



Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования  
«Гомельский государственный технический  
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Промышленная электроника»

**Н. И. Вяхирев, Ю. Е. Котова, О. М. Ростокينا**

## **МЕТОДЫ АНАЛИЗА И РАСЧЕТА ЭЛЕКТРОННЫХ СХЕМ**

### **УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ**

*Допущено Министерством образования  
Республики Беларусь в качестве учебного пособия  
для студентов учреждений высшего образования  
по специальности «Промышленная электроника»*

**Электронный аналог печатного издания**

**Гомель 2019**

УДК 621.38.061(075.8)  
ББК 32.88-018я73  
В99

Рецензенты: зав. каф. «Электротехника и электроника» Белорусского  
национального технического университета канд. техн. наук,  
доц. *Ю. В. Бладыко*;  
зав. каф. «Теоретические основы электротехники»  
Белорусского государственного университета информатики  
и радиоэлектроники канд. техн. наук, доц. *М. В. Давыдов*

**Вяхирев, Н. И.**

В99 Методы анализа и расчета электронных схем : учеб. пособие / Н. И. Вяхирев,  
Ю. Е. Котова, О. М. Ростокина ; М-во образования Респ. Беларусь, Гомел. гос. техн. ун-т  
им. П. О. Сухого. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2019. – 187 с. : ил.– Систем. требо-  
вания: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ;  
Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: <https://elib.gstu.by>. – Загл.  
с титул. экрана.

ISBN 978-985-535-419-3.

Рассмотрены современные методы анализа и расчета электронных схем непрерывного и  
дискретного времени, пассивные и активные схемы в частотной и временной областях.

Для студентов специальности 1-36 04 02 «Промышленная электроника» дневной и заочной  
форм обучения.

УДК 621.38.061(075.8)  
ББК 32.88-018я73

ISBN 978-985-535-419-3

© Вяхирев Н. И., Котова Ю. Е.,  
Ростокина О. М., 2019  
© Учреждение образования «Гомельский  
государственный технический университет  
имени П. О. Сухого», 2019

## Предисловие

Цель преподавания дисциплины «Методы анализа и расчета электронных схем» – научить студентов самостоятельно проводить анализ и расчет электронных схем, оценивать основные электрические характеристики электронных устройств.

В процессе изучения дисциплины студент должен освоить основные методы расчета и экспериментального исследования пассивных и активных электронных схем.

Учебное пособие условно можно разделить на несколько частей.

Главы 1–3 посвящены методам расчета электрических характеристик электронных схем: операторному методу, матричному методу и методу направленных графов. Знание методов анализа и расчета электронных схем является базисом для изучения многих дисциплин специальности «Промышленная электроника», таких как «Теория автоматического управления», «Системы автоматизированного проектирования устройств промышленной электроники» и др.

В главах 4–8 большое внимание уделено анализу линейных пассивных и активных цепей, а также цепей с распределенными параметрами. Рассмотрены частотно-избирательные активные цепи и частотно-избирательные пассивные фильтры.

Глава 9 посвящена анализу линейных цепей дискретного времени. Здесь рассматривается использование для расчета характеристик дискретных схем  $Z$ -преобразования, дискретного преобразования Фурье.

Эти знания способствуют успешной практической работе инженера в области радиоэлектроники.

# Глава 1. Классификация электронных цепей

Для лучшего усвоения и понимания студентами материала по анализу и расчету электронных схем в начале учебного пособия рассматриваются компоненты, из которых эти схемы состоят, а именно:  $R$ -,  $C$ -,  $L$ -элементы, идеальные источники тока и напряжения.

## 1.1. Элементы электронных цепей

Двухзажимными элементами электронных цепей являются: резистор, конденсатор, катушка индуктивности и идеальные независимые источники напряжения и тока (рис. 1.1).

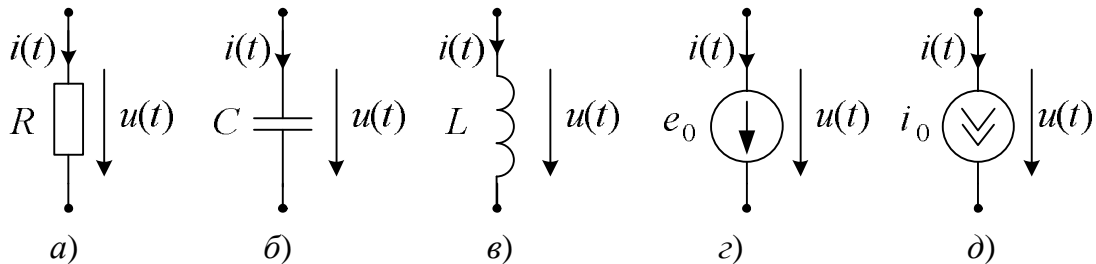


Рис. 1.1. Двухзажимные элементы электронных цепей:  
а – резистор; б – конденсатор; в – катушка индуктивности;  
з – идеальный независимый источник напряжения;  
д – идеальный независимый источник тока

*Резистор ( $R$ ):* напряжение на его зажимах и ток через него связаны между собой законом Ома:  $u(t) = Ri(t)$ .

*Конденсатор ( $C$ ):* напряжение на зажимах конденсатора и ток через него связаны между собой выражениями:

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt}; \quad u(t) = u(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) \cdot dt.$$

*Катушка индуктивности ( $L$ ):* напряжение на зажимах катушки индуктивности и ток через него связаны между собой выражениями:

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt}; \quad i(t) = i(0) + \frac{1}{L} \int_0^t u(t) \cdot dt.$$

*Идеальный независимый источник напряжения:* напряжение на зажимах идеального источника напряжения равняется ЭДС источника  $u(t) = e_0$  и не зависит от тока  $i(t)$ .

*Идеальный независимый источник тока:* ток, протекающий через идеальный источник тока, равняется току источника  $i(t) = i_0$  и не зависит от напряжения на зажимах  $u(t)$ .

Элементы электронных цепей могут иметь более двух выводов. Из идеальных многополюсных элементов к наиболее важным относятся идеальный управляемый (зависимый) источник. Всего существует четыре таких элемента. Наиболее часто при анализе электронных схем используются два элемента (рис. 1.2):

– источник напряжения, управляемый напряжением (рис. 1.2, а): напряжение на выходе элемента пропорционально напряжению на входе  $u_2(t) = \alpha u_1(t)$  и не зависит от тока на выходе элемента  $i_2(t)$  ( $\alpha$  – управляемый параметр);

– источник напряжения, управляемый током (рис. 1.2, б): напряжение на выходе элемента пропорционально току на входе  $u_2(t) = \gamma i_1(t)$  и не зависит от тока на выходе элемента  $i_2(t)$  ( $\gamma$  – управляемый параметр, [Ом]).

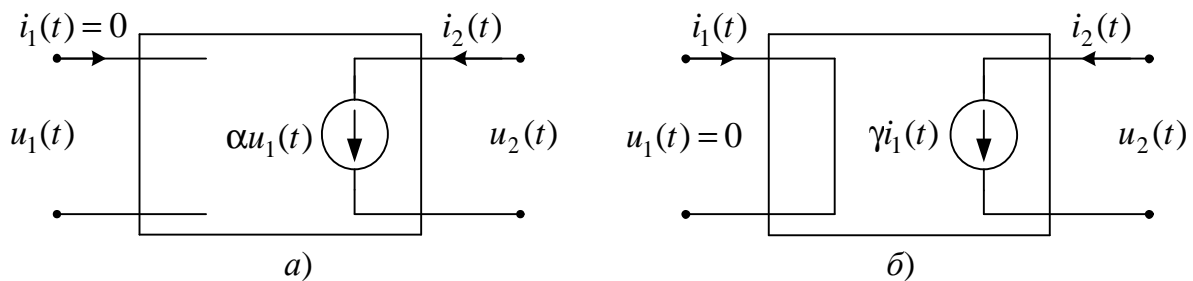


Рис. 1.2. Управляемые источники: а – напряжения; б – тока

*Идеальные управляемые источники* – это, как правило, результат идеализации усилительных элементов, таких как транзисторы, электронные лампы и операционные усилители в их линейной области.

Элементы, соединенные между собой в некоторую совокупность, электромагнитные процессы в которой можно описать с помощью характеристик элементов, образуют электронную цепь.

## 1.2. Классификация электронных цепей

Электронные цепи можно классифицировать по множеству признаков. Рассмотрим некоторые из них.

1. Электронные цепи делятся на активные и пассивные. Активные цепи содержат источники электрической энергии, пассивные – не содержат источников электрической энергии.

2. Электронные цепи делятся на линейные и нелинейные. Цепь является линейной, если входящие в нее элементы не зависят от внешней силы (напряжения, тока), действующей на цепь. Линейные цепи подчиняются принципу суперпозиции. Обозначим:  $A[s(t)]$  – оператор определения реакции цепи на воздействие;  $s(t)$ ,  $s_1(t)$ ,  $s_2(t)$  и так далее – сигналы, действующие на цепь;  $K_1$ ,  $K_2$  – постоянные. Математически принцип суперпозиции записывается следующим образом:

$$A[K_1 s_1(t) + K_2 s_2(t) + \mathbf{K}] = K_1 A[s_1(t)] + K_2 A[s_2(t)] + \mathbf{K} .$$

К нелинейным цепям принцип суперпозиции неприменим.

3. Цепи делятся на цепи с постоянными параметрами и цепи с переменными параметрами. Цепи с переменными параметрами имеют один или несколько параметров, изменяющихся во времени, но не зависящих от входного сигнала. Для линейных цепей с переменными параметрами справедлив принцип суперпозиции.

4. Электронные цепи могут быть разделены на цепи с сосредоточенными параметрами и цепи с распределенными параметрами. Цепи с сосредоточенными параметрами – это цепи, размеры элементов которых много меньше длины волны электрических колебаний в цепи (это цепи, содержащие индуктивности, емкости, сопротивления). Цепи с распределенными параметрами – это цепи, размеры элементов которых соизмеримы с длиной волны электрических колебаний в цепи (это цепи, содержащие линии передачи, волноводы, излучающие структуры).

5. Электронные цепи могут быть разделены по числу входных и выходных зажимов на двухполюсники, четырехполюсники и многополюсники.

## Глава 2. Операторный метод анализа электронных схем

При анализе электронных схем операторным методом используют прямое и обратное преобразование Лапласа для перехода от функции времени (так называемого оригинала) к ее изображению.

### 2.1. Прямое и обратное преобразования Лапласа

Оригиналу  $f(t)$  ставится в соответствие изображение  $F(p)$ :

$$f(t) \text{ } \mathfrak{L} \text{ } F(p),$$

где  $p = \sigma + j\omega$  – комплексная величина.

Прямое преобразование Лапласа:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt = L\{f(t)\}. \quad (2.1)$$

Решение этого уравнения выполняется обратным преобразованием Лапласа:

$$f(t) = L^{-1}\{F(p)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(p) e^{pt} dp, \quad (2.2)$$

где  $\sigma$  – любое положительное число. Следует отметить, что для реальных сигналов интегралы (2.1) и (2.2) всегда существуют.

#### Примеры

1. Функция Хевисайда (функция единичного скачка) (рис. 2.1):

$$f(t) = 1(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \leq 0; \\ 1, & \text{если } t > 0. \end{cases}$$

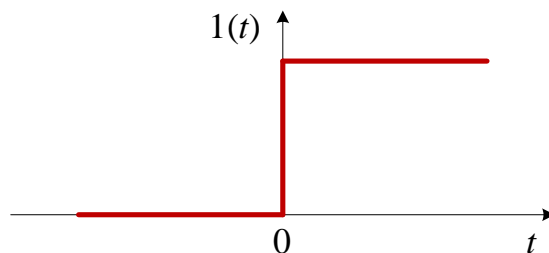


Рис. 2.1. Функция единичного скачка

Вычисление прямого преобразования Лапласа дает:

$$F(p) = \int_0^{\infty} 1(t) \cdot e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = \frac{e^{-pt}}{-p} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p}.$$

2.  $f(t) = e^{at}$ ,  $0 \leq a < \sigma$ .

Вычисление интеграла (2.1) приводит к результату:

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{at} e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-(p-a)t} dt = \frac{1}{p-a}.$$

Данное выражение справедливо для любых, в том числе и комплексных  $a$ .

## 2.2. Теоремы преобразования Лапласа

Рассмотрим основные теоремы преобразования Лапласа.

1. *Линейность преобразования.*

Считаем:

$$f(t) \mathfrak{L} F(p); g(t) \mathfrak{L} G(p),$$

тогда

$$af(t) + bg(t) \mathfrak{L} aF(p) + bG(p),$$

где  $a, b$  – константы, не зависящие ни от  $t$ , ни от  $p$ .

**Пример.** Если  $f(t) = \cos \omega t = \frac{1}{2} e^{j\omega t} + \frac{1}{2} e^{-j\omega t}$ , то

$$F(p) = \frac{1}{2} \frac{1}{p - j\omega} + \frac{1}{2} \frac{1}{p + j\omega} = \frac{p}{\omega^2 + p^2}.$$

2. *Теорема запаздывания.*

Если  $f(t) \mathfrak{L} F(p)$ , то  $f(t - \tau) \mathfrak{L} F(p) \cdot e^{-p\tau}$ .



**Пример.** Определим преобразование Лапласа функции, изображенной на рис. 2.2.

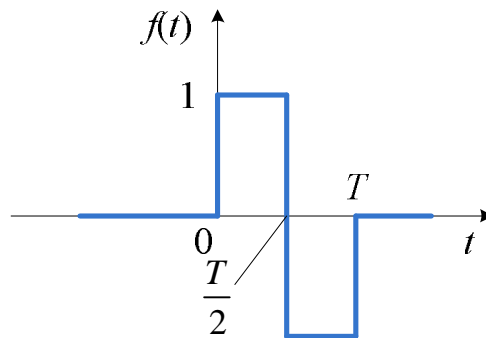


Рис. 2.2. Одиночный двухполярный импульс

Эту функцию можно представить в виде суперпозиции функций единичного скачка:  $f(t) = 1(t) - 2 \cdot 1\left(t - \frac{T}{2}\right) + 1(t - T)$ .

Используя принцип суперпозиции и теорему запаздывания, получим:

$$F(p) = \frac{1}{p} - 2 \frac{1}{p} e^{-\frac{pT}{2}} + \frac{1}{p} e^{-pT} = \frac{1 - 2e^{-\frac{pT}{2}} + e^{-pT}}{p}.$$

3. *Теорема о свертке двух функций.* Функции  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  имеют изображения соответственно  $F_1(p)$  и  $F_2(p)$ . Сверткой двух функций называется интеграл (знак «\*» обозначает свертку):

$$\int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t - \tau) \cdot d\tau = f_1(t) * f_2(t).$$

Теорема о свертке утверждает, что свертке двух функций соответствует преобразование Лапласа, равное произведению преобразований Лапласа этих функций:

$$f_1(t) * f_2(t) \text{ } \mathfrak{L} \text{ } F_1(p) \cdot F_2(p).$$

**Пример.** Найдем оригинал функции с изображением  $F(p) = \frac{1}{p(1 + pT)}$ .

Для этого представим это изображение в виде произведения двух сомножителей:  $F(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{T \left( p + \frac{1}{T} \right)}$ . Первый сомножитель –

это изображение функции единичного скачка, второй – изображение экспоненциальной функции. Применяя теорему о свертке, получим:

$$f(t) = \int_0^t 1(\tau) \frac{1}{T} e^{-\frac{(t-\tau)}{T}} d\tau = e^{-\frac{t}{T}} \cdot e^{\frac{\tau}{T}} \Big|_{\tau=0}^t = 1 - e^{-\frac{t}{T}}.$$

4. Теоремы о начальном и конечном значениях.

$$f(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p); \quad f(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p).$$

Предыдущий пример:

$$f(0) = 0; \quad \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = 0; \quad f(\infty) = 1; \quad \lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = 1.$$

5. Преобразование производной и интеграла от функции  $f(t)$ .

Как и прежде, считаем, что  $f(t) \mathfrak{L} F(p)$ . Тогда:

$$L\{f'(t)\} = pF(p) - f(0); \quad L\left\{\int_0^t f(t) \cdot dt\right\} = \frac{F(p)}{p}.$$

**Пример**

$$L\{\cos \omega t\} = \frac{p}{\omega^2 + p^2}; \quad \sin \omega t = -\frac{1}{\omega} \cdot \frac{d}{dt} \cos \omega t;$$

$$L\{\sin \omega t\} = -\frac{1}{\omega} \left( p \frac{p}{\omega^2 + p^2} - 1 \right) = \frac{\omega}{\omega^2 + p^2}.$$

### 2.3. Вычисление обратного преобразования Лапласа

Первый и самый универсальный способ вычисления обратного преобразования Лапласа – это его вычисление с помощью интеграла, которое выполняется на основе теории вычетов:

$$f(t) = L^{-1}\{F(p)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(p) \cdot e^{pt} dp = \sum_{k=1}^n \text{res}[F(p) \cdot e^{pt}] \Big|_{p=p_k},$$

где  $p_k$  – полюс, который обращает функцию  $F(p)$  в бесконечность,  $n$  – число полюсов.

Обозначим  $r$  – кратность полюсов. Когда  $r = 1$  – полюс кратности 1 или простой полюс.

### Примеры

1.  $F(p) = \frac{1}{1 + pT}$  – простой полюс в точке  $p_1 = -\frac{1}{T}$ .

2.  $F(p) = \frac{1}{p(1 + pT)^2}$  – простой полюс в точке  $p_1 = 0$ ,  $r = 1$  и полюс кратности 2 в точке  $p_2 = -\frac{1}{T}$ ,  $r = 2$ .

люс кратности 2 в точке  $p_2 = -\frac{1}{T}$ ,  $r = 2$ .

Для полюса произвольной кратности ( $r \geq 1$ ) вычет в точке  $p_k$  вычисляется по формуле

$$\operatorname{res}[F(p) \cdot e^{pt}] \Big|_{p=p_k} = \frac{1}{(r-1)!} \cdot \frac{d^{r-1}}{dp^{r-1}} \left[ (p - p_k)^r F(p) \cdot e^{pt} \right] \Big|_{p=p_k}. \quad (2.3)$$

В случае простого полюса ( $r = 1$ ) изображение представляется в виде отношения двух полиномов:  $F(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$  и для вычисления вычета часто используется следующая формула:

$$\operatorname{res}[F(p) \cdot e^{pt}] \Big|_{p=p_k} = \left[ \frac{A(p) \cdot e^{pt}}{\frac{d}{dp} B(p)} \right] \Big|_{p=p_k}. \quad (2.4)$$

### Примеры

1.  $F(p) = \frac{1}{p(1 + pT)} = \frac{1}{p + p^2T}$ .  $p_1 = 0$ ,  $p_2 = -\frac{1}{T}$ .

Оба полюса простые. Применение формулы (2.4) дает:

$$\begin{aligned} f(t) &= \operatorname{res}[F(p) \cdot e^{pt}] \Big|_{p=0} + \operatorname{res}[F(p) \cdot e^{pt}] \Big|_{p=-\frac{1}{T}} = \\ &= \frac{1e^{pt}}{1 + 2pT} \Big|_{p=0} + \frac{1e^{pt}}{1 + 2pT} \Big|_{p=-\frac{1}{T}} = 1 - e^{-\frac{t}{T}}. \end{aligned}$$

$$2. F(p) = \frac{p+d}{(p+a)(p+b)} = \frac{p+d}{p^2 + p(a+b) + ab}, \quad a \neq b \neq d.$$

Все корни этого изображения простые и равны:  $p_1 = -a$ ,  $p_2 = -b$ . Используя (2.4), получим:

$$\begin{aligned} f(t) &= \operatorname{res}F(p) \cdot e^{pt} \Big|_{p=-a} + \operatorname{res}F(p) \cdot e^{pt} \Big|_{p=-b} = \\ &= \frac{-a+d}{-2a+a+b} e^{-at} + \frac{-b+d}{-2b+a+b} e^{-bt} = \frac{d-a}{b-a} e^{-at} + \frac{d-b}{a-b} e^{-bt}. \end{aligned}$$

Второй способ вычисления обратного преобразования – метод разложения на элементарные дроби. Изображение, оригинал которого нужно найти, представляется в виде разложения на сумму слагаемых, для каждого из которых известно прямое преобразование Лапласа.

Найдем таким способом оригинал изображения первого предыдущего примера. Для этого представим изображение следующим образом:

$$F(p) = \frac{1}{p(1+pT)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{1+pT},$$

где  $A$  и  $B$  – постоянные, которые необходимо определить.

Приведем правую часть к общему знаменателю:

$$\frac{A + pTA + pB}{p(1+pT)} = \frac{1}{p(1+pT)}.$$

Получаем два равенства для  $A$  и  $B$ :  $A = 1$ ,  $TA + B = 0$ . Отсюда получаем:  $A = 1$ ,  $B = -T$ . Тогда

$$F(p) = \frac{1}{p} - \frac{T}{1+pT} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p + \frac{1}{T}}.$$

Используя результаты первых двух примеров из параграфа 2.1, получим:

$$f(t) = L^{-1}[F(p)] = 1 - e^{-\frac{t}{T}}, \quad t \geq 0.$$

## 2.4. Представление элементов цепей в операторном виде

Все элементы цепей при расчете операторным методом должны быть представлены в виде своих изображений в соответствии с преобразованием Лапласа:

### 1. Резистор ( $R$ ).

Используем закон Ома:  $u(t) = Ri(t)$ . Берем преобразование Лапласа от левой и правой частей:  $U(p) = RI(p)$ . Это закон Ома в операторном виде. То есть резистор в операторном виде представляется резистором с таким же сопротивлением  $R$ .

### 2. Конденсатор ( $C$ ).

Зависимость тока, протекающего через конденсатор, и напряжения на нем описывается выражением  $i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$ .

Используя теорему о преобразовании Лапласа производной функции, получим:

$$I(p) = C(pU(p) - u(0)) = CpU(p) - Cu(0);$$

$$U(p) = \frac{1}{Cp} I(p) + \frac{u(0)}{p};$$

$$Z_c(p) = \frac{1}{Cp}; \quad u(0) = U_0.$$

Конденсатор заменяется на последовательно соединенные емкостное операторное сопротивление  $\frac{1}{pC}$  и источник напряжения  $\frac{U_0}{p}$ , где  $U_0$  – напряжение на конденсаторе в начальный момент времени (рис. 2.3, а).

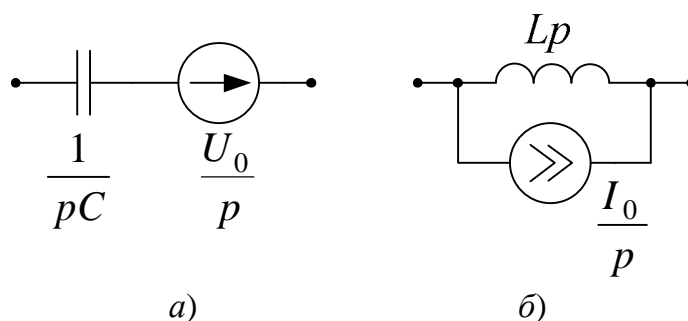


Рис. 2.3. Представление конденсатора (а) и катушки индуктивности (б) в операторном виде

### 3. Катушка индуктивности ( $L$ ).

Зависимость напряжения на катушке индуктивности от тока в ней описывается зависимостью:  $u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$ . Аналогично предыдущему получим:

$$U(p) = L(pI(p) - i(0)) = LpI(p) - Li(0);$$

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z_L(p)} + \frac{i(0)}{p};$$

$$Z_L(p) = Lp; \quad i(0) = I_0.$$

Индуктивность в операторном виде заменяется на параллельно соединенные индуктивное сопротивление  $Lp$  и источник тока  $\frac{I_0}{p}$  (рис. 2.3, б).

**Пример.** В момент времени  $t = 0$  конденсатор емкостью  $C$ , заряженный до напряжения  $U_0$ , замыкается на сопротивление  $R$ . Необходимо определить напряжение на конденсаторе после замыкания ключа.

Прежде всего необходимо нарисовать расчетную схему в операторном виде (рис. 2.4).

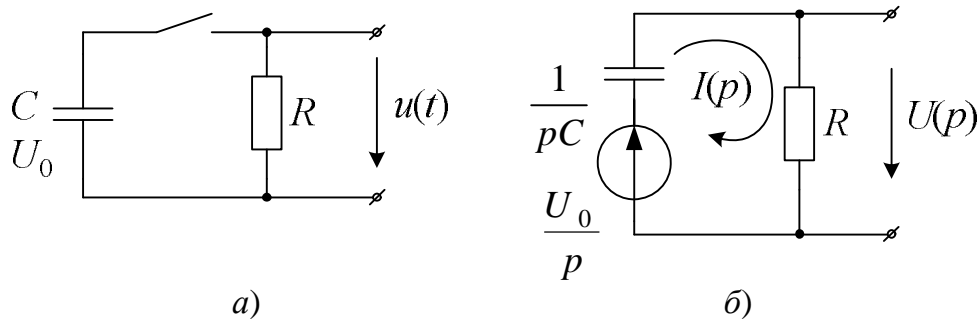


Рис. 2.4. Заряженный конденсатор, замкнутый на сопротивление  $R$  (а), и расчетная схема в операторном виде (б)

Ток (его преобразование Лапласа) в цепи после замыкания ключа равен:

$$I(p) = \frac{\frac{U_0}{p}}{R + \frac{1}{pC}}.$$

Напряжение на конденсаторе равно напряжению на сопротивлении:

$$U(p) = RI(p) = \frac{RU_0}{p\left(R + \frac{1}{pC}\right)} = \frac{U_0R}{pR + \frac{1}{C}} = \frac{U_0}{p + \frac{1}{T}},$$

где  $T = RC$ .

Вычисляя обратное преобразование Лапласа, получим:

$$u(t) = U_0 e^{\frac{-t}{T}}.$$

То есть напряжение на конденсаторе убывает по экспоненте от  $U_0$  при  $t = 0$  до нуля при  $t = \infty$  (рис. 2.5).

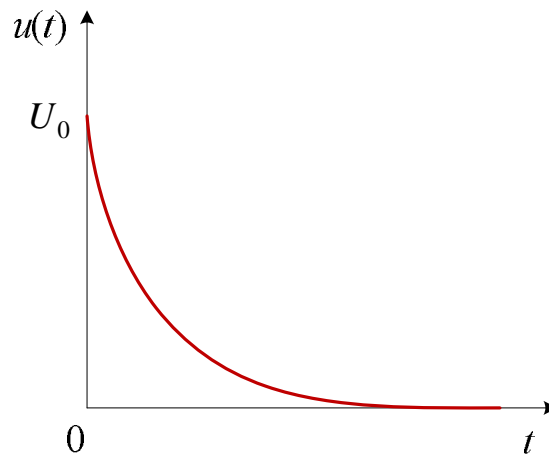


Рис. 2.5. Временная зависимость напряжения на конденсаторе после замыкания ключа в схеме на рис. 2.4, а

## 2.5. Передаточная функция цепи

Многие электронные цепи имеют два входных и два выходных зажима (рис. 2.6). На входные зажимы подается входной сигнал, с выходных зажимов снимается выходной сигнал. Передаточной функцией цепи называется отношение преобразования Лапласа выходной величины  $X_2(p)$  к преобразованию Лапласа входной величины  $X_1(p)$  при нулевых начальных условиях:

$$W(p) = \frac{X_2(p)}{X_1(p)}.$$

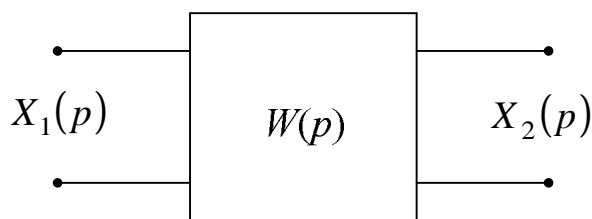


Рис. 2.6. Электронная цепь с входными и выходными зажимами

Передаточная функция позволяет компактно записать информацию о динамических свойствах электронной схемы.

Большинство задач расчета электронной схемы сводится к определению реакции на выходе схемы, не содержащей начального запаса энергии. Если передаточная функция определена, то, умножив ее на преобразование Лапласа входного сигнала, получим преобразование Лапласа реакции цепи на этот входной сигнал:

$$X_2(p) = W(p) \cdot X_1(p).$$

Для завершения расчета необходимо найти оригинал этого изображения:

$$x_2(t) = L^{-1}\{X_2(p)\}.$$

## 2.6. Комплексный коэффициент передачи цепи

Если при постоянных или периодических возмущениях реакции цепи на эти возмущения также соответственно постоянны или меняются по периодическому закону, то режим в цепи называют установившимся. В других случаях говорят о переходных (нестационарных) режимах.

Комплексный коэффициент передачи позволяет определить, как в установившемся режиме проходят синусоидальные сигналы через различные цепи.

Комплексный коэффициент передачи цепи  $W(j\omega)$  получается формальной заменой в передаточной функции  $W(p)$  оператора  $p$  на мнимую величину  $j\omega$ , где  $\omega$  – угловая частота подаваемого на вход цепи синусоидального сигнала (рис. 2.7).



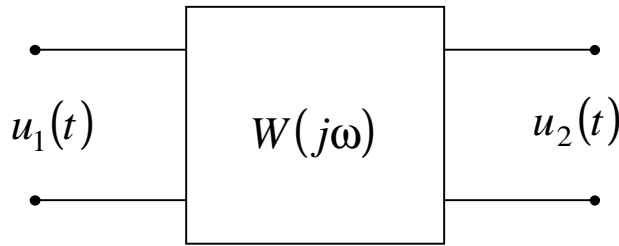


Рис. 2.7. К расчету комплексного коэффициента передачи

Обозначим:

$$u_1(t) = U_{1m} \sin \omega t; \quad u_2(t) = U_{2m} \sin(\omega t + \psi),$$

где  $U_{1m}$  и  $U_{2m}$  – амплитуды соответственно сигнала на входе и сигнала на выходе цепи;  $\psi$  – начальная фаза сигнала на выходе цепи.

Используя комплексный коэффициент передачи цепи  $W(j\omega)$  и метод комплексных амплитуд, получим:

$$\overset{\cdot}{U}_{1m} = U_{1m};$$

$$\overset{\cdot}{U}_{2m} = U_{2m} \cdot e^{j\psi} = \overset{\cdot}{U}_{1m} W(j\omega) = \overset{\cdot}{U}_{1m} |W(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)},$$

где точка над величиной обозначает комплексную амплитуду величины;  $|W(j\omega)|$  – модуль комплексного коэффициента передачи цепи и  $\varphi(\omega)$  – его аргумент.

Комплексный коэффициент передачи может быть представлен через модуль и аргумент, а также через вещественную и мнимую части:

$$W(j\omega) = |W(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)} = \operatorname{Re} W(j\omega) + j \operatorname{Im} W(j\omega),$$

которые связаны между собой следующим образом:

$$|W(j\omega)| = \sqrt{(\operatorname{Re} W(j\omega))^2 + (\operatorname{Im} W(j\omega))^2};$$

$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} W(j\omega)}{\operatorname{Re} W(j\omega)}.$$

Последнее выражение для аргумента справедливо только в том случае, если  $\operatorname{Re} W(j\omega) > 0$ .

Модуль комплексного коэффициента передачи цепи  $|W(j\omega)|$  называется *амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ)*, а аргумент  $\varphi(\omega)$  – *фазочастотной характеристикой цепи (ФЧХ)*.

Часто применяются логарифмические частотные характеристики. *Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика (ЛАЧХ)* – это зависимость модуля комплексного коэффициента передачи в логарифмическом масштабе  $L(\omega) = 20 \lg |W(j\omega)|$  от частоты в логарифмическом масштабе  $\lg \omega$  (рис. 2.8). *Логарифмическая фазочастотная характеристика (ЛФЧХ)* – это зависимость аргумента комплексного коэффициента передачи  $\arg W(j\omega)$  от частоты в логарифмическом масштабе  $\lg \omega$ .

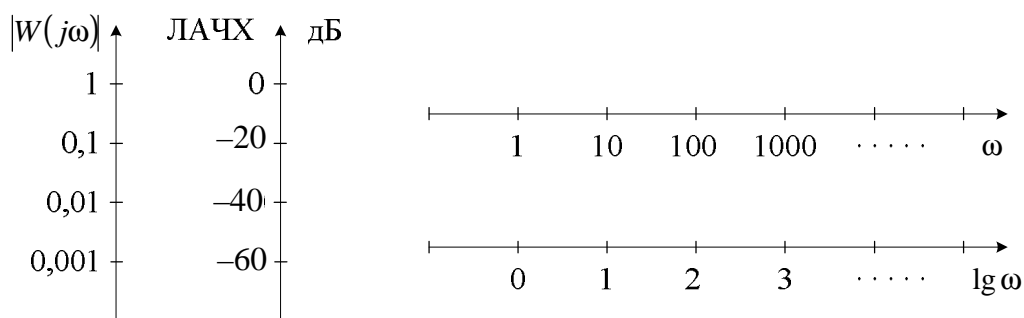


Рис. 2.8. Линейные и логарифмические масштабы модуля комплексного коэффициента передачи и частоты

Логарифмический масштаб показывает больший диапазон изменения изображаемой на графике функции.

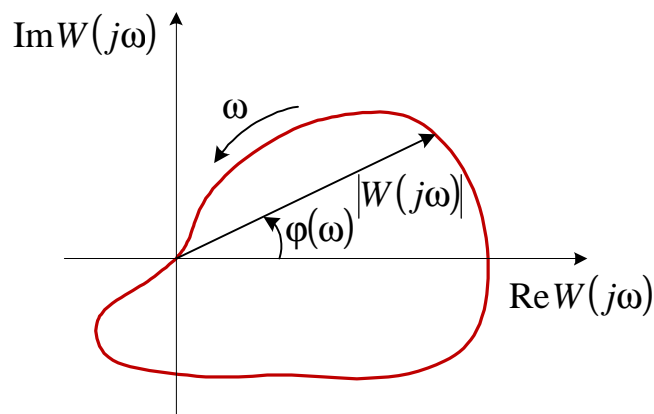


Рис. 2.9. Амплитудно-фазовая характеристика цепи

*Амплитудно-фазовая характеристика (АФХ) цепи* – это годограф конца вектора комплексного коэффициента передачи при изменении частоты от нуля до бесконечности, построенный на комплексной плоскости (рис. 2.9).

## 2.7. Основные характеристики цепи

### 2.7.1. Ступенчатая и импульсная функции

Ступенчатой (рис. 2.10, а) называется функция вида:

$$1(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \leq 0; \\ 1, & \text{если } t > 0. \end{cases}$$

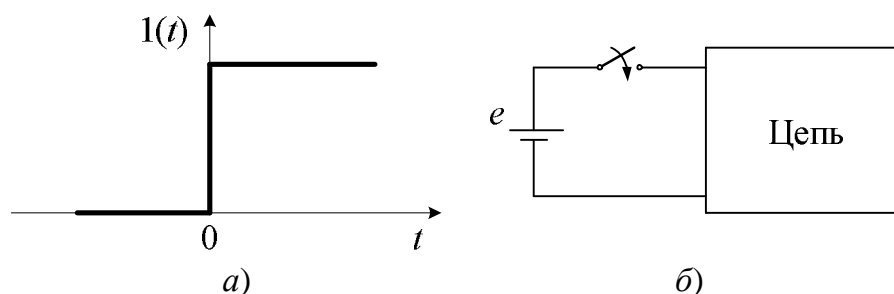


Рис. 2.10. Ступенчатая функция (а) и ее получение в электронной цепи (б)

Это функция единичного скачка. Напряжение такого вида получается при включении в электронной схеме ключа в момент времени  $t = 0$  (рис. 2.10, б).

Изображение Лапласа ступенчатой функции равно:

$$1(t) \text{ } \mathfrak{L} \frac{1}{p}. \quad (2.5)$$

Если функция включается в момент  $t = \tau$  (рис. 2.11), то

$$1(t - \tau) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leq \tau; \\ 1 & \text{при } t > \tau. \end{cases}$$

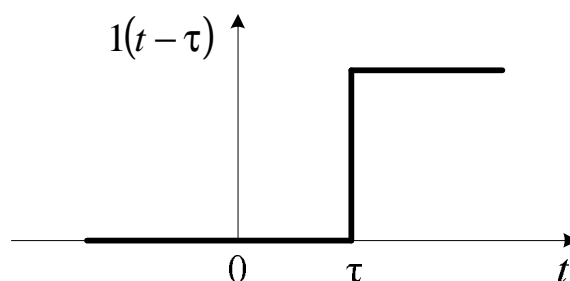


Рис. 2.11. Ступенчатая функция, включенная в момент времени  $t = \tau$

Изображение Лапласа такой функции в соответствии с теоремой запаздывания отличается от (2.5) на экспоненциальный множитель:

$$1(t - \tau) \mathfrak{L} \frac{e^{-p\tau}}{p}.$$

Та или иная ограниченная функция времени, умноженная на ступенчатую функцию  $1(t - \tau)$ , очевидно, тождественно обращается в нуль при  $t \leq \tau$  и сохраняет без изменения свои значения при  $t > \tau$ .

*Импульсной функцией* ( $\delta$ -*функцией*) называется импульс с площадью  $S = 1$ , шириной  $\Delta t \rightarrow 0$  и высотой  $h \rightarrow \infty$  (рис. 2.12).

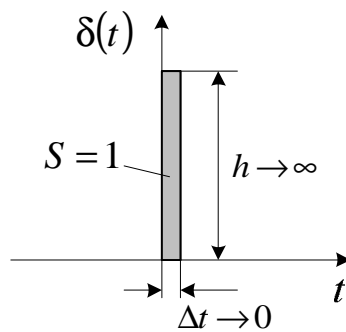


Рис. 2.12. Импульсная функция ( $\delta$ -функция)

Свойства  $\delta$ -функции:

$$1) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot dt = 1;$$

$$2) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau) f(t) \cdot dt = f(\tau);$$

$$3) \delta(t) = \frac{d}{dt} 1(t), \quad 1(t) = \int_{-\infty}^t \delta(t') \cdot dt';$$

$$4) \delta(t) \mathfrak{L} 1.$$

### 2.7.2. Переходная и импульсная характеристики цепи

*Переходная характеристика*  $h(t)$  – это реакция цепи на действие единичного ступенчатого напряжения или тока (рис. 2.13).

*Импульсная характеристика*  $g(t)$  – это реакция цепи на воздействие, имеющее вид единичного импульса ( $\delta$ -функции).

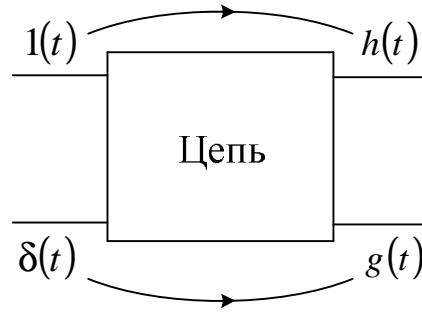


Рис. 2.13. Получение переходной и импульсной характеристики цепи

Так как  $\delta(t) = \frac{d1(t)}{dt}$ , то  $g(t) = \frac{dh(t)}{dt}$  и  $g(t) = 0$  при  $t < 0$ .

И наоборот,  $h(t) = \int_0^t g(t)dt$ .

Передаточная функция четырехполюсника  $W(p)$  и переходная и импульсная характеристики связаны между собой преобразованием Лапласа:

$$\left\{ \begin{array}{l} h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{W(p)}{p} \right\}; \\ W(p) = pL\{h(t)\} \end{array} \right. \text{ и } \left\{ \begin{array}{l} g(t) = L^{-1}[W(p)]; \\ W(p) = L[g(t)]. \end{array} \right.$$

Вспомним теоремы о начальном и конечном значениях преобразования Лапласа. Если  $F(p) \mathfrak{L} f(t)$ , то:

$$\lim_{p \rightarrow 0} [pF(p)] = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t);$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} [pF(p)] = \lim_{t \rightarrow 0} f(t).$$

Применяя их к переходной характеристике, получим:

$$\lim_{p \rightarrow 0} [W(p)] = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t);$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} [W(p)] = \lim_{t \rightarrow 0} h(t).$$

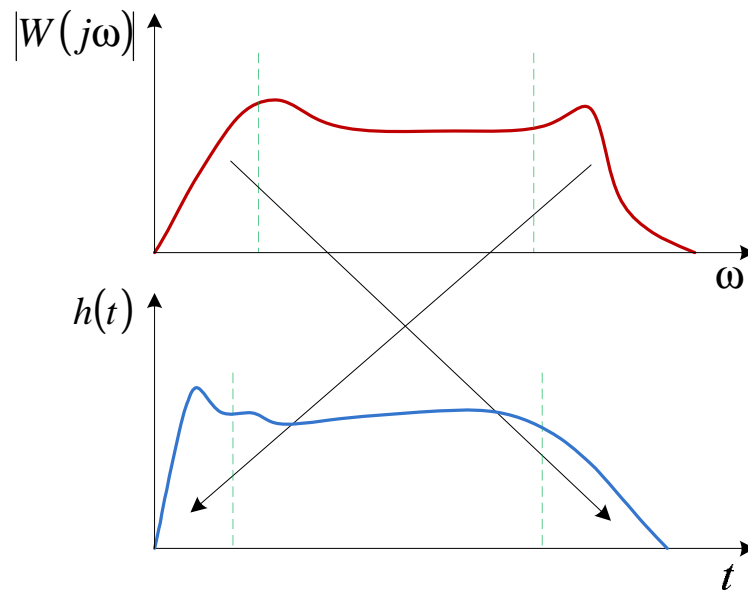


Рис. 2.14. Взаимосвязь амплитудно-частотной и переходной характеристик

Это позволяет утверждать, что существует связь между частотными характеристиками цепи и временными процессами (рис. 2.14). Амплитудно-частотная характеристика цепи на больших частотах ведет себя аналогично переходной характеристике при малых значениях времени. И наоборот, на малых частотах поведение АЧХ цепи сходно с поведением переходной характеристики для больших значений времени.

