Turbo Expo 2005. Reno-Tahoe, Nevada, 6-9 Jun., 2005. – Paper №.GT2005-68879. **15.** *Rapley S.* The Application of CFD to model windage power loss from a spiral bevel gear / *S. Rapley, C. Eastwick, K. Simmons* // Proceedings of GT2007, ASME Turbo Expo 2007: Power for land, sea and air, Montreal, Canada, 2007. – Paper №GT2007-27879. **16.** *Ставицкий В.В.* Исследование аэродинамических потерь энергии в высокоскоростных прямозубых цилиндрических передачах. / *В.В. Ставицкий, П.Л. Носко*. // Вестник НТУ "ХПИ" – Харьков: ХПИ, 2010. – №27. – С.167-173.

Поступила (received) 11.03.2014

УДК 621.89

Г.П. ТАРИКОВ, д.т.н., профессор кафедры ДМ, П и СМ БелГУТ, Гомель, Беларусь;
В.Н. ПАРХОМЕНКО, старший преподаватель кафедры СХМ ГГТУ им. П.О. Сухого, Гомель, Беларусь;
В.В. КОМРАКОВ, к.т.н., доцент кафедры ИТ ГГТУ им. П.О. Сухого

РЕШЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ЗУБЧАТОЙ ПЕРЕДАЧЕ С ТОЧЕЧНЫМ КОНТАКТОМ

В работе рассмотрено решение пространственной контактной задачи с учетом температуры применительно к зубчатому зацеплению. Выведены формулы для определения контактных напряжений возникающих на площадке контакта. Приведен числовой пример решения задачи.

Ключевые слова: контактная задача, площадка контакта, шестерня, колесо, термоупругость, точечный контакт, контактное напряжение

Введение. Актуальность задачи. В процессе работы зубчатой передачи (системы шестерня-колесо) зубья нагреваются, что влияет на распределение контактных давлений по площадке контакта. Пространственная контактная задача с учетом тепловыделения применительно к деталям машин и механизмов до сих пор является актуальной [5]. Большое количество работ посвящено изучению данного вопроса [4]. В работах [2, 3] данная задача исследуется с учетом тепловых явлений, т.е. решается пространственная контактная задача термоупругости.

Цель работы. Целью работы является решение пространственной контактной задачи термоупругости применительно к зубчатой передаче с точечным контактом.

Постановка задачи. Рассматривается термоупругая задача о контакте зубьев (шестерни и колеса) с начальным контактом в точке. При этом задаются радиусами кривизны контактирующих тел в двух взаимно перпендикулярных плоскостях (рисунок 1).

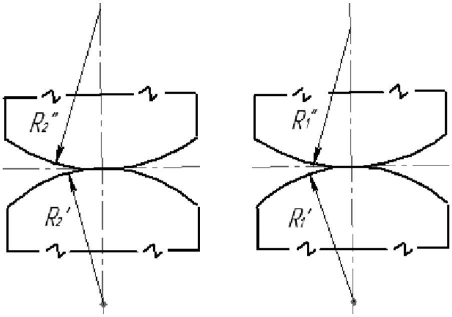

Рисунок 1 – Схема контакта поверхностей вращения с параллельными осями при внешнем соприкасании

В работе [1] получено двумерное интегральное уравнение контактной задачи термоупругости первого рода

$$\delta-\frac{x_1^2}{2R_1}-\frac{x_2^2}{2R_2}=\frac{(\vartheta_1+\vartheta_2)}{2\pi}\iint\frac{1}{R}p(y_1y_2)dy_1dy_2-\frac{(\eta_1+\mu_2)}{2\pi}\iint_{\Omega}\frac{1}{R}\theta_0(y_1y_2)dy_1dy_2,\ \text{при}\ (x_1,x_2)\in\Omega. \quad (1)$$

Введем обозначение

$$F(x_1,x_2)=(\vartheta_1+\vartheta_2)P(x_1,x_2)-(\eta_1+\eta_2)\theta_0(x_1,x_2). \qquad (2)$$

Тогда уравнение (1) примет такой вид:

$$\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\Omega}\frac{1}{R}F(y_1,y_2)dy_1dy_2=\delta-\frac{x_1^2}{2R_1}-\frac{x_2^2}{2R_2} \text{ при } (x_1,x_2)\in\Omega. \qquad (3)$$

Из теории потенциала известно, что решение уравнения (3) должно обращаться в нуль на границе элемента E.

$$\text{E}_0\text{: } \frac{x_1^2}{a^2}-\frac{x_2^2}{b^2}=1,$$

где a, b ($a\geq b$) – полуоси эллипса.

