СССР, МЖГ. – 1986. – № 3. – С. 3–10.
3. Никитенко, Н. И. Проблемы радиационной теории тепло- и массопереноса в твердых и жидких средах / Н. И. Никитенко // Инженер.-физ. журн. – 2000. – Т. 73, № 4. – С. 851–859.
4. Седов, Л. И. Механика сплошной среды. Т. 1 / Л. И. Седов. – М. : Наука, 1973. – 536 с.
5. Bassler, B. T. The solidification velocity of pure nickel / B. T. Bassler, W. H. Hofmeister, R. J. Bayuzik // Materials Science and Engineering. – 2003. – A. 342. – P. 80–92.
6. Herlach, D. M. Metastable Solids from Undercooled Melts / D. M. Herlach, P. Galenko, D. Holland-Moritz. – Oxford : Pergamon, 2007. – 448 p.
7. Mullis, A. M. The origins of spontaneous grain refinement in Deeply undercooled metallic melts / A. M. Mullis // Metals. – 2014. – Vol. 4. – P. 155–167.
8. Becker, M. Free dendritic tip growth velocities measured in Al–Ge / M. Becker, S. Klein, F. Kargl // Physical Review Materials. – 2018. – Vol. 2. – P. 073405-1–073405-6.
9. Аэро, Э. Л. Решения трехмерного уравнения синус-Гордон / Э. Л. Аэро, А. Н. Булыгин, Ю. В. Павлов // Теорет. и математ. физика. – 2009. – Т. 158, № 3. – С. 370–377.

10. Закирьянов, Ф. К. Управление динамикой кинка модифицированного уравнения синус-Гордона внешним воздействием с меняющимися параметрами / Ф. К. Закирьянов, Л. В. Якушевич // Компьютерные исследования и моделирование. – 2013. – Т. 5, № 5. – С. 821–834.
11. Алиев, А. Б. Существование и несуществование глобальных решений задачи Коши для систем Клейна-Гордона / А. Б. Алиев, А. А. Казимов // Докл. РАН. – 2014. – Т. 459, № 2. – С. 137–139.
12. Мамчуев, М. О. Необходимые нелокальные условия для диффузионно-волнового уравнения / М. О. Мамчуев // Вестн. СамГУ. Естественнонауч. серия. – 2014. – № 7 (118). – С. 45–59.
13. Дрегля, А. И. Идентификация динамики внешней силы при моделировании колебаний / А. И. Дрегля, Н. А. Сидоров // Изв. Иркут. гос. ун-та. Серия «Математика». – 2017. – Т. 19. – С. 105–112.
14. Шабловский, О. Н. Точные решения волновых уравнений с нелинейными источниками / О. Н. Шабловский // Фундаментальные физико-математические проблемы и моделирование технико-технологических систем. – Вып. 14. – М. : Янус-К, 2011. – С. 382–391.
15. Гурбатов, С. Н. Волны и структуры в нелинейных средах без дисперсии. Приложение к нелинейной акустике / С. Н. Гурбатов, О. В. Руденко, А. И. Саичев. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 496 с.
16. Шабловский, О. Н. Нелинейные свойства вынужденных колебаний локально-неравновесного теплового поля / О. Н. Шабловский, И. А. Концевой // Тепловые процессы в технике. – 2010. – Т. 2, № 6. – С. 267–274.

*Получено 27.01.2020 г.*