# Глава 3. Теория направленных графов

## 3.1. Направленные графы прохождения сигналов

*Направленный граф* – это графическое изображение зависимости между несколькими переменными. Если эта зависимость линейна, то граф изображает систему линейных алгебраических уравнений. Результат решения этих уравнений легко получается непосредственно из рассмотрения структуры соответствующего им направленного графа.

Элементами направленного графа являются узлы, изображающие переменные уравнений, и направленные ветви, соединяющие узлы линиями со стрелками, которым приписывается величина передачи. Сигнал проходит только в направлении стрелок и при этом умножается на величину передачи ветви. Переменная, соответствующая узлу, равна сумме входящих в этот узел сигналов. Переменная передается от одного узла к другому по всем ветвям, выходящим из этого узла.

Уравнению  $y = ax$  соответствует граф, изображенный на рис. 3.1.

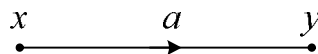


Рис. 3.1. Граф уравнения  $y = ax$

Узел  $x$  рассматривается как независимая переменная (ветвь выходит из него), а узел  $y$  – как зависимая переменная (ветвь входит в него),  $a$  – передача ветви.

Если зависимость между переменными более сложная, то граф становится более сложным. Так, для системы уравнений

$$\begin{cases} i_1 = y_{11}u_1 + y_{12}u_2; \\ i_2 = y_{21}u_1 + y_{22}u_2 \end{cases} \quad (3.1)$$

направленный граф будет иметь вид, представленный на рис. 3.2.

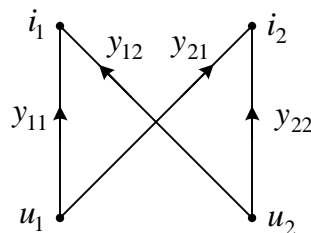


Рис. 3.2. Направленный граф системы уравнений (3.1)





Этой системе уравнений соответствует направленный граф, изображенный на рис. 3.3. Здесь для конкретности число узлов схемы взято равным трем.

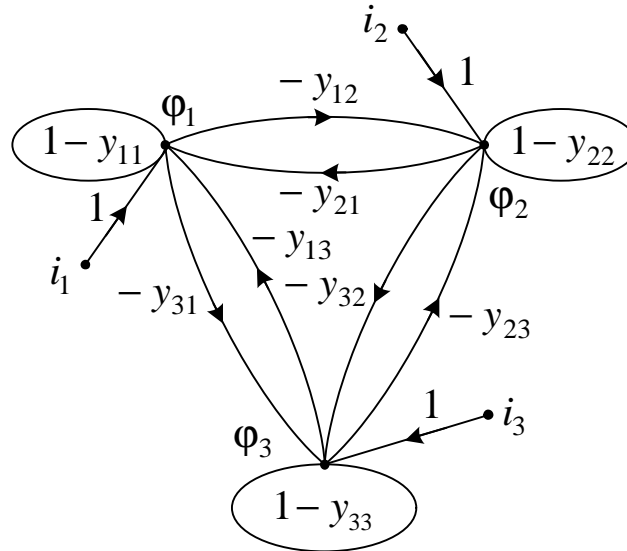


Рис. 3.3. Граф системы уравнений (3.2)

Граф проводимостей может быть построен без записи уравнений. Потенциалам всех узлов (кроме базисного) и узловым токам ставятся в соответствие узлы  $\phi_k$  и  $i_k$  направленного графа. Каждую пару узлов графа  $\phi_i$  и  $\phi_k$  соединяют ветвью, направленной от узла  $\phi_k$  к узлу  $\phi_i$ , имеющей передачу  $-y_{ik}$ . В каждом узле  $\phi_i$  есть собственный контур с передачей  $(1 - y_{ii})$ . Передача  $y_{ik}$  равна проводимости ветви схемы между узлами  $i$  и  $k$ ,  $y_{ii}$  равна сумме проводимостей ветвей, сходящихся в  $i$ -м узле схемы.

**Пример.** Нарисуем граф проводимостей для симметричной Т-образной фазосдвигающей цепи (рис. 3.4, а). Если по условию задачи токами не интересуемся, то узлы  $i_k$  с исходящими из них ветвями можно не рисовать. В этом случае граф будет иметь вид, изображенный на рис. 3.4, б. На рисунке обозначено:  $y_C = pC$ ,  $y_{C_1} = pC_1$ .

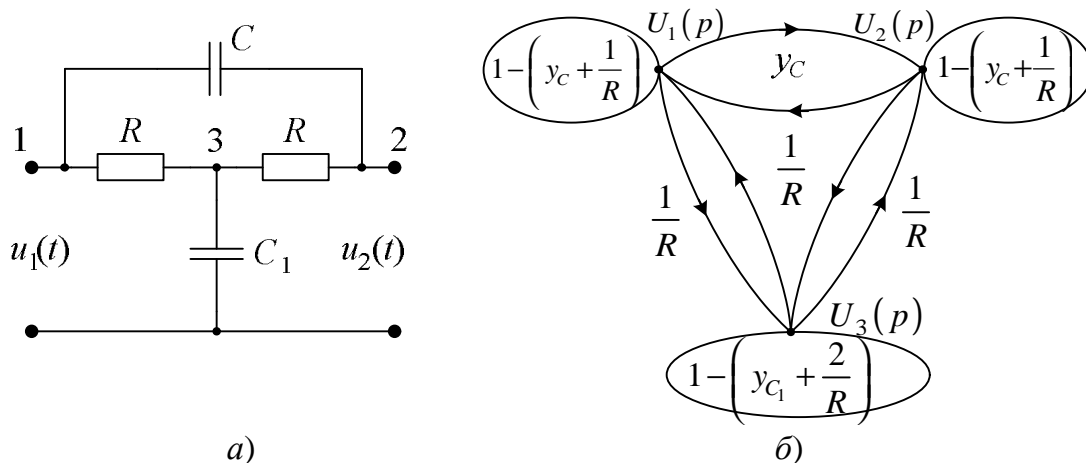


Рис. 3.4. Т-образная фазосдвигающая цепь (а) и ее граф (б)  $U_1(p)$

### 3.3. Решение направленного графа прохождения сигналов

Узел, в который не входит ни одна ветвь, называется *источником*. Источник изображает независимую переменную. Узел, из которого не выходит ни одна ветвь, называется *стоком*. Сток представляет зависимую выходную переменную. Узел, имеющий как входящие, так и выходящие ветви, называют *смешанным*.

Путь графа представляет собой непрерывную последовательность однонаправленных ветвей, проходящих через каждый узел не более одного раза.

Контур представляет собой замкнутый путь, оканчивающийся в исходном узле. Контур, содержащий только один узел, называют *собственным*.

Передачи пути и контура равны произведениям передач входящих в путь или контур ветвей.

Контур и путь или два контура называются *несоприкасающимися*, если они не имеют общих узлов.

Решение графа заключается в определении функции передачи, связывающей переменные выходного узла и источника. Его можно осуществить двумя способами: последовательным упрощением структуры графа и с помощью формулы Мэсона.

#### 3.3.1. Преобразование графов

Упрощение структуры графа основано на применении эквивалентных преобразований, позволяющих уменьшить число ветвей или

узлов. На рис. 3.5 показаны простейшие преобразования параллельного и последовательного соединения ветвей и устранение узла, образованного соединением нескольких входящих и выходящих ветвей.

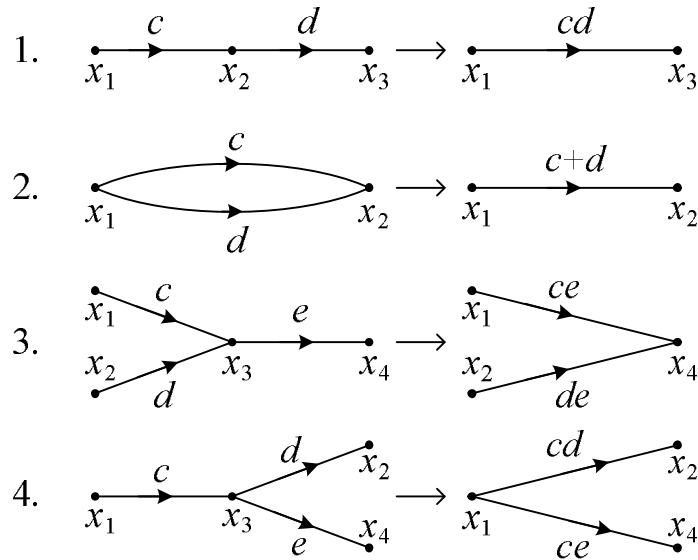


Рис. 3.5. Тожественные преобразования направленных графов

**При устранении узла необходимо сохранить передачи между оставшимися узлами.**

Эти преобразования графа следуют непосредственно из соответствующих ему уравнений.

Устранение узла и контура приводит к появлению собственного контура. Влияние собственного контура с передачей  $m$  можно учесть умножением передач входящих в него ветвей на  $\frac{1}{1-m}$  (рис. 3.6).

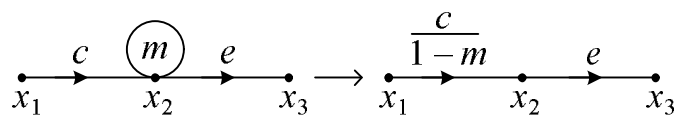


Рис. 3.6. Устранение собственного контура в графе

Передача ветвей, выходящих из узла с собственным контуром, не изменяется. Исключение собственного контура выполняется всегда, как бы ни решался граф.

Рассмотрим еще одно преобразование – инверсию, которая изменяет топологические свойства графа и часто облегчает упрощение его структуры.

Инверсия ветви или пути графа состоит в изменении направления ветвей, входящих в путь, и соответствует изменению выбора зависимых переменных, относительно которых решаются соответствующие графу уравнения (рис. 3.7).

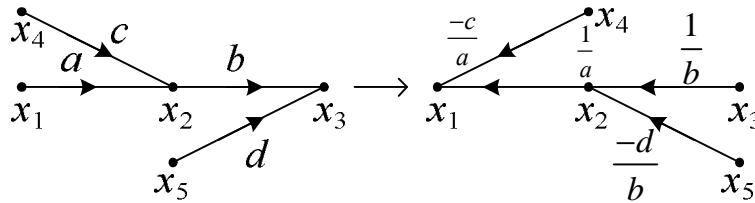


Рис. 3.7. Инверсия пути графа

Изменение направления (инверсия) ветвей  $x_1 - x_2 - x_3$  означает выбор узлов  $x_1$  и  $x_2$  в качестве новых зависимых переменных.

Перестроение графа при инверсии пути состоит в следующем:

1) передачи инвертируемых ветвей обратны передачам исходных ветвей;

2) вместе с переносом конца инвертируемой ветви из узла  $i$  в узел  $j$  туда же переносятся концы всех ветвей, входивших ранее в узел  $i$ ; передачи этих ветвей должны быть обратны по знаку и разделены на передачу инвертируемой ветви; начала рассматриваемых ветвей остаются в прежних узлах.

Инверсия применима только к тем ветвям или путям, которые начинаются в источнике (но не в смешанном узле).

Порядок упрощения структуры графа подсказывается видом самого графа.

Главная ценность решения с помощью преобразований состоит в том, что в процессе решения удастся выделять отдельные существенные части, в частности, цепи обратной связи, и выявлять наиболее важные связи в системе, а также влияние интересующих параметров на передачу системы.

**Пример.** Преобразуем граф и определим функцию передачи  $W = \frac{U_2(p)}{U_1(p)}$  симметричной Т-образной фазосдвигающей цепи (рис. 3.4).

Прежде всего, исключим собственные контуры (рис. 3.8, а). На данном рисунке обозначено:

$$g = \frac{1}{R}; \quad T = \frac{g}{2g + y_{C1}}; \quad K = \frac{y_C}{g + y_C}; \quad B = \frac{g}{g + y_C}.$$

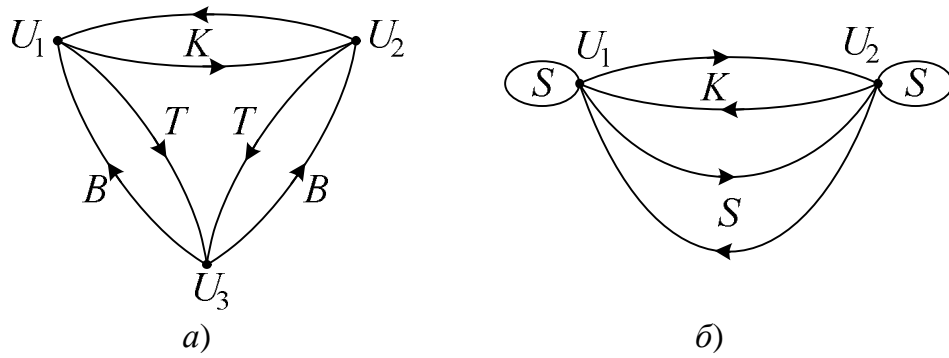


Рис. 3.8. Преобразование направленного графа Т-образной фазосдвигающей цепи

Теперь исключим из графа узел  $u_3$ . Полученный граф изображен на рис. 3.8, б, где использовано обозначение:

$$S = TB = \frac{g^2}{(g + y_C)(2g + y_{C_1})}.$$

Отсюда можем найти функцию передачи фазосдвигающей цепи:

$$\begin{aligned} W = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} &= \frac{K + S}{1 - S} = \frac{\frac{y_C}{g + y_C} + \frac{g^2}{(g + y_C)(2g + y_{C_1})}}{1 - \frac{g^2}{(g + y_C)(2g + y_{C_1})}} = \\ &= \frac{y_C(2g + y_{C_1}) + g^2}{(g + y_C)(2g + y_{C_1}) - g^2}. \end{aligned}$$

### 3.3.2. Решение графа по формуле Мэсона

Формула Мэсона позволяет записать функцию передачи из рассмотрения контуров и путей графа. Формула для функции передачи имеет вид:

$$W = \frac{1}{D} \sum_k P_k D_k, \quad (3.3)$$

где  $D$  – определитель графа;  $P_k$  – передача  $k$ -го пути;  $D_k$  – определитель части графа, остающейся после исключения контуров, соприкасающихся с  $k$ -м путем.

Определитель графа вычисляется по формуле

$$D = 1 - \sum_i L_i + \sum_{i,j} L_i L_j - \sum_{i,j,k} L_i L_j L_k + \mathbf{L}, \quad (3.4)$$

где  $L_i$  – передача  $i$ -го контура;  $L_i L_j$  – произведения передач комбинаций по два несоприкасающихся контура;  $L_i L_j L_k$  – произведения передач комбинаций по три несоприкасающихся контура.

Вычисление определителя  $D_k$  производится также по формуле (3.4). Как видно, значение определителя зависит только от наличия контуров. При отсутствии в графе контуров  $D = 1$ .

**Пример.** Определим функцию передачи графа, изображенного на рис. 3.9.

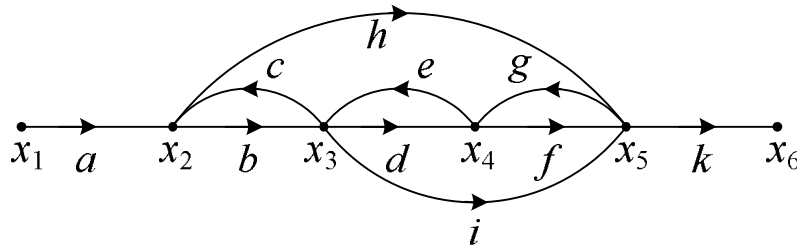


Рис. 3.9. Направленный граф с контурами

Граф имеет пять контуров с передачами:

$$L_1 = bc; L_2 = ed; L_3 = gf; L_4 = gei; L_5 = ghec.$$

Из них не соприкасаются только два контура:  $L_1$  и  $L_3$ . К выходному узлу  $x_6$  имеются три пути:

$$P_1 = abdfk; P_2 = abik; P_3 = ahk.$$

Первые два соприкасаются со всеми контурами, а третий путь не соприкасается с контуром  $L_2$ . В соответствии с формулами (3.3) и (3.4) записываем:

$$\begin{aligned} W = \frac{x_6}{x_1} &= \frac{P_1 + P_2 + P_3(1 - L_2)}{1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5) + L_1 L_3} = \\ &= \frac{abdfk + abik + ahk(1 - ed)}{1 - (bc + ed + gf + gei + ghec) + bcgf}. \end{aligned}$$

# Глава 4. Линейные пассивные четырехполюсники

## 4.1. Матрицы и графы четырехполюсников

Четырехполюсником называется любая комбинация электронных элементов, имеющая четыре доступных вывода (рис. 4.1). Два из них являются входными, два – выходными.

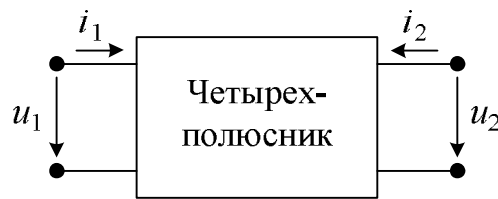


Рис. 4.1. Четырехполюсник

Четырехполюсник полностью характеризуется соотношениями между напряжениями и токами на его входе и выходе. Вид этих соотношений зависит от выбора исходных величин. Далее будем считать величины  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $I_1$  и  $I_2$  преобразованиями Лапласа временных зависимостей напряжений и токов на входах и выходах четырехполюсника:

$$U_1 = L[u_1(t)]; U_2 = L[u_2(t)]; I_1 = L[i_1]; I_2 = L[i_2].$$

Если исходными являются напряжения  $u_1$  и  $u_2$ , то токи  $i_1$  и  $i_2$  определяются из уравнений:

$$\begin{cases} I_1 = y_{11}U_1 + y_{12}U_2; \\ I_2 = y_{21}U_1 + y_{22}U_2. \end{cases} \quad (4.1)$$

Параметрами уравнений являются входные и передаточные проводимости короткого замыкания на входе и выходе:

$$y_{11} = \left. \frac{I_1}{U_1} \right|_{U_2=0}; \quad y_{22} = \left. \frac{I_2}{U_2} \right|_{U_1=0}; \quad y_{12} = \left. \frac{I_1}{U_2} \right|_{U_1=0}; \quad y_{21} = \left. \frac{I_2}{U_1} \right|_{U_2=0}.$$

Коэффициенты  $y_{ij}$  образуют матрицу проводимостей четырехполюсника:

$$[Y] = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}.$$

Если за независимые величины принять токи на входных и выходных выводах четырехполюсника, то получится следующая система уравнений:

$$\begin{cases} U_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2; \\ U_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2, \end{cases} \quad (4.2)$$

где элементы  $z_{ij}$  образуют матрицу сопротивлений четырехполюсника:

$$[Z] = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix}, \text{ равную обратной матрице проводимостей } [Z] = [Y]^{-1}.$$

Элементы  $z_{ij}$  являются входными и передаточными сопротивлениями холостого хода на входе и выходе четырехполюсника:

$$z_{11} = \left. \frac{U_1}{I_1} \right|_{I_2=0}; \quad z_{22} = \left. \frac{U_2}{I_2} \right|_{I_1=0}; \quad z_{12} = \left. \frac{U_1}{I_2} \right|_{I_1=0}; \quad z_{21} = \left. \frac{U_2}{I_1} \right|_{I_2=0}.$$

При анализе четырехполюсников также используется матрица передачи  $[A]$  и смешанные матрицы  $[H]$  и  $[G]$ .

$$\text{Матрица передачи } [A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ связывает напряжение и ток}$$

на входе четырехполюсника с напряжением и током на выходе:

$$\begin{cases} U_1 = a_{11}U_2 - a_{12}I_2; \\ I_1 = a_{21}U_2 - a_{22}I_2. \end{cases} \quad (4.3)$$

Коэффициент  $a_{11}$  является величиной, обратной передаточной функции по напряжению от входа на выход при холостом ходе последнего,  $a_{22}$  – величиной, обратной передаточной функции по току от входа на выход при коротком замыкании на выходе:

$$a_{11} = \left. \frac{U_1}{U_2} \right|_{I_2=0}; \quad a_{22} = \left. \frac{I_1}{-I_2} \right|_{U_2=0}.$$

Зависимость между напряжением на входе четырехполюсника  $u_1$  и током на выходе  $i_2$ , а также напряжением на выходе  $u_2$  и током на входе  $i_1$  выражается через матрицы  $[H]$  и  $[G]$ :

$$\begin{cases} U_1 = h_{11}I_1 + h_{12}U_2; \\ I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}U_2 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} I_1 = g_{11}U_1 + g_{12}I_2; \\ U_2 = g_{21}U_1 + g_{22}I_2. \end{cases} \quad (4.4)$$



Элементы этих матриц легко определяются из режимов холостого хода и короткого замыкания аналогично элементам предыдущих матриц.

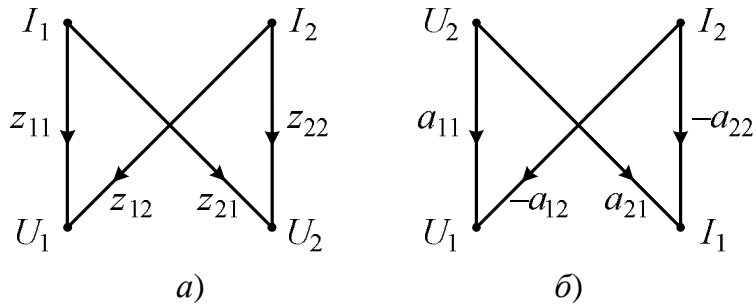


Рис. 4.2. Направленные графы: *a* – уравнения (4.2);  
*б* – уравнения (4.3)

Уравнениям четырехполюсника (4.1)–(4.4) соответствуют направленные графы, узлами которых являются напряжения и токи на входах, а передачи ветвей равны матричным коэффициентам. Например, на рис. 4.2 приведены графы, соответствующие уравнениям (4.2) и (4.3).

## 4.2. Соединения четырехполюсников

Различают следующие виды соединений четырехполюсников:

- 1) параллельное;
- 2) последовательное;
- 3) каскадное;
- 4) последовательно-параллельное;
- 5) параллельно-последовательное.

На рис. 4.3, *a* показано параллельное соединение входов двух четырехполюсников, а на рис. 4.3, *б* – последовательное.

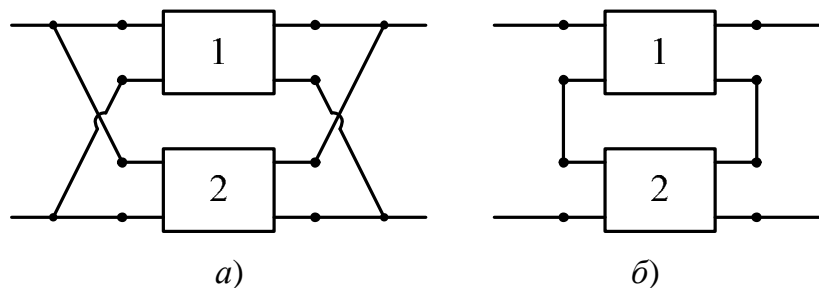


Рис. 4.3. Соединение входов двух четырехполюсников:  
*a* – параллельное; *б* – последовательное

При параллельном соединении входные и выходные выводы четырехполюсников соединяются параллельно. Матрица проводимостей составного четырехполюсника равна сумме матриц проводимостей четырехполюсников, из которых он состоит:  $[Y_{\Sigma}] = [Y_1] + [Y_2]$ .

При последовательном соединении четырехполюсников, когда их входные и выходные выводы соединяются последовательно, матрица сопротивлений составного четырехполюсника равна сумме матриц сопротивлений составляющих его четырехполюсников:  $[Z_{\Sigma}] = [Z_1] + [Z_2]$ .

Если входные выводы четырехполюсников соединяются последовательно, а выходные – параллельно, то такое соединение называется *последовательно-параллельным*. При параллельном соединении входных выводов четырехполюсников и последовательном выходных соединении называется *параллельно-последовательным*. В первом случае матрица  $[H]$  составного четырехполюсника равна сумме матриц  $[H]$  составляющих его четырехполюсников:  $[H_{\Sigma}] = [H_1] + [H_2]$ , а во втором – необходимо суммировать матрицы  $[G]$  составляющих четырехполюсников, чтобы получить матрицу  $[G]$  составного:  $[G_{\Sigma}] = [G_1] + [G_2]$ .

При каскадном соединении выходные выводы одного четырехполюсника соединяются с входными выводами другого (рис. 4.4). При этом матрица передачи составного четырехполюсника равна произведению матриц передачи составляющих его четырехполюсников:  $[A_{\Sigma}] = [A_1] \cdot [A_2]$ .

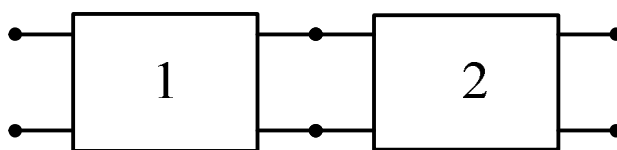


Рис. 4.4. Каскадное соединение двух четырехполюсников

Следует иметь в виду, что указанные формулы нахождения матриц сложных четырехполюсников справедливы при выполнении условий регулярности их соединений. *Регулярным* называется соединение, которое не изменяет соотношения между напряжениями и токами на выходах каждого четырехполюсника. При этом токи, протекающие через оба первичных и оба вторичных зажима каждого из четырехполюсников, равны по величине и обратны по направлению.

Регулярными являются:

- 1) каскадное соединение двух четырехполюсников;
- 2) параллельное соединение двух четырехполюсников, если четырехполюсники:
  - имеют горизонтальную ось симметрии;
  - являются подобными (подобными называются четырехполюсники, схемы которых одинаковы, а сопротивления пропорциональны);
  - являются треугольными;
- 3) последовательное соединение в случае треугольных четырехполюсников, когда общие зажимы объединены;
- 4) соединение тем или иным способом произвольного четырехполюсника с другим четырехполюсником, у которого на входе или выходе имеется трансформатор;
- 5) соединение тем или иным способом произвольного и так называемого разорванного четырехполюсника (когда входы не соединены с выходом).

### 4.3. Матрицы простейших четырехполюсников

Определим матрицы некоторых простейших четырехполюсников.

**Пример.** Имеем четырехполюсник, состоящий из одного последовательного комплексного сопротивления (рис. 4.5, *a*). Начальные запасы энергии в реактивных частях сопротивления будем считать равными нулю. Тогда схема четырехполюсника в операторном виде так же представляется в виде одного последовательного сопротивления  $Z(p)$ .

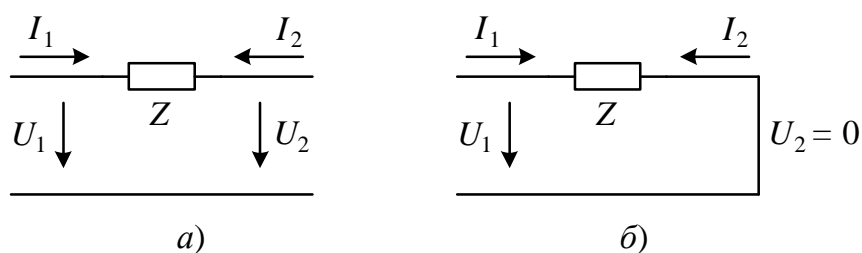


Рис. 4.5. Четырехполюсник из одного последовательного сопротивления (*a*) и схема для расчета элементов  $y_{11}$  и  $y_{21}$  (*б*)

Величины  $U_1$  и  $U_2$  и токи  $I_1$  и  $I_2$  на схеме – это преобразования Лапласа временных функций соответствующих напряжений и токов.

Для определения матрицы проводимостей напомним систему уравнений через параметры этой матрицы:

$$\begin{cases} I_1 = y_{11}U_1 + y_{12}U_2; \\ I_2 = y_{21}U_1 + y_{22}U_2. \end{cases}$$

Из этой системы уравнений получаем выражения для матричных элементов.

Так, для элемента  $y_{11}$  имеем:  $y_{11} = \left. \frac{I_1}{U_1} \right|_{U_2=0}$ .

Условие  $U_2 = 0$  означает, что выходные зажимы четырехполюсника замкнуты (рис. 4.5, б).

Тогда получим:  $y_{11} = \frac{U_1}{Z} = \frac{1}{Z}$ .

Точно также получаем выражение для элемента  $y_{21}$ :

$$y_{21} = \left. \frac{I_2}{U_1} \right|_{U_2=0} = \frac{-U_1}{Z} = -\frac{1}{Z}.$$

В этом выражении учтено, что токи  $I_1$  и  $I_2$  равны по величине и противоположны по знаку.

Элементы  $y_{12}$  и  $y_{22}$  получаются аналогичным образом:

$$y_{12} = \left. \frac{I_1}{U_2} \right|_{U_1=0} = \frac{-U_2}{Z} = -\frac{1}{Z}; \quad y_{22} = \left. \frac{I_2}{U_2} \right|_{U_1=0} = \frac{U_2}{Z} = \frac{1}{Z}.$$

Выражения для элементов матрицы передачи получаем из системы уравнений через параметры этой матрицы:

$$\begin{cases} U_1 = a_{11}U_2 - a_{12}I_2; \\ I_1 = a_{21}U_2 - a_{22}I_2. \end{cases}$$

Элементы  $a_{11}$  и  $a_{21}$  определяются при холостом ходе на выходе четырехполюсника, а  $a_{12}$  и  $a_{22}$  – при коротком замыкании:

$$a_{11} = \left. \frac{U_1}{U_2} \right|_{I_2=0} = 1; \quad a_{12} = \left. \frac{U_1}{-I_2} \right|_{U_2=0} = \frac{U_1}{\frac{U_1}{Z}} = Z;$$

$$a_{21} = \frac{I_1}{U_2} \Big|_{I_2=0} = 0; \quad a_{22} = \frac{I_1}{-I_2} \Big|_{U_2=0} = 1.$$

Матрицы  $[Z]$  у такого четырехполюсника не существует.

**Пример.** Имеем четырехполюсник в виде параллельного комплексного сопротивления (рис. 4.6, а). Аналогично предыдущему примеру на рис. 4.6 проставлены операторные выражения временных функций напряжений и токов и сопротивления  $Z$ .

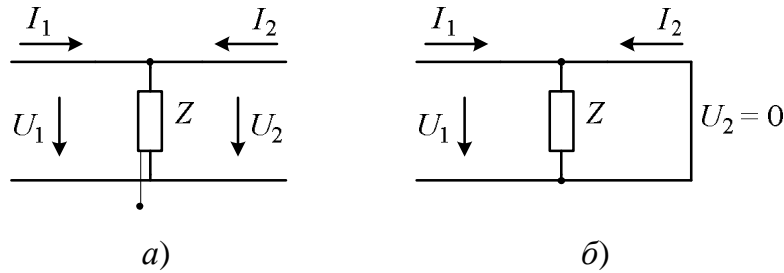


Рис. 4.6. Четырехполюсник из одного параллельного сопротивления (а) и схема для расчета элементов  $a_{12}$  и  $a_{22}$  (б)

Найдем матрицу сопротивлений  $[Z]$ . Расчетная схема для элементов матрицы такая же, как на рис. 4.6, а. Тогда получаем:

$$z_{11} = \frac{U_1}{I_1} \Big|_{I_2=0} = \frac{U_1}{\frac{U_1}{Z}} = Z; \quad z_{12} = \frac{U_1}{I_2} \Big|_{I_1=0} = \frac{U_2}{\frac{U_2}{Z}} = Z;$$

$$z_{21} = \frac{U_2}{I_1} \Big|_{I_2=0} = \frac{U_1}{\frac{U_1}{Z}} = Z; \quad z_{22} = \frac{U_2}{I_2} \Big|_{I_1=0} = \frac{U_2}{\frac{U_2}{Z}} = Z.$$

Элементы матрицы передачи равны. Элементы  $a_{11}$  и  $a_{21}$  определяются при холостом ходе, а  $a_{12}$  и  $a_{22}$  – при коротком замыкании на выходе четырехполюсника (рис. 4.6, б):

$$a_{11} = \frac{U_1}{U_2} \Big|_{I_2=0} = 1; \quad a_{12} = \frac{U_1}{-I_2} \Big|_{U_2=0} = 0;$$

$$a_{21} = \frac{I_1}{U_2} \Big|_{I_2=0} = \frac{\frac{U_1}{Z}}{U_1} = \frac{1}{Z}; \quad a_{22} = \frac{I_1}{-I_2} \Big|_{U_2=0} = 1.$$

Матрицы  $[Y]$  у этого четырехполюсника не существует.

**Пример.** Имеем Т-образный четырехполюсник из комплексных сопротивлений (рис. 4.7).

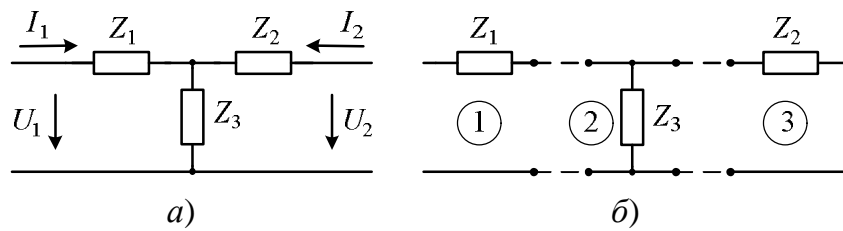


Рис. 4.7. Т-образный четырехполюсник (а) и схема для расчета матрицы передачи (б)

Матрица передачи этого четырехполюсника легко определяется как матрица передачи каскадного соединения трех четырехполюсников, уже рассмотренных ранее (рис. 4.7, б):

$$\begin{aligned}
 [A] &= [A_1] \cdot [A_2] \cdot [A_3] = \begin{bmatrix} 1 & Z_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z_3} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & Z_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & Z_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & Z_2 \\ \frac{1}{Z_3} & \frac{Z_2}{Z_3} + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{Z_1}{Z_3} & Z_1 + Z_2 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_3} \\ \frac{1}{Z_3} & 1 + \frac{Z_2}{Z_3} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

В данном выражении матрицы передачи первого, второго и третьего четырехполюсников на рис. 4.7, б обозначены соответственно  $[A_1]$ ,  $[A_2]$  и  $[A_3]$ . При вычислении произведения матриц необходимо соблюдать их расположение, нельзя менять их местами.

#### 4.4. Зависимость между матрицами четырехполюсника

Из уравнений (4.1) и (4.2) четырехполюсника через матрицы  $[Y]$  и  $[Z]$  следует:  $[Z] = [Y]^{-1}$ ,  $[Y] = [Z]^{-1}$ , т. е. матрицы сопротивлений и проводимостей обратны друг другу. Аналогично связаны между собой смешанные матрицы  $[H]$  и  $[G]$ :  $[H] = [G]^{-1}$ ,  $[G] = [H]^{-1}$ .

Для установления зависимости между другими матрицами проще всего воспользоваться направленными графами. В качестве примера определим зависимость между матрицами сопротивлений и передачи.

Нарисуем граф четырехполюсника через Z-параметры (рис. 4.8, а).

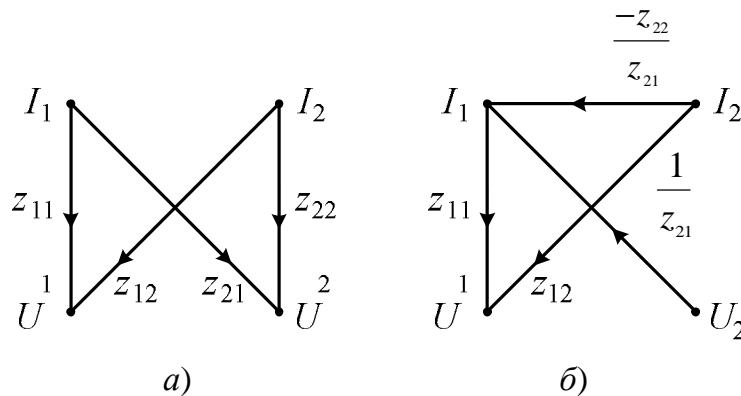


Рис. 4.8. Граф четырехполюсника через Z-параметры (а) и его преобразование (б)

Преобразуем этот граф. Проинвертируем ветвь  $U_2 - I_1$ , после чего получим граф, изображенный на рис. 4.8, б, которому соответствуют уравнения:

$$\begin{cases} U_1 = \frac{z_{11}}{z_{21}} U_2 - \left( \frac{z_{11}z_{22}}{z_{21}} - z_{12} \right) \cdot I_2; \\ I_1 = \frac{1}{z_{21}} U_2 - \frac{z_{22}}{z_{21}} I_2. \end{cases}$$

То есть элементы матрицы передачи равны:

$$a_{11} = \frac{z_{11}}{z_{21}}; \quad a_{12} = \frac{z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}}{z_{21}}; \quad a_{21} = \frac{1}{z_{21}}; \quad a_{22} = \frac{z_{22}}{z_{21}}.$$

Аналогично можно найти соотношения между матрицами проводимостей и передачи:

$$a_{11} = \frac{-y_{22}}{y_{21}}; \quad a_{12} = \frac{-1}{y_{21}}; \quad a_{21} = \frac{y_{12}y_{21} - y_{11}y_{22}}{y_{21}}; \quad a_{22} = \frac{-y_{11}}{y_{21}}.$$

## 4.5. Свойства матриц четырехполюсников

Свойства матриц четырехполюсников зависят от вида последних. Рассмотрим основные из них:

1. Четырехполюсники бывают линейные и нелинейные. В случае линейных четырехполюсников элементы матриц не зависят от то-

ков и напряжений на входах, а определяются только входящими в четырехполюсник элементами, т. е.  $R, L, C$ .

2. Четырехполюсники бывают взаимные и невзаимные. Взаимные – это такие четырехполюсники, у которых входы удовлетворяют теореме взаимности: если в один вход четырехполюсника включить ЭДС, а в другом, короткозамкнутом входе, измерить ток, то отношение ЭДС к току не зависит от того, куда будем включать ЭДС.

Матрицы  $[Z]$  и  $[Y]$  взаимных четырехполюсников являются симметричными:  $[Z]^T = [Z]$ ;  $[Y]^T = [Y]$ , т. е. для таких четырехполюсников  $z_{12} = z_{21}$ ,  $y_{12} = y_{21}$ . Условие взаимности четырехполюсников через элементы смешанных матриц имеет следующий вид:

$$h_{12} = -h_{21}; g_{12} = -g_{21}.$$

Условие взаимности четырехполюсника через элементы матрицы передачи имеет вид:

$$\Delta_a = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1.$$

Все пассивные четырехполюсники из сосредоточенных элементов являются взаимными.

3. Четырехполюсник без поглотителей энергии (без потерь, *недиссипативный*) – это такой четырехполюсник, в котором отсутствуют внутренние потери энергии. Напишем условие для матрицы  $[Z]$  четырехполюсника без потерь.

Мощность, поступающая по  $k$ -му входу четырехполюсника, определяется выражением

$$P_k = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(U_k I_k) = \frac{1}{4} \left( U_k I_k^* + U_k^* I_k \right),$$

где  $k = 1, 2$ .