Решение уравнения (3), удовлетворяющее этому условию имеет вид:

$$F(x_1,x_2)=C\left(1-\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{x_2^2}{b^2}\right)^{1/2},\ (x_1,x_2)\in\Omega. \qquad (4)$$

Условие равновесия

$$P=\iint\limits_{\Omega}P(x_1,x_2)dx_1dx_2\ , \qquad (5)$$

где P – нормальная сила, прижимающая упругие тела.

На основании (2) и (4) имеем

$$C\left(1-\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{x_2^2}{b^2}\right)^{1/2}=(\vartheta_1+\vartheta_2)P(x_1,x_2)-(\eta_1+\eta_2)\theta_0(x_1,x_2).$$

Отсюда находим

$$P(x_1,x_2)=\frac{C}{\vartheta_1+\vartheta_2}\left(1-\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{x_2^2}{b^2}\right)^{1/2}+\frac{\eta_1+\eta_2}{\vartheta_1+\vartheta_2}\theta_0(x_1,x_2),\quad (x_1,x_2)\in\Omega. \qquad (6)$$

Подставляя (6) в условие равновесия (5), получаем

$$C=\frac{3}{2}\frac{1}{\pi ab}\left[(\vartheta_1+\vartheta_2)P-(\eta_1+\eta_2)D\right], \qquad (7)$$

где

$$D=\iint\limits_{\Omega}\theta_0(x_1,x_2)dx_1dx_2\ . \qquad (8)$$

На основании (6) и (7) окончательно имеем

$$P(x_1,x_2)=\frac{3}{2\pi ab}(P-\gamma D)\left(1-\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{x_2^2}{b^2}\right)^{1/2}+\gamma\theta_0(x_1,x_2) \text{ при } (x_1,x_2)\in\Omega. \qquad (9)$$

Формула (9) определяет распределение давления по эллиптической площади контакта. Здесь $\gamma=(\eta_1+\eta_2)/(\vartheta_1+\vartheta_2)$.

Исследуем влияние температуры на величину контактного давления и размеры области контакта. В основу исследования положим интегральное уравнение (1). Решение этого уравнения дается формулой (9). Для дальнейшего необходимо конкретизировать вид функции $\theta_0(x_1,x_2)$, входящей в формулу (9).

В работе [3] показано, что функцию $\theta_0(x_1,x_2)$ целесообразно принять в таком виде:

$$Q_0(x_1,x_2)=Q_0\left(1-\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{x_2^2}{b^2}\right) \text{ при } (x_1,x_2)\in\Omega, \qquad (10)$$

где Q_0 – температура в центре площадки контакта.

Подставляя (10) в (9), находим

$$P(x_1,x_2)=\frac{3}{2}\left(P_c-\frac{1}{2}\gamma\theta_0\right)\left(1-\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{x_2^2}{b^2}\right)^{1/2}+\gamma\theta_0\left(1-\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{x_2^2}{b^2}\right) \text{ при } (x_1,x_2)\in\Omega. \qquad (11)$$

Давление в центре области контакта

$$P_{\max}=\frac{3}{2}P_c+\frac{1}{4}\gamma\theta_0. \qquad (12)$$

Рассмотрим вопрос об определении размеров площадки контакта. Для этого подставим формулы (4), (7) в уравнение (3). После вычисления интеграла по области Ω приходим к соотношению

$$2\pi\left[\delta-\frac{x_1^2}{2R_1}-\frac{x_2^2}{2R_2}\right]=P_0\left(I_0-I_1x_1^2-I_2x_2^2\right), \qquad (13)$$

где

$$P_0=\frac{3(\upsilon_1+\upsilon_2)}{2\pi ab}(P-\gamma D). \qquad (14)$$

Из (13) находим

$$\delta=\frac{1}{2}P_0bK(e);\ \frac{1}{R_1}=\frac{P_0}{\pi}I_1;\ \frac{1}{R_{21}}=\frac{P_0}{\pi}I_2. \qquad (15)$$

Из этих формул следует, что

$$\frac{R_2}{R_1}=\frac{\text{K}(e)-\text{E}(e)}{\frac{1}{1-e^2}\text{E}(e)-\text{K}(e)}. \qquad (16)$$

Из формулы (16) можно определить эксцентриситет e эллипса E_0. Эта формула имеет точно такой же вид, как и при рассмотрении контактной задачи без учета температуры. Следовательно, температура зубьев не влияет на величину e.