Суммируя мощности по двум входам четырехполюсника и переходя к матричным обозначениям, получаем:

$$\begin{aligned} P_{\text{вх}} &= \sum_{k=1}^2 P_{\text{вх}k} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^2 \left( U_k I_k^* + U_k^* I_k \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left( \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} * \\ I_1 \\ * \\ I_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_1 & I_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} * \\ U_1 \\ * \\ U_2 \end{bmatrix} \right). \end{aligned}$$



Используем матричную запись уравнений четырехполюсника:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = [Z] \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}; \quad [U_1 U_2] = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}^T = [I_1 I_2] \cdot [Z]^T.$$

Подставим эти выражения в предыдущее равенство и получим:

$$\begin{aligned} P_{\text{вх}} &= \frac{1}{4} \left( [I_1 \quad I_2] \cdot [Z]^T \cdot \begin{bmatrix} * \\ I_1 \\ * \\ I_2 \end{bmatrix} + [I_1 \quad I_2] \cdot \begin{bmatrix} * \\ Z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} * \\ I_1 \\ * \\ I_2 \end{bmatrix} \right) = \\ &= \frac{1}{4} [I_1 \quad I_2] \cdot \left( [Z]^T + \begin{bmatrix} * \\ Z \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} * \\ I_1 \\ * \\ I_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

В случае четырехполюсника без поглотителей энергии эта величина при любых токах должна равняться нулю. А это может быть только в том случае, если выражение в круглых скобках равно нулю:

$[Z]^T + \begin{bmatrix} * \\ Z \end{bmatrix} = 0$  или  $[Z]^T = -\begin{bmatrix} * \\ Z \end{bmatrix}$ . Если четырехполюсник без поглотителей еще и взаимный, то:  $[Z]^T = -[Z]$ ;  $[Z] = -\begin{bmatrix} * \\ Z \end{bmatrix}$ .

Это означает, что вещественные части элементов матрицы  $[Z]$  должны быть равны нулю. Поэтому матрица сопротивлений взаимного и недиссипативного четырехполюсника оказывается чисто мнимой.

Аналогичное условие недиссипативности четырехполюсника имеет место и для матрицы проводимостей:  $[Y]^T + \begin{bmatrix} * \\ Y \end{bmatrix} = 0$ , или  $[Y]^T = -\begin{bmatrix} * \\ Y \end{bmatrix}$ .

Рассмотрим условие отсутствия потерь для матрицы передачи в случае взаимного четырехполюсника. Для этого воспользуемся соотношением между матрицами передачи и сопротивлений:

$$a_{11} = \frac{z_{11}}{z_{21}}; \quad a_{12} = \frac{z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}}{z_{21}}; \quad a_{21} = \frac{1}{z_{21}}; \quad a_{22} = \frac{z_{22}}{z_{21}}.$$

Из этих выражений и из свойства реактивности элементов матрицы  $[Z]$  получаем, что  $a_{11}$ ,  $a_{22}$  – чисто вещественные;  $a_{21}$ ,  $a_{12}$  – чисто мнимые величины.

## 4.6. Передаточные и входные функции нагруженного четырехполюсника

Обычно четырехполюсные цепи служат для передачи сигналов в виде электрического напряжения или тока от источника к нагрузке. Нагрузка может быть представлена в виде пассивной двухполюсной цепи с заданным входным сопротивлением  $Z_H = \frac{1}{Y_H}$ , подключаемой к выходу четырехполюсника (рис. 4.9).

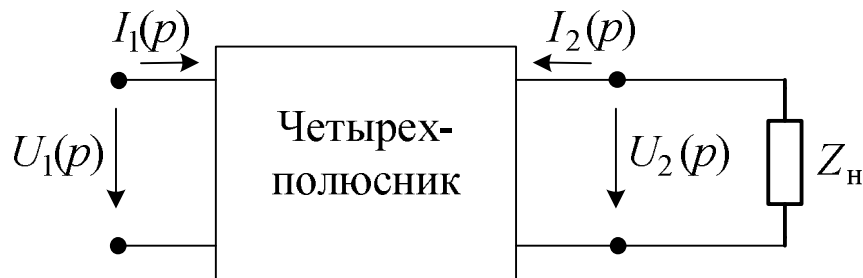


Рис. 4.9. Четырехполюсник с нагрузкой

При наличии нагрузочного сопротивления напряжение и ток на выходе связаны между собой соотношениями:

$$U_2 = -Z_H I_2; I_2 = -Y_H U_2.$$

Найдем далее выражения передаточной функции и входного сопротивления через параметры четырехполюсника и сопротивления нагрузки. Воспользуемся для этого направленными графами. Сопротивление нагрузки в графе учтем введением ветви, исходящей из узла  $U_2$  и входящей в узел  $I_2$ . Передача этой ветви равна  $-Y_H$ .

На рис. 4.10 приведен граф, использующий элементы матрицы передачи. Все величины на этом графе представляют собой операторные выражения напряжений, токов, элементов матрицы передачи и проводимости нагрузки.

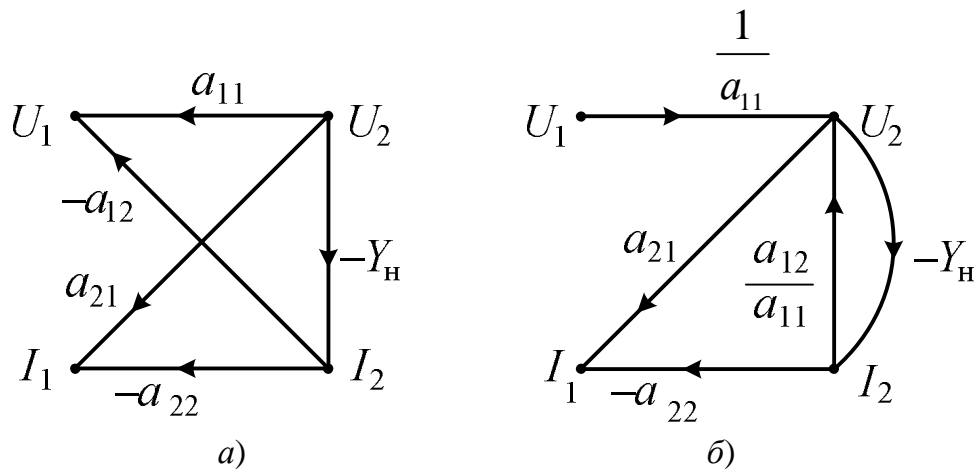


Рис. 4.10. Граф четырехполюсника с нагрузкой (а) и его граф после инвертирования ветви  $U_1-U_2$  (б)

Инвертируем ветвь  $U_1-U_2$ . Получим граф, изображенный на рис. 4.10, б. Из него получаем выражение передаточной функции по напряжению:

$$W_U(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{\frac{1}{a_{11}}}{1 + \frac{a_{12}Y_H}{a_{11}}} = \frac{1}{a_{11} + a_{12}Y_H}.$$

Для определения передаточной функции по току инвертируем в графе на рис. 4.10, а ветвь  $U_2-I_1$ . Получаемый при этом граф изображен на рис. 4.11.

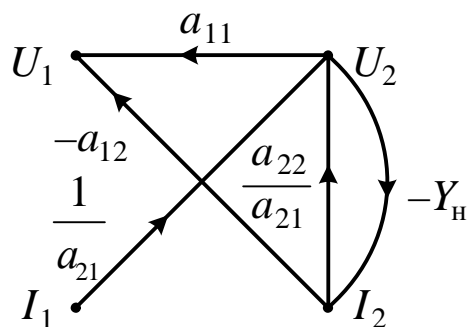


Рис. 4.11. Граф четырехполюсника после инвертирования ветви  $U_2-I_1$

Его решение имеет вид:

$$W_I(p) = \frac{-I_2(p)}{I_1(p)} = \frac{\frac{Y_H}{a_{21}}}{1 + \frac{a_{22}Y_H}{a_{21}}} = \frac{Y_H}{a_{21} + a_{22}Y_H} = \frac{1}{a_{21}Z_H + a_{22}}.$$

Если исключить в последнем графе узел  $I_2$ , то получим входное сопротивление нагруженного четырехполюсника:

$$\begin{aligned} Z_{\text{вх}}(p) &= \frac{U_1(p)}{I_1(p)} = \frac{1}{a_{21}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{a_{22}Y_H}{a_{21}}} (a_{11} + a_{12}Y_H) = \\ &= \frac{a_{11} + a_{12}Y_H}{a_{21} + a_{22}Y_H} = \frac{a_{11}Z_H + a_{12}}{a_{21}Z_H + a_{22}}. \end{aligned}$$

Выразим далее передаточную и входную функции через параметры матрицы проводимостей. Нарисуем граф, использующий эти параметры (рис. 4.12).

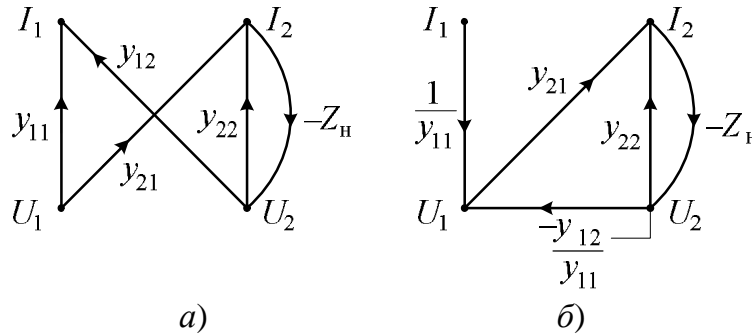


Рис. 4.12. Граф четырехполюсника через параметры матрицы  $[Y]$  (а) и его граф после инвертирования ветви  $U_1 - I_1$  (б)

Решение этого графа для передаточной функции по напряжению имеет вид:

$$W_U(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{-y_{21}Z_H}{1 + y_{22}Z_H} = \frac{-y_{21}}{Y_H + y_{22}}.$$

Инвертируем ветвь  $U_1 - I_1$ . Получаем граф, изображенный на рис. 4.12. Из него определяем выражение для входного сопротивления:

$$\begin{aligned}
Z_{\text{BX}}(p) &= \frac{U_1(p)}{I_1(p)} = \frac{1}{y_{11}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{y_{12}}{y_{11}} \cdot \frac{y_{21}Z_{\text{H}}}{1 + y_{22}Z_{\text{H}}}} = \\
&= \frac{1}{y_{11} - \frac{y_{12}y_{21}Z_{\text{H}}}{1 + y_{22}Z_{\text{H}}}} = \frac{1}{y_{11} - \frac{y_{12}y_{21}}{Y_{\text{H}} + y_{22}}} = \frac{1}{y_{11} + y_{12}W_U(p)}.
\end{aligned}$$

Исключая узел  $U_2$ , получаем передаточную функцию по току:

$$\begin{aligned}
W_I(p) &= -\frac{1}{y_{11}} \cdot \frac{y_{21}}{1 + y_{22}Z_{\text{H}}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{y_{21}y_{12}Z_{\text{H}}}{y_{11}(1 + y_{22}Z_{\text{H}})}} = \\
&= \frac{-y_{21}}{y_{11} + y_{11}y_{22}Z_{\text{H}} - y_{12}y_{21}Z_{\text{H}}} = \frac{-y_{21} \cdot Y_{\text{H}}}{y_{11}Y_{\text{H}} + y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}}.
\end{aligned}$$

Рассмотрим частные случаи:

1. Холостой ход на выходе четырехполюсника:  $Z_{\text{H}} = \infty$  ( $Y_{\text{H}} = 0$ ).

Передаточные и входная функции будут равны:

$$W_U(p) = \frac{-y_{21}}{y_{22}} = \frac{1}{a_{11}}; \quad W_I(p) = 0; \quad Z_{\text{BX}}(p) = \frac{1}{y_{11} - \frac{y_{12}y_{21}}{y_{22}}} = z_{11} = \frac{a_{11}}{a_{21}}.$$

2. Короткое замыкание на выходе четырехполюсника:  $Z_{\text{H}} = 0$  ( $Y_{\text{H}} = \infty$ ).

Передаточные и входная функции определяются следующими выражениями:

$$W_U(p) = 0; \quad W_I(p) = \frac{z_{21}}{z_{22}} = \frac{1}{a_{22}}; \quad Z_{\text{BX}}(p) = \frac{1}{y_{11}} = \frac{a_{12}}{a_{22}}.$$

## Глава 5. Расчет линейных пассивных цепей

При проектировании различного рода радиоэлектронных устройств возникает необходимость в построении электрических цепей, отвечающих определенным требованиям. Нахождение схемы и параметров электрической цепи, удовлетворяющей заданным требованиям, составляет задачу синтеза электрических цепей. Обычно заданной является частотная характеристика (ЧХ) цепи. Для двухполюсника это зависимость входного импеданса или входной проводимости от частоты.

Задача синтеза может иметь несколько решений, при этом предпочтительнее решение, которое приводит к наиболее простой схеме, содержащее наименьшее число элементов. В ряде случаев задача синтеза вообще не имеет решения. Для того чтобы решение существовало, заданная ЧХ должна удовлетворять условиям, которые называются условиями физической реализуемости.

### 5.1. Условия физической реализуемости пассивных четырехполюсников

Нарисуем произвольную схему четырехполюсника (рис. 5.1).

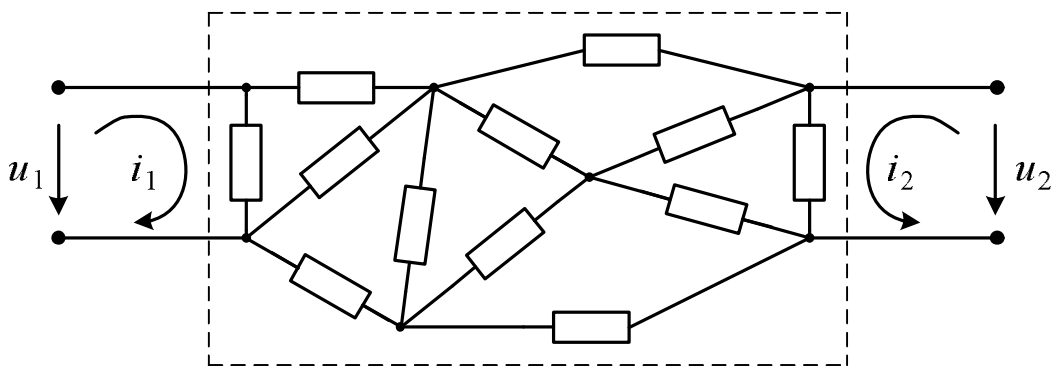


Рис. 5.1. Четырехполюсник из сосредоточенных элементов

Схема четырехполюсника внутри пунктирного прямоугольника произвольна. Она состоит из пассивных сосредоточенных элементов. Пронумеруем контуры этой схемы. Первым обозначим контур с входными зажимами, вторым – контур с выходными зажимами. Нумерация остальных контуров – произвольна.

Контуры имеют собственные и взаимные сопротивления:

$$Z_{ik} = pL_{ik} + R_{ik} + \frac{1}{pC_{ik}},$$

где  $L_{ik}$ ,  $C_{ik}$  и  $R_{ik}$  – собственные (при  $i = k$ ) и взаимные (при  $i \neq k$ ) индуктивности, емкости и сопротивления соответственно.

Токи в контурах определяются методом контурных токов из системы уравнений:

$$\begin{cases} Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 + \mathbf{L} + Z_{1n}I_n = U_1; \\ Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 + \mathbf{L} + Z_{2n}I_n = U_2; \\ \dots\dots\dots 0; \\ \dots\dots\dots 0. \end{cases} \quad (5.1)$$

Токи и напряжения в этом выражении являются изображениями, т. е. получены путем преобразования Лапласа из временных функций. Пользуясь известными приемами решения систем линейных уравнений, легко рассчитать ток в том или ином контуре цепи.

В первую очередь находятся токи на входе и выходе четырехполюсника:

$$I_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad I_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

где  $\Delta$  – главный определитель системы уравнений;  $\Delta_i$  – определитель, в котором  $i$ -й столбец заменен столбцом свободных членов. Очевидно, что любой параметр четырехполюсника будет представлять дробно-линейную комбинацию определителя  $\Delta$  и его миноров, которые являются суммами произведений сопротивлений  $Z_{ik}$ .

Таким образом, можно заключить, что любой параметр четырехполюсника, составленного из сосредоточенных элементов, должен представлять дробно-рациональную функцию переменной  $p$  с вещественными коэффициентами (дробно-рациональная функция – функция, представленная в виде отношения двух полиномов):

$$f(p) = \frac{a_0 + a_1p + a_2p^2 + \mathbf{L} + a_m p^m}{b_0 + b_1p + b_2p^2 + \mathbf{L} + b_n p^n}, \quad (5.2)$$

где  $a_i$ ,  $b_i$  – действительные числа. Это *первое условие* физической реализуемости четырехполюсника.

Второе условие может быть получено при анализе режима свободных колебаний. Физический смысл этого условия заключается в том, что в реальной цепи при отсутствии сторонних источников не может быть колебаний, неограниченно возрастающих с течением времени.

Для установившегося режима в системе уравнений (5.1) справа от знака равно появляются все нули:  $U_1 = 0, U_2 = 0 \dots$ . В этом случае для существования решения необходимо, чтобы главный определитель системы уравнений (5.1) был равен нулю:  $\Delta(p) = 0$ .

Решение уравнений ищется в виде:

$$i(t) = \sum_j \alpha_j e^{p_j t}.$$

Здесь  $p_j$  трактуются как комплексные частоты колебаний в цепи.

Раскрывая определитель  $\Delta(p)$ , получаем рациональную функцию от переменной  $p$ . Корни этой функции  $p_j$  и будут, очевидно, комплексными частотами свободных колебаний. Для их ограничения должно быть  $\operatorname{Re}(p_j) < 0$ , т. е. свободные колебания должны быть затухающими. Требование отрицательности действительных частей корней определителя  $\Delta$  является *вторым условием* физической реализуемости четырехполюсника.

Передаточная функция четырехполюсника в соответствии с первым условием реализуемости имеет вид (5.2):

$$W(p) = \frac{a_0 + a_1 p + \mathbf{L} + a_m p^m}{b_0 + b_1 p + \mathbf{L} + b_n p^n}.$$

Коэффициенты полиномов в числителе и знаменателе вещественны. Из математики известно, что в этом случае корни полиномов могут быть либо действительные, либо комплексно сопряженные. Это верно и для числителя, и для знаменателя. Рассмотрим плоскость комплексной переменной  $p$ , определяемой в виде:  $p = (\sigma + j\omega)$  (рис. 5.2).

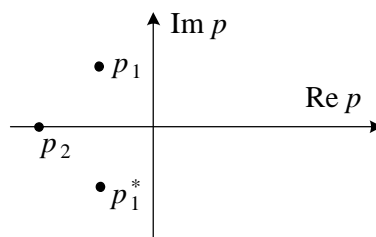


Рис. 5.2. Расположение корней полиномов передаточной функции четырехполюсника на комплексной плоскости



Второе условие реализуемости означает, что нули знаменателя  $W(p)$  (корни полинома), которые являются полюсами передаточной функции, располагаются в левой полуплоскости комплексной переменной  $p$ .

Нули передаточной функции  $W(p)$  (корни ее числителя) могут располагаться как в левой, так и в правой частях плоскости  $p$ . Условие физической реализуемости требует только того, чтобы эти нули были действительными или образовывали комплексно сопряженные пары.

Четырехполюсник называется четырехполюсником *минимально-фазового типа*, если нули его передаточной функции  $W(p)$  расположены в левой полуплоскости  $p$ . Для таких четырехполюсников существует однозначная связь между модулем и фазой коэффициента передачи.

Это широкая группа цепей, к которой относится подавляющее большинство схем, используемых на практике. Например, так называемые лестничные четырехполюсники являются четырехполюсниками минимально-фазового типа.

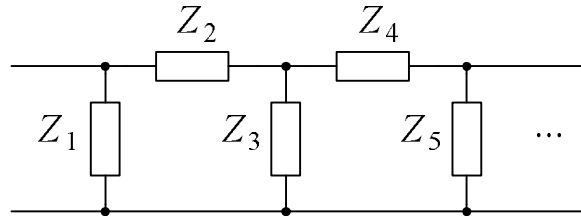


Рис. 5.3. Лестничный четырехполюсник

Часто передаточная функция четырехполюсника представляется в виде:

$$W(p) = \frac{1}{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \mathbf{L} + b_n p^n}.$$

Такой четырехполюсник вообще не имеет нулей. В данном случае необходимо исследовать полюса коэффициента передачи.

## 5.2. Условия физической реализуемости реактивных двухполюсников

В общем случае двухполюсники содержат поглощающие элементы. Это рассеивающие двухполюсники. Двухполюсники, не содержащие поглощающих элементов и не потребляющие активной мощности, называются реактивными.

Входные сопротивления и проводимости реактивных двухполюсников имеют чисто мнимое значение, что следует из закона сохранения энергии. Нули и полюса функций  $Z(p)$  и  $Y(p)$  лежат на мнимой оси.

Входное сопротивление  $Z = jX$  и входная проводимость  $G = jB$  пассивного реактивного двухполюсника в зависимости от частоты  $\omega$  изменяются, причем таким образом, что выполняются условия:

$$\frac{dX}{d\omega} > 0; \quad \frac{dB}{d\omega} > 0.$$

Частотные характеристики имеют строго положительный наклон. Это утверждение базируется на *теореме Фостера*. Примеры частотных характеристик реактивных двухполюсников приведены на рис. 5.4.

Физический смысл теоремы Фостера заключается в следующем: в природе нет отрицательных накопителей электромагнитной энергии, т. е. нет отрицательных емкостей и индуктивностей.

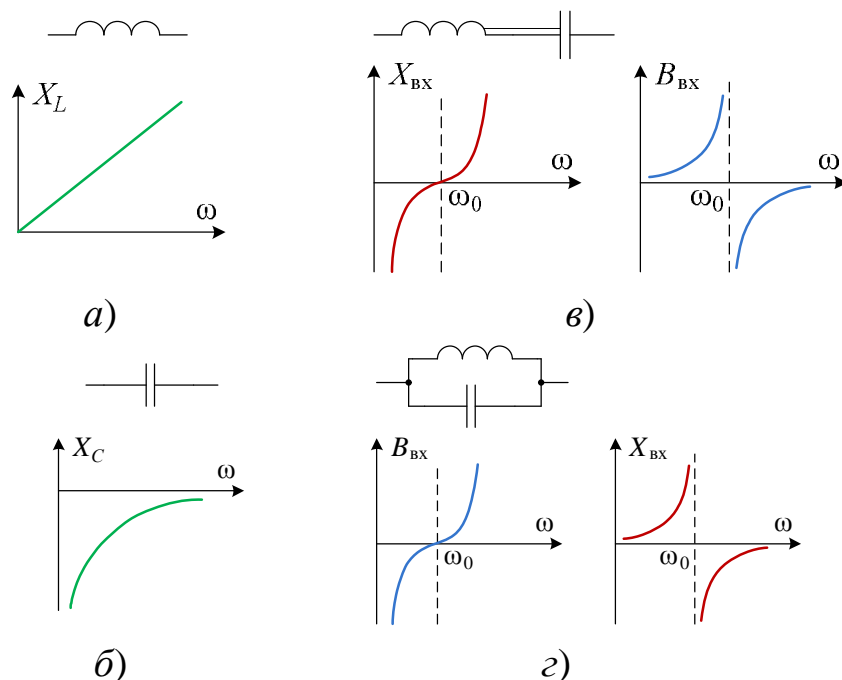


Рис. 5.4. Частотные характеристики реактивных двухполюсников: а – катушка индуктивности; б – конденсатор; в – последовательный колебательный контур; г – параллельный колебательный контур

Входное сопротивление любого пассивного двухполюсника  $Z(p)$  может быть представлено рациональной дробью с вещественными коэффициентами:

$$Z(p) = k \frac{p^m + a_{m-1}p^{m-1} + \dots + a_0}{p^n + b_{n-1}p^{n-1} + \dots + b_0}.$$

Нули функции  $Z(p)$  (нули числителя) и полюса  $Z(p)$  (нули знаменателя) – это либо вещественные, либо комплексно сопряженные величины.

Если на двухполюсник с входным сопротивлением  $Z(p)$  подать напряжение  $U(p)$ , то изображение тока определится в виде

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)}, \text{ а его оригинал: } i(t) = \sum_k \alpha_k e^{p_k t}, \text{ где } p_k \text{ – корни уравнения } Z(p) = 0.$$

Условиям физической реализуемости удовлетворяют только нули с отрицательной вещественной частью:  $\operatorname{Re} p_k < 0$ . То есть все нули функции  $Z(p)$  лежат в левой полуплоскости (включая мнимую ось) комплексной переменной  $p$ .

Аналогичные рассуждения справедливы и для функции входной проводимости, определяемой как  $Y(p) = \frac{1}{Z(p)}$ .

Так как нули  $Y(p)$  – это полюса  $Z(p)$ , следовательно, все нули и полюса функции  $Z(p)$  находятся в левой полуплоскости.

Рассмотрим условие физической реализуемости реактивных двухполюсников. Для таких двухполюсников справедливо:  $\operatorname{Re} Z(p) = 0$ , т. е. входное сопротивление (или входная проводимость) является мнимой величиной. Подобные цепи называются *цепями без потерь*. У таких цепей нули и полюса входных функций  $Z(p)$  и  $Y(p)$  расположены на мнимой оси.

Условием физической реализуемости реактивного двухполюсника является положительный наклон частотной зависимости входного сопротивления и входной проводимости.

Из условия положительности наклона характеристики вытекают следующие свойства функции сопротивления  $Z(p)$  (или проводимости  $Y(p)$ ): нули и полюса сопротивления (проводимости) являются

простыми и чередуются, т. е. между каждой парой полюсов расположен нуль, а между каждой парой нулей – полюс.

Введем следующие обозначения:  $Z(j\omega) = Z(p)|_{p=j\omega}$ . Пусть  $Z(j\omega) = jX(j\omega) = jX(\omega)$ . Если между парой полюсов отсутствует нуль (или наоборот) или кратность полюса (нуля) больше 1, то зависимость  $X(\omega)$  будет иметь участки с отрицательным наклоном.

Представим  $Z(p)$  в виде отношения двух полиномов:

$$Z(p) = \frac{P(p)}{Q(p)}.$$

Это выражение справедливо для двухполюсников с сосредоточенными элементами. При  $p = j\omega$  величина сопротивления  $Z(p)$  может быть мнимой в двух случаях:

- если числитель  $P(j\omega)$  – вещественное число, а знаменатель  $Q(j\omega)$  – мнимое;
- если числитель  $P(j\omega)$  – мнимое, а знаменатель  $Q(j\omega)$  – вещественное.

При  $p = j\omega$  многочлен от комплексной переменной  $p$  будет вещественным лишь тогда, когда все степени  $p$  четные, и мнимым – когда все степени  $p$  нечетные.

Поскольку нули и полюса входных функций мнимые, в числителе и знаменателе функций можно выделить сомножители:

$$(p - j\omega_k)(p + j\omega_k) = p^2 + \omega_k^2.$$

Такие сомножители при  $p = j\omega$  принимают вещественные значения, однако  $Z(j\omega)$  и  $Y(j\omega)$  – мнимые величины. Следовательно, в числителе или знаменателе входной функции кроме множителей вида  $(p^2 + \omega_k^2)$  должен быть множитель  $p$ , т. е. входная функция цепи без потерь имеет полюс или нуль в начале координат.

При  $p = \infty$  входная функция также имеет полюс или нуль. Кратность этого полюса (или нуля) равна 1, поэтому степени полиномов числителя и знаменателя отличаются на 1.

Таким образом, в общем виде функцию  $Z(p)$  двухполюсника без потерь в случае наличия полюса в точке  $p = 0$  можно представить в виде:

$$Z(p) = K \frac{(p^2 + \omega_1^2)(p^2 + \omega_3^2)\dots}{p(p^2 + \omega_2^2)(p^2 + \omega_4^2)\dots}, \quad (5.3a)$$

или

$$Z(p) = K \frac{p(p^2 + \omega_2^2)(p^2 + \omega_4^2)\dots}{(p^2 + \omega_1^2)(p^2 + \omega_3^2)\dots}, \quad (5.3б)$$

в том случае, если в точке  $p = 0$  функция  $Z(p)$  имеет нуль.

В формулах (5.3a) и (5.3б) выполняется условие:

$$0 < \omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \omega_4 < \dots .$$

Для функции входной проводимости цепи без потерь справедливы аналогичные выражения.

Таким образом, функция  $Z(p)$  или  $Y(p)$  может быть реализована на пассивной реактивной цепи при выполнении следующих условий:

- функция двухполюсника  $Z(p)$  или  $Y(p)$  является дробно рациональной функцией, которая представлена в виде отношения двух полиномов с положительными вещественными коэффициентами;
- степени полиномов отличаются на единицу;
- числитель представляет собой четную функцию комплексной переменной  $p$ , знаменатель – нечетную либо наоборот;
- все полюса и нули  $Z(p)$  или  $Y(p)$  лежат на мнимой оси плоскости комплексной переменной  $p$  и являются простыми, причем полюса чередуются с нулями.

### **5.3. Схемы Фостера и Кауэра для реактивных двухполюсников**

Рассмотрим как реализуется двухполюсник по известному входному сопротивлению  $Z(p)$ .

Входное сопротивление  $LC$ -двухполюсника, записанное в виде (5.3a) и (5.3б) с помощью разложения на элементарные дроби, можно представить в следующем виде:

$$Z(p) = k_\infty p + \frac{k_0}{p} + \sum_{i=1}^M \frac{2k_{2i}p}{p^2 + \omega_{2i}^2},$$

где  $M$  – целое число, на единицу меньше степени знаменателя, если эта степень нечетная, или равное степени знаменателя, если эта степень четная;

$$k_0 = \lim_{p \rightarrow 0} [pZ(p)]; \quad k_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{Z(p)}{p}; \quad 2k_{2i} = \lim_{p^2 \rightarrow -\omega_{2i}^2} \left[ \frac{p^2 + \omega_{2i}^2}{p} Z(p) \right] -$$

вычеты функции  $Z(p)$  соответственно в нулевой, бесконечной точках и точке  $p = \pm j\omega_{2i}$ , причем величины  $k_0, k_\infty, 2k_{2i}$  неотрицательны.

Поэтому полученному разложению соответствует  $LC$ -схема с положительными параметрами. Слагаемое  $\frac{k_0}{p}$  реализуется емкостью

$C_0 = \frac{1}{k_0}$ , слагаемое  $k_\infty p$  – индуктивностью  $L_\infty = k_\infty$ . Сопротивление

$Z_{2i} = \frac{2k_{2i}p}{p^2 + \omega_{2i}^2}$  реализуется параллельно соединенными  $L_{2i}$  и  $C_{2i}$ .

В этом случае проводимость определяется выражением

$$\frac{1}{Z_{2i}} = \frac{p^2 + \omega_{2i}^2}{2k_{2i}p} = \frac{1}{2k_{2i}} p + \frac{\omega_{2i}^2}{2k_{2i}p} = C_{2i}p + \frac{1}{L_{2i}p},$$

где  $C_{2i} = \frac{1}{2k_{2i}}$ ;  $L_{2i} = \frac{2k_{2i}}{\omega_{2i}^2} = \frac{1}{\omega_{2i}^2 C_{2i}}$ .

Тогда входное сопротивление  $LC$ -двухполюсника определится

как: 
$$Z(p) = L_\infty p + \frac{1}{C_0 p} + \sum_{i=1}^{\frac{M}{2}} \frac{p}{(p^2 + \omega_{2i}^2) C_{2i}}.$$

Этому выражению соответствует схема, называемая первой схемой Фостера для реактивного двухполюсника, которая изображена на рис. 5.5.

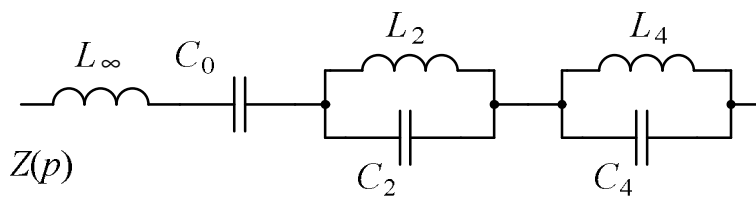


Рис. 5.5. Первая схема Фостера для реактивного двухполюсника

Рассмотрим другой способ, который получается при реализации двухполосника по его входной проводимости  $Y(p)$ , определяемой в виде

$Y(p) = \frac{1}{Z(p)}$ , которая также может быть разложена на простые дроби:

$$Y(p) = C_\infty p + \frac{1}{L_0 p} + \sum_{i=1}^{\frac{M}{2}} \frac{p}{(p^2 + \omega_{2i}^2) \cdot L_{2i}}.$$

В этом выражении:

$\frac{1}{L_0} = \lim_{p \rightarrow 0} [pY(p)]$ ;  $C_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{Y(p)}{p}$ ;  $\frac{1}{L_{2i}} = \lim_{p^2 \rightarrow -\omega_{2i}^2} \left[ \frac{p^2 + \omega_{2i}^2}{p} Y(p) \right]$  – вычеты

функции  $Y(p)$  в нулевой, бесконечной точке и точке  $p = \pm j\omega_{2i}$  соответственно. Этому разложению соответствует реактивный LC-двухполосник с положительными параметрами, схемная реализация которого называется второй схемой Фостера (рис. 5.6).

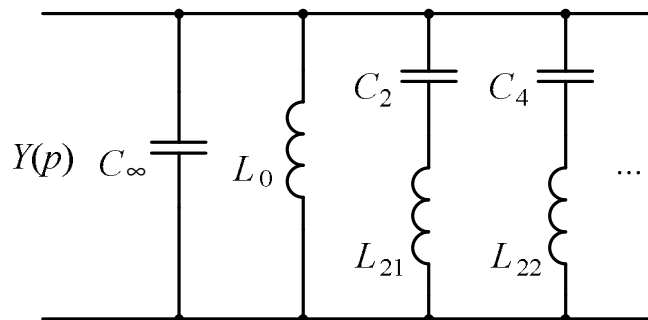


Рис. 5.6. Вторая схема Фостера для реактивного двухполосника

По заданной входной функции можно построить другие схемы двухполосников. Если представить функцию в виде непрерывной дроби, можно получить так называемую схему Кауэра.

Рассмотрим двухполосник цепочечной структуры (рис. 5.7).

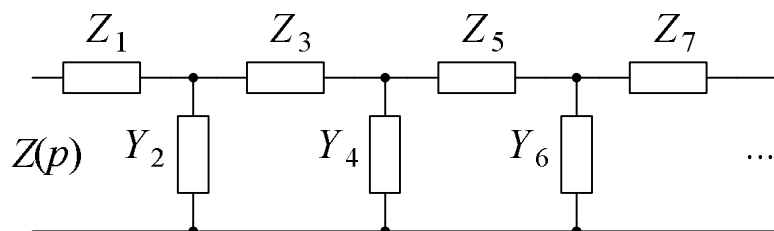


Рис. 5.7. Двухполосник цепочечной структуры

Входное сопротивление такого двухполюсника описывается непрерывной дробью:

$$Z(p) = Z_1(p) + \frac{1}{Y_2(p) + \frac{1}{Z_3(p) + \frac{1}{Y_4(p) + \frac{1}{Z_5(p) + \dots}}}}$$

Если функция  $Z(p)$  или  $Y(p)$  имеет полюс при  $p = \infty$ , то степень многочлена в числителе больше степени многочлена в знаменателе. В этом случае полюс выделяется делением числителя на знаменатель и реализуется в виде последовательной индуктивности.

Рассмотрим функцию в виде  $Z(p) = \frac{P(p)}{Q(p)}$ . В этом случае после

деления получим:  $Z(p) = k_1 p + \frac{P_1(p)}{Q(p)}$ . Продолжим деление:

$$\begin{aligned} Z(p) &= k_1 p + \frac{P_1(p)}{Q(p)} = L_1 p + \frac{1}{\frac{Q(p)}{P_1(p)}} = L_1 p + \frac{1}{C_2 p + \frac{Q_2(p)}{P_1(p)}} = \\ &= L_1 p + \frac{1}{C_2 p + \frac{1}{\frac{P_1(p)}{Q_2(p)}}} = L_1 p + \frac{1}{C_2 p + \frac{1}{L_3 p + \frac{P_3(p)}{Q_2(p)}}} = L_1 p + \frac{1}{C_2 p + \frac{1}{L_3 p + \frac{1}{\frac{Q_2(p)}{P_3(p)}}}}. \end{aligned}$$

Степень полинома  $P(p)$  больше степени полинома  $Q(p)$  на единицу, следовательно, степень полинома  $Q(p)$  больше степени  $P_1(p)$  тоже на единицу. Однако выражение  $\frac{Q(p)}{P(p)}$  – функция проводимости, т. е.

полюс при  $p = \infty$  реализуется в виде параллельной емкости. Поэтому

получаем:  $Z(p) = L_1 p + \frac{1}{C_2 p + \frac{Q_2(p)}{P_1(p)}}$ . При продолжении деления на



каждом шаге предыдущий делитель делим на остаток. Полученный результат реализуется так называемой первой схемой Кауэра.

Если степень числителя меньше степени знаменателя, то первая схема Кауэра может быть реализована без сопротивления  $Z_1(p)$ .

**Пример.** Реализуем двухполюсник, представленный входным сопротивлением  $Z(p)$  по первой схеме Кауэра:

$$Z(p) = \frac{p^4 + 10p^2 + 9}{p^3 + 4p}. \quad (5.4)$$

Проведем деление числителя на знаменатель (рис. 5.8, а):

$$\begin{array}{r}
 p^4 + 10p^2 + 9 \quad | \quad p^3 + 4p \\
 - \quad p^4 + 4p^2 \\
 \hline
 \quad \quad \quad 6p^2 + 9 \\
 \quad \quad \quad | \quad p^3 + 4p \\
 \quad \quad \quad - \quad p^3 + \frac{3}{2}p \\
 \quad \quad \quad \hline
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \frac{5}{2}p \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad | \quad 6p^2 + 9 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad - \quad 6p^2 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \hline
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \frac{12}{5}p \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad | \quad \frac{5}{2}p \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad - \quad \frac{5}{2}p \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \hline
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \frac{9}{5} \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad | \quad \frac{5}{2}p \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad - \quad \frac{5}{2}p \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \hline
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \frac{1}{18}p
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 Z(p) = p + \frac{1}{\frac{1}{6}p + \frac{1}{\frac{12}{5}p + \frac{1}{\frac{5}{18}p}}}
 \end{array}$$

Рис. 5.8. Выполнение деления по первой схеме Кауэра (а) и полученная непрерывная дробь (б)

Получаем непрерывную дробь (рис. 5.8, б). Этой дроби соответствует схема, изображенная на рис. 5.9, а.

Для того чтобы определить, на каких частотах характеристика двухполюсника будет иметь нули и полюса, представим выражение для функции входного сопротивления в виде:

$$Z(p) = \frac{p^4 + 10p^2 + 9}{p^3 + 4p} = \frac{(p^2 + 1)(p^2 + 9)}{p(p^2 + 4)}.$$

Частотная характеристика реализованного двухполюсника приведена на рис. 5.9, б, она имеет нули на частотах  $\omega_1 = 1$ ,  $\omega_2 = 3$  и полюса  $\omega_{01} = 0$ ,  $\omega_{02} = 2$ .

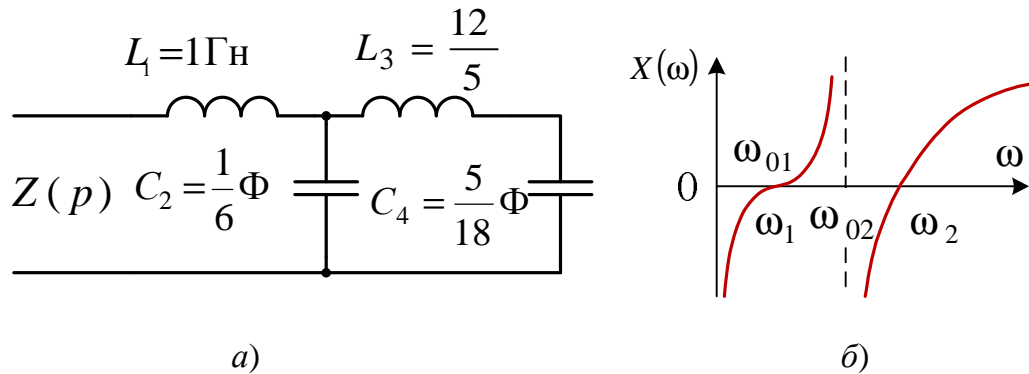


Рис. 5.9. Схема двухполюсника с сопротивлением (5.4) (а) и его частотная характеристика (б)

Вторая схема Кауэра получается в том случае, если начать деление не со старших, а с младших степеней. Если же исходная реактивная функция сопротивления имеет полюс в нуле, то этот полюс выделяется, а с остатком поступают так же, как и в предыдущем случае.