Учитывая (14) и (15), получаем

$$\frac{1}{R_1}=\frac{3(\upsilon_1+\upsilon_2)}{2\pi e^2a^3}(P-\gamma D)\left[\text{K}(e)-\text{E}(e)\right]. \qquad (17)$$

Если в формулу (8) подставить выражение (7), то будем иметь

$$D=\frac{1}{2}2\pi ab\theta_0. \qquad (18)$$

Из (17) с учетом (18) получаем уравнение для определения параметра ε

$$\varepsilon^3+\omega\varepsilon^2=1\ , \qquad (19)$$

где

$$a=\varepsilon a_0\,;\ a=\frac{1}{R_1}=\left[(\upsilon_1+\upsilon_2)PR_1\right]^{1/3}\alpha_a\,;\ (20)\quad \omega=\frac{3}{4}(\eta_1+\eta_2)\frac{R_1\theta_0}{a_0e^2}\left(1-e^2\right)^{1/2}\left[\mathrm{K}(e)-\mathrm{E}(e)\right].\ (21)$$

Величину α_a можно найти по (13). Здесь a – большая полуось эллипса E_0.

Величину полуоси b можно найти по первой формуле (20), а полуось b из соотношения

$$b=a\left(1-e^2\right)^{1/2}.$$

Эксцентриситет граничного эллипса E_0 можно найти из (16). Распределение давления на площадке контакта дается формулой (11), а величину $P_{\max}$ можно определить по (12).

На рисунке 2 представлен график зависимости параметра ε от величины ω.

Из этого графика следует, что ε≤1. Таким образом величина a с учетом температуры меньше, чем без учета температуры.

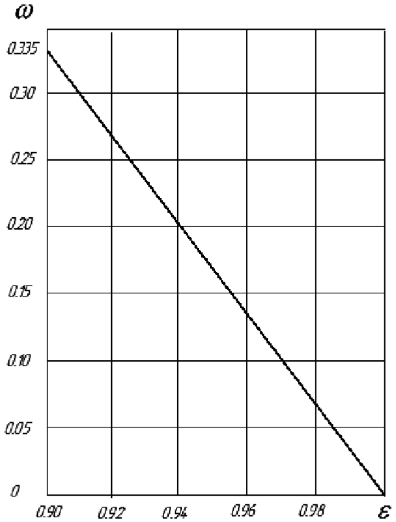

Рисунок 2 – График зависимости параметра ε от величины ω

Пример. Значения расчетных контактных напряжений одинаковы для шестерни и колеса. Поэтому расчеты на прочность выполняют для того из колес пары, у которого меньшее допускаемое напряжение (чаще это бывает колесо, а не шестерня). Полученные выше формулы используют для проверочного расчета, когда все необходимые размеры и другие параметры зубчатой передачи известны.

Принимаем:

$$\rho_1=30\text{ мм};\ \rho_2=60\text{ мм};\ R=70\text{ мм},$$

где ρ_1,ρ_2 – радиусы кривизны боковых профилей выпуклых зубьев; R – радиусы кривизны образующей боковой поверхности зуба шестерни,

$$E=2{,}1\cdot10^5\text{ МПа};\ \mu=8{,}1\cdot10^4\text{ МПа};\ \upsilon=0{,}28\,,$$

где E – модуль продольной упругости (модуль Юнга); μ – модуль сдвига; υ – коэффициент Пуассона.

Полагаем, что распределение температуры по площадке контакта подчиняется закону (20),

$$\alpha=1{,}3\cdot10^{-5}\,1/{}^\circ C\,;\ \theta_0=200^\circ C\,;\ \upsilon=0{,}28\,;$$

$$\eta_1+\eta_2=2(1+\upsilon)\alpha=3{,}33\cdot10^{-5}\,1/{}^\circ C\,;\ R_2/R_1=0{,}286\,.$$

По формуле (18) определяем эксцентриситет e^2=0,811. По второй формуле (20) находим величину a_0=3,43мм. Далее определяем безразмерный параметр ω по формуле (21)

$$\omega=\frac{3}{4}\cdot3{,}33\cdot10^{-5}\,\frac{70\cdot200}{3{,}43\cdot0{,}811}(1-0{,}811)^{1/2}(-1{,}171+2{,}281)=0{,}0607\,.$$

Решая кубическое уравнение (19), находим ε=0,982.