Входная функция в этом случае представляется в виде:

$$Z(p) = \frac{1}{pC_1} + \frac{1}{\frac{1}{pL_2} + \frac{1}{\frac{1}{pC_3} + \frac{1}{\frac{1}{pL_4} + \dots}}}$$

**Пример.** Реализуем двухполюсник, представленный входным сопротивлением  $Z(p)$  по второй схеме Кауэра:

$$Z(p) = \frac{p^4 + 10p^2 + 9}{p^3 + 4p}$$



## 5.4. Условия физической реализуемости реактивных двухполюсников

Условия реализуемости входного сопротивления  $Z(p)$ :

1. Входная функция  $Z(p)$  представляется в виде отношения двух полиномов с положительными и вещественными коэффициентами:

$$Z(p) = \frac{P(p)}{Q(p)} = \frac{a_0 + a_1 p + \dots + a_m p^m}{b_0 + b_1 p + \dots + b_m p^m}.$$

2. Высшие и низшие степени числителя и знаменателя отличаются не более чем на единицу.

3. Все нули и полюса функции  $Z(p)$  находятся в левой полуплоскости комплексной переменной  $p$ . В противном случае множитель  $e^{p_k t}$ , являющийся решением уравнений, будет возрастать при увеличении  $t$ , а в реальной цепи при отсутствии сторонних источников не может быть колебаний, неограниченно возрастающих с течением времени.

Рассмотрим несколько примеров.

**Пример.** Входная функция определяется следующим выражением:

$$Z(p) = \frac{p^2 + p + 2}{p + 1}.$$

Нули числителя:  $p_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm j \frac{\sqrt{7}}{2}$ . Нуль знаменателя:  $p = -1$ .

Числитель не является четной или нечетной функцией переменной  $p$ , т. е. не все условия реализуемости реактивной цепи выполняются. Таким образом, данная входная функция не описывает реактивный двухполюсник.

**Пример.** Входная функция сопротивления определяется в виде:

$$Z(p) = \frac{p^2 + 2p + 1}{p^2}.$$

В данном случае не выполняется требование отличия степени числителя и знаменателя на единицу. Таким образом, двухполюсник, описываемый данной функцией, не является реактивным.

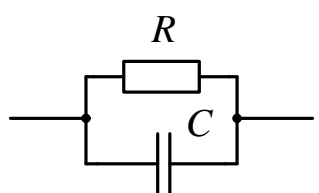
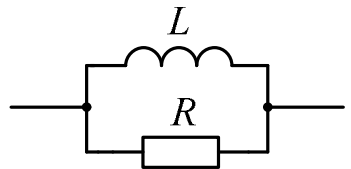
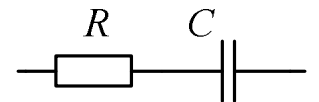
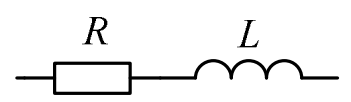
**Пример.** Входное сопротивление представлено следующей функцией:  $Z(p) = \frac{5p^2 + 1}{6p^3 + 2p}$ .

Выполняются все условия физической реализуемости реактивных двухполюсников. Таким образом, эта функция соответствует физически реализуемому реактивному двухполюснику.

В табл. 5.1 приведены операторные величины входных сопротивлений и проводимостей для различных  $RC$ - и  $RL$ -цепочек.

Таблица 5.1

Входные функции реактивных двухполюсников

Схема	$Z(p)$	$Y(p)$
	$\frac{1}{C(p+\beta)}$ ; $\beta = \frac{1}{RC}$	$C(p+\beta)$ ; $\beta = \frac{1}{RC}$
	$R \frac{p}{(p+\beta)}$ ; $\beta = \frac{R}{L}$	$\frac{1}{R} \left( 1 + \frac{\beta}{p} \right)$ ; $\beta = \frac{R}{L}$
	$R \left( 1 + \frac{\beta}{p} \right)$ ; $\beta = \frac{1}{RC}$	$\frac{1}{R} \cdot \frac{p}{p+\beta}$ ; $\beta = \frac{1}{RC}$
	$L(p+\beta)$ ; $\beta = \frac{R}{L}$	$\frac{1}{L(p+\beta)}$ ; $\beta = \frac{R}{L}$

**Пример.** Реализовать двухполюсник, входное сопротивление которого задано следующей функцией:

$$Z(p) = \frac{p^2 + 4p + 3}{p^2 + 2p}$$

Рассмотрим как реализуется двухполюсник согласно первой схемы Фостера.

Разложим функцию  $Z(p)$  на простые дроби:

$$Z(p) = \frac{p^2 + 4p + 3}{p^2 + 2p} = \frac{(p+1)(p+3)}{p(p+2)} = 1 + \frac{4p+6}{2p(p+2)}. \quad (5.5)$$

В итоге получаем:  $Z(p) = 1 + \frac{3}{2p} + \frac{1}{2(p+2)}$ .

Из третьего слагаемого определяем:  $\beta = \frac{1}{RC} = 2$ ,  $R = \frac{1}{4}$ .

Первое слагаемое – это резистор 1 Ом, второе – конденсатор емкостью  $\frac{2}{3}$  Ф и третье – параллельно соединенные резистор  $\frac{1}{4}$  Ом и конденсатор емкостью 2 Ф (см. первую строку первой схемы Фостера в табл. 5.1). Поэтому заданное входное сопротивление реализуется (рис. 5.12, а).

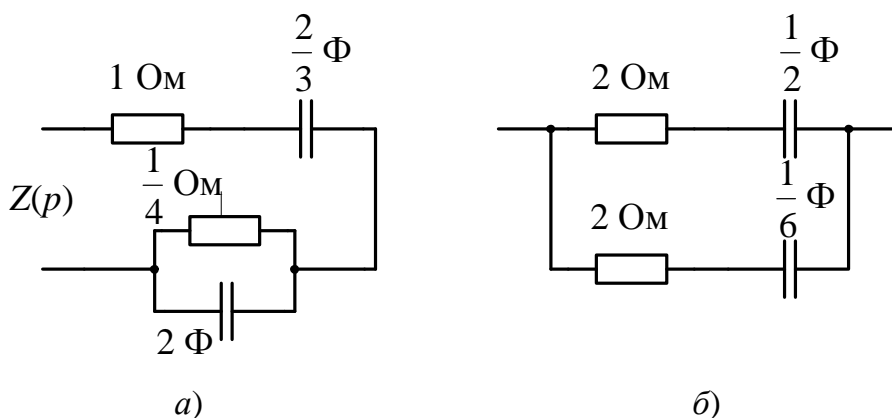


Рис. 5.12. Схемы Фостера двухполюсника с сопротивлением, описанным функцией по формуле (5.5): а – первая схема Фостера; б – вторая схема Фостера

Реализуем двухполюсник по второй схеме Фостера. Преобразуем входное сопротивление во входную проводимость и произведем необходимые вычисления:

$$Y(p) = \frac{p^2 + 2p}{p^2 + 4p + 3} = \frac{p}{2(p+1)} + \frac{p}{2(p+3)}.$$

Каждое слагаемое в полученном выражении реализуется последовательным соединением резистора и конденсатора. Схема двухполюсника, реализованного согласно второму преобразованию Фостера, приведена на рис. 5.12, б.



и описывается следующим уравнением:

$$u_2(t) = \frac{1}{T} \int_0^t u_1(t) \cdot dt,$$

где  $T$  – постоянная времени звена.

Характеристики интегрирующего звена сведены в табл. 5.2.

Таблица 5.2

Характеристики интегрирующего звена

Передаточная функция	Комплексный коэффициент передачи	Модуль комплексного коэффициента передачи (АЧХ)	Аргумент комплексного коэффициента передачи (ФЧХ)
$W(p) = \frac{1}{pT}$	$W(j\omega) = \frac{1}{j\omega T}$	$ W(j\omega)  = \frac{1}{\omega T}$	$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}$

### 5.5.2. Инерционное звено

Инерционное звено описывается уравнением следующего вида:

$$T \frac{du_2(t)}{dt} + u_2(t) = ku_1(t).$$

Возможная реализация такого звена в виде четырехполюсников представлена на рис. 5.15.

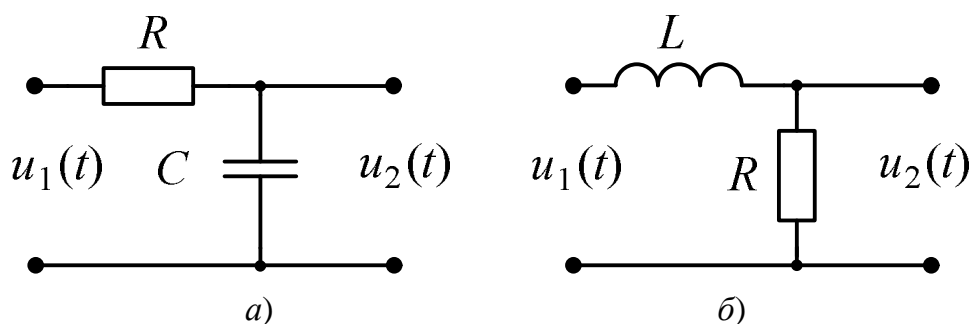


Рис. 5.15. Примеры инерционных звенов

Постоянные времени определяются следующим образом: для первой схемы  $T = RC$ , для второй –  $T = \frac{L}{R}$ .

Характеристики инерционного звена сведены в табл. 5.3.



Комплексный коэффициент передачи можно представить также следующим выражением:

$$W(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T} = |W(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)} = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}} e^{-j\arctg\omega T}.$$

Таблица 5.3

### Характеристики инерционного звена

Передаточная функция	Комплексный коэффициент передачи	Модуль комплексного коэффициента передачи (АЧХ)	Аргумент комплексного коэффициента передачи (ФЧХ)
$W(p) = \frac{1}{1+pT}$	$W(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T}$	$ W(j\omega)  = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}}$	$\varphi(\omega) = -\arctg\omega T$

На рис. 5.16 приведены частотные характеристики инерционного звена.

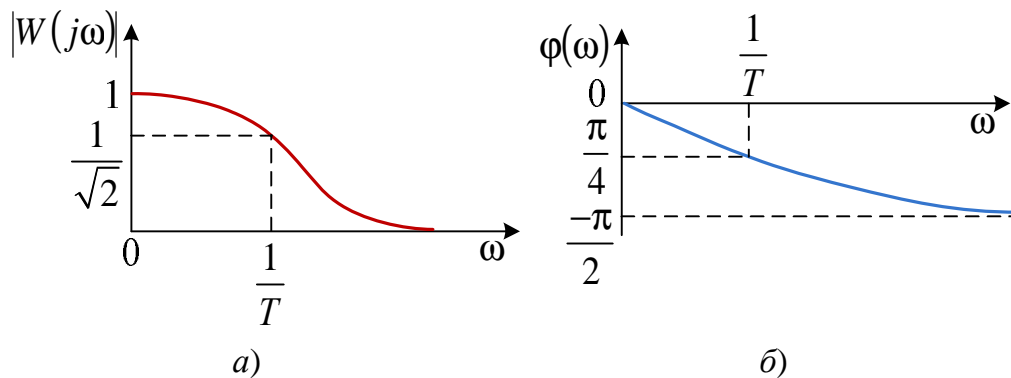


Рис. 5.16. Частотные характеристики инерционных звеньев:

- a* – амплитудно-частотная характеристика;
- б* – фазочастотная характеристика

При частотах  $\omega \gg \frac{1}{T}$ , амплитудная и фазовая частотные характеристики приближаются к частотным характеристикам интегрирующей цепи.

Переходная характеристика  $h(t)$ , показывающая реакцию звена на единичное ступенчатое воздействие, определяется выражением  $h(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}}$ . Ее вид показан на рис. 5.17.

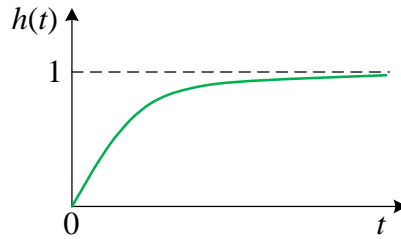


Рис. 5.17. Переходная характеристика инерционного звена

Инерционное звено относится к звеньям минимально-фазового типа, т. е. модуль и аргумент комплексного коэффициента передачи связаны между собой следующим соотношением:

$$|W(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega T)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi(\omega)}} = \cos\varphi(\omega).$$

Важным свойством минимально-фазовых звеньев является однозначное соответствие амплитудной и фазовой частотных характеристик. Другими словами, по заданной амплитудно-частотной характеристике всегда можно определить амплитудно-фазовую и наоборот.

### 5.5.3. Идеальное дифференцирующее звено

Идеальное дифференцирующее звено описывается выражением:

$$u_2(t) = T \frac{du_1}{dt},$$

где  $T$  – постоянная времени звена.

Таким образом, напряжение  $u_2(t)$  на выходе звена пропорционально производной от напряжения  $u_1(t)$  на входе.

Характеристики идеального дифференцирующего звена сведены в табл. 5.4.

Таблица 5.4

Характеристики идеального дифференцирующего звена

Передаточная функция	Комплексный коэффициент передачи	Модуль комплексного коэффициента передачи (АЧХ)	Аргумент комплексного коэффициента передачи (ФЧХ)
$W(p) = pT$	$W(j\omega) = j\omega T$	$ W(j\omega)  = \omega T$	$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}$

### 5.5.4. Реальное дифференцирующее звено

Реальное дифференцирующее звено описывается выражением:

$$T \frac{du_2(t)}{dt} + u_2(t) = k \frac{du_1(t)}{dt},$$

где  $T$  – постоянная времени звена;  $k$  – коэффициент усиления звена;  $u_1$  и  $u_2$  – напряжения на входе и выходе звена соответственно.

Примеры реализации реального дифференцирующего звена в виде четырехполюсника представлены на рис. 5.18.

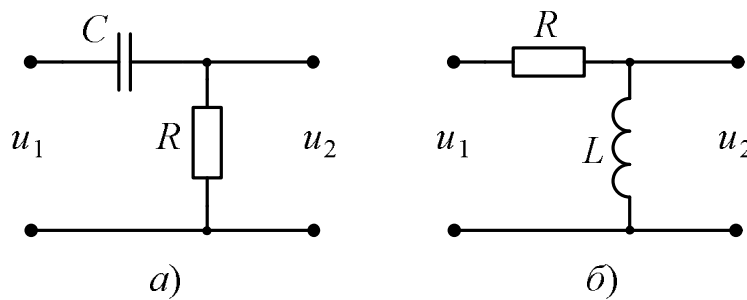


Рис. 5.18. Примеры реальных дифференцирующих звеньев

Постоянные времени определяются следующим образом: для первой схемы (рис. 5.18, а)  $T = RC$ , для второй (рис. 5.18, б)  $T = \frac{L}{R}$ .

Характеристики реального дифференцирующего звена сведены в табл. 5.5.

Таблица 5.5

#### Характеристики реального дифференцирующего звена

Передаточная функция	Комплексный коэффициент передачи	Модуль комплексного коэффициента передачи (АЧХ)	Аргумент комплексного коэффициента передачи (ФЧХ)
$W(p) = \frac{pT}{1 + pT}$	$W(j\omega) = \frac{j\omega T}{1 + j\omega T}$	$ W(j\omega)  = \frac{\omega T}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}$	$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctg \omega T$

На рис. 5.19 приведены амплитудная и фазовая частотные характеристики реального дифференцирующего звена.

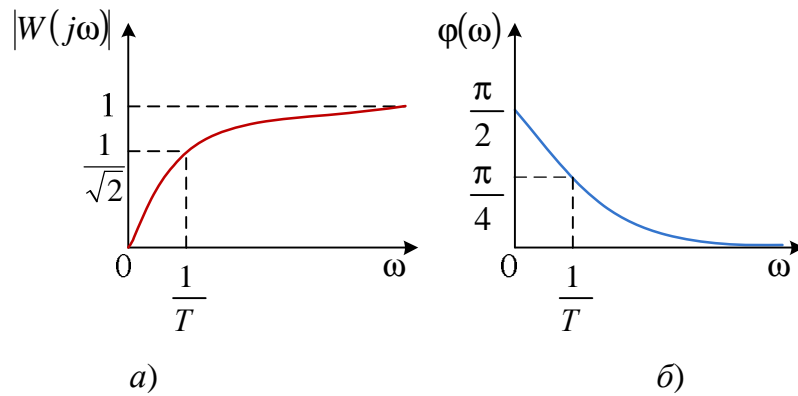


Рис. 5.19. Частотные характеристики реально дифференцирующего звена: *a* – амплитудно-частотная характеристика; *б* – фазочастотная характеристика

Переходная характеристика  $h(t)$  определяется выражением  $h(t) = e^{-\frac{t}{T}}$ . Ее вид показан на рис. 5.20.

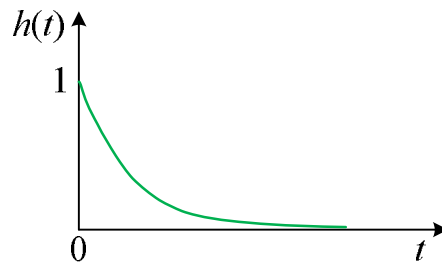


Рис. 5.20. Переходная характеристика реально дифференцирующего звена

Реальное дифференцирующее звено относится к звеньям минимально-фазового типа, т. е. модуль и аргумент комплексного коэффициента передачи связаны между собой следующим соотношением:

$$|W(j\omega)| = \frac{\omega T}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\omega^2 T^2}}} = \cos \varphi(\omega).$$

### 5.5.5. Звено неминимально-фазового типа

Звено является минимально-фазовым, если все нули и полюса его передаточной функции имеют отрицательные или равные нулю действительные части. Звено называют неминимально-фазовым, если хотя бы один нуль или полюс его передаточной функции имеет положительную вещественную часть.

На рис. 5.21 приведен пример реализации звена неминимально-фазового типа.

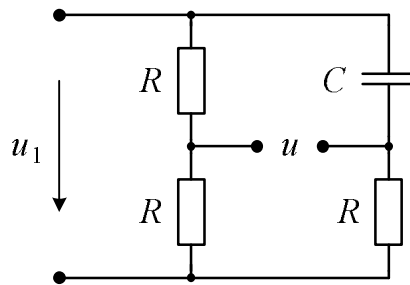


Рис. 5.21. Звено неминимально-фазового типа

Характеристики звена, изображенного на рис. 5.21, сведены в табл. 5.6.

В формулах, приведенных в табл. 5.6,  $T = RC$  – постоянная времени данного звена.

Очевидно, что нуль передаточной функции лежит в правой полуплоскости комплексной переменной  $p$ :  $p_0 = \frac{1}{T}$ . Для этого звена модуль комплексного коэффициента передачи не зависит от частоты, в отличие от его аргумента.

Таблица 5.6

Характеристики звена неминимально-фазового типа

Передаточная функция	Комплексный коэффициент передачи	Модуль комплексного коэффициента передачи (АЧХ)	Аргумент комплексного коэффициента передачи (ФЧХ)
$W(p) = \frac{1}{2} - \frac{pT}{1+pT} =$ $= \frac{1}{2} \cdot \frac{1-pT}{1+pT}$	$W(j\omega) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-j\omega T}{1+j\omega T}$	$ W(j\omega)  = \frac{1}{2}$	$\varphi(\omega) = -2\arctg\omega T$

## 5.6. Колебательное звено

*Колебательным* называется звено второго порядка, в котором при подаче на вход единичного ступенчатого воздействия выходная величина стремится к новому установившемуся значению, совершая колебания. Простейший пример такого звена – последовательно со-

единенные между собой резистор, катушка индуктивности и конденсатор (рис. 5.22). Выходной сигнал будем снимать с конденсатора.

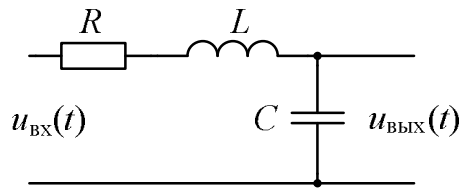


Рис. 5.22. Колебательное звено

Передаточная функция колебательного звена определяется следующим образом:

$$W(p) = \frac{1}{pC} \cdot \frac{1}{R + pL + \frac{1}{pC}} = \frac{1}{1 + p^2 LC + pRC}.$$

Введем обозначения:  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ,  $\alpha = \frac{R}{2L}$ . Тогда  $RC = \frac{2\alpha}{\omega_0^2}$ .

Запишем передаточную функцию, учитывая введенные обозначения. Получим:

$$W(p) = \frac{1}{1 + \frac{p^2}{\omega_0^2} + \frac{2\alpha}{\omega_0^2} p} = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 + p^2 + 2\alpha p}.$$

Комплексный коэффициент передачи получим формальной заменой оператора  $p$  на  $j\omega$  в выражении для передаточной функции:

$$W(j\omega) = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\omega \frac{2\alpha}{\omega_0^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\omega \frac{2\alpha}{\omega_0^2}\right)^2}} \exp \left( j \arctg \frac{-\omega \frac{2\alpha}{\omega_0^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \right).$$

Модуль комплексного коэффициента передачи определяется выражением, по которому строится амплитудно-частотная характеристика:

$$|W(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\omega \frac{2\alpha}{\omega_0^2}\right)^2}}.$$

Аргумент комплексного коэффициента передачи, который является выражением для построения фазочастотной характеристики, имеет вид:

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{\omega \frac{2\alpha}{\omega_0^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}.$$

Частотные зависимости модуля и аргумента комплексного коэффициента передачи от относительной частоты  $\frac{\omega}{\omega_0}$  приведены на рис. 5.23.

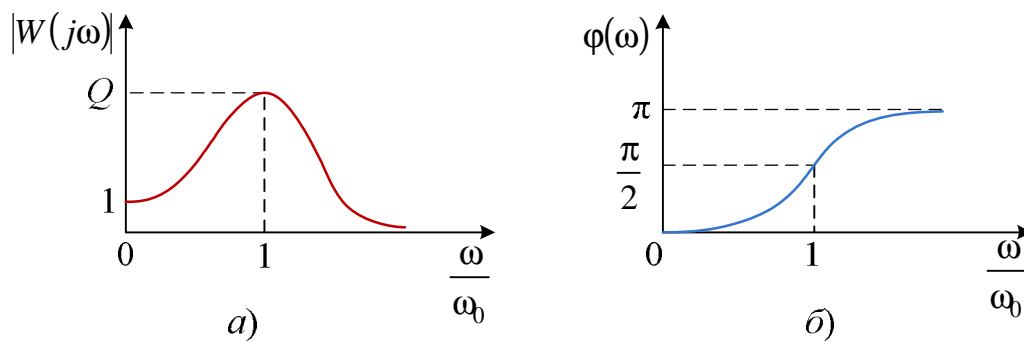


Рис. 5.23. Частотные зависимости колебательного звена от относительной частоты  $\frac{\omega}{\omega_0}$ : *a* – амплитудно-частотная характеристика; *б* – фазочастотная характеристика

Как видно, АЧХ имеет резонансный характер. Максимум амплитуды имеет место на частоте  $\omega_0$ :

$$|W(j\omega)| = \frac{\omega_0}{2\alpha} = \frac{\omega_0 L}{R},$$

поэтому  $\omega_0$  называется частотой резонанса. Аргумент комплексного коэффициента передачи изменяется от 0 до  $\pi$ , принимая на частоте резонанса  $\omega_0$  значение  $\frac{\pi}{2}$ .

Максимум амплитуды на резонансной частоте и равен добротности колебательного звена  $Q$ :

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R}.$$

Добротность  $Q$  – параметр, характеризующий качество резонансной цепи (ширину резонанса). Более высокая добротность соответствует более узкой полосе пропускания. По определению добротность представляет собой отношение энергии, накопленной в реактивном сопротивлении цепи, к энергии, рассеиваемой активным сопротивлением этой цепи.

Рассчитаем импульсную характеристику  $g(t)$  колебательного звена, т. е. его отклик на входное напряжение в виде  $\delta$ -функции (единичного импульса). Импульсную характеристику можно найти как обратное преобразование Лапласа от передаточной функции (см. 2.7.2):

$$g(t) = L^{-1}[W(p)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{\omega_0^2 e^{pt}}{\omega_0^2 + p^2 + 2\alpha p} dp. \quad (5.6)$$

Определим полюса подынтегральной функции. Для этого приравняем к нулю ее знаменатель:  $p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2 = 0$ .

Корнями этого уравнения будут:  $p_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$ , или же

$$p_1 = -\alpha - j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}; \quad p_2 = -\alpha + j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}.$$

После этого интеграл в выражении (5.6) вычисляется как сумма вычетов подынтегральной функции в полюсах  $p_1$  и  $p_2$  (это простые полюса). Тогда выражение для импульсной характеристики примет вид:

$$g(t) = \omega_0^2 \left( \frac{e^{p_1 t}}{2p_1 + 2\alpha} + \frac{e^{p_2 t}}{2p_2 + 2\alpha} \right) = \\ = \frac{\omega_0^2}{2} \left( \frac{e^{-\alpha t}}{j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}} e^{j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} t} + \frac{e^{-\alpha t}}{-j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}} e^{-j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} t} \right).$$

Положим, что  $\alpha \ll 1$ . Тогда выражение под корнем  $\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \cong \omega_0$ . С учетом этого импульсная характеристика будет определяться следующим выражением:

$$g(t) = \omega_0 e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t. \quad (5.7)$$

Импульсная характеристика определяет свободные колебания в контуре (рис. 5.24).



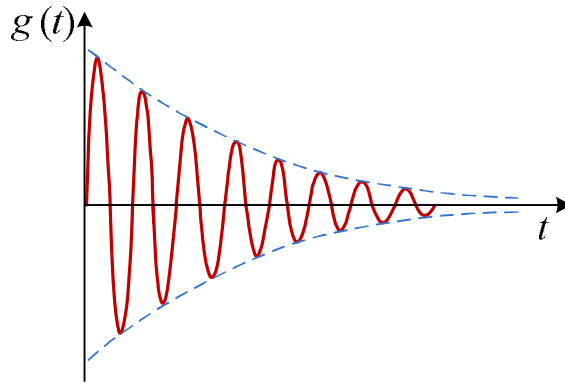


Рис. 5.24. Вид импульсной характеристики колебательного звена

Амплитуда колебаний импульсной характеристики определяется экспонентой в выражении (5.7) и величиной  $\alpha$  в показателе экспоненты. Чем больше  $\alpha$ , тем быстрее спадает амплитуда колебаний. Поэтому величина  $\alpha$  называется *коэффициентом затухания*.

## 5.7. Пассивные мостовые цепи

### 5.7.1. Т-образная фазосдвигающая цепь

*Фазосдвигающими* называют линейные цепи, которые сдвигают по фазе напряжение гармонической формы, не изменяя при этом его амплитуду. Такими свойствами обладает *мостовой* симметричный четырехполюсник. Варианты подобных цепей, называемых Т-образными мостовыми схемами, изображены на рис. 5.25.

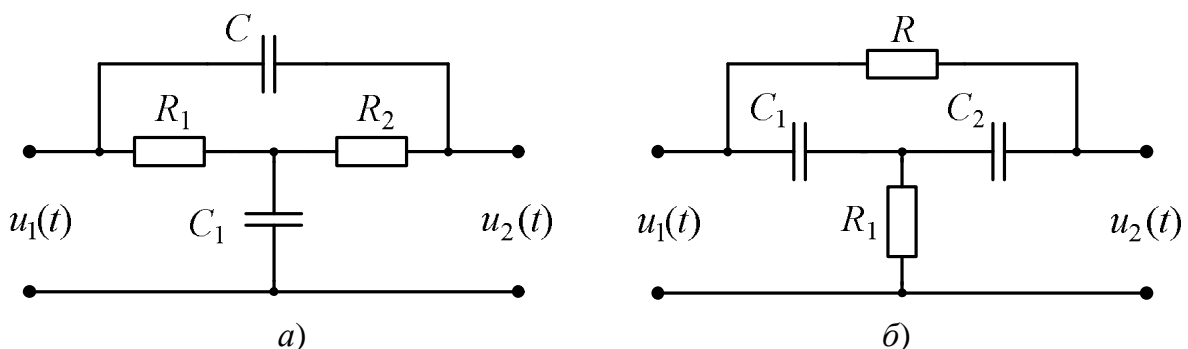


Рис. 5.25. Т-образные фазосдвигающие цепи: а – С-параллель; б – R-параллель

Если в схеме 5.25, а выполняется условие равенства сопротивлений  $R_1 = R_2$ , а в схеме 5.25, б – условие равенства емкостей  $C_1 = C_2$ ,

то Т-образные цепи будут являться симметричными. В противном случае, если такие условия равенства не выполняются, данные цепи считаются несимметричными.

Высокие частотно-избирательные свойства симметричных Т-образных цепей часто применяются на практике для построения частотно-избирательных усилителей.

Анализ обеих схем выполняется аналогично. Поэтому далее рассмотрим только схему на рис. 5.25, а, задав условие  $R_1 = R_2 = R$ .

Частотно-избирательные свойства цепей оцениваются по их АЧХ, позволяющим оценить *полосу пропускания* – диапазон частот, в пределах которого АЧХ цепи достаточно равномерна для того, чтобы обеспечить передачу сигнала без существенного искажения его формы.

Ширину полосы пропускания обычно определяют как разность верхней  $\omega_b$  и нижней  $\omega_n$  граничных частот участка АЧХ, на котором амплитуда составляет не менее  $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707$  от максимальной (рис. 5.26).

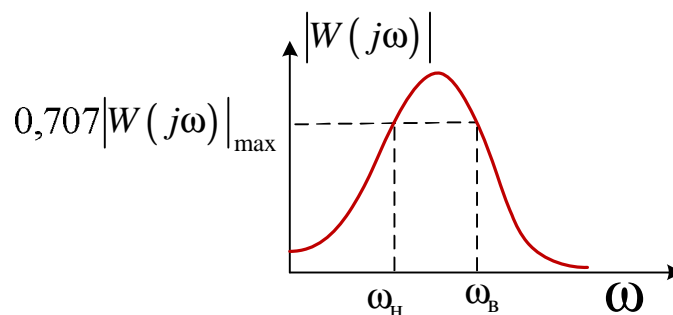


Рис. 5.26. Полоса пропускания

*Частотой настройки моста*  $\omega_0$  называется частота, на которой его АЧХ имеет экстремум (максимум или минимум). Для анализа частотно-избирательных цепей необходимо знать их свойства при частотах, отличных от резонансной частоты (при  $\omega \neq \omega_0$ ). Это отличие оценивается абсолютной расстройкой (чаще употребляется название «расстройка»):

$$\Delta\omega = \omega - \omega_0.$$

Чтобы не привязываться к конкретному значению частоты и получить более общие результаты, используют безразмерную относительную частоту, определяемую как  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ .

Введем выражение для относительной расстройки  $\delta$  в виде:

$$\delta = x - \frac{1}{x} = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}.$$

Относительная расстройка позволяет получить удобные для анализа симметричные частотные характеристики при изменении частоты от нуля до бесконечности.

В табл. 5.7 приведены значения относительной частоты  $x$  и относительной расстройки  $\delta$  при изменении текущего значения частоты.

Таблица 5.7

Значения относительной частоты  $x$  и относительной расстройки  $\delta$

$w$	0	$\frac{w_0}{10}$	$\frac{w_0}{5}$	$\frac{w_0}{3}$	$\frac{w_0}{2}$	$w_0$	$2w_0$	$3w_0$	$5w_0$	$10w_0$	$\infty$
$x$	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	5	10	$\infty$
$\delta$	$-\infty$	-8,9	-4,8	-2,67	-1,5	0	1,5	2,67	4,8	8,9	$+\infty$

Для удобства анализа вводят понятие *нормированной амплитудно-частотной характеристики*. Она обозначается  $W_H(\delta)$  и определяется как отношение модуля комплексного коэффициента передачи на частоте настройки к модулю комплексного коэффициента передачи от относительной расстройки:

$$W_H(\delta) = \frac{|W(j\omega_0)|}{|W(j\delta)|}.$$

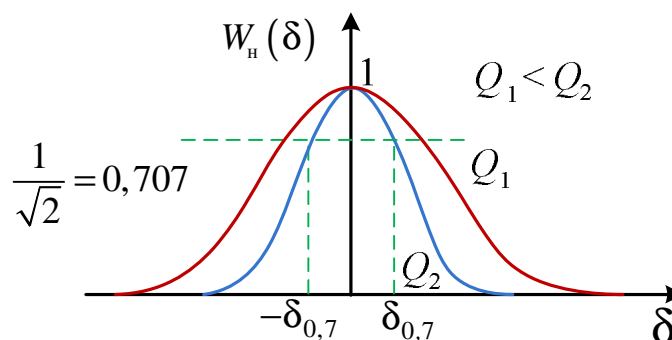


Рис. 5.27. Нормированная амплитудно-частотная характеристика добротности

На рис. 5.27 изображен примерный вид нормированной АЧХ характеристики для двух значений добротности. Из данного рисунка видно, что чем выше добротность четырехполюсника, тем меньше площадь ее характеристики. Ширину нормированной АЧХ удобно оценивать по величине относительной расстройки, равной  $0,707 - \delta_{0,7}$ , при которой амплитуда (тока или напряжения), уменьшаясь в  $\sqrt{2}$ , становится равной  $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707$ . Это соответствует уменьшению активной мощности в два раза по сравнению с резонансным режимом.

Между добротностью четырехполюсника  $Q$  и относительной расстройкой  $\delta_{0,7}$  по уровню 0,7 существует простая связь, которую можно установить, записав выражение нормированной АЧХ в этой точке (при  $\delta = 0,707$ ):

$$\frac{|W(\delta=0)|}{|W(\delta_{0,7})|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707. \quad (5.8)$$

Добротность и относительную расстройку по уровню 0,7 связывает следующее выражение:

$$Q = \frac{1}{\delta_{0,7}}.$$

В параграфе 3.3 было получено выражение для передаточной функции Т-образной фазосдвигающей цепи:

$$W(p) = \frac{y_c(2g + y_{c_1}) + g^2}{(g + y_c)(2g + y_{c_1}) - g^2}.$$

В этом выражении:  $g = \frac{1}{R}$ ;  $y_c = pC$ ;  $y_{c_1} = pC_1$ .

После подстановки вышеуказанных значений и преобразования выражение для передаточной функции сведется к виду:

$$W(j\omega) = \frac{1 - \omega^2 R^2 C C_1 + j2\omega RC}{1 - \omega^2 R^2 C C_1 + j\omega(2RC + RC_1)}.$$

Получим комплексный коэффициент передачи путем замены оператора  $p$  на  $j\omega$ :

$$W(j\omega) = \frac{1 - \omega^2 R^2 C C_1 + j2\omega RC}{1 - \omega^2 R^2 C C_1 + j\omega(2RC + RC_1)}. \quad (5.9)$$

Определим частоту настройки моста  $\omega_0$  из условия равенства нулю на этой частоте аргумента комплексного коэффициента передачи:

$$\arg W(j\omega_0) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} W(j\omega_0)}{\operatorname{Re} W(j\omega_0)} = 0.$$

Таким образом, для нахождения частоты настройки достаточно мнимую часть комплексного коэффициента передачи приравнять к нулю:  $\operatorname{Im} W(j\omega_0) = 0$ .

Представим комплексный коэффициент передачи в алгебраической форме (т. е. его знаменатель должен быть вещественным числом):

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= \frac{(1 - \omega^2 R^2 C C_1)^2 + \omega^2 R^2 2C(2C + C_1) + j\omega R(1 - \omega^2 R^2 C C_1)^2 (2C + C_1)}{(1 - \omega^2 R^2 C C_1)^2 + \omega^2 R^2 (2C + C_1)} = \\ &= \frac{(1 - \omega^2 R^2 C C_1)^2 + \omega^2 R^2 2C(2C + C_1)}{(1 - \omega^2 R^2 C C_1)^2 + \omega^2 R^2 (2C + C_1)} + j \frac{\omega R(1 - \omega^2 R^2 C C_1)^2 (2C + C_1)}{(1 - \omega^2 R^2 C C_1)^2 + \omega^2 R^2 (2C + C_1)}. \end{aligned}$$

Аргумент комплексного коэффициента передачи будет равен нулю, когда равна нулю его мнимая часть, т. е.  $\operatorname{Im} W(j\omega_0) = 0$ , а это означает, что должно выполняться следующее равенство:

$$1 - \omega_0^2 R^2 C C_1 = 0.$$

Отсюда получаем выражение для определения частоты настройки T-образной фазосдвигающей цепи:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{R^2 C C_1} = \frac{C_1}{R^2 C_1^2 C} = \frac{\frac{C_1}{C}}{R^2 C_1^2} = \frac{m^2}{T^2}, \text{ или } \omega_0 = \frac{m}{T},$$

где  $m = \sqrt{\frac{C_1}{C}}$ , а  $T = RC_1$ .

Определим комплексный коэффициент передачи по относительной расстройке.

Для этого сначала заменим в выражении (5.9) произведение сопротивления и емкостей на значение частоты настройки  $\omega_0 = R\sqrt{CC_1}$ .

Получим:

$$W(j\omega) = \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 2j \frac{\omega}{\omega_0} \sqrt{\frac{C}{C_1}}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{\omega_0} \left( 2\sqrt{\frac{C}{C_1}} + \sqrt{\frac{C_1}{C}} \right)}$$

Заменяем отношение частот на безразмерную относительную частоту  $x$ , приняв также  $\sqrt{\frac{C_1}{C}} = m$ . После этого получаем выражение

$$W(jx) = \frac{1 - x^2 + 2jxm}{1 - x^2 + jx \left( 2\frac{1}{m} + m \right)}$$

Вынесем из этого выражения мнимые части числителя и знаменателя и после некоторых преобразований получим:

$$\begin{aligned} W(jx) &= \frac{j \frac{x}{m^2} \cdot \frac{1 - x^2}{jx} \cdot \frac{m}{2} + 1}{jxm \left( \frac{2}{m^2} + 1 \right) \frac{1 - x^2}{jx} \cdot \frac{1}{m \left( \frac{2}{m^2} + 1 \right)} + 1} = \\ &= \frac{1}{1 + \frac{m^2}{2}} \cdot \frac{1 + j \frac{x^2 - 1}{x} \cdot \frac{m}{2}}{1 + j \frac{x^2 - 1}{x} \cdot \frac{m}{m^2 + 2}} \end{aligned}$$

Заменяем  $\frac{x^2 - 1}{x} = x - \frac{1}{x} = \delta$ .

Тогда комплексный коэффициент передачи по относительной расстройке определится следующим образом:

$$W(j\delta) = \frac{1}{1 + \frac{m^2}{2}} \cdot \frac{1 + \frac{j\delta m}{2}}{1 + \frac{j\delta m}{m^2 + 2}}$$

Обозначим значение комплексного коэффициента передачи моста  $W(j\omega_0)$  на частоте настройки  $k = \frac{1}{1 + \frac{m^2}{2}}$ . Получим следующее

выражение:

$$W(j\delta) = k \frac{1 + \frac{j\delta m}{2}}{1 + \frac{j\delta km}{2}}$$

Определим добротность Т-образной фазосдвигающей при помощи относительной расстройки по уровню 0,707.

Амплитудно-частотная характеристика по относительной расстройке будет определяться выражением

$$W(\delta) = k \frac{\sqrt{1 + \delta^2 \frac{m^2}{4}}}{\sqrt{1 + \delta^2 k^2 \frac{m^2}{4}}}$$

На частоте настройки (при  $\omega = \omega_0$ )  $\delta = 0$ , следовательно,  $W(\delta = 0) = k$ . Комплексный коэффициент передачи по относительной расстройке по уровню 0,7 определится:

$$W(\delta_{0,7}) = k \frac{\sqrt{1 + \frac{m^2 \delta_{0,7}^2}{4}}}{\sqrt{1 + \frac{m^2 \delta_{0,7}^2 k^2}{4}}}$$

Согласно выражению (5.8) можно записать:

$$\frac{\sqrt{1 + \frac{m^2 \delta_{0,7}^2}{4}}}{\sqrt{1 + \frac{m^2 \delta_{0,7}^2 k^2}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Возведя последнее выражение в квадрат, получим:  

$$\frac{4 + m^2 \delta_{0,7}^2 k^2}{4 + m^2 \delta_{0,7}^2} = \frac{1}{2},$$
 откуда определим относительную расстройку по

уровню 0,7: 
$$\delta_{0,7} = \sqrt{\frac{4}{m^2(1-2k^2)}}.$$

Так как добротность цепи обратно пропорциональна относительной, расстройку по уровню 0,7 получим:  $Q = \frac{m}{2} \sqrt{1-2k^2}$ . Как прави-

ло, для Т-мостов  $k \ll 1$ , поэтому можно считать, что  $Q \approx \frac{m}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{C_1}{C}}$ , т. е. добротность моста определяется отношением двух емкостей.

Теперь можем записать комплексный коэффициент передачи через добротность и относительную расстройку:

$$W(j\delta) = k \frac{1 + j\delta Q}{1 + j\delta k Q}.$$

Из этого выражения получаем амплитудно-частотную и фазочастотную характеристики Т-образной фазосдвигающей цепи по относительной расстройке, как модуль и аргумент комплексного коэффициента передачи:

$$\text{АЧХ: } |W(j\delta)| = k \sqrt{\frac{1 + \delta^2 Q^2}{1 + \delta^2 Q^2 k^2}}; \quad \text{ФЧХ: } \varphi(\delta) = \text{arctg}(\delta Q) - \text{arctg}(\delta Q k).$$

Графики, соответствующие этим выражениям, приведены на рис. 5.28.

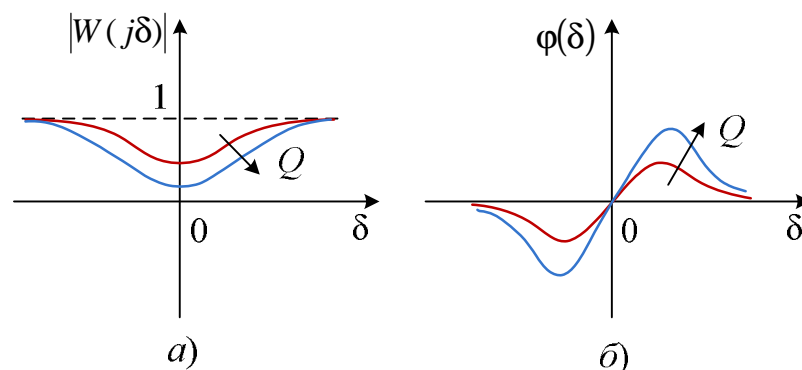


Рис. 5.28. Амплитудно-частотная (а) и фазочастотная (б) характеристики Т-образной фазосдвигающей цепи по относительной расстройке для двух значений добротности



Для схемы, изображенной на рис. 5.25, б, добротность определяется  $Q = \sqrt{\frac{R}{R_1}}$ , что более удобно на практике при построении частотно избирательных усилителей на основе Т-мостов. Кроме того, данная схема позволяет изменением одного сопротивления  $R_1$  (сопротивлением «ножки» моста) регулировать частоту настройки.

### 5.7.2. Симметричный двойной Т-мост

Двойной Т-мост (или 2Т-мост) – пассивная цепь, имеющая на частоте настройки нулевой коэффициент передачи. В электронике цепи, имеющие на определенной частоте нулевой коэффициент передачи, называют *режекторными*, не пропускающими на выход цепи сигнал определенной частоты. Способность не пропускать (подавлять) сигналы объясняется тем, что точки *a* и *б* на рис. 5.29 являются точками измерительной диагонали моста, которые при определенном соотношении сопротивлений плеч моста имеют одинаковый потенциал.

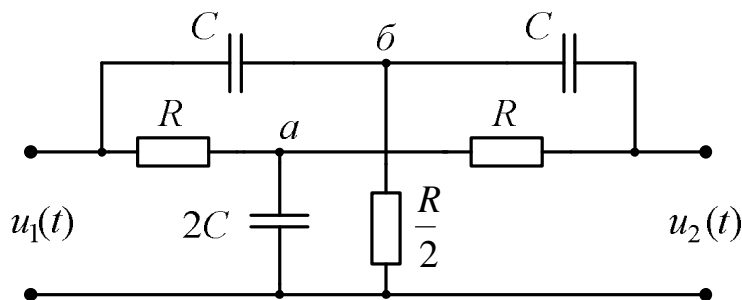


Рис. 5.29. Симметричный 2Т-мост

Передаточная функция 2Т-моста определяется выражением

$$W(p) = \frac{1 + p^2 T^2}{1 + 4pT + p^2 T^2},$$

где  $T = RC$  – постоянная времени моста.

Комплексный коэффициент передачи получается из выражения передаточной функции путем замены  $p = j\omega$ :

$$W(j\omega) = \frac{1 - \omega^2 T^2}{1 + 4j\omega T - \omega^2 T^2}. \quad (5.10)$$

Частота настройки моста определяется исходя из равенства коэффициента передачи нулю на частоте настройки:  $W(j\omega_0) = 0$ .

Для этого необходимо, чтобы числитель (5.10) был равен нулю. Откуда получим:

$$\omega_0 = \frac{1}{T} = \frac{1}{RC}.$$

Комплексный коэффициент передачи по относительной расстройке равен:

$$W(j\delta) = \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 4j \frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{1 - x^2}{1 - x^2 + 4jx} = \frac{\frac{j\delta}{4}}{1 + \frac{j\delta}{4}},$$

где  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$  – относительная частота;  $\delta = x - \frac{1}{x}$  – относительная расстройка.

Амплитудная (АЧХ) и фазовая (ФЧХ) частотные характеристики 2Т-моста по относительной расстройке определяются выражениями:

$$\text{АЧХ: } W(\delta) = \frac{\frac{\delta}{4}}{\sqrt{1 + \frac{\delta^2}{16}}}; \quad \text{ФЧХ: } \varphi(\delta) = \arctg \frac{4}{\delta}.$$

Графики этих зависимостей приведены на рис. 5.30.

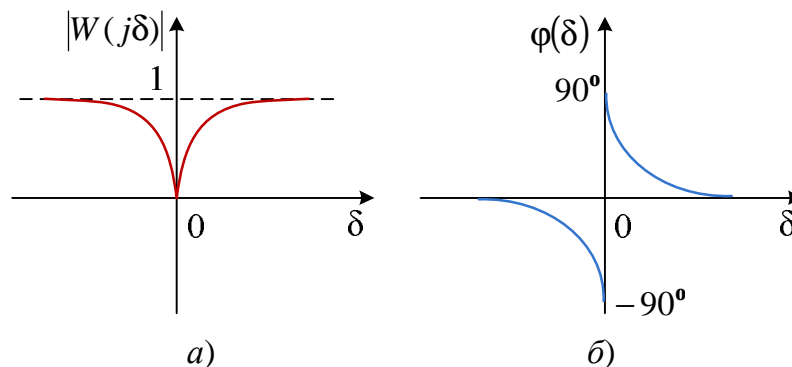


Рис. 5.30. Амплитудно-частотная (а) и фазочастотная (б) характеристики 2Т-моста по относительной расстройке

Применяются такие цепи в режекторных заградительных фильтрах для подавления одной определенной частоты, а также для построения частотно-избирательных усилителей.

### 5.7.3. Симметричный делитель Вина

Симметричным делителем (мостом) Вина называют цепь, составленную из последовательной и параллельной  $RC$ -цепочек (рис. 5.31). Такие делители применяются при построении частотно-избирательных усилителей, генераторов гармонических колебаний и т. д. Если резисторы или конденсаторы в схеме имеют различные номиналы, делитель называется несимметричным. Наиболее часто применяется симметричный делитель Вина (рис. 5.31), так как он обладает большей добротностью.

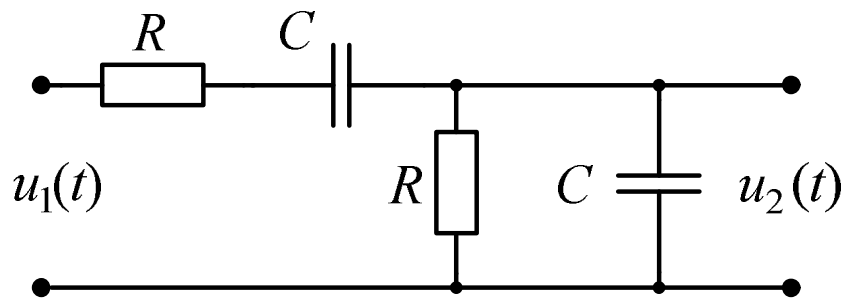


Рис. 5.31. Симметричный делитель Вина

Передаточная функция симметричного делителя Вина определяется следующим образом:

$$W(p) = \frac{\frac{R}{pC}}{R + \frac{1}{pC}} \cdot \frac{R}{\frac{pC}{R + \frac{1}{pC}} + R + \frac{1}{pC}} = \frac{pRC}{1 + 3pRC + p^2R^2C^2}.$$

Обозначим  $T = RC$ , получим: 
$$W(p) = \frac{pT}{1 + 3pT + p^2T^2}.$$

Комплексный коэффициент передачи делителя Вина получается из выражения передаточной функции путем замены  $p = j\omega$ :

$$W(j\omega) = \frac{j\omega T}{1 - \omega^2 T^2 + j3\omega T}.$$

Для того чтобы определить частоту настройки  $\omega_0$ , на которой модуль комплексного коэффициента передачи имеет экстремум, а фазочастотная характеристика переходит через ноль, приравняем к нулю аргумент комплексного коэффициента передачи моста Вина:

$$\arg W(j\omega) = \operatorname{arctg} \frac{1 - \omega^2 T^2}{3\omega T} = 0.$$

Приравнявая числитель к нулю, найдем значение частоты настройки делителя:  $\omega_0 = \frac{1}{T} = \frac{1}{RC}$ .

Определим комплексный коэффициент передачи по относительной расстройке:

$$W(j\delta) = \frac{jx}{1 - x^2 + j3x} \frac{\frac{1}{3}}{1 + \frac{j\delta}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{1 + \frac{\delta^2}{9}}} e^{-j \operatorname{arctg} \frac{\delta}{3}},$$

где  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$  – относительная частота;  $\delta = x - \frac{1}{x}$  – относительная расстройка.

Амплитудная (АЧХ) и фазовая (ФЧХ) частотные характеристики 2Т-моста по относительной расстройке определяются выражениями:

$$\text{АЧХ: } W(\delta) = \frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{1 + \frac{\delta^2}{9}}};$$

$$\text{ФЧХ: } \varphi(\delta) = -\operatorname{arctg} \frac{\delta}{3}.$$

Графики этих зависимостей приведены на рис. 5.32.

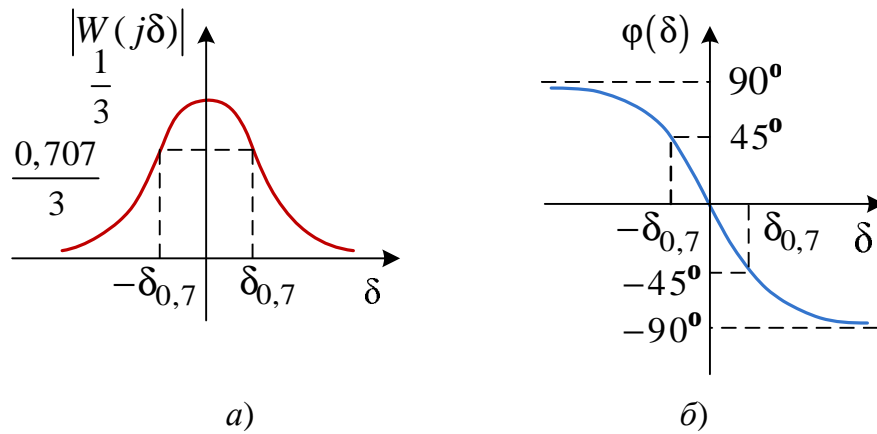


Рис. 5.32. Амплитудно-частотная (а) и фазочастотная (б) характеристики симметричного делителя Вина по относительной расстройке

Как видно из рис. 5.32, а, на частоте настройки делитель Вина имеет максимум, что позволяет строить на его основе схемы частотно-избирательных усилителей.

## Глава 6. Анализ активных линейных цепей

*Активными* называются цепи, содержащие источники электрической энергии. Наличие такого источника приводит к наличию у цепи свойств, которые не могут быть получены в пассивных цепях. В многополюсных активных цепях мощность сигнала на выходе может быть существенно больше мощности входного сигнала. Генераторы сигналов той или иной формы – это активные цепи.

Для анализа активных цепей применяются следующие методы:

- 1) метод эквивалентных схем;
- 2) матричный метод;
- 3) метод направленных графов.

Рассмотрим более подробно каждый из них.

### 6.1. Матрицы параметров и схемы замещения четырехполюсников

Для описания свойств активного четырехполюсника применяют системы  $y$ -,  $z$ -,  $h$ - или  $g$ -параметров. Активные четырехполюсники не подчиняются условию взаимности – параметры передач в прямом и обратном направлениях неодинаковы:

$$y_{12} \neq y_{21}; z_{12} \neq z_{21}; h_{12} \neq -h_{21}; g_{12} \neq -g_{21}.$$

Активные четырехполюсные элементы являются преимущественно односторонними или направленными элементами в отличие от обычных двусторонних пассивных элементов. Сигнал, передаваемый в прямом направлении (от входа к выходу), значительно больше сигнала, передаваемого в обратном направлении (от выхода к входу). Следствием этого является то, что матрицы параметров узловых напряжений или контурных токов не будут симметричными.

Уравнения четырехполюсника, записанные через любую систему параметров, можно представить в виде схемы замещения, составленной из двухполюсных пассивных элементов и так называемых зависимых, или управляемых, источников напряжения (тока). Напряжения (токи) зависимых источников могут зависеть (быть пропорциональными) от напряжения (тока) любой ветви или любого участка цепи.

Зависимые источники вводятся формально как удобный способ представления параметров активных четырехполюсников, облегчающий составление уравнений по схеме цепи.

Схемы замещения для заданной системы уравнений можно получить на основе теоремы об эквивалентном источнике напряжения или тока. Теорема применяется к входным и выходным выводам четырехполюсника: со стороны любой пары выводов четырехполюсник можно представить эквивалентным источником напряжения (тока) с соответствующим внутренним сопротивлением (проводимостью), определяемым при коротком замыкании или разрыве противоположной пары выводов.

Рассмотрим схемы замещения для различных параметров четырехполюсника.

Уравнения через  $y$ -параметры (считаем величины  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $I_1$  и  $I_2$  преобразованиями Лапласа временных зависимостей напряжений и токов на входах и выходах четырехполюсника) описываются системой уравнений:

$$\begin{cases} I_1 = y_{11} U_1 + y_{12} U_2; \\ I_2 = y_{21} U_1 + y_{22} U_2. \end{cases}$$

Их можно представить схемой с двумя зависимыми источниками тока  $y_{21}U_1$  и  $y_{12}U_2$ , которые управляются напряжениями на входе и выходе (рис. 6.1). Первый источник описывает прямую передачу от входа к выходу, а второй – обратную передачу.

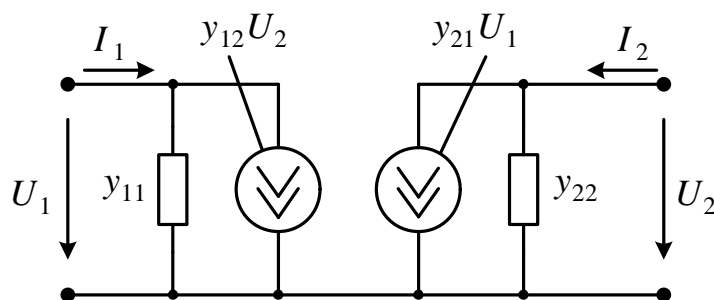


Рис. 6.1. Схема замещения для  $y$ -параметров активного четырехполюсника с двумя зависимыми источниками тока

Путем преобразования второго уравнения к виду:

$$I_2 = y_{12}U_1 + y_{22}U_2 + (y_{21} - y_{12}) \cdot U_1,$$

получается П-образная схема замещения (рис. 6.2) активного четырехполюсника с одним источником тока  $(y_{21} - y_{12}) \cdot U_1$ .

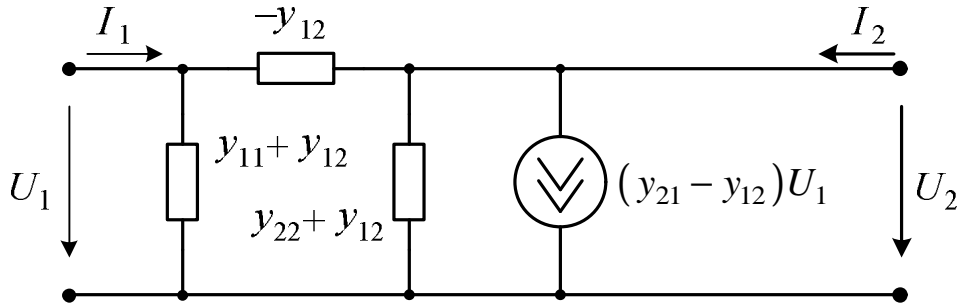


Рис. 6.2. Схема замещения для  $y$ -параметров активного четырехполюсника с одним зависимым источником тока

Непосредственным вычислением параметров схем, полученных в режимах короткого замыкания выхода и входа, легко убедиться, что они соответствуют  $y$ -параметрам четырехполюсника.

Аналогично можно получить схемы замещения для  $z$ -,  $h$ - и  $g$ -параметров.

Для уравнений через смешанные  $h$ -параметры:

$$\begin{cases} U_1 = h_{11}I_1 + h_{12}U_2; \\ I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}U_2 \end{cases}$$

получается схема с источником тока  $h_{21}I_1$  и источником напряжения  $h_{12}U_2$  (рис. 6.3).

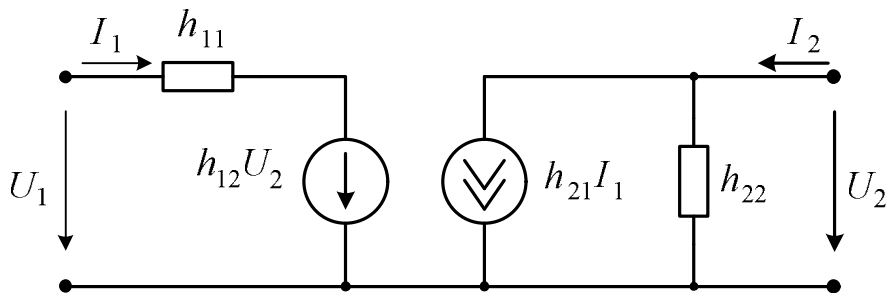


Рис. 6.3. Схема замещения для  $h$ -параметров активного четырехполюсника с зависимыми источниками тока и напряжения

Источник тока учитывает прямую передачу при коротком замыкании на выходе, а источник напряжения – обратную передачу при разомкнутом входе.



## 6.2. Параметры усилительных элементов в режиме малых сигналов

Рассмотрим примеры схем замещения электронной лампы и транзистора.

Электронный триод имеет три электрода: катод, сетку и анод. На рис. 6.4 приведена схема включения лампы с общим катодом.

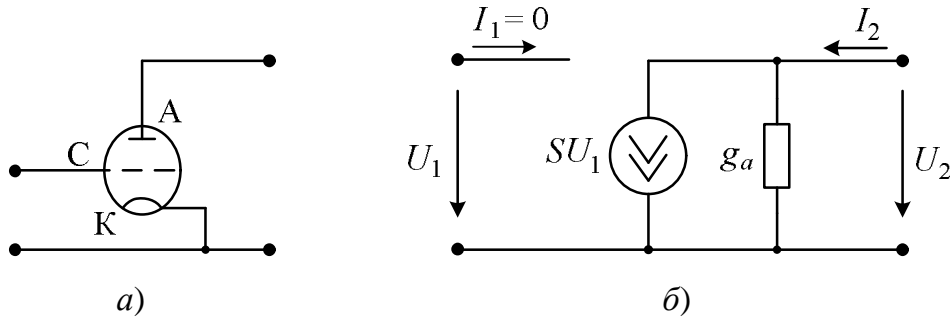


Рис. 6.4. Схема включения электронной лампы с общим катодом (а) и ее схема замещения (б)

Схема замещения лампы содержит источник тока, управляемый напряжением (рис. 6.4, б).

Матрица проводимости триода записывается в виде:

$$[Y] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ S & g_a \end{bmatrix},$$

где  $S = y_{21}$  – крутизна лампы;  $g_a = y_{22}$  – выходная проводимость лампы.

Преобразование источника тока в эквивалентный источник напряжения, управляемый напряжением, дает схему, изображенную на рис. 6.5.

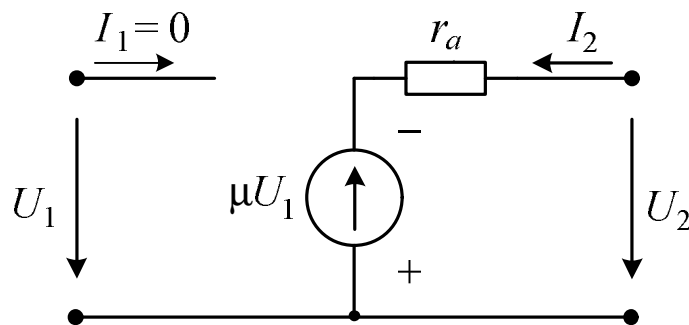


Рис. 6.5. Схема замещения электронной лампы с источником напряжения

На рис. 6.5 обозначено:  $\mu = \frac{S}{g_a}$  – коэффициент усиления триода,

$r_a = \frac{1}{g_a}$  – выходное сопротивление лампы.

Матрица  $G$ -параметров для триода имеет следующий вид:

$$[G] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\mu & r_a \end{bmatrix}.$$

Приведенные схемы справедливы на низких частотах, когда междуэлектродные емкости лампы можно не учитывать. Это емкости  $C_{СК}$ ,  $C_{АК}$  и  $C_{АС}$ . Типичные значения параметров триодов:

$$S = 1 \div 8 \text{ мА/В}, \quad \mu = 10 \div 100.$$

Для полупроводникового транзистора (рис. 6.6, а) широко используется Т-образная схема замещения с управляемым источником тока (рис. 6.6, б). Эта схема справедлива на низких частотах. Она строится на основе физических процессов, протекающих в транзисторе.

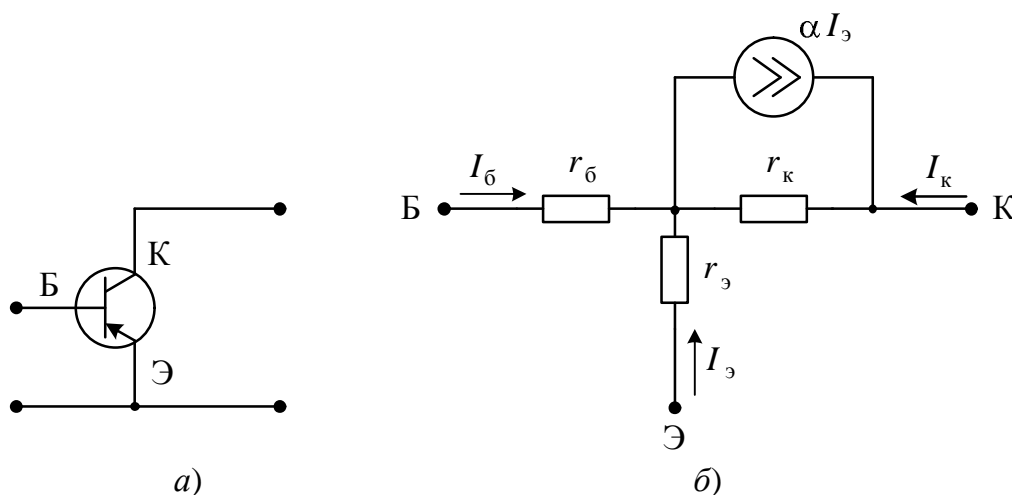


Рис. 6.6. Схема включения биполярного транзистора с общим эмиттером (а) и ее схема замещения (б):  $r_э$  и  $r_к$  – сопротивления соответственно эмиттерного и коллекторного переходов;  $r_б$  – сопротивление базовой области;  $\alpha$  – управляющий параметр зависимого источника тока

Параллельное соединение зависимого источника тока и сопротивления  $r_к$  может быть преобразовано в последовательное соедине-

ние зависимого источника напряжения  $\alpha r_k I_3$  и сопротивления  $r_k$ . На высоких частотах необходимо учитывать еще емкости переходов.

На низкой частоте матрица сопротивлений для схемы с общим эмиттером выражается следующим образом:

$$[Z] = \begin{bmatrix} r_3 + r_6 & r_3 \\ r_3 - \alpha r_k & r_3 + r_k(1 - \alpha) \end{bmatrix}.$$

Матрица проводимостей – это обратная матрица сопротивлений:

$$[Y] = [Z]^{-1} = \frac{1}{\Delta_z} \begin{bmatrix} r_3 + r_k(1 - \alpha) & -r_3 \\ -r_3 + \alpha r_k & r_3 + r_6 \end{bmatrix},$$

где  $\Delta_z \approx r_k(r_3 + r_6(1 - \alpha)) + r_3 r_6$  – определитель матрицы сопротивлений. Типичные значения для транзисторов:  $\alpha = 0,9 \div 0,99$ ,  $r_3 \approx 25$  Ом,  $r_6 \approx 500$  Ом,  $r_k \approx 10^6$  Ом, т. е.  $r_3 < r_6 < r_k$ .

Полевой транзистор на низких частотах имеет такую же схему замещения, как электронная лампа.

У ламповых триодов и транзисторов один вывод является общим для входа и выхода. В качестве общего может быть выбран любой из трех выводов. Все приведенные схемы замещения могут применяться при выборе того или иного вывода в качестве общего. Вместе с тем матрицы параметров различны для каждой схемы включения усилительного элемента.

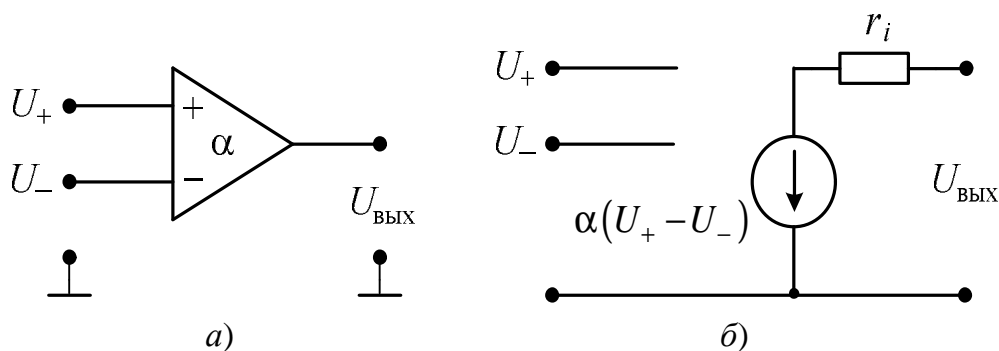


Рис. 6.7. Операционный усилитель: *a* – обозначение на принципиальной схеме; *б* – схема замещения

Эквивалентная схема операционного усилителя (ОУ) на низкой частоте приведена на рис. 6.7. Она содержит зависимый источник напряжения, управляемый напряжениями на неинвертирующем и ин-

вертирующем входах (рис. 6.7, б). Инвертирующий вход на схеме обозначается знаком «−» или кружком, неинвертирующий вход – знаком «+» (рис. 6.7, а). Входные сопротивления каждого входа стремятся к бесконечности, выходное сопротивление  $r_i$  очень мало и в идеальном случае стремится к нулю. Коэффициент усиления ОУ очень велик ( $10^3$  и более).

### 6.3. Неопределенная матрица усилительных элементов

Матрицу параметров активного трехполюсника (электронной лампы, транзистора) при той или иной схеме его включения удобно получать с помощью так называемой неопределенной матрицы проводимостей.

Нужно выбрать четвертый базисный узел цепи и относительно него определять напряжения  $U_1$ ,  $U_2$  и  $U_3$  (рис. 6.8). При таком включении нет определенной ориентации выводов 1–3, которые могут быть приняты за входные и выходные. Любой из трех выводов может быть выбран в качестве общего для входа и выхода.

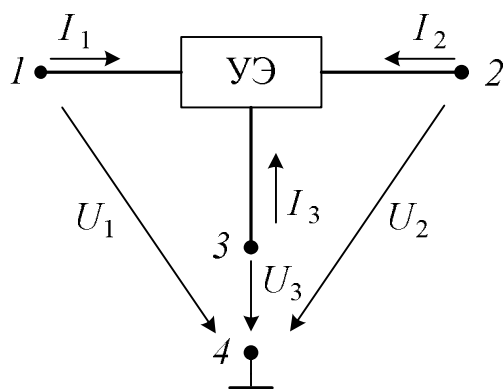


Рис. 6.8. К определению неопределенной матрицы проводимостей

Уравнения через  $y$ -параметры для общего случая включения трехполюсника запишутся в виде:

$$I_1 = y_{11}U_1 + y_{12}U_2 + y_{13}U_3;$$

$$I_2 = y_{21}U_1 + y_{22}U_2 + y_{23}U_3;$$

$$I_3 = y_{31}U_1 + y_{32}U_2 + y_{33}U_3.$$

Соответствующая этой системе матрица называется неопределенной матрицей проводимости:

$$[Y] = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{bmatrix}.$$

Элементы неопределенной матрицы оказываются зависимыми друг от друга. Действительно, по первому закону Кирхгофа имеем:

$$I_1 + I_2 + I_3 = \\ = (y_{11} + y_{21} + y_{31})U_1 + (y_{12} + y_{22} + y_{32})U_2 + (y_{13} + y_{23} + y_{33})U_3 = 0.$$

Для выполнения этого равенства, справедливого при любых значениях напряжения, необходимо, чтобы коэффициенты при напряжениях были равны нулю. Следовательно, сумма элементов столбцов неопределенной матрицы должна равняться нулю. Аналогично сумма элементов строк неопределенной матрицы также должна быть равна нулю. Это следует из того, что в частном случае одинаковых напряжений всех выводов:  $U_1 = U_2 = U_3$  токи через выводы не будут протекать:  $I_1 = I_2 = I_3 = 0$ .

Указанные свойства позволяют легко записать неопределенную матрицу усилительного элемента. Для этого к известной матрице проводимости второго порядка следует добавить новую строку и новый столбец, элементы которых равны соответственно суммам элементов столбцов и строк исходной матрицы, взятых с обратным знаком.

$$[Y] = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & -(y_{11} + y_{12}) \\ y_{21} & y_{22} & -(y_{21} + y_{22}) \\ -(y_{11} + y_{21}) & -(y_{12} + y_{22}) & (y_{11} + y_{12} + y_{21} + y_{22}) \end{bmatrix}.$$

Имея неопределенную матрицу, легко получить матрицы параметров при выборе любого из выводов в качестве общего. Если общим является вывод 3, нужно вычеркнуть третью строку и третий столбец. Аналогично вычеркивание первой строки и первого столбца дает матрицу параметров в случае, если общим является первый вывод. В схеме с общим вторым выводом нужно в неопределенной матрице вычеркнуть вторую строку и второй столбец.

**Пример.** Электронная лампа в схеме с общим катодом имеет следующую матрицу проводимостей:

$$[Y]_{\text{OK}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ S & g_a \end{bmatrix}.$$

Неопределенная матрица будет иметь вид:

$$[Y] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ S & g_a & -(S + g_a) \\ -S & -g_a & S + g_a \end{bmatrix}.$$

Тогда для схемы с общим анодом нужно вычеркнуть вторую строку и второй столбец. Получим:

$$[Y]_{\text{OA}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -S & S + g_a \end{bmatrix}.$$

Введение неопределенной матрицы сопротивлений связано с трудностью, вызванной тем, что сумма напряжений трех узлов не равна нулю. Поэтому матрицы сопротивлений при повороте трехполюсников находят с помощью неопределенной у-матрицы.

#### **6.4. Анализ линейных активных цепей с помощью эквивалентных схем**

При анализе активных цепей с помощью эквивалентных схем все усилительные элементы представляются схемами замещения, содержащими зависимые источники и пассивные двухполюсные элементы.

Для анализа цепей с зависимыми источниками можно применять все методы расчета пассивных цепей, необходимо только учесть зависимые источники, выразив их управляющие напряжения и токи через выбранные в качестве искоемых переменные цепи.

Можно также применить методы контурных токов и узловых напряжений, но в этом случае матрицы параметров цепей не будут симметричными.

При составлении уравнений узловых напряжений источники напряжений (как независимые, так и зависимые) следует преобразовать в эквивалентные источники тока, а затем выразить управляющие величины зависимых источников через узловые напряжения.

**Пример.** Рассмотрим двухкаскадный усилитель на электронных лампах (рис. 6.9).

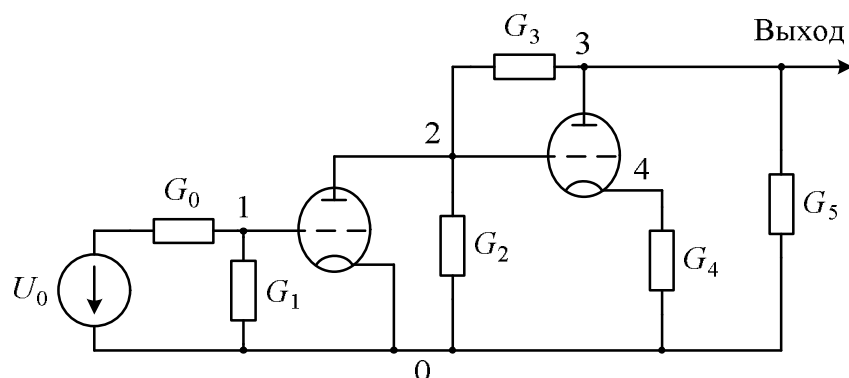


Рис. 6.9. Усилитель на электронных лампах

Нарисуем расчетную схему с указанием четырех независимых узлов (рис. 6.10) при выборе нижнего узла в качестве базисного. Источник напряжения  $U_0$  преобразуем в источник тока  $I_0 = G_0 U_0$ . Электронные лампы представим схемами замещения с источниками токов, выходные проводимости которых обозначены через  $g_{a1}$  и  $g_{a2}$ .

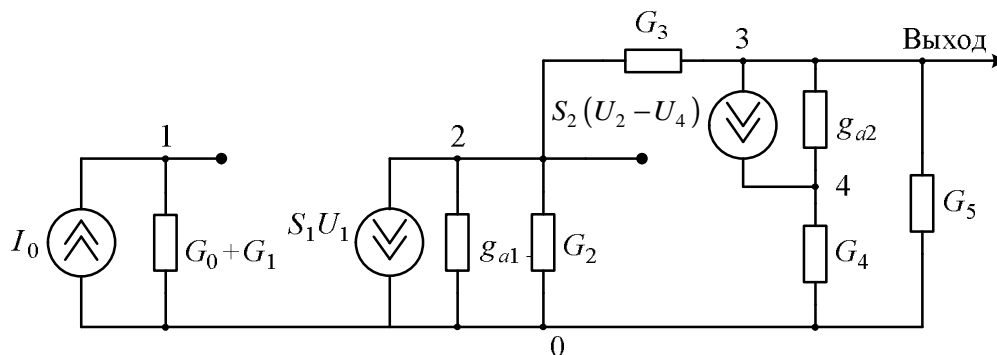


Рис. 6.10. Расчетная схема усилителя на электронных лампах

Система уравнений, записанная по методу узловых потенциалов, имеет вид:

$$\begin{cases} (G_0 + G_1)U_1 = I_0; \\ (g_{a1} + G_2 + G_3)U_2 - G_3U_3 = -I_2 = -S_1U_1; \\ -G_3U_2 + (G_3 + g_{a2} + G_5)U_3 - g_{a2}U_4 = -I_3 = -S_2(U_2 - U_4); \\ -g_{a2}U_3 + (g_{a2} + G_4)U_4 = I_3 = S_2(U_2 - U_4). \end{cases}$$

Перенесем из правой части уравнений в левую часть величины, пропорциональные узловым напряжениям, и получим:

$$\begin{cases} (G_0 + G_1)U_1 = I_0; \\ S_1U_1 + (g_{a1} + G_2 + G_3)U_2 - G_3U_3 = 0; \\ (S_2 - G_3)U_2 + (G_3 + g_{a2} + G_5)U_3 - (S_2 + g_{a2})U_4 = 0; \\ -S_2U_2 - g_{a2}U_3 + (g_{a2} + G_4 + S_2)U_4 = 0. \end{cases}$$

Решение этой системы уравнений и определение функций цепи требуют раскрытия определителей третьего и четвертого порядка.

Аналогично записываются уравнения цепи по методу контурных токов. Зависимыми источниками в этих уравнениях должны быть источники напряжения, управляемые токами в каких-либо ветвях цепи.

**Пример.** Рассмотрим схему усилителя на транзисторе с общим эмиттером (рис. 6.11, а).

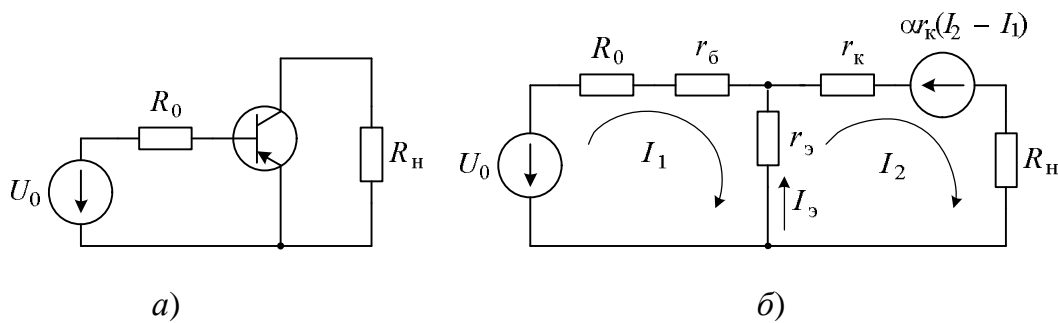


Рис. 6.11. Усилитель на транзисторе (а) и расчетная схема (б)

Представим транзистор низкочастотной Т-образной схемой замещения с управляемым источником напряжения  $\alpha r_к I_э$  (рис. 6.11, б). В этой схеме мы имеем два контура с токами  $I_1$  и  $I_2$ . Ток  $I_2$  определяет напряжение на нагрузке усилителя. Уравнения, составленные по методу контурных токов, имеют вид:

$$\begin{cases} I_1(R_0 + r_б + r_э) - I_2 r_э = U_0; \\ -I_1 r_э + I_2(r_э + r_к + R_H) = \alpha r_к(I_2 - I_1). \end{cases}$$

Переносим величины с токами в левую часть:

$$\begin{cases} I_1(R_0 + r_б + r_э) - I_2 r_э = U_0; \\ I_1(\alpha r_к - r_э) + I_2(r_э + r_к + R_H - \alpha r_к) = 0. \end{cases}$$



Решение этой системы уравнений достаточно легкое и, выполнив его, мы сможем проанализировать схему.

**Пример.** Рассмотрим схему с операционным усилителем. Возьмем неинвертирующий усилитель (рис. 6.12, а).

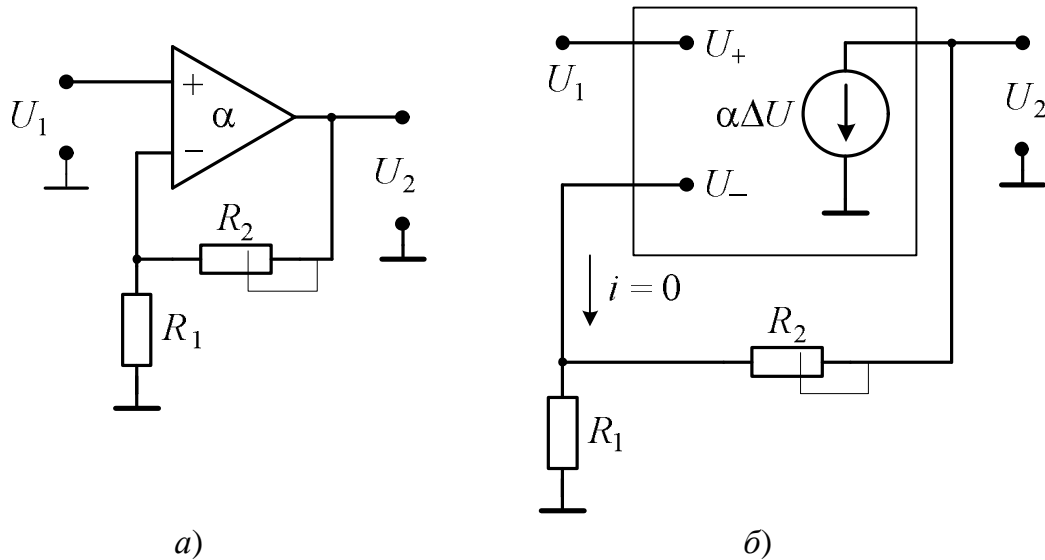


Рис. 6.12. Неинвертирующий усилитель на операционном усилителе (а) и его расчетная схема (б)

Будем считать, что операционный усилитель обладает нулевым выходным сопротивлением и конечным большим коэффициентом усиления. Нарисуем расчетную схему такого усилителя (рис. 6.12, б). Напряжение между входами операционного усилителя:  $\Delta U = U_+ - U_-$ . Выходное напряжение схемы имеет вид:

$$U_2 = \alpha (U_+ - U_-) = \alpha \left( U_1 - U_2 \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right).$$

Отсюда получаем выражение для коэффициента усиления неинвертирующего усилителя:

$$W(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{\alpha}{1 + \frac{\alpha R_1}{R_1 + R_2}}.$$

Если  $\frac{\alpha R_1}{R_1 + R_2} \gg 1$ , то  $W(p) = \frac{R_1 + R_2}{R_1}$ . То есть коэффициент передачи неинвертирующего усилителя больше единицы и определяет-

ся только внешними сопротивлениями. Кроме того, напряжения на входе и выходе усилителя совпадают по фазе. Поэтому такой усилитель называется *неинвертирующим*.

## 6.5. Метод четырехполюсников

В ряде случаев может оказаться более удобным представлять усилительный элемент не в виде схемы замещения, а матрицей параметров. При этом задачу можно решать путем разбиения цепи на четырехполюсники (метод четырехполюсников). В таких случаях для анализа схемы необходимо иметь матрицы параметров усилительных элементов.

Заданная цепь разбивается на соединенные различным образом простые активные и пассивные четырехполюсники, для которых имеются готовые таблицы параметров. Предварительно необходимо выбрать вариант разбиения, требующий наименьших вычислений.

Так как при этом расчете возникают различные соединения четырехполюсников, анализ связан с преобразованием одного вида параметров в другой вид.

**Пример.** Найдем функцию усиления для схемы однокаскадного усилителя на транзисторе в схеме с общим эмиттером (рис. 6.13).

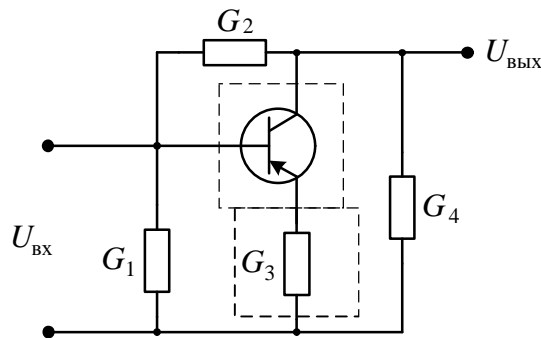


Рис. 6.13. Усилитель на транзисторе и его разбиение на четырехполюсники

Разобьем схему на три блока: транзистор, эмиттерное сопротивление транзистора (на схеме выделены пунктиром) и П-образный четырехполюсник из ветвей  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $G_4$ . Первые два четырехполюсника соединены последовательно. Складывая их матрицы сопротивлений, найдем:

$$\left[ Z_1^{\text{акт}} \right] = \begin{bmatrix} r_3 + r_6 & r_3 \\ -\alpha r_k & r_k(1 - \alpha) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_3 & R_3 \\ R_3 & R_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_3 + r_6 + R_3 & r_3 + R_3 \\ -\alpha r_k + R_3 & r_k(1 - \alpha) + R_3 \end{bmatrix}.$$

Полученный составной четырехполюсник соединен параллельно с третьим четырехполюсником. Складывая матрицы  $y$ -параметров, предварительно преобразовав матрицу  $[Z_1^{\text{акт}}]$  в матрицу  $[Y_1^{\text{акт}}]$ , получим матрицу для всей схемы:

$$\begin{aligned} [Y^\Sigma] &= [Y_1^{\text{акт}}] + [Y^{\text{пас}}] = \begin{bmatrix} y_{11}^{\text{акт}} & y_{12}^{\text{акт}} \\ y_{21}^{\text{акт}} & y_{22}^{\text{акт}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 + G_2 & G_2 \\ G_2 & G_4 + G_2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} y_{11}^{\text{акт}} + G_1 + G_2 & y_{12}^{\text{акт}} + G_2 \\ y_{21}^{\text{акт}} + G_2 & y_{22}^{\text{акт}} + G_4 + G_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Тогда коэффициент усиления по напряжению имеет вид:

$$W_u(p) = \frac{U_{\text{вых}}(p)}{U_{\text{вх}}(p)} = \frac{-y_{21}^\Sigma}{y_{22}^\Sigma} = \frac{-(y_{21}^{\text{акт}} + G_2)}{y_{22}^{\text{акт}} + G_4 + G_2}.$$

## 6.6. Графы электронных и полупроводниковых приборов

Матрицы и схемы замещения электронной лампы и транзистора, рассмотренные выше, справедливы для линейного режима их работы – в режиме малых сигналов. Кроме того, приведенные матрицы и схемы замещения справедливы на низких частотах, на высоких частотах необходимо еще учитывать межэлектродные емкости.

Для этих же условий нарисуем и графы электронных и полупроводниковых приборов. Эти графы могут быть легко получены с помощью неопределенной матрицы проводимости.

В общем виде граф проводимости представлен на рис. 6.14. Для передач ветвей на рисунке справедливы следующие выражения:

$$-y_{13} = y_{11} + y_{12}, \quad -y_{31} = y_{11} + y_{21}, \quad -y_{23} = y_{21} + y_{22}, \quad -y_{32} = y_{12} + y_{22}.$$

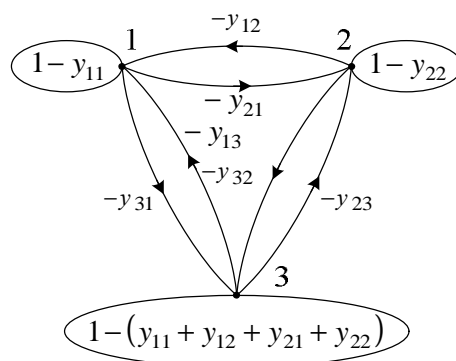


Рис. 6.14. Граф проводимостей трехполюсника

На низкой частоте элементы матрицы проводимостей биполярного транзистора имеют порядок:  $S \equiv y_{21} \sim 10^{-1}$ ,  $g \equiv y_{11} \sim 10^{-3}$ ,  $g_i \equiv y_{22} \sim 10^{-5}$ ,  $y_{12} \approx 10^{-6}$ ; для полевого транзистора:  $S \equiv y_{21}$ ,  $g_i \equiv y_{22}$ ,  $y_{12} \approx 0$ ,  $y_{11} \approx 0$ . С учетом этого графы транзисторов будут иметь вид, представленный соответственно на рис. 6.15, а и 6.15, б. Электронная лампа имеет граф, аналогичный графу полевого транзистора.

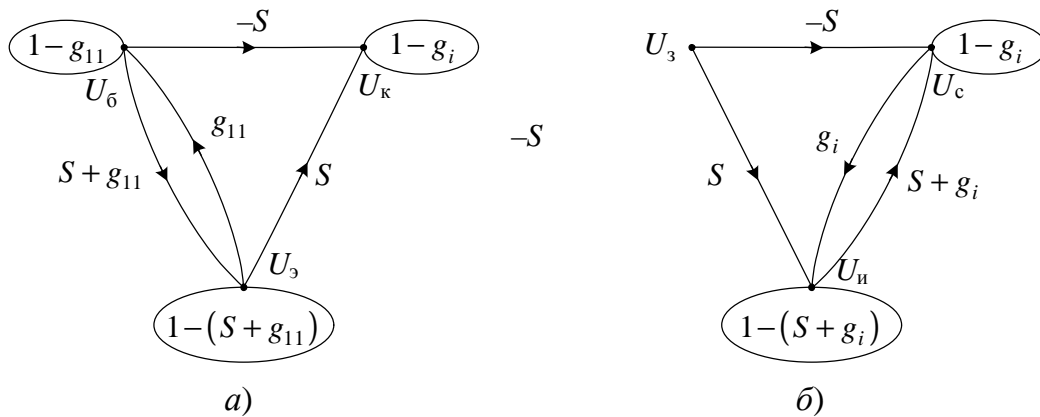


Рис. 6.15. Графы биполярного (а) и полевого (б) транзисторов

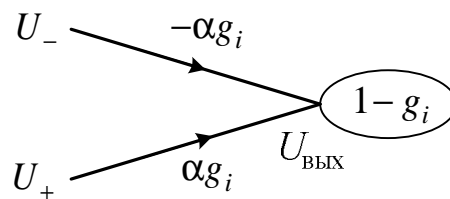


Рис. 6.16. Граф операционного усилителя

Граф операционного усилителя изображен на рис. 6.16, на котором приняты следующие обозначения:  $g_i = \frac{1}{r_i}$  – выходная проводимость ОУ;  $\alpha$  – его коэффициент усиления.

## 6.7. Анализ электронных цепей с помощью графов

Для построения графа электронной схемы необходимо иметь графы всех элементов, из которых она состоит: электронной лампы, транзистора, операционного усилителя и т. д. Если схема простая, не очень разветвленная, то граф рисуется непосредственно по схеме. Если же схема многокаскадная, очень разветвленная, она может быть

разбита на отдельные узлы, для которых может быть легко нарисован граф. И затем графы отдельных узлов соединяются и образуется граф всей схемы.

**Пример.** Рассмотрим схему, состоящую из транзистора и трехполюсных элементов (рис. 6.17).

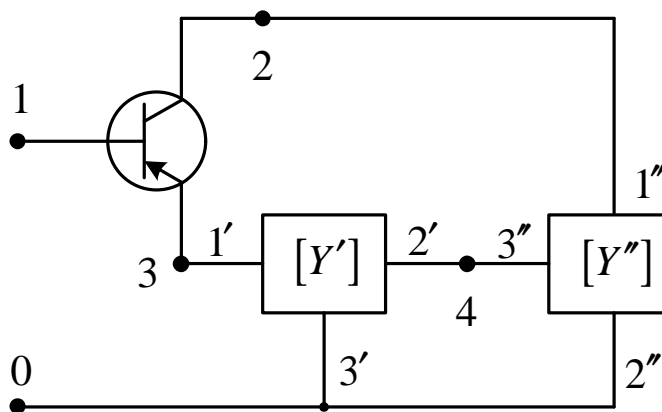


Рис. 6.17. Схема из нескольких трехполюсников

Решение задачи начинается с изображения графов отдельных элементов: транзистора и каждого трехполюсника. Граф транзистора содержит три узла, так как ни один из его выводов не соединен с общим (нулевым) узлом (рис. 6.15). Третий вывод первого трехполюсника соединен с общим узлом схемы и в его графе (рис. 6.14) необходимо оставить только первые два узла и соединяющие их ветви. Для третьего трехполюсника из общего графа необходимо исключить второй узел и все связи с ним. Все три графа приведены на рис. 6.18. Затем графы соединяются (соединение осуществляется по пунктирным линиям на рис. 6.18). При этом в передачах собственных контуров единицы не складываются, складываются только оставшиеся части передач собственных контуров. В результате получается граф, изображенный на рис. 6.19.

Далее производится решение графа электронной схемы. Как правило, сначала исключаются собственные контуры, а далее граф или упрощается, или решается с помощью формулы Мэсона.

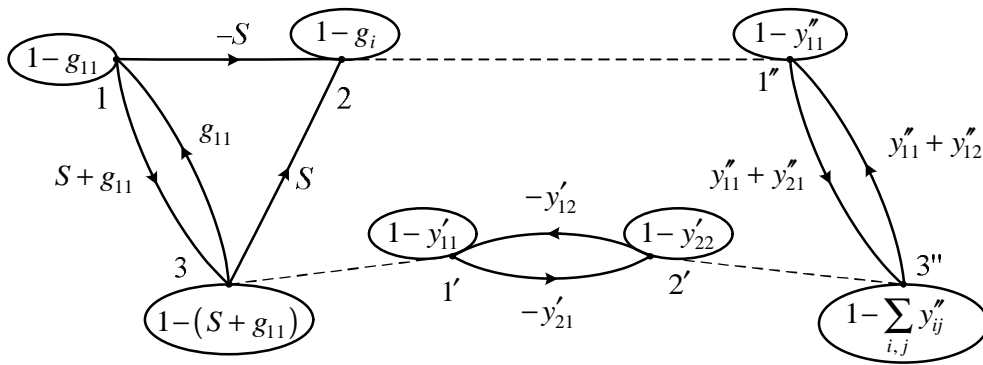


Рис. 6.18. Графы трехполюсников, изображенных на рис. 6.17

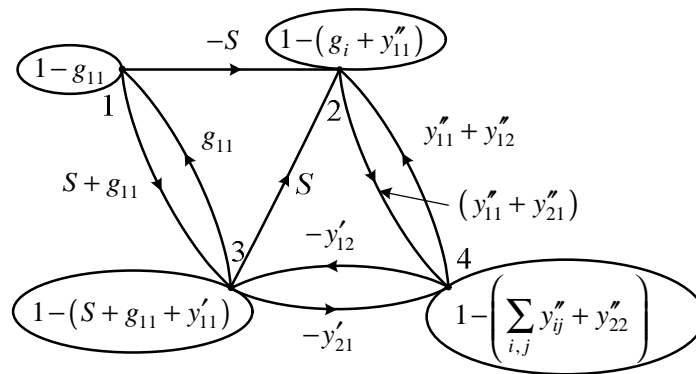


Рис. 6.19. Граф схемы, изображенной на рис. 6.17

**Пример.** Усилитель на биполярном транзисторе (рис. 6.20, а). Входной сигнал подается на базу транзистора, выходной – снимается с коллектора. Сопротивления  $R_2$  и  $R_3$  создают смещение на базе транзистора, цепочка  $R_1C_1$  служит для стабилизации рабочего режима.

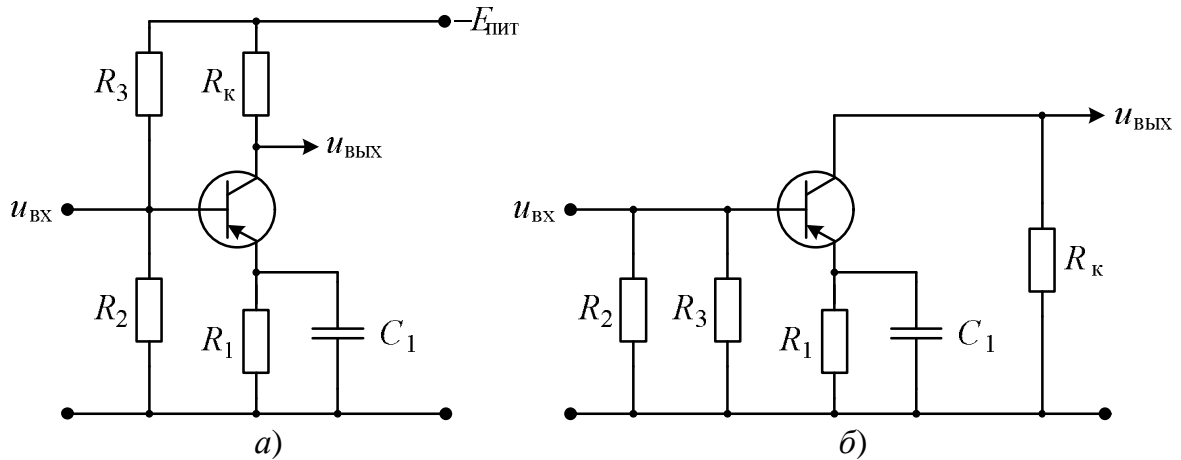


Рис. 6.20. Усилитель на биполярном транзисторе (а) и его расчетная схема на частоте полезного сигнала (б)

На частоте полезного сигнала сопротивление источника питания равно нулю. Поэтому расчетная схема каскада имеет вид, изображенный на рис. 6.20, б.

Направленный граф каскада содержит граф транзистора, дополненный элементами, учитывающими сопротивления и конденсатор (рис. 6.21, а). На рис. 6.21 приняты следующие обозначения:

$$g_r = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}; \quad g_k = \frac{1}{R_k}; \quad y_1 = j\omega C_1 + \frac{1}{R_1}.$$

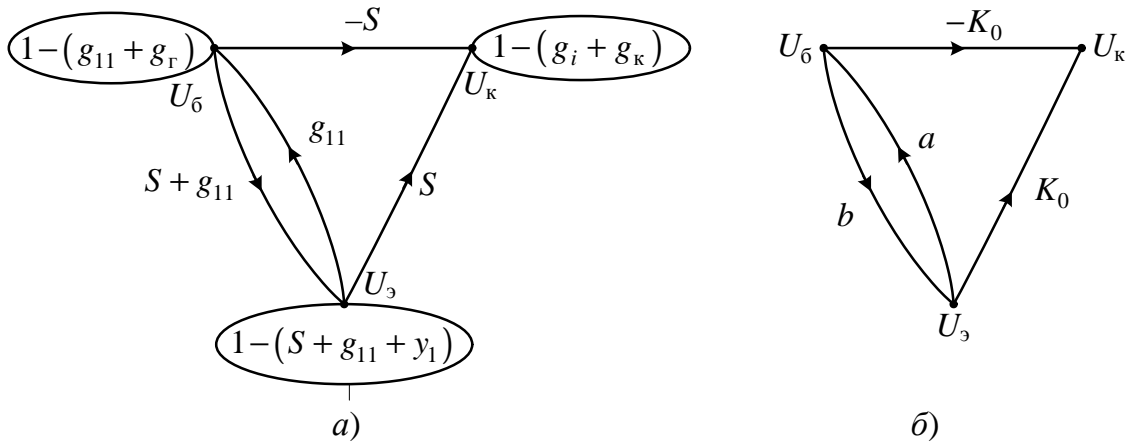


Рис. 6.21. Граф усилителя на биполярном транзисторе (а) и его вид после исключения собственных контуров (б)

Прежде всего, для решения графа необходимо исключить собственные контуры. Получившийся после этого преобразования граф изображен на рис. 6.21, б, где использованы обозначения:

$$K_0 = \frac{S}{g_i + g_k}; \quad a = \frac{g_{11}}{g_{11} + g_r}; \quad b = \frac{S + g_{11}}{S + g_{11} + y_1}.$$

Комплексный коэффициент передачи каскада – это отношение напряжения на коллекторе  $u_k$  к напряжению на базе  $u_6$ :

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= \frac{U_k(j\omega)}{U_6} = -K_0 + bK_0 = -K_0(1-b) = \\ &= -K_0 \left( 1 - \frac{S + g_{11}}{S + g_{11} + y_1} \right) = -K_0 \frac{y_1}{S + g_{11} + y_1} = \frac{-K_0(1 + j\omega\tau)}{1 + R_1(S + g_{11}) + j\omega\tau}, \end{aligned}$$

где  $\tau = R_1 C_1$ .

Амплитудно-частотная характеристика:

$$|W(j\omega)| = K_0 \sqrt{\frac{1 + \omega^2 \tau^2}{F_0^2 + \omega^2 \tau^2}} = K_0 W_H(\omega),$$

где  $F_0 = 1 + R_1(S + g_{11})$ ;  $W_H(\omega) = \sqrt{\frac{1 + \omega^2 \tau^2}{F_0^2 + \omega^2 \tau^2}}$  – нормированная АЧХ усилителя.

Построим полученную зависимость (рис. 6.22). На нулевой частоте нормированная АЧХ равна  $\frac{1}{F_0}$ . С ростом частоты нормированная АЧХ возрастает и приближается к единице. Увеличение емкости  $C_1$  приводит к более быстрому приближению характеристики к максимальному значению.

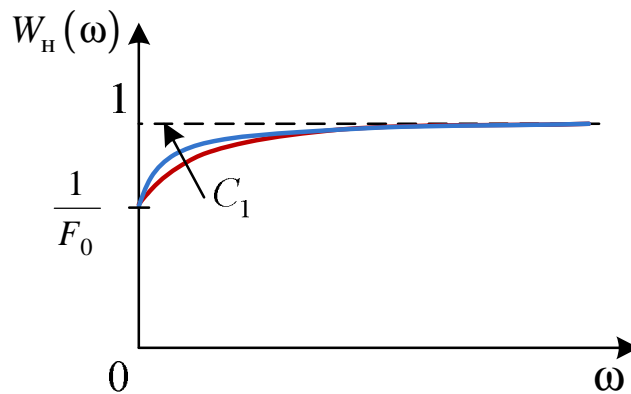


Рис. 6.22. Нормированная АЧХ усилителя, изображенного на рис. 6.20, а

**Пример.** Рассмотрим схему конвертора сопротивлений (рис. 6.23, а), построенного на операционном усилителе. Требуется определить входное сопротивление схемы. Операционный усилитель будем считать идеальным, т. е. его выходная проводимость  $g_i$  стремится к бесконечности, а коэффициент усиления много больше единицы. Нарисуем граф схемы (рис. 6.23, б).



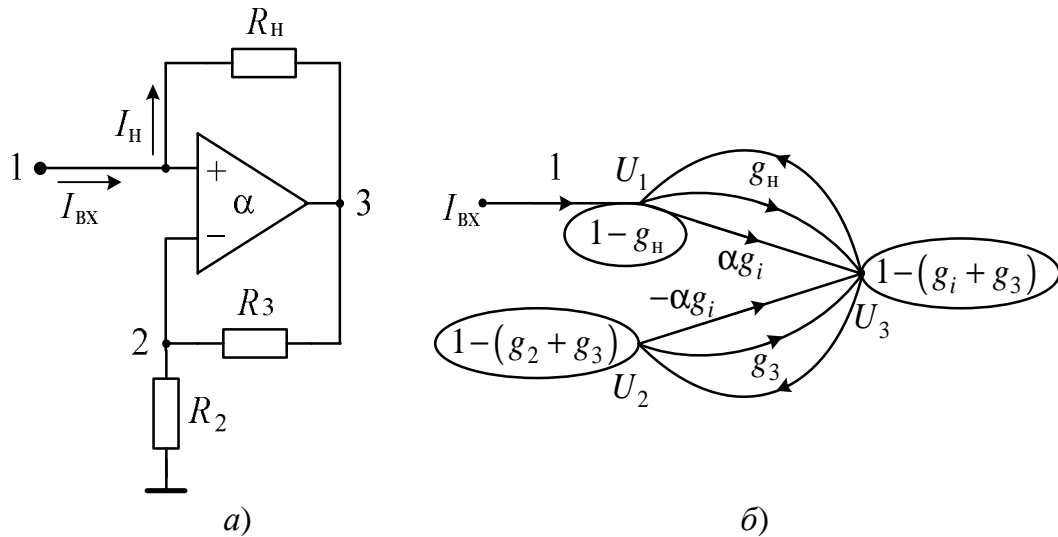


Рис. 6.23. Конвертор сопротивлений на операционном усилителе (а) и его направленный граф (б)

Решение этого графа проще всего выполнить его преобразованием. Прежде всего удаляем собственные контуры (рис. 6.24, а). На рисунке обозначено:

$$a = \frac{\alpha g_i + g_H}{g_i + g_3 + g_H}; \quad b = \frac{-\alpha g_i + g_3}{g_i + g_3 + g_H}; \quad c = \frac{g_3}{g_2 + g_3}.$$

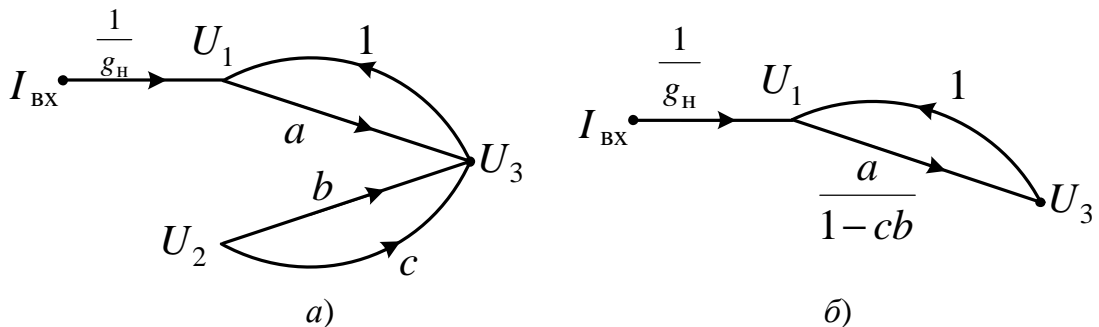


Рис. 6.24. Преобразование графа конвертера сопротивления:  
а – граф после устранения собственных контуров;  
б – граф после устранения собственного контура  $U_3-U_2-U_3$

Удаляем собственный контур  $U_3-U_2-U_3$  (рис. 6.24, б). Решение этого графа имеет вид:

$$U_1 = I_{\text{вх}} \frac{1}{g_H} \cdot \frac{1}{1 - \frac{a}{1 - cb}},$$

откуда получаем выражение для входного сопротивления:

$$Z_{\text{вх}} = \frac{1}{g_{\text{н}}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{a}{1 - cb}} = \frac{1 - cb}{g_{\text{н}}(1 - cb - a)} =$$

$$= \frac{1 - \frac{g_3}{g_2 + g_3} \cdot \frac{-\alpha g_i + g_3}{g_i + g_{\text{н}}}}{g_{\text{н}} \left( 1 - \frac{g_3}{g_2 + g_3} \cdot \frac{-\alpha g_i + g_3}{g_i + g_3 + g_{\text{н}}} - \frac{\alpha g_i + g_{\text{н}}}{g_i + g_3 + g_{\text{н}}} \right)}$$

Устремим в этом выражении  $g_i$  к бесконечности и получим:

$$Z_{\text{вх}} = \frac{1 + \frac{\alpha g_3}{g_2 + g_3}}{g_{\text{н}} \left( 1 + \frac{\alpha g_3}{g_2 + g_3} - \alpha \right)} = \frac{\alpha g_3}{g_{\text{н}} (g_2 + g_3 + \alpha g_3 - \alpha g_2 - \alpha g_3)}$$

Учтем, что  $\alpha$  велико, тогда окончательно получим:

$$Z_{\text{вх}} = -\frac{g_3}{g_{\text{н}} g_2} = -\frac{R_{\text{н}} R_2}{R_3}$$

## 6.8. Схемы с обратной связью

Как правило, обратная связь применяется в активных четырехполюсниках (усилителях).

Под *обратной связью* понимают процесс возврата части сигнала с выхода активного четырехполюсника к входу и изменения тем самым свойств и характеристик цепи (рис. 6.25). Возврат сигнала осуществляется цепью обратной связи  $\beta(p)$ . В результате образуется контур обратной связи – замкнутый путь прохождения сигнала, который состоит из прямого пути, образуемого активным четырехполюсником, и обратного пути, образуемого цепью (обычно пассивной) обратной связи, причем  $U_{\text{ос}}(p) = \beta(p) \cdot U_{\text{вых}}$ .

Обратная связь позволяет существенно улучшить характеристики активной цепи, поэтому она широко применяется в устройствах, использующих электронные цепи. Коэффициент обратной связи  $\beta$  операционной схемы есть отношение дифференциального входного напряжения операционного усилителя к его выходному напряжению при разомкнутой петле обратной связи.

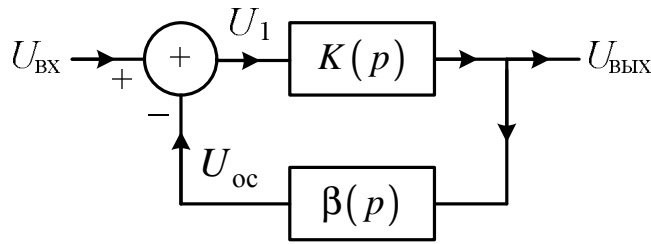


Рис. 6.25. Активный четырехполюсник с обратной связью

Обратная связь позволяет:

- сделать стабильным коэффициент усиления усилителя;
- устранить неустойчивость усилителя;
- построить генераторы колебаний;
- построить активные фильтры.

Выразим передаточную функцию устройства с обратной связью через передаточные функции прямой и обратной передач.

При этом будем полагать:

- четырехполюсники прямой и обратной передач односторонние;
- подключение цепи обратной связи не влияет на прямую цепь.

Из схемы на рис. 6.25 следует:

$$U_{\text{ВЫХ}} = K(p) \cdot U_1; \quad U_1 = U_{\text{ВХ}} - U_{\text{ВЫХ}} \beta(p).$$

Исключение  $U_1$  дает:

$$U_{\text{ВЫХ}} = K(p) \cdot U_{\text{ВХ}} - K(p) \cdot \beta(p) \cdot U_{\text{ВЫХ}};$$

$$U_{\text{ВЫХ}} = \frac{K(p) \cdot U_{\text{ВХ}}}{1 + K(p) \cdot \beta(p)}. \quad (6.1)$$

Формула (6.1) указывает на большие возможности конструирования активных четырехполюсников.

Предположим, что выбрали подсистемы  $K(p)$  и  $\beta(p)$  такими, чтобы коэффициент усиления в контуре  $K(p) \cdot \beta(p)$  значительно превышал единицу. Тогда

$$U_{\text{ВЫХ}} = \frac{U_{\text{ВХ}}}{\beta(p)}.$$

То есть:

- если усиление в контуре большое, то общая передаточная функция практически не зависит от свойств прямого тракта  $K(p)$ ;

– если усиление в контуре большое, то общая передаточная функция примерно равна обратному значению передаточной функции тракта обратной связи  $\beta(p)$ .

Заметим, что знак «плюс» в знаменателе формулы (6.1) является результатом выбора знака «минус» на нижнем входе (входе обратной связи) суммирующего элемента на структурной схеме; если бы знак обратной связи на этой схеме был «плюс», то в знаменателе выражения (6.1) был бы «минус».

Необходимо выделить два вида обратной связи. Это отрицательная обратная связь, при которой сигнал обратной связи действительно уменьшает входное воздействие на блок  $K(p)$  (в наших обозначениях это  $\beta > 0$ ), и положительная обратная связь, при которой сигнал обратной связи увеличивает входное воздействие ( $\beta < 0$  или изменение знака на суммирующем элементе на плюс).

## 6.9. Избирательные усилители

*Частотно-избирательным* называют усилитель с зависимым от частоты коэффициентом усиления и имеющим на частоте настройки максимальный коэффициент усиления (рис. 6.26).

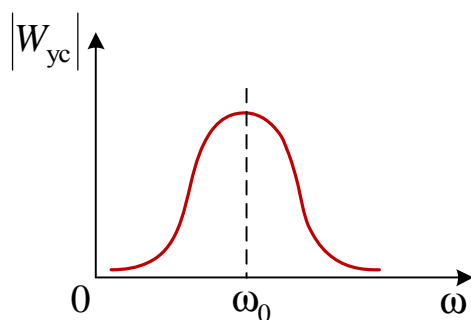


Рис. 6.26. Коэффициент усиления частотно-избирательного усилителя

### 6.9.1. Усилители на основе Т-образной фазосдвигающей цепи

Рассмотрим усилитель с симметричной Т-образной фазосдвигающей цепью в цепи обратной связи. На рис. 6.27, а изображена цепь, а на рис. 6.27, б — ее АЧХ.

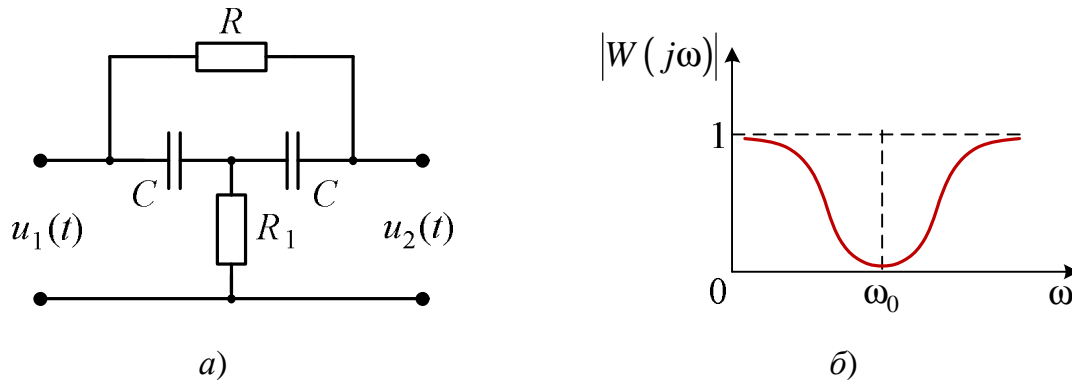


Рис. 6.27. Симметричная Т-образная фазосдвигающая цепь (а) и ее амплитудно-частотная характеристика (б)

Эта цепь имеет комплексный коэффициент передачи по относительной расстройке  $\delta$  (см. 5.7.1):

$$W_T(j\delta) = \frac{\delta - 2j\sqrt{\frac{R_1}{R}}}{\delta - j\left(2\sqrt{\frac{R_1}{R}} + \sqrt{\frac{R}{R_1}}\right)} = k \frac{1 + \frac{j\delta}{2}}{1 + \frac{j\delta}{2}}$$

$$\text{где } \delta = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}, \quad m = \sqrt{\frac{R}{R_1}}, \quad k = \frac{1}{1 + \frac{m^2}{2}}.$$

Амплитудно-частотная характеристика Т-образной фазосдвигающей цепи на частоте настройки  $\omega_0 = \frac{1}{C\sqrt{RR_1}}$  имеет минимальный коэффициент передачи, равный  $k$ .

Для построения частотно-избирательных усилителей на основе Т-образной фазосдвигающей цепи используют усилитель с обратной связью, в котором произведение прямого и обратного коэффициентов передачи велико [(см. формулу (6.1)]:

$$K(p) \cdot \beta(p) \gg 1,$$

причем фазосдвигающую цепь необходимо включать в цепь отрицательной обратной связи (рис. 6.28).

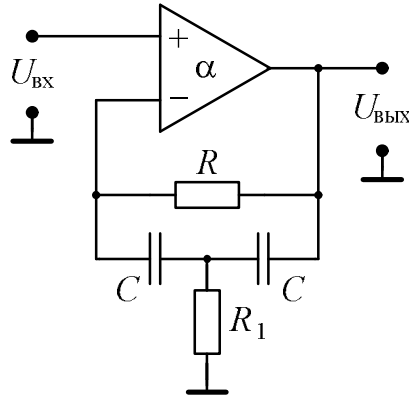


Рис. 6.28. Частотно-избирательный усилитель с Т-образной фазосдвигающей цепью в цепи обратной связи

В этом случае  $W_{yc}(p) = \frac{1}{\beta(p)}$  и коэффициент по относительной расстройке будет равен:

$$W_{yc}(j\delta) = \frac{U_{\text{ВЫХ}}(j\delta)}{U_{\text{ВХ}}(j\delta)} = \frac{1}{W_T(j\delta)} = \frac{1}{k} \cdot \frac{1 + j\delta k Q}{1 + j\delta Q},$$

где  $Q = \frac{m}{2} \sqrt{1 - 2k^2} \approx \frac{m}{2}$  – добротность моста; ( $k \ll 1$ ).

Коэффициент передачи на частоте настройки ( $\delta = 0$ ) будет равен:

$$W_{yc}(0) = \frac{1}{k} \approx 2Q^2.$$

То есть он всегда больше единицы.

Частотно-избирательные свойства усилителя характеризуются добротностью усилителя, которая определяется по нормированной АЧХ усилителя:

$$W_{н.ус}(\delta = \delta_{0,7}) = \frac{\sqrt{1 + \delta_{0,7}^2 k^2 Q^2}}{\sqrt{1 + \delta_{0,7}^2 Q^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Решение этого уравнения относительно  $\delta_{0,7}$  дает:

$$Q_{yc} = \frac{1}{\delta_{0,7}} = Q \sqrt{1 - 2k^2} \approx Q.$$

Таким образом, добротность усилителя равна добротности Т-моста.

Часто для оценки качества избирательных усилителей пользуются понятием коэффициента подавления, который определяется для конкретной гармоники и равен отношению коэффициента усиления на частоте настройки к коэффициенту усиления на определенной гармонике:

$$K_{\text{под}n} = \frac{W_{\text{yc}}(\delta = 0)}{W_{\text{yc}}(\delta = \delta_n)},$$

где  $n$  – номер гармоники;  $\delta_n$  – относительная расстройка, соответствующая  $n$ -й гармонике (с частотой  $\omega_n = n\omega_0$ ):

$$\delta_n = \frac{\omega_n}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_n}.$$

Подстановка  $W_{\text{yc}}$  для Т-моста дает:

$$K_{\text{под}n} = \frac{\sqrt{1 + \delta_n^2 Q^2}}{\sqrt{1 + \delta_n^2 k^2 Q^2}}.$$

Так как обычно  $k \ll 1$ , то приближенное значение  $K_{\text{под}n}$  можно представить простой формулой

$$K_{\text{под}n} = \delta_n Q,$$

т. е.  $K_{\text{под}n}$  прямо пропорционален добротности усилителя и относительной расстройке по  $n$ -й гармонике.

### **6.9.2. Частотно-избирательный усилитель на основе делителя Вина**

Делитель Вина на частоте настройки имеет максимум, поэтому в активном фильтре (в избирательном усилителе) он должен стоять в цепи положительной обратной связи (ОС), но для того, чтобы избежать возникновения на выходе генерации колебаний, необходимо положительную обратную связь компенсировать отрицательной. Поэтому при построении частотно-избирательного усилителя на основе делителя Вина в цепь положительной обратной связи ставится мост Вина, а отрицательная обратная связь осуществляется по инвертирующему входу (рис. 6.29).

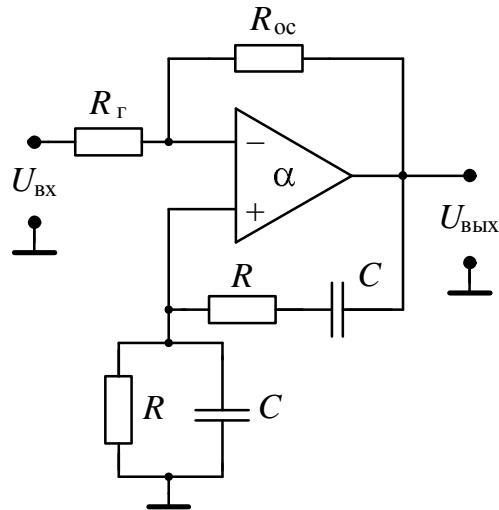


Рис. 6.29. Частотно-избирательный усилитель с делителем Вина в цепи обратной связи

Будем считать, что коэффициент усиления и входное сопротивление операционного усилителя стремятся к бесконечности. Тогда  $\Delta U = (U_1 - U_2) \rightarrow 0$ . И для комплексных амплитуд  $U_1 = U_2$ .

Использование эквивалентной схемы операционного усилителя дает:

$$U_1 = U_{\text{ВХ}} \frac{R_{\text{ОС}}}{R_{\Gamma} + R_{\text{ОС}}} + U_{\text{ВЫХ}} \frac{R_{\Gamma}}{R_{\Gamma} + R_{\text{ОС}}}.$$

Кроме того,

$$U_2 = W_{\text{В}}(j\delta) \cdot U_{\text{ВЫХ}}.$$

Приравнивание правых частей этих двух уравнений дает связь между напряжениями  $U_{\text{ВЫХ}}$  и  $U_{\text{ВХ}}$ :

$$U_{\text{ВЫХ}} \left[ W_{\text{В}}(j\delta) - \frac{R_{\Gamma}}{R_{\Gamma} + R_{\text{ОС}}} \right] = U_{\text{ВХ}} \frac{R_{\text{ОС}}}{R_{\Gamma} + R_{\text{ОС}}}.$$

Отсюда получаем выражение для коэффициента передачи усилителя:

$$W_{\text{yc}}(j\delta) = \frac{\frac{R_{\text{ОС}}}{R_{\Gamma} + R_{\text{ОС}}}}{W_{\text{В}}(j\delta) - \frac{R_{\Gamma}}{R_{\Gamma} + R_{\text{ОС}}}} = \frac{\frac{R_{\text{ОС}}}{R_{\Gamma} + R_{\text{ОС}}}}{\frac{1}{3} - \frac{R_{\Gamma}}{R_{\Gamma} + R_{\text{ОС}}}} = \frac{1}{1 + j\frac{\delta}{3}}$$



$$= \frac{R_{oc} \left(1 + j \frac{\delta}{3}\right)}{\frac{1}{3}(R_r + R_{oc}) - R_r \left(1 + j \frac{\delta}{3}\right)} = \frac{\left(1 + j \frac{\delta}{3}\right)}{\frac{1}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{R_r}{R_{oc}} - j \frac{\delta}{3} \cdot \frac{R_r}{R_{oc}}}.$$

После преобразований окончательно получаем:

$$W_{yc}(j\delta) = \frac{-3 \frac{R_{oc}}{R_r} \left(1 + j \frac{\delta}{3}\right)}{\left(2 - \frac{R_{oc}}{R_r}\right) \left(1 + j\delta \frac{1}{2 - \frac{R_{oc}}{R_r}}\right)}.$$

Добротность избирательного усилителя определяется из условия:

$$\frac{W_{yc}(\delta_{0,7})}{W_{yc}(0)} = \frac{1}{\sqrt{2}}; Q_{yc} = \frac{1}{\delta_{0,7}}.$$

Откуда получается:

$$Q_{yc} \cong \frac{1}{2 - \frac{R_{oc}}{R_r}}. \quad (6.2)$$

С учетом этого:

$$W_{yc}(j\delta) = \frac{-3 \frac{R_{oc}}{R_r} Q_{yc} \left(1 + j \frac{\delta}{3}\right)}{1 + j\delta Q_{yc}}.$$

Коэффициент усиления на частоте настройки:

$$|W_{yc}(0)| = +3 \frac{R_{oc}}{R_r} Q_{yc}.$$

Так как  $Q_{yc} \gg 1$ , то из формулы (6.2)  $\frac{R_{oc}}{R_r} \approx 2$ . Тогда

$$|W_{yc}(0)| \approx +6Q_{yc}.$$

Такая жесткая зависимость  $|W_{yc}(0)|$  от добротности является недостатком такого избирательного усилителя.

### 6.9.3. Частотно-избирательный усилитель на основе 2Т-моста

2Т-мост имеет характеристику режекторного фильтра, поэтому для построения частотно-избирательного усилителя на его основе его необходимо ставить в цепь ООС. Однако из-за того, что на частоте настройки коэффициент передачи моста равен нулю, нужно вводить дополнительную частотно-независимую ООС, которая будет определять коэффициент усилителя на частоте настройки. В противном случае без дополнительной ООС коэффициент усиления будет равен бесконечности.

Ранее 2Т-мост был проанализирован в режиме холостого хода на выходе. Это условие необходимо выполнить и при построении частотно-избирательного усилителя. Для этого на выход моста включается либо повторитель с высоким входным сопротивлением, либо большое сопротивление  $R_1 = (5 \div 10)R$  (рис. 6.30).

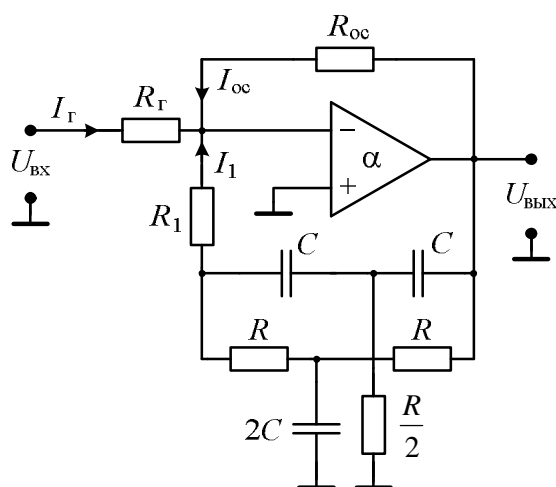


Рис. 6.30. Частотно-избирательный усилитель с 2Т-мостом в цепи обратной связи

При большом коэффициенте усиления операционного усилителя напряжение между его входами  $\Delta U \approx 0$ . Тогда легко определяются токи:

$$I_{\Gamma} = \frac{U_{\text{ВХ}}}{R_{\Gamma}}; I_{\text{oc}} = \frac{U_{\text{ВЫХ}}}{R_{\text{oc}}}; I_1 = \frac{W_{2\Gamma}(j\delta) \cdot U_{\text{ВЫХ}}}{R_1}. \quad (6.3)$$

По первому закону Кирхгофа:

$$I_{\Gamma} + I_{oc} + I_1 = 0.$$

Подстановка в это равенство (6.3) дает:

$$\frac{U_{\text{ВХ}}}{R_{\Gamma}} + U_{\text{ВЫХ}} \left[ \frac{1}{R_{oc}} + \frac{W_{2\Gamma}(j\delta)}{R_1} \right] = 0.$$

Из этого выражения получаем коэффициент передачи усилителя:

$$W_{yc}(j\delta) = \frac{U_{\text{ВЫХ}}}{U_{\text{ВХ}}} = \frac{-\frac{1}{R_{\Gamma}}}{\frac{1}{R_{oc}} + \frac{W_{2\Gamma}(j\delta)}{R_1}} = \frac{-\frac{R_{oc}}{R_{\Gamma}}}{1 + \frac{j\frac{\delta}{4} \cdot R_{oc}}{1 + j\frac{\delta}{4} \cdot \frac{R_{oc}}{R_1}}} = \frac{-\frac{R_{oc}}{R_{\Gamma}} \left(1 + j\frac{\delta}{4}\right)}{1 + j\frac{\delta}{4} \left(1 + \frac{R_{oc}}{R_1}\right)}.$$

Отсюда находится добротность  $Q$  частотно-избирательного усилителя и коэффициент усиления на частоте настройки  $W_{yc}(0)$ :

$$Q = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{R_{oc}}{R_1}\right); \quad W_{yc}(0) = -\frac{R_{oc}}{R_{\Gamma}}.$$

С учетом этих выражений передаточная функция запишется следующим образом:

$$W_{yc}(j\delta) = \frac{W_{yc}(0) \left(1 + j\frac{\delta}{4}\right)}{1 + j\delta Q}.$$

Отсюда видно:

- Добротность частотно-избирательного усилителя с 2Т-мостом в цепи обратной связи устанавливается не элементами моста, а внешними сопротивлениями  $R_{oc}$  и  $R_1$ .

- Коэффициент усиления на частоте настройки также не зависит от элементов моста, а устанавливается внешними сопротивлениями  $R_{oc}$  и  $R_{\Gamma}$ , его можно изменять независимо от добротности соответствующим выбором  $R_{\Gamma}$ .

# Глава 7. Математическое описание цепей с распределенными параметрами

## 7.1. Характеристики нагруженной линии передачи

Цепи, размеры элементов которых соизмеримы с длиной волны колебаний, действующих в цепи, называются *цепями с распределенными параметрами*. К ним относятся длинные линии (линии передачи), излучающие элементы и др.

Длинные линии предназначены для передачи высокочастотной энергии от генератора к нагрузке. Они состоят из двух или более проводников различной формы. Различают симметричные и несимметричные линии передачи (рис. 7.1). В двухпроводной симметричной линии (рис. 7.1, а) по одному из проводов ток течет в одном направлении, по второму – в другом. Коаксиальная линия (рис. 7.1, б) – это несимметричная линия. Она состоит из двух соосных цилиндров, токи в которых имеют противоположное направление.

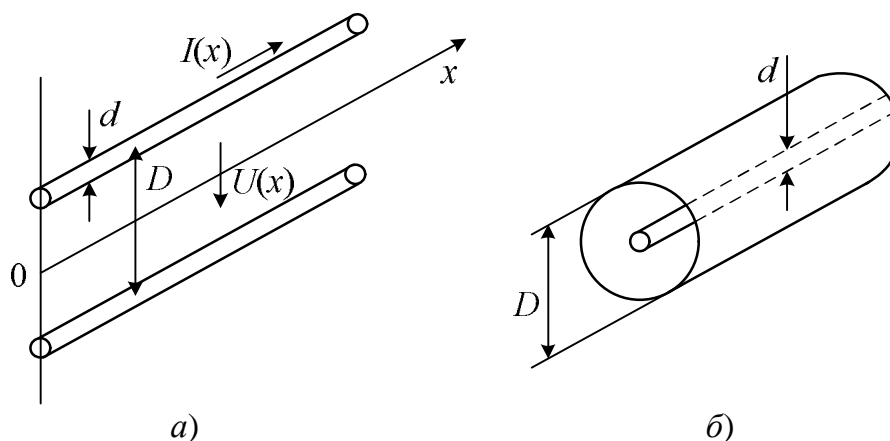


Рис. 7.1. Линии передачи: а – симметричная линия; б – несимметричная линия

Длинные линии характеризуются погонными постоянными:  $L$ ,  $C$ ,  $R$ ,  $G$ . Погонное сопротивление  $R$  определяется проводимостью материала стенок линии, погонная проводимость  $G$  – проводимостью диэлектрика, заполняющего пространство между проводниками линии.

Вторичными параметрами линии передачи являются характеристическое или волновое сопротивление  $W$  и постоянная распространения  $\gamma = \alpha + j\beta$ , где  $\alpha$  – коэффициент затухания и  $\beta$  – волновое число,

равное  $\frac{2\pi}{\lambda}$  [рад/м],  $\lambda$  – длина волны в линии. Их величины определяются геометрией поперечного сечения линии и материалом, из которого она изготовлена.

Для двухпроводной симметричной линии, расположенной в воздухе, при условии  $\frac{D}{d} \gg 1$  волновое сопротивление равно:

$$W = 276 \lg \frac{2D}{d},$$

для коаксиальной линии:

$$W = 138 \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \lg \frac{D}{d},$$

где  $\mu$  и  $\varepsilon$  – относительные магнитная и диэлектрическая проницаемости материала между проводниками линии.

Напряжение и ток (их комплексные амплитуды) в линии подчиняется телеграфным уравнениям, решение которых имеет вид:

$$\begin{cases} U(x) = A_1 e^{-\gamma x} + A_2 e^{\gamma x}; \\ I(x) = \frac{A_1}{W} e^{-\gamma x} - \frac{A_2}{W} e^{\gamma x}. \end{cases} \quad (7.1)$$

Первые слагаемые в уравнениях – это волны, бегущие в положительном направлении оси  $X$ , вторые – в отрицательном. Первая волна пропорциональна  $e^{-\alpha x} e^{-j\beta x}$  – это падающая волна  $U_{\text{пад}}$ . Вторая волна пропорциональна  $e^{\alpha x} e^{j\beta x}$  – это отраженная волна  $U_{\text{отр}}$ . Напряжение и ток в сечении  $x$  равны:

$$U(x) = U_{\text{пад}}(x) + U_{\text{отр}}(x) = U_{\text{пад}}(x)(1 + \Gamma(x)); \quad (7.2)$$

$$I(x) = \frac{U_{\text{пад}}(x)}{W} - \frac{U_{\text{отр}}(x)}{W} = \frac{U_{\text{пад}}(x)}{W}(1 - \Gamma(x)), \quad (7.3)$$

где  $\Gamma(x) = \frac{U_{\text{отр}}(x)}{U_{\text{пад}}(x)}$  – коэффициент отражения в сечении  $x$ .

Для линии без потерь ( $\alpha = 0$ ) постоянная затухания линии  $\gamma$  – величина чисто мнимая. Модули напряжения и тока (или их

действующие значения) в соответствии с формулами (7.2) и (7.3) имеют волнообразный характер (рис. 7.2) с равными минимумами  $U_{\min}(x) = |U_{\text{пад}}(x)|(1 - |\Gamma(x)|)$  и равными максимумами  $U_{\max}(x) = |U_{\text{пад}}(x)|(1 + |\Gamma(x)|)$ .

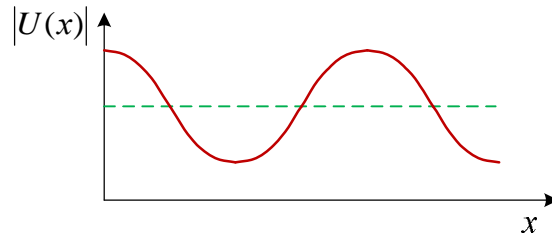


Рис. 7.2. Модуль напряжения и тока в линии без потерь

Вместо коэффициента отражения на практике также часто используется коэффициент бегущей волны:

$$K_{\text{б.в}} = \frac{|U_{\min}|}{|U_{\max}|} = \frac{1 - |\Gamma|}{1 + |\Gamma|},$$

обратная ему величина – коэффициент стоячей волны:

$$K_{\text{с.в}} = \frac{1}{K_{\text{б.в}}}.$$

Сопротивление в сечении  $x$  длинной линии есть отношение напряжения к току в этом сечении:

$$Z(x) = \frac{U(x)}{I(x)} = \frac{U_{\text{пад}}(x)(1 + \Gamma(x))}{\frac{U_{\text{пад}}(x)}{W}(1 - \Gamma(x))} = W \frac{1 + \Gamma(x)}{1 - \Gamma(x)}.$$

Отсюда находится коэффициент отражения в сечении  $x$ :

$$\Gamma(x) = \frac{Z(x) - W}{Z(x) + W}.$$

В частности, коэффициент отражения от нагрузки длинной линии равен:

$$\Gamma_{\text{н}} = \frac{Z_{\text{н}} - W}{Z_{\text{н}} + W}.$$

Для того чтобы волна, отраженная от нагрузки, отсутствовала ( $U_{\text{отр}} = 0$ ), необходимо, чтобы  $Z_{\text{н}} = W$ .

В последних выражениях удобно расстояние отсчитывать от  $Z_{\text{н}}$  (рис. 7.3).

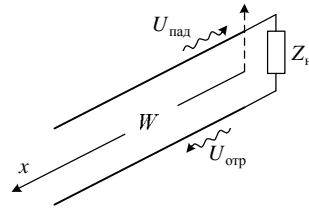


Рис. 7.3. Падающая и отраженная волны в двухпроводной линии

Тогда в случае отсутствия потерь в линии ( $\alpha = 0$ ):

$$\Gamma(x) = \Gamma_{\text{н}} e^{-j2\beta x}.$$

Рассмотрим частные случаи при отсутствии потерь в линии ( $\alpha = 0$ ):

1.  $Z_{\text{н}} = W$ . Тогда коэффициент отражения равен нулю и отраженная волна отсутствует. Модуль напряжения в линии не зависит от продольной координаты  $x$  и равен  $|U_{\text{пад}}|$ ;  $K_{\text{б.в}} = 1$ ;  $K_{\text{с.в}} = 1$ .

2.  $Z_{\text{н}} = 0$  (короткое замыкание на выходе):  $\Gamma_{\text{н}} = \frac{Z_{\text{н}} - W}{Z_{\text{н}} + W} = -1$ .

Полное напряжение в сечении  $x$ :

$$U(x) = U_{\text{пад.н}} (e^{j\beta x} - e^{-j\beta x}) = 2jU_{\text{пад.н}} \sin \beta x.$$

Модуль полного напряжения приведен на рис. 7.4, а. Имеем:  $U_{\text{мин}} = 0$ ;  $K_{\text{б.в}} = 0$ ;  $K_{\text{с.в}} = \infty$ .

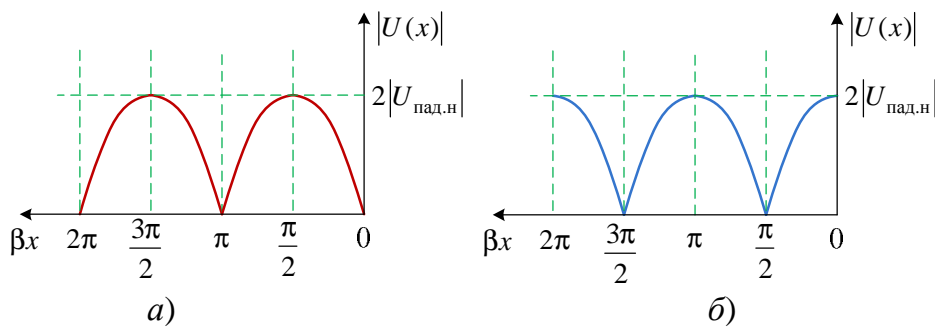


Рис. 7.4. Модуль напряжения в линии передачи без потерь:  
а –  $Z_{\text{н}} = 0$ ; б –  $Z_{\text{н}} = \infty$

3.  $Z_H = \infty$  (холостой ход на выходе):  $\Gamma_H = \frac{Z_H - W}{Z_H + W} = 1$ .

Полное напряжение в сечении  $x$ :

$$U(x) = U_{\text{пад.н}} (e^{j\beta x} + e^{-j\beta x}) = 2U_{\text{пад.н}} \cos \beta x.$$

Модуль полного напряжения приведен на рис. 7.4, б. В этом случае имеем также:  $U_{\text{мин}} = 0$ ;  $K_{\text{б.в}} = 0$ ;  $K_{\text{с.в}} = \infty$ .

Рассчитаем сопротивление в сечении  $x$  линии передачи без потерь с волновым сопротивлением  $W$ :

$$\begin{aligned} Z(x) &= \frac{U(x)}{I(x)} = W \frac{1 + \Gamma(x)}{1 - \Gamma(x)} = W \frac{1 + \Gamma_H e^{-j2\beta x}}{1 - \Gamma_H e^{-j2\beta x}} = W \frac{1 + \frac{Z_H - W}{Z_H + W} e^{-j2\beta x}}{1 - \frac{Z_H - W}{Z_H + W} e^{-j2\beta x}} = \\ &= W \frac{(Z_H + W) e^{j\beta x} + (Z_H - W) e^{-j\beta x}}{(Z_H + W) e^{j\beta x} - (Z_H - W) e^{-j\beta x}} = W \frac{Z_H \cos \beta x + jW \sin \beta x}{Z_H j \sin \beta x + W \cos \beta x} = \\ &= W \frac{Z_H + jW \operatorname{tg} \beta x}{Z_H j \operatorname{tg} \beta x + W}. \end{aligned}$$

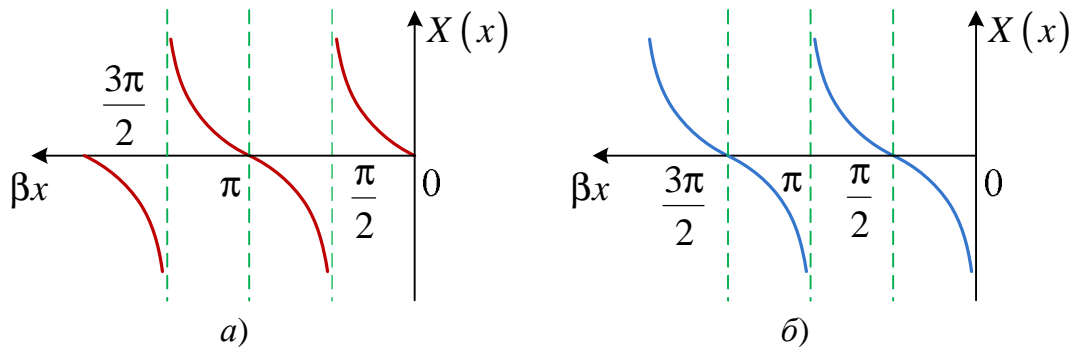


Рис. 7.5. Распределение сопротивления в линии передачи без потерь: а –  $Z_H = 0$ ; б –  $Z_H = \infty$

Рассмотрим те же примеры:

1.  $Z_H = W$ . Сопротивление в любом сечении равно волновому.
2.  $Z_H = 0$ :  $Z(x) = jW \operatorname{tg} \beta x = jX(x)$ .  $X(x)$  изображено на рис. 7.5, а.
3.  $Z_H = \infty$ :  $Z(x) = -jW \operatorname{ctg} \beta x = jX(x)$ .  $X(x)$  изображено на рис. 7.5, б.



## 7.2. Падающие и отраженные волны на входах четырехполюсника

На входе и выходе четырехполюсника существуют волны, бегущие к четырехполюснику, и волны, бегущие от четырехполюсника (рис. 7.6). Первые будем называть *падающими* волнами  $U_{1\text{пад}}$ ,  $U_{2\text{пад}}$ , вторые – *отраженными*  $U_{1\text{отр}}$ ,  $U_{2\text{отр}}$ .



Рис. 7.6. Падающие и отраженные волны на входах четырехполюсника

Комплексные амплитуды падающих волн на входах четырехполюсника связаны с амплитудами отраженных волн матрицей рассеяния:

$$\begin{cases} U_{1\text{отр}} = s_{11}U_{1\text{пад}} + S_{12}U_{2\text{пад}}; \\ U_{2\text{отр}} = s_{21}U_{1\text{пад}} + S_{22}U_{2\text{пад}}. \end{cases} \quad (7.4)$$

Параметрами уравнений являются коэффициенты отражения и передачи четырехполюсника:

$$s_{11} = \left. \frac{U_{1\text{отр}}}{U_{1\text{пад}}} \right|_{U_{2\text{пад}}=0}; \quad s_{21} = \left. \frac{U_{2\text{отр}}}{U_{1\text{пад}}} \right|_{U_{2\text{пад}}=0};$$

$$s_{12} = \left. \frac{U_{1\text{отр}}}{U_{2\text{пад}}} \right|_{U_{1\text{пад}}=0}; \quad s_{22} = \left. \frac{U_{2\text{отр}}}{U_{2\text{пад}}} \right|_{U_{1\text{пад}}=0}.$$

Условие  $U_{2\text{пад}} = 0$  (или  $U_{1\text{пад}} = 0$ ) означает, что нагрузка, подключенная ко второму (к первому) входу четырехполюсника, ничего не отражает. Такая нагрузка называется *согласованной*. Коэффициенты  $s_{ij}$  образуют матрицу рассеяния четырехполюсника:

$$[S] = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix}.$$

Определим связь между матрицами рассеяния и сопротивлений. Обозначим столбцы напряжений и токов:

$$U \rangle = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}; \quad I \rangle = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}.$$

С учетом этого имеем:

$$\begin{cases} U \rangle = U_{\text{пад}} \rangle + U_{\text{отр}} \rangle; \\ I \rangle = \frac{1}{W} U_{\text{пад}} \rangle - \frac{1}{W} U_{\text{отр}} \rangle. \end{cases}$$

Подставим эти равенства в уравнения четырехполюсника через параметры матрицы сопротивлений:

$$U_{\text{пад}} \rangle + U_{\text{отр}} \rangle = [Z] \cdot \left( \frac{1}{W} U_{\text{пад}} \rangle - \frac{1}{W} U_{\text{отр}} \rangle \right).$$

Сгруппировав слагаемые с падающими и отраженными волнами, будем иметь:

$$\left( [E] + \frac{1}{W} [Z] \right) \cdot U_{\text{отр}} \rangle = \left( \frac{1}{W} [Z] - [E] \right) \cdot U_{\text{пад}} \rangle,$$

где  $[E] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  – единичная матрица.

Или после очевидных преобразований получим:

$$U_{\text{отр}} \rangle = ([Z] + W [E])^{-1} ([Z] - W [E]) \cdot U_{\text{пад}} \rangle.$$

Из сравнения с формулой (7.3), имеем:

$$[S] = ([Z] + W [E])^{-1} ([Z] - W [E]).$$

Нетрудно показать, что это выражение перестановочно:

$$[S] = ([Z] - W [E])([Z] + W [E])^{-1}.$$

Для получения обратной зависимости выразим матрицы-столбцы падающих и отраженных волн через полные напряжения и токи на входах четырехполюсника:

$$U_{\text{пад}} \rangle = \frac{1}{2}(U \rangle + W I \rangle);$$

$$U_{\text{отр}} \rangle = \frac{1}{2}(U \rangle - W I \rangle).$$

Подставим эти выражения в уравнение

$$U_{\text{отр}} \rangle = [S] \cdot U_{\text{пад}} \rangle.$$

Получим:

$$[E] \cdot U \rangle - [E] \cdot W I \rangle = [S] \cdot U \rangle + [S] \cdot I \rangle$$

или

$$([E] - [S]) \cdot U \rangle = W ([E] + [S]) \cdot I \rangle.$$

Откуда, помножив слева левую и правую части этого равенства на  $([E] - [S])^{-1}$ , будем иметь:

$$U \rangle = W ([E] - [S])^{-1} ([E] + [S]) \cdot I \rangle.$$

Следовательно, матрица  $[Z]$  выражается через матрицу  $[S]$  следующим образом:

$$[Z] = W ([E] - [S])^{-1} ([E] + [S]).$$

**Пример.** Определим матрицу рассеяния последовательного сопротивления (рис. 7.7, а). Характеристические сопротивления подводящих линий равны  $W$ .

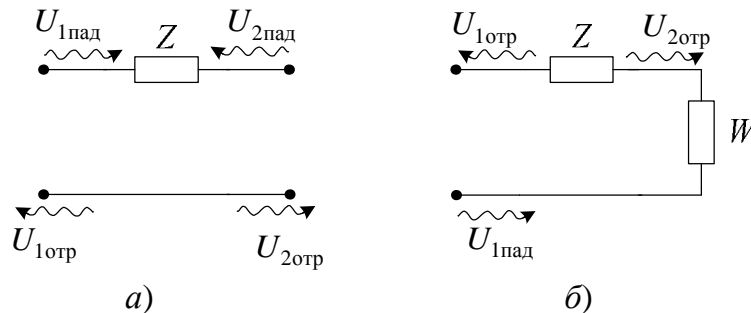


Рис. 7.7. Четырехполюсник из последовательного сопротивления (рис. 7.7, а) и схема для расчета элементов матрицы  $s_{11}$  и  $s_{21}$  (рис. 7.7, б)

Из уравнений четырехполюсника через матрицу рассеяния:

$$s_{11} = \left. \frac{U_{1\text{отр}}}{U_{1\text{пад}}} \right|_{U_{2\text{пад}}=0} ; s_{21} = \left. \frac{U_{2\text{отр}}}{U_{1\text{пад}}} \right|_{U_{2\text{пад}}=0} .$$

Нарисуем эквивалентную схему для расчета этих коэффициентов (рис. 7.7, б), тогда

$$s_{11} = \frac{Z + W - W}{Z + W + W} = \frac{Z}{Z + 2W} .$$

Для определения  $s_{21}$  выразим полные напряжения на выводах четырехполюсника через падающие и отраженные волны:

$$U_1 = U_{1\text{пад}} + U_{1\text{отр}} = U_{1\text{пад}} (1 + s_{11}) = U_{1\text{пад}} \frac{2(Z + W)}{Z + 2W} ;$$

$$U_2 = U_{2\text{отр}} .$$

Подставив в выражение для  $s_{21}$ , найдем:

$$s_{21} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{\frac{U_1 W}{Z + W}}{\frac{U_1}{1 + s_{11}}} = \frac{2W}{Z + 2W} .$$

Аналогично найдем:  $s_{22} = s_{11}$ ;  $s_{12} = s_{21}$ .

### 7.3. Свойства матрицы рассеяния четырехполюсника

Матрица рассеяния взаимного четырехполюсника является симметрической. Это следует из свойств матрицы сопротивлений и связи матрицы сопротивлений и матрицы рассеяния:

$$\begin{aligned} [S]^T &= \left\{ (Z + W[E])^{-1} (Z - W[E]) \right\}^T = (Z - W[E])^T \left( (Z + W[E])^{-1} \right)^T = \\ &= (Z - W[E])(Z + W[E])^{-1} = [S]. \end{aligned}$$

Покажем, что матрица рассеяния четырехполюсника без потерь (в том числе и невзаимного) является унитарной. Обозначим:  $U_{\text{пад } k}$ ,

$U_{отр k}$  – комплексные амплитуды соответственно падающей и отраженной волн на  $k$ -м входе,  $k = 1, 2$ . Тогда мощность, переносимая падающей волной на  $k$ -м входе, равна:

$$\frac{|U_{пад k}|^2}{W},$$

и мощность, переносимая отраженной волной на  $k$ -м входе,

$$\frac{|U_{отр k}|^2}{W}.$$

Мощность, поступающая на  $k$ -й вход, равна разности этих величин:

$$P_k = \frac{|U_{пад k}|^2}{W} - \frac{|U_{отр k}|^2}{W}.$$

Мощность, поступающая в четырехполюсник по всем входам:

$$P = \sum_{k=1}^2 \frac{U_{пад k} \cdot U_{пад k}^*}{W} - \sum_{k=1}^2 \frac{U_{отр k} \cdot U_{отр k}^*}{W} = \frac{\langle U_{пад}^* U_{пад} \rangle}{W} - \frac{\langle U_{отр}^* U_{отр} \rangle}{W}.$$

Мощность, поступающая в четырехполюсник без потерь по всем входам, должна быть равна нулю. Тогда

$$\langle U_{пад}^* U_{пад} \rangle = \langle U_{отр}^* U_{отр} \rangle = \langle U_{пад} [S]^T \cdot [S]^* U_{пад} \rangle.$$

Это верно для любых падающих волн. Следовательно:

$$[S]^T \cdot [S]^* = [E].$$

Справедливы также выражения:

$$[S]^* \cdot [S] = [E] \text{ и } [S]^* = [S]^{-1}.$$

Это есть условие унитарности матрицы. При выводе этих соотношений никаких допущений о взаимности четырехполюсника сделано не было. Таким образом, получаем: матрица рассеяния как взаимного, так и невзаимного четырехполюсника является унитарной. Это означает, что сумма квадратов модулей всех матричных элементов любого столбца или любой строки матрицы рассеяния четырехполюсника без потерь равна единице:

$$|s_{11}|^2 + |s_{12}|^2 = 1; \quad |s_{11}|^2 + |s_{21}|^2 = 1; \quad |s_{21}|^2 + |s_{22}|^2 = 1; \quad |s_{12}|^2 + |s_{22}|^2 = 1.$$

Кроме того, для любой пары столбцов матрицы рассеяния четырехполюсника без потерь сумма произведений каждого матричного элемента из одного столбца на соответствующий сопряженный элемент, расположенный в той же строке из другого столбца, равна нулю, т. е.

$$s_{11}s_{12}^* + s_{21}s_{22}^* = 0.$$

Если четырехполюсник взаимный, то, кроме того, сумма произведений каждого матричного элемента из одной строки на соответствующий сопряженный элемент, расположенный в том же столбце из другой строки, равна нулю, т. е.

$$s_{11}s_{21}^* + s_{12}s_{22}^* = 0.$$

## **7.4. Преобразование матрицы рассеяния при соединении различных четырехполюсников**

### ***7.4.1. Преобразование матрицы рассеяния при изменении плоскостей отсчета выводов***

В общем случае четырехполюсник имеет разные волновые сопротивления подводящих линий и постоянные распространения волн в них (рис. 7.8, *а*). На рис. 7.8, *б* показано изменение плоскости отсчета  $k$ -го входа ( $k = 1, 2$ ). Обозначим:  $\Delta x_k$  – величина сдвига плоскости отсчета  $k$ -го вывода;  $s_{kk}$  – коэффициент отражения в начальной плоскости;  $s_{kk}^\Delta$  – коэффициент отражения в конечной плоскости.

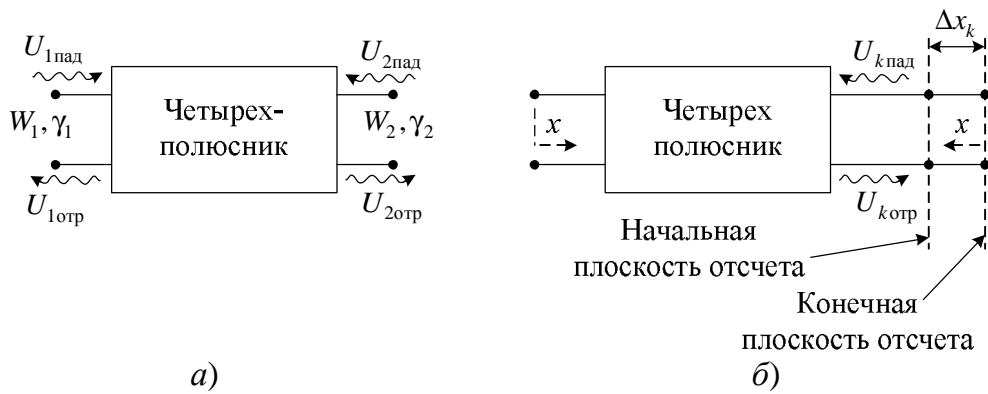


Рис. 7.8. Четырехполюсник (а) и изменение плоскости отсчета (б)

При сдвиге плоскости отсчета падающая волна приобретает фазовый сдвиг и домножается на  $e^{\gamma_k \Delta x_k}$ , отраженная волна домножается на  $e^{-\gamma_k \Delta x_k}$ . В результате диагональные элементы матрицы рассеяния домножаются на  $e^{-2\gamma_k \Delta x_k}$ , а недиагональные – на  $e^{-\gamma_k \Delta x_k}$ .

Матрица рассеяния четырехполюсника после сдвига плоскостей отсчета на первом и втором выводах становится равной:

$$[S^\Delta] = [q] \cdot [S] \cdot [q], \text{ где } [q] = \begin{bmatrix} e^{-\gamma_1 \Delta x_1} & 0 \\ 0 & e^{-\gamma_2 \Delta x_2} \end{bmatrix}.$$

#### 7.4.2. Коэффициент отражения на входе четырехполюсника с нагрузкой на выходе

Четырехполюсник и нагрузка (рис. 7.9, а) определяются соответственно уравнениями:

$$\begin{cases} U_{1отр} = S_{11}U_{1пад} + S_{12}U_{2пад}; \\ U_{2отр} = S_{21}U_{1пад} + S_{22}U_{2пад}, \end{cases} \quad \Gamma_n = \frac{U_{2пад}}{U_{2отр}}. \quad (7.5)$$

При вычислении коэффициента отражения от нагрузки учтены направления  $U_{2пад}$  и  $U_{2отр}$ . Найдем коэффициент отражения на входе четырехполюсника. Для этого удобно воспользоваться методом направленных графов. Граф, соответствующий уравнениям (7.5), приведен на рис. 7.9, б.

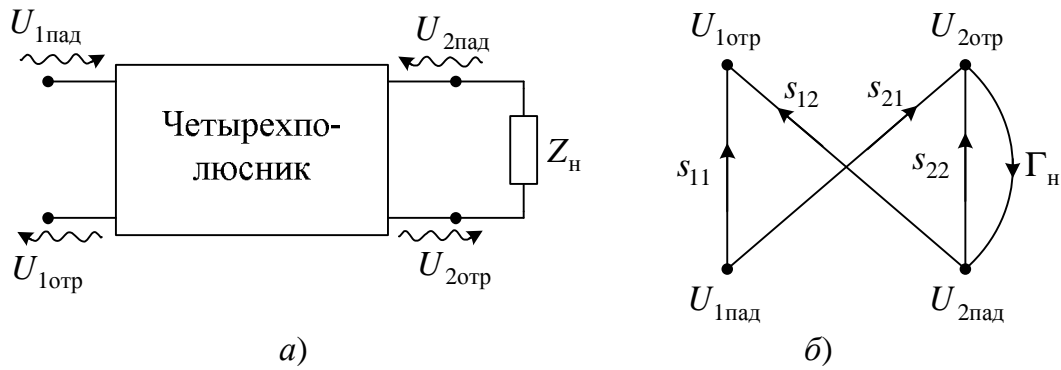


Рис. 7.9. Четырехполюсник с нагрузкой (а) и его направленный граф (б)

Решение направленного графа проще всего выполнить методом преобразований. Прежде всего, исключим узел  $U_{2отр}$ . При исключении узла необходимо сохранить передачи между оставшимися узлами. Получается граф, изображенный на рис. 7.10, а. В узле  $U_{2пад}$  появляется собственный контур, значит, следующий шаг – это устранение собственного контура. Получается граф, изображенный на рис. 7.10, б, где величина  $A$  равна:

$$A = \frac{s_{21}\Gamma_n}{1 - s_{22}\Gamma_n}.$$

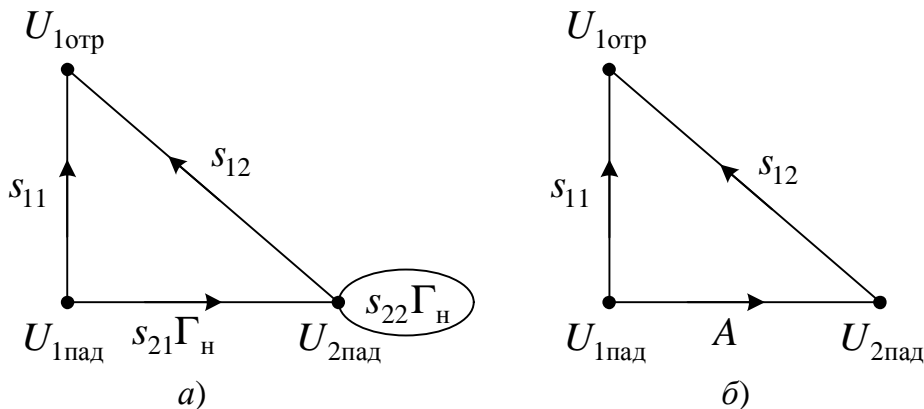


Рис. 7.10. Преобразования направленного графа, изображенного на рис. 7.9

Из последнего направленного графа определяется выражение для  $U_{1отр}$  и коэффициента отражения на входе четырехполюсника:

$$\Gamma_{вх} = s_{11} + As_{12} = s_{11} + \frac{s_{12}\Gamma_n s_{21}}{1 - s_{22}\Gamma_n}.$$



### 7.4.3. Матрица рассеяния каскадного соединения двух четырехполюсников

При каскадном соединении двух четырехполюсников выход одного из них соединен со входом другого (рис. 7.11). При известных матрицах рассеяния каждого четырехполюсника определим матрицу рассеяния суммарного четырехполюсника.

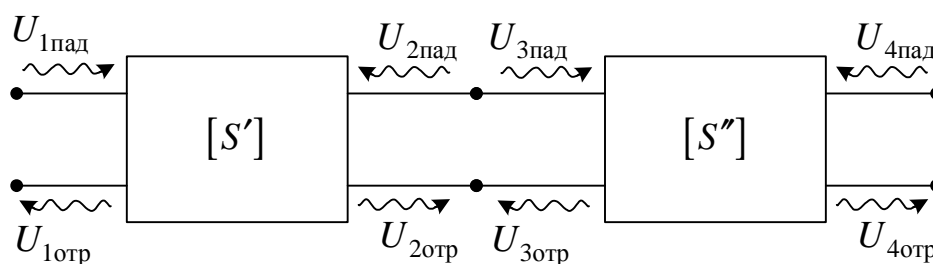


Рис. 7.11. Каскадное соединение двух четырехполюсников

Уравнения каждого четырехполюсника имеют вид:

$$\begin{cases} U_{1отр} = s'_{11}U_{1пад} + s'_{12}U_{2пад}; \\ U_{2отр} = s'_{21}U_{1пад} + s'_{22}U_{2пад}; \end{cases} \quad \begin{cases} U_{3отр} = s''_{11}U_{3пад} + s''_{12}U_{4пад}; \\ U_{4отр} = s''_{21}U_{3пад} + s''_{22}U_{4пад}. \end{cases}$$

Одним штрихом обозначены элементы матрицы первого (левого на рис. 7.11) четырехполюсника, двумя – второго. При соединении четырехполюсников волны  $U_{2пад}$  и  $U_{3отр}$  равны друг другу, аналогично волна  $U_{3пад}$  равна волне  $U_{2отр}$ . Граф двух соединенных четырехполюсников приведен на рис. 7.12, а. Преобразуем этот граф. Исключим узел  $U_{2отр}$ .

Полученный граф приведен на рис. 7.12, б. Исключаем собственный контур в узле  $U_{2пад}$  (рис. 7.13, а).

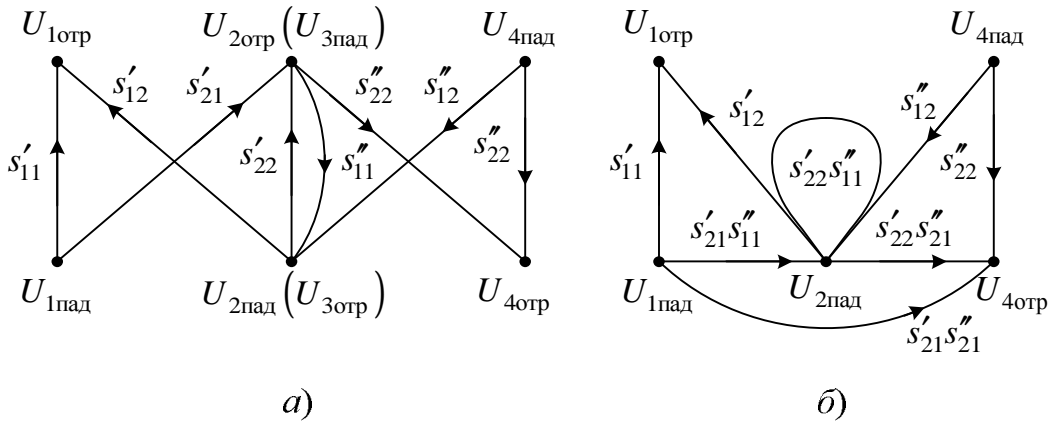


Рис. 7.12. Графы каскадного соединения двух четырехполюсников (а) и граф после исключения узла  $U_{2отр}$  (б)

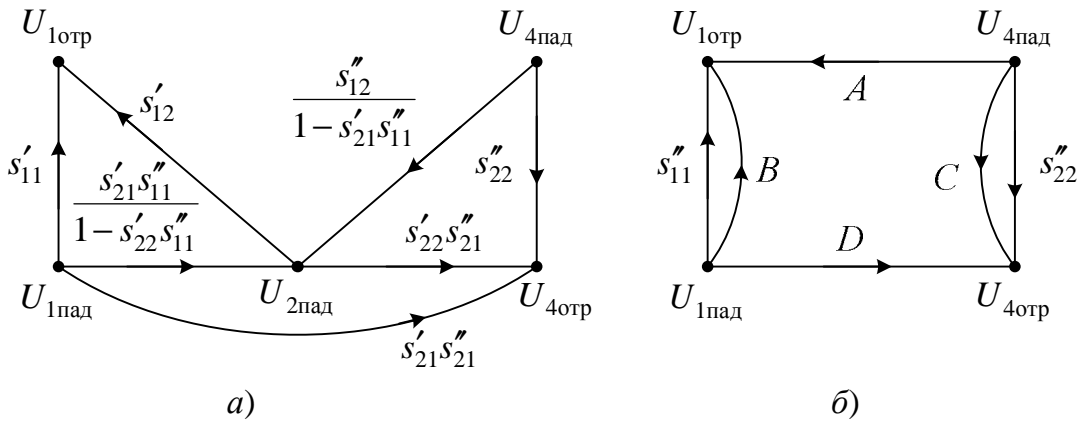


Рис. 7.13. Преобразования графа на рис. 7.12, б

Далее исключаем узел  $U_{2пад}$  (рис. 7.13, б). На данном рисунке обозначено:

$$A = \frac{s'_{12}s''_{12}}{1-s'_{22}s''_{11}}; \quad B = \frac{s'_{21}s''_{11}s'_{12}}{1-s'_{22}s''_{11}}; \quad C = \frac{s''_{12}s'_{22}s''_{21}}{1-s'_{22}s''_{11}};$$

$$D = s'_{21}s''_{21} + \frac{s'_{21}s''_{11}s'_{22}s''_{21}}{1-s'_{22}s''_{11}} = \frac{s'_{21}s''_{21}}{1-s'_{22}s''_{11}}.$$

Графу на рис. 7.13, б соответствует система уравнений:

$$\begin{cases} U_{1отр} = s_{11}^{\Sigma} U_{1пад} + s_{12}^{\Sigma} U_{2пад}; \\ U_{2отр} = s_{21}^{\Sigma} U_{1пад} + s_{22}^{\Sigma} U_{2пад}, \end{cases}$$

коэффициенты которой вычисляются следующим образом:

$$s_{11}^{\Sigma} = s'_{11} + \frac{s'_{21}s''_{11}s'_{12}}{1 - s'_{22}s''_{11}}; \quad s_{12}^{\Sigma} = \frac{s'_{12}s''_{12}}{1 - s'_{22}s''_{11}};$$

$$s_{21}^{\Sigma} = \frac{s'_{21}s''_{21}}{1 - s'_{22}s''_{11}}; \quad s_{22}^{\Sigma} = s''_{22} + \frac{s'_{12}s'_{22}s''_{21}}{1 - s'_{22}s''_{11}}.$$

## 7.5. Матрицы рассеяния и передачи отрезка длинной линии

Рассмотрим отрезок симметричной длинной линии длиной  $l$  (рис. 7.14) и рассчитаем для него матрицу рассеяния. Линия имеет волновое сопротивление  $W$  и постоянную распространения  $\gamma$ .

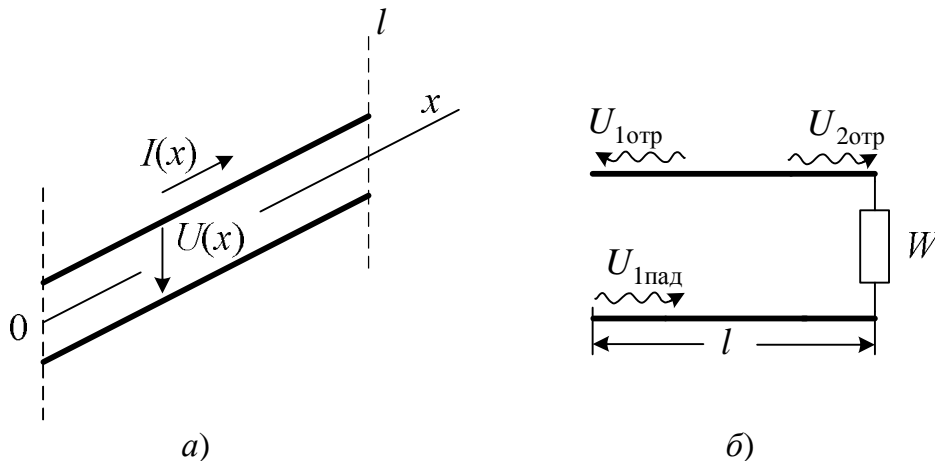


Рис. 7.14. Симметричная длинная линия (а) и схема для расчета матричных коэффициентов  $s_{11}$  и  $s_{21}$  (б)

Отрезок линии передачи – это четырехполюсник, входом которого является сечение  $x = 0$ , выходом –  $x = l$ . На рис. 7.14 приведена расчетная схема, учитывающая условие на выходе линии и позволяющая рассчитать коэффициенты  $s_{11}$  и  $s_{21}$ :

$$s_{11} = \left. \frac{U_{1отр}}{U_{1пад}} \right|_{U_{2пад}=0} = 0; \quad s_{21} = \left. \frac{U_{2отр}}{U_{1пад}} \right|_{U_{2пад}=0} = e^{-\gamma l}.$$

В первом равенстве учитывается то, что в линии с волновым сопротивлением  $W$  нагрузка  $Z = W$  не создает отраженной волны. При

расчете второго равенства учитывается изменение амплитуды волны при распространении в линии:

$$U_{2\text{отр}} = U_{1\text{пад}} e^{-\gamma l}.$$

Таким образом, матрица рассеяния имеет вид:

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & e^{-\gamma l} \\ e^{-\gamma l} & 0 \end{bmatrix}.$$

Для расчета матрицы передачи отрезка линии необходимо в равенствах (7.1)

$$\begin{cases} U(x) = A_1 e^{-\gamma x} + A_2 e^{\gamma x}; \\ I(x) = \frac{A_1}{W} e^{-\gamma x} - \frac{A_2}{W} e^{\gamma x} \end{cases}$$

из условий в начале и в конце линии определить постоянные  $A_1$  и  $A_2$ . Положим в этих равенствах  $x = 0$  и получим:

$$U(0) = U_1 = A_1 + A_2; \quad I(0) = I_1 = \frac{A_1}{W} - \frac{A_2}{W}.$$

Решение этой системы уравнений дает:

$$A_1 = \frac{1}{2}(U_1 + WI_1), \quad A_2 = \frac{1}{2}(U_1 - WI_1).$$

С учетом этого первое уравнение (7.1) перепишется следующим образом:

$$U(x) = \frac{1}{2}(U_1 + WI_1) \cdot e^{-\gamma x} + \frac{1}{2}(U_1 - WI_1) \cdot e^{\gamma x} = U_1 \text{ch}\gamma x - WI_1 \text{sh}\gamma x,$$

где  $\text{ch}\gamma x = \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2}$ ,  $\text{sh}\gamma x = \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2}$  – гиперболические функции.

Аналогично преобразовав второе уравнение (7.1), получим:

$$I(x) = I_1 \text{ch}\gamma x - \frac{U_1}{W} \text{sh}\gamma x.$$

Подставим в полученные уравнения  $x = l$  :

$$\begin{cases} U(l) = U_2 = U_1 \operatorname{ch} \gamma l - W I_1 \operatorname{sh} \gamma l; \\ I(l) = -I_2 = -\frac{U_1}{W} \operatorname{sh} \gamma l + I_1 \operatorname{ch} \gamma l. \end{cases}$$

Решим эту систему уравнений относительно  $U_1$  и  $I_1$  :

$$\begin{cases} U_1 = U_2 \operatorname{ch} \gamma l - I_2 W \operatorname{sh} \gamma l; \\ I_1 = \frac{U_2}{W} \operatorname{sh} \gamma l - I_2 \operatorname{ch} \gamma l, \end{cases}$$

откуда получаем выражение для матрицы передачи отрезка длиной линии:

$$[A] = \begin{bmatrix} \operatorname{ch} \gamma l & W \operatorname{sh} \gamma l \\ \frac{1}{W} \operatorname{sh} \gamma l & \operatorname{ch} \gamma l \end{bmatrix}.$$

Для линии без потерь ( $\alpha = 0$ ) постоянная распространения – чисто мнимая величина ( $\gamma = j\beta$ ) и матрица передачи имеет вид:

$$[A] = \begin{bmatrix} \cos \beta l & jW \sin \beta l \\ \frac{j \sin \beta l}{W} & \cos \beta l \end{bmatrix}.$$

## 7.6. Трансформаторы сопротивлений

Из параграфов 7.1 и 7.5 получаем следующие результаты:

- Короткий  $\left( l < \frac{\lambda}{4} \right)$  закороченный отрезок длиной линии имеет индуктивное сопротивление. При длине  $\frac{\lambda}{4}$  имеет место параллельный резонанс. При длине  $\frac{\lambda}{4} < l < \frac{\lambda}{2}$  закороченный отрезок имеет емкостное сопротивление.

- Разомкнутый отрезок длинной линии при длине  $l < \frac{\lambda}{4}$  имеет емкостное сопротивление, при длине  $\frac{\lambda}{4}$  – последовательный резонанс и при длине  $\frac{\lambda}{4} < l < \frac{\lambda}{2}$  – индуктивное сопротивление.

- Четвертьволновой отрезок длинной линии (четвертьволновой трансформатор) с волновым сопротивлением  $W$  преобразует сопротивление  $Z_{\text{н}}$  в  $\frac{W^2}{Z_{\text{н}}}$  (рис. 7.15, а). Полуволновой отрезок длинной линии с волновым сопротивлением  $W$  преобразует сопротивление  $Z_{\text{н}}$  в равную  $Z_{\text{н}}$  величину (рис. 7.15, б).

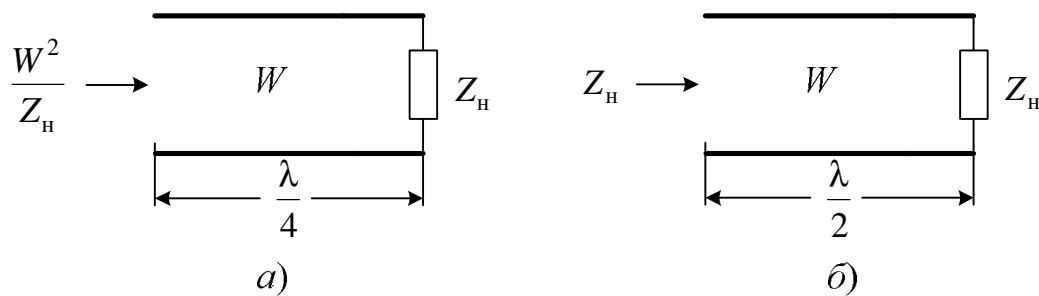


Рис. 7.15. Трансформаторы сопротивлений: а – четвертьволновой; б – полуволновой

# Глава 8. Частотно-избирательные пассивные фильтры

## 8.1. Классификация и назначение фильтров

Фильтры – это четырехполюсники, избирательно пропускающие колебания различных частот. Пассивные фильтры состоят только из пассивных элементов. Основной характеристикой частотно-избирательного фильтра является передаточная функция. Ниже рассматриваются фильтры с точки зрения АЧХ в виде:  $G(\omega) = |s_{21}(\omega)|^2$ , где  $s_{21}$  – коэффициент матрицы рассеивания.

В соответствии с видом АЧХ фильтры делятся на следующие виды:

- фильтры нижних частот (ФНЧ);
- фильтры верхних частот (ФВЧ);
- полосно-пропускающие фильтры (ППФ), или полосовые фильтры;
- полосно-запирающие фильтры (ПЗФ), или режекторные фильтры.

Тот или иной фильтр характеризуется полосой пропускания и полосой запираания (рис. 8.1).

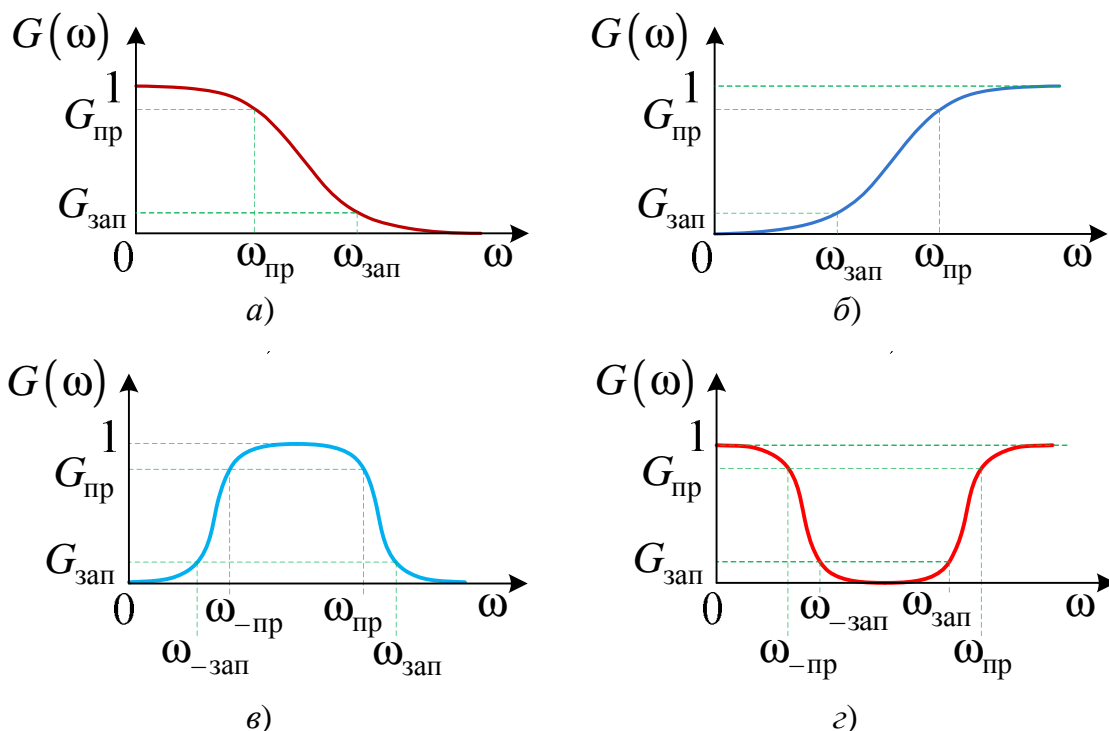


Рис. 8.1. Амплитудно-частотные характеристики пассивных фильтров:  
а – фильтр нижних частот; б – фильтр верхних частот;  
в – полосно-пропускающий фильтр; з – полосно-запирающий фильтр

Задача расчета фильтра формулируется следующим образом. задается полоса пропускания, в пределах которой величина  $G(\omega)$  не должна быть ниже некоторой предельно допустимой величины амплитуды  $G_{\text{пр}}$ . Кроме того, задается минимальная расстройка относительно граничной частоты  $\omega_{\text{пр}}$ , при превышении которой амплитуда характеристики должна быть не более другой заданной величины за-пираания фильтра  $G_{\text{зап}}$ .

Задача оптимального расчета состоит в том, чтобы получить удовлетворяющую поставленным требованиям частотную характеристику, затратив на конструирование фильтра минимальное число элементов. Решение этой задачи называется синтезом фильтра по рабочим параметрам. В процессе синтеза выбирается аналитическое выражение для коэффициента передачи.

Кроме заданных требований это аналитическое выражение должно отвечать условиям физической реализуемости четырехполосника. То есть не должно получиться отрицательных значений  $L$ ,  $C$  и  $R$ .

Основой расчета любого пассивного фильтра служит фильтр нижних частот. Идеальный ФНЧ имеет характеристику, изображенную на рис. 8.2. В полосе пропускания  $G = 1$ , а за ее пределами  $G = 0$ . Граничные частоты  $\omega_{\text{пр}}$  и  $\omega_{\text{зап}}$  в идеальном фильтре совпадают.

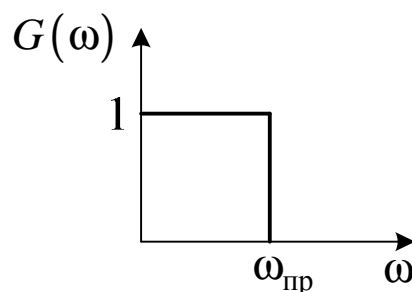


Рис. 8.2. Частотная характеристика идеального фильтра нижних частот

В настоящее время используются следующие аппроксимации частотной характеристики ФНЧ:

- полиномом Баттерворта (максимально плоская характеристика);
- полиномом Чебышева.

На рис. 8.3 приведен вид этих аппроксимаций.



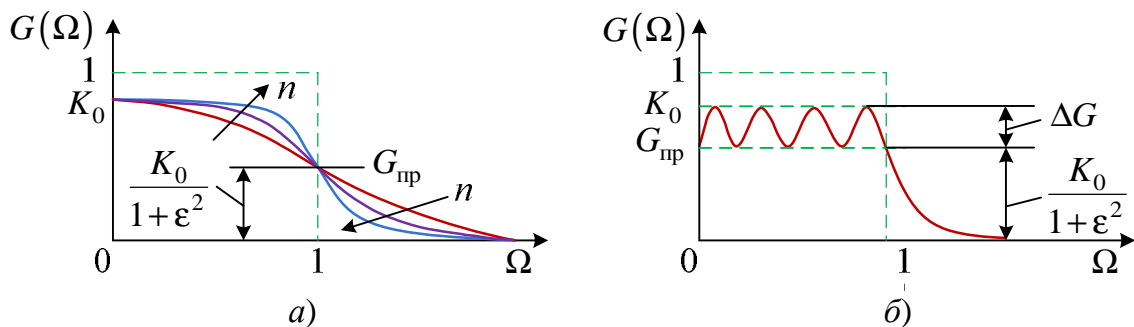


Рис. 8.3. Аппроксимации частотной характеристики фильтра нижних частот:  
*a* – полиномом Баттерворта; *б* – полиномом Чебышева

Максимально плоская характеристика (рис. 8.3, *a*), характеризующая фильтр Баттерворта, определяется следующим выражением:

$$G(\Omega) = \frac{K_0}{1 + \varepsilon^2 \Omega^{2n}}, \quad (8.1)$$

где,  $\Omega = \frac{\omega}{\omega_{\text{пр}}}$  – относительная частота;  $K_0$  – максимальное значение амплитуды  $G(\Omega)$ ;  $\varepsilon$  – вещественный коэффициент, определяющий неравномерность характеристики  $G(\Omega)$  в полосе пропускания. Этот коэффициент вместе со значением  $K_0$  определяет минимальный уровень характеристики  $G(\Omega)$  в полосе пропускания.

Характеристика ведет себя плавно и в полосе пропускания, и в полосе запираания. При частоте  $\Omega < 1$  характеристика  $G(\Omega)$  тем ближе к идеальной характеристике, чем больше показатель степени  $n$  в выражении (8.1). При  $\Omega > 1$  амплитуда  $G(\Omega)$  уменьшается с ростом частоты, причем тем быстрее, чем больше показатель степени  $n$ .

Преимущества фильтра Баттерворта:

- такие фильтры предпочтительны в том случае, если предъявляются жесткие требования к согласованию в полосе пропускания, а в полосе запираания не требуется слишком высокая избирательность;
- хорошая линейность ФЧХ.

Частотная характеристика фильтра Чебышева (рис. 8.3, *б*) определяется выражением

$$G(\Omega) = \frac{K_0}{1 + \varepsilon^2 C_n^2(\Omega)}, \quad (8.2)$$

где  $C_n(\Omega)$  – полином Чебышева 1-го рода,  $n$ -го порядка.

Величины  $\Omega$ ,  $K_0$  и  $\varepsilon$  определяются аналогично аппроксимации фильтра Баттерворта.

В полосе пропускания характеристика фильтра Чебышева имеет колебательный характер, а в полосе запираания ведет себя плавно.

При относительной частоте в пределах  $-1 < \Omega < 1$  полином Чебышева описывается следующим математическим выражением:

$$C_n(\Omega) = \cos(n \cdot \arccos \Omega).$$

При относительной частоте, выходящей за рамки этого интервала, т. е. при  $|\Omega| > 1$ , полином Чебышева принимает вид:

$$C_n(\Omega) = \operatorname{ch}(n \cdot \operatorname{arch} \Omega).$$

Получим для полиномов нулевого и первого порядка:  $C_0 = 1$ ,  $C_1(\Omega) = \Omega$ .

Для полиномов Чебышева справедливо рекуррентное соотношение:

$$C_{n+1}(\Omega) = 2C_n(\Omega) - C_{n-1}(\Omega).$$

Таким образом, для последующих степеней полиномов можно записать:

$$C_2(\Omega) = 2\Omega^2 - 1; C_3(\Omega) = 4\Omega^3 - 3; C_4(\Omega) = 8\Omega^4 - 8\Omega^2 + 1 \dots$$

Приведем некоторые свойства полиномов Чебышева:

– функция  $C_n(\Omega)$  – четная при четном  $n$  или нечетная при нечетном  $n$ ;

– коэффициенты в полиноме  $C_n(\Omega)$  являются целыми числами;

– при  $|\Omega| < 1$  функция  $C_n(\Omega)$ , описывающая полиномы Чебышева, имеет колебательный характер, причем все ее максимумы одинаковы и равны 1;

– при  $|\Omega| < 1$  полиномы Чебышева являются наименее отклоняющимися от нуля из всех полиномов степени  $n$  при одинаковом коэффициенте при старшей степени полинома;

– при  $|\Omega| < 1$  абсолютные значения полиномов Чебышева возрастают примерно по закону  $\Omega^n$ .

Таким образом, аппроксимация Чебышева является хорошим приближением к идеальной характеристике фильтра нижних частот. В пределах полосы пропускания АЧХ  $G(\Omega)$  имеет равновеликое отклонение от единицы.

На рис. 8.4 изображена аппроксимация частотной характеристики эллиптического ФНЧ.

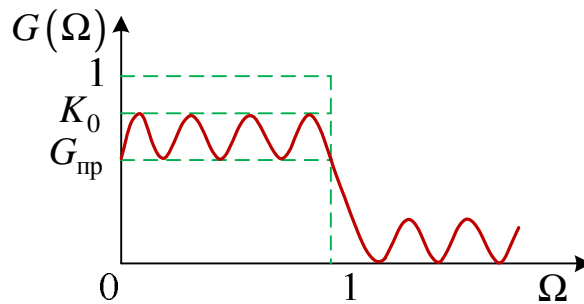


Рис. 8.4. Аппроксимация частотной характеристики эллиптического фильтра нижних частот

Очевидно, что характеристика имеет колебательный характер и в полосе пропускания, и в полосе запираания. В этом случае достигается наибольшая крутизна частотной характеристики между частотами  $\omega_{\text{пр}}$  и  $\omega_{\text{зап}}$  при заданном числе элементов  $n$ , т. е. реализуется наиболее высокая избирательность. Здесь лучше пользоваться специальной литературой.

Первый этап синтеза фильтра состоит в выборе аналитического представления частотной функции  $G(\Omega)$ . Для этого следует выбрать аппроксимирующий полином (Чебышева или Баттерворта) и определить показатель степени  $n$ , основываясь на требованиях, предъявляемых к частотной характеристике.

Для фильтра Баттерворта из выражения (8.1) имеем:

$$G_{\text{пр}} = \frac{K_0}{1 + \epsilon^2}; \quad G_{\text{зап}} = \frac{K_0}{1 + \epsilon^2 \left( \frac{\omega_{\text{зап}}}{\omega_{\text{пр}}} \right)^{2n}}.$$

Из этих выражений получаем значение показателя степени  $n$  в следующем виде:

$$n \geq \frac{\lg \frac{G_{\text{пр}} (K_0 - G_{\text{зап}})}{G_{\text{зап}} (K_0 - G_{\text{пр}})}}{2 \lg \left( \frac{\omega_{\text{зап}}}{\omega_{\text{пр}}} \right)} = \frac{\lg \sqrt{\frac{G_{\text{пр}} (K_0 - G_{\text{зап}})}{G_{\text{зап}} (K_0 - G_{\text{пр}})}}}{\lg \left( \frac{\omega_{\text{зап}}}{\omega_{\text{пр}}} \right)}.$$

Для фильтра с аппроксимацией Чебышева из выражения (8.2) получаем выражение для нахождения  $n$ , которое имеет вид:

$$n \geq \frac{\operatorname{arch} \sqrt{\frac{G_{\text{пр}} (K_0 - G_{\text{зап}})}{G_{\text{зап}} (K_0 - G_{\text{пр}})}}}{\operatorname{arch} \left( \frac{\omega_{\text{зап}}}{\omega_{\text{пр}}} \right)}.$$

**Пример.** Определим показатель степени  $n$  для фильтра, который должен обладать следующими параметрами:

$$K_{0\text{дБ}} = 0 \text{ дБ}; G_{\text{пр.дБ}} = -1; \frac{\omega_{\text{зап}}}{\omega_{\text{пр}}} = 4; G_{\text{зап.дБ}} = -60 \text{ дБ}.$$

Рассмотрим фильтр с аппроксимацией Баттерворта.

Из выражения  $G_{\text{зап.дБ}} = 10 \lg G_{\text{зап}}$ , определим величину  $G_{\text{зап}} = 10^{-6}$ . Аналогично определяем  $G_{\text{пр}} = 0,794$  и коэффициент  $K_0 = 0,889$ . Рассчитаем показатель степени  $n$ :

$$n \geq \frac{\lg \sqrt{\frac{0,794(0,889 - 10^{-6})}{10^{-6}(0,889 - 0,794)}}}{\lg 4} = \frac{\lg \sqrt{\frac{0,794 \cdot 0,889}{10^{-6} \cdot 0,095}}}{\lg 4} = \frac{\lg 2726}{\lg 4} \approx 5,7.$$

Принимаем  $n = 6$ .

Рассмотрим аппроксимацию фильтра Чебышева при тех же исходных данных. Рассчитаем показатель степени  $n$  в данном случае:

$$n \geq \frac{\operatorname{arch} 2726}{\operatorname{arch} 4} = 4,17.$$

Необходимо принять  $n = 5$ .

Второй этап синтеза фильтра состоит в его схемной реализации, т. е. заключается в расчете номинальных величин элементов схемы. Порядок действий на этом этапе следующий.

Как известно, взаимный реактивный симметричный или несимметричный четырехполюсник минимально-фазового типа характеризуется только одним вещественным параметром. В качестве такого параметра чаще всего бывает модуль коэффициента передачи.

Коэффициент передачи фильтра определяют из выражения

$$G(\omega) = |s_{21}(\omega)|^2,$$

где  $s_{21}(\omega)$  – коэффициент матрицы рассеивания фильтра.

Эта задача имеет решение благодаря тому обстоятельству, что квадрат модуля отвечает условиям физической реализуемости, а в качестве фильтров рассматриваются четырехполюсники, описываемые полностью одним действительным параметром.

Для нахождения коэффициента передачи определяются нули и полюса функции  $s_{21}(\omega)$ , которые должны быть комплексно сопряженными. Таким образом,  $s_{21}(\omega)$  имеет нули и полюса только в верхней полуплоскости плоскости комплексной переменной  $\omega$ , а  $s_{21}^*(\omega)$  – в нижней полуплоскости. Так как функция  $|s_{21}(\omega)|^2$  задана, то известны ее нули и полюса, следовательно, ее можно представить в виде произведения сомножителей:

$$\frac{(\omega - \omega_1)}{(\omega - \omega_2)} \cdot \frac{\left( \omega - \omega_1^* \right)}{\left( \omega - \omega_2^* \right)} \mathbf{K}$$

Первый сомножитель относится к полиному  $s_{21}(\omega)$ , второй – к  $s_{21}^*(\omega)$ . Разделяя таким образом нули и полюса, расположенные в верхней и нижней полуплоскостях комплексной плоскости  $\omega$ , получим выражение для произведения  $s_{21}(\omega) \cdot s_{21}^*(\omega)$  и тем самым определим  $s_{21}(\omega)$ .

## 8.2. Синтез фильтров Баттерворта

Как было изложено выше, частотная характеристика ФНЧ по аппроксимации Баттерворта определяется выражением

$$G(\Omega) = |S_{21}(\Omega)|^2 = \frac{K_0}{1 + \epsilon^2 \Omega^{2n}},$$

где  $\Omega = \frac{\omega}{\omega_{\text{пр}}}$  – относительная частота;  $K_0$  – максимальное значение амплитуды  $G(\omega)$  в полосе пропускания.

При рассмотрении реактивных фильтров величина максимального значения амплитуды в полосе пропускания определяется различием сопротивлений нагрузки  $R_{\text{н}}$  и генератора  $R_{\text{г}}$  (рис. 8.5). Значения  $K_0$  лежат в пределах от нуля до единицы (при  $R_{\text{н}} < R_{\text{г}}$ ), т. е.  $0 \leq K_0 \leq 1$ , причем  $K_0 > G_{\text{пр}}$ . Отличие сопротивлений  $R_{\text{н}}$  от  $R_{\text{г}}$  приводит к уменьшению  $K_0$ .

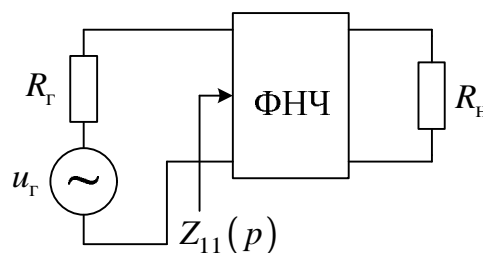


Рис. 8.5. Фильтр нижних частот с генератором и нагрузкой

Определим порядок синтеза фильтра Баттерворта:

1. Для частоты  $\Omega = 0$  элемент матрицы рассеивания  $s_{11}(0) = \frac{R_{\text{н}} - R_{\text{г}}}{R_{\text{н}} + R_{\text{г}}}$ . Максимальное значение амплитуды в полосе пропускания определится в виде:  $K_0 = |s_{21}(0)|^2 = 1 - |s_{11}(0)|^2$ . Далее из выражения  $G_{\text{пр}}(\omega) = \frac{K_0}{1 + \varepsilon^2}$  определяем величину  $\varepsilon$ , после чего определяем значение квадрата модуля коэффициента передачи:  $|s_{21}(\Omega)|^2 = \frac{K_0}{1 + \varepsilon^2}$ , а затем и значение  $s_{21}(\Omega)$ .

Из условия реактивности фильтра (матрица рассеяния унитарна)  $\begin{bmatrix} * \\ S \end{bmatrix}^T \cdot [s] = E$  определяется  $s_{11}(p)$ , после чего переходим к сопротивлению  $Z_{11}(p)$ , где  $p = j\omega + \sigma$ :

$$Z_{11}(p) = R_{\text{г}} \frac{1 + s_{11}(p)}{1 - s_{11}(p)}.$$

2. Далее реализуется входное сопротивление  $Z_{11}(p)$  в виде одного из двух типов лестничных схем. Первый тип схем (рис. 8.6) – это схемы, функция сопротивления  $Z_{11}(p)$  которых в точке  $p = \infty$  имеют полюс. В таких схемах первым элементом является последовательная индуктивность, а входное сопротивление  $Z_{11}(p)$  представляется в виде:

$$Z_{11}(p) = L_1 p + \frac{1}{C_2 p + \frac{1}{L_3 p + \frac{1}{\mathbf{L}}}}. \quad (8.3)$$

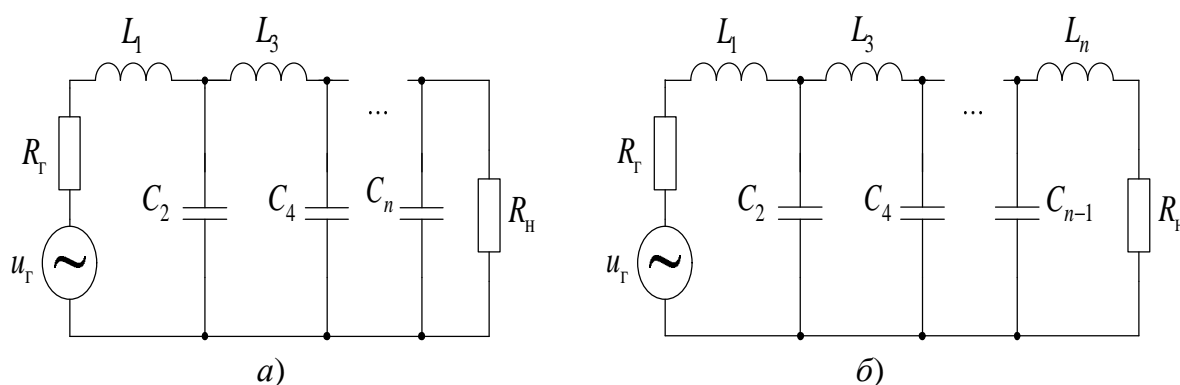


Рис. 8.6. Лестничные схемы для фильтра нижних частот первого типа, функция сопротивления  $Z_{11}(p)$  которых в точке  $p = \infty$  имеет полюс:  
*a* – значение  $n$  – четное; *б* – значение  $n$  – нечетное

Рассчитаем величину первой индуктивности по формуле:

$$L_1 = \frac{A_0 R_1 \sin \gamma_1}{1 - \delta},$$

где  $\delta = 2^n \sqrt{1 - K_0}$ ; (8.4a)

$$\gamma_j = \frac{\pi}{2n} j; \quad (8.4б)$$

$j = 1, 2, 3 \dots n$  – натуральные целые числа;

$$A_0 = \frac{2^n \sqrt{\varepsilon}}{\omega_{\text{пр}}}. \quad (8.4в)$$

Затем используются следующие рекуррентные соотношения:

$$\begin{cases} L_{2m-1}C_{2m} = F_{1m}; \\ L_{2m+1}C_{2m} = F_{2(m)}. \end{cases}$$

В этих соотношениях величины  $F_1(m)$  и  $F_2(m)$  определяются по следующим формулам:

$$F_1(m) = \frac{A_0^2 \sin \gamma_{4m-3} \sin \gamma_{4m-1}}{1 - 2\delta \cos \gamma_{4m-2} + \delta^2}; \quad (8.5a)$$

$$F_2(m) = \frac{A_0^2 \sin \gamma_{4m-1} \sin \gamma_{4m+1}}{1 - 2\delta \cos \gamma_{4m} + \delta^2}. \quad (8.5b)$$

По этим соотношениям рассчитываются номиналы элементов, полагая  $m = 1, 2, 3$  и так далее, пока не будут рассчитаны номиналы всех элементов.

При равенстве сопротивлений  $R_H = R_\Gamma$  максимальное значение амплитуды в полосе пропускания  $K_0 = 1$ , а  $\delta = 0$ , следовательно, формулы для определения номиналов элементов значительно упрощаются:

$$L_{2m-1} = A_0 R_1 \sin \gamma_{4m-3}; \quad C_{2m} = \frac{A_0}{R_1} \sin \gamma_{4m-1},$$

где  $m = 1, 2, 3 \dots$ .

Для второго типа схем (рис. 8.7) в точке  $p = \infty$  функция сопротивления  $Z_{11}(p)$  имеет нуль, следовательно, обратная ей функция

$\frac{1}{Z_{11}(p)}$  имеет полюс. Первым элементом в схемах второго типа явля-

ется параллельная емкость [в формуле (8.3) нет индуктивности  $L_1$ ].

Кроме реализации входного сопротивления  $Z_{11}(p)$ , возможна ап-

проксимация лестничной схемой обратной величины  $\frac{1}{Z_{11}(p)}$  в сле-

дующем виде:



$$\frac{1}{Z_{11}(p)} = C_1 p + \frac{1}{L_2 p + \frac{1}{C_3 p + \frac{1}{L_4 p + \dots}}} \quad (8.6)$$

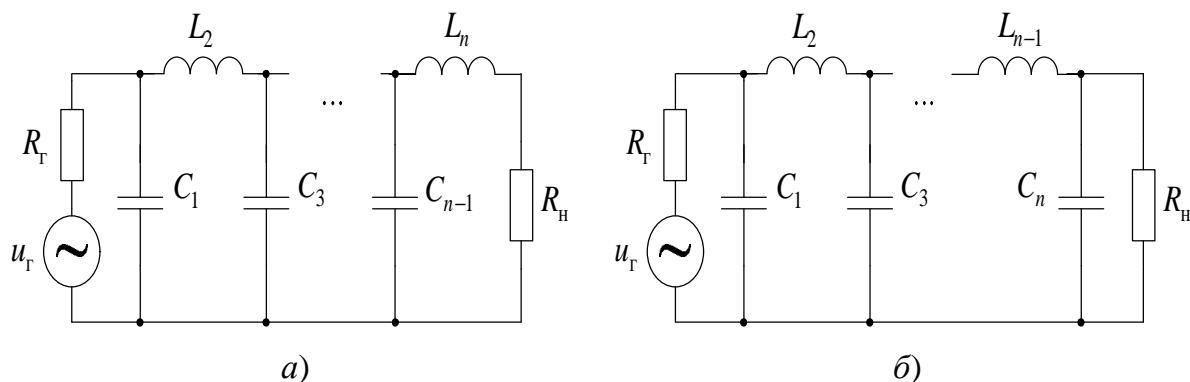


Рис. 8.7. Лестничные схемы для фильтра нижних частот второго типа, функция сопротивления  $Z_{11}(p)$  которых в точке  $p = \infty$  имеет:  
 а – значение  $n$  – четное; б – значение  $n$  – нечетное

Рассчитаем величину первой емкости:

$$C_1 = \frac{A_0 \sin \gamma_1}{R_1 (1 - \delta)},$$

где величины  $\delta$ ,  $\gamma_j$ ,  $A_0$  рассчитываются по формулам (8.4а)–(8.4в). Для вычисления номиналов элементов используются рекуррентные соотношения:

$$\begin{cases} L_{2m-1} L_{2m} = F_1(m); \\ C_{2m+1} C_{2m} = F_2(m). \end{cases}$$

В этих соотношениях величины  $F_1(m)$  и  $F_2(m)$  так же, как и для схем первого типа определяются по формулам (8.5а) и (8.5б).

Полагая  $m = 1, 2, 3$  и так далее, рассчитываются номиналы всех элементов.

При равенстве сопротивлений  $R_H = R_T$  максимальное значение амплитуды в полосе пропускания  $K_0 = 1$ , а  $\delta = 0$ , следовательно, формулы для определения номиналов элементов, как и для схем первого типа, значительно упрощаются:

$$C_{2m-1} = \frac{A_0}{R_1} \sin \gamma_{4m-3}; \quad L_{2m} = A_0 R_1 \sin \gamma_{4m-1}, \quad m = 1, 2, 3 \dots$$

### 8.3. Синтез фильтров Чебышева

Исходя из изложенного выше, частотная характеристика ФНЧ по аппроксимации Чебышева определяется выражением

$$G(\Omega) = \frac{K_0}{1 + \varepsilon^2 C_n^2(\Omega)},$$

где  $\Omega = \frac{\omega}{\omega_{\text{пр}}}$  – относительная частота, а величины  $K_0$  и  $\varepsilon$  определяют-

ся так же, как и при синтезе фильтров с аппроксимацией Баттерворта. Вид частотной характеристики для различных значений  $n$  приведен на рис. 8.8. Характеристика для нечетных значений  $n$  изображена пунктирной линией, для четных значений – сплошной.

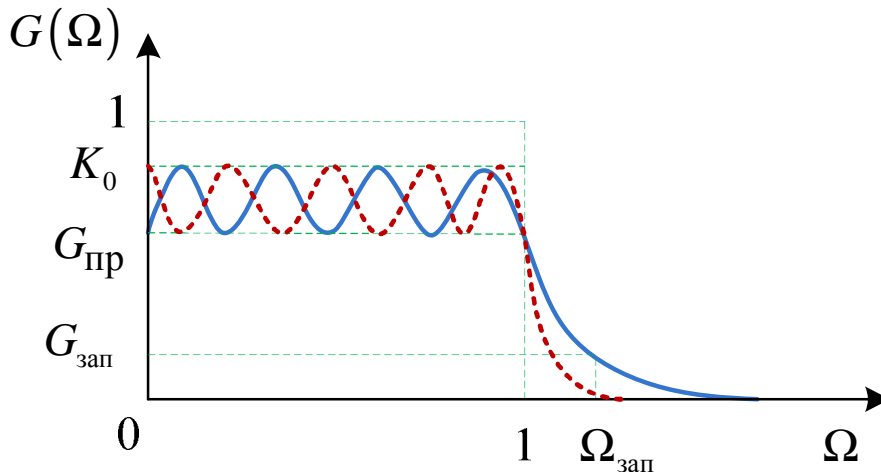


Рис. 8.8. Частотная характеристика Чебышева

Определим порядок синтеза фильтра Чебышева:

1. Рассчитывается значение АЧХ на нулевой частоте:

Для частоты  $\Omega = 0$ , элемент матрицы рассеивания:

$$s_{11}(0) = \frac{R_{\text{н}} - R_{\text{г}}}{R_{\text{н}} + R_{\text{г}}}.$$

Далее расчет выполняется в зависимости от четности  $n$ :

а) если значение  $n$  – нечетное, что соответствует пунктирной линии на рис. 8.8, полином Чебышева равен нулю:  $C_n(0) = 0$ .

На нулевой относительной частоте при  $\Omega = 0$  амплитуда принимает значение:

$$G(0) = K_0 = 1 - |s_{11}(0)|^2.$$

Значение коэффициента  $\varepsilon$  определяется из выражения:

$$G_{\text{пр}} = \