Большая полуось эллиптической площадки контакта

$$a=\varepsilon a_0=0{,}982\cdot3{,}43=3{,}37\text{ мм};$$

меньшая полуось

$$b=a\left(1-e^2\right)^{1/2}=3{,}37(1-0{,}811)^{1/2}=1{,}47\text{ мм}.$$

Наибольшее давление на площадке контакта находим по формуле (12)

$$P_{\max}^T=\frac{3}{2}\frac{P}{\pi ab}+\frac{1}{4}\theta_0\left(\frac{\eta_1+\eta_2}{\vartheta_1+\vartheta_2}\right)=\frac{3}{2}\frac{P}{\pi ab}+\frac{\theta_0\mu\alpha}{4}\left(\frac{1+\upsilon}{1-\upsilon}\right)=\frac{3\cdot50\cdot10^3}{2\pi\cdot3{,}37\cdot1{,}47\cdot10^{-6}}+$$

$$+\frac{200\cdot8{,}1\cdot10^{10}\cdot1{,}3\cdot10^{-5}}{4}\left(\frac{1+0{,}28}{1-0{,}28}\right)=\left(4{,}82\cdot10^9+9{,}36\cdot10^7\right)\text{Па}=4{,}91\cdot10^9\text{ Па}=4910\text{МПа}.$$

Давление в любой точке площадки контакта Ω_2 с учетом температуры определяется формулой (11).

Имеем

$$\frac{3}{2}\left(P_c-\frac{1}{2}\gamma\theta_0\right)=4{,}82\cdot10^9-3\cdot9{,}36\cdot10^7=4{,}53\cdot10^9\text{ Па}=4{,}53\cdot10^3\text{ МПа}.$$

Следовательно

$$P^T(x_1,x_2)=4536\left(1-\frac{x_1^2}{3{,}37^2}-\frac{x_2^2}{1{,}47^2}\right)^{1/2}+374\left(1-\frac{x_1^2}{3{,}37^2}-\frac{x_2^2}{1{,}47^2}\right)\text{ при }(x_1,x_2)\in\Omega_1\,.\ (22)$$

Здесь P^T – давление на площадке контакта с учетом температуры; x_1и x_2 в формуле (22) отсчитываются в мм. Давление $P^T(x_1,x_2)$ в (22) выражается в МПа.

Полагая в формуле (22) x_2=0, получим

$$P^T(x_1,0)=4536\left(1-\frac{x_1^2}{3{,}37^2}\right)^{1/2}+374\left(1-\frac{x_1^2}{3{,}37^2}\right),\ |x_1|\le3{,}37\text{ мм};$$

$$P^T(0,x_2)=4536\left(1-\frac{x_2^2}{1{,}47^2}\right)^{1/2}+374\left(1-\frac{x_2^2}{1{,}47^2}\right),\ |x_2|\le1{,}47\text{ мм}.$$

По этим формулам можно вычислять давление в точках, расположенных на осях координат. В этих формулах давление P^T выражается в МПа.

Выводы. Решена пространственная термоупругая контактная задача применительно к зубчатой передаче с первоначально точечным контактом. Получены формулы для определения контактных напряжений на площадке контакта. Дан числовой пример решения конкретной задачи.

Список литературы: **1.** *Тариков Г.П.* К решению контактной задачи термоупругости применительно к зубчатой передаче / *Г.П. Тариков, В.Н. Пархоменко* // Вестник ГГТУ им. П.О. Сухого. – 2013. – №4. – С.43-49. **2.** *Бородачев Н.М.* О решении пространственной температурной задачи теории упругости в перемещениях / *Н.М. Бородачев, В.В. Астанин* // Проблемы прочности. – 2005. – №3. – С. 86-95. **3.** *Бородачев Н.М.* Пространственная контактная задача с учетом тепловыделения при трении скольжения / *Н.М. Бородачев, Г.П. Тариков* // Трение и износ. – 2003. – Т.24. – №2. – С.153-160. **4.** *Бородачев Н.М.* О задаче Герца с учетом тепловыделения / *Н.М. Бородачев, Г.П. Тариков* // Доклады НАНБ. – 2003. – Т.47. – №2. – С.35-43. **5.** *Иванов М.Н.* Детали машин / *М.Н. Иванов.* – М.: Высшая школа, 1991. – 383с. **6.** *Лурье А.И.* Теория упругости / *А.И. Лурье.* – М. Наука, 1970. – 939с.

Поступила (received) 11.03.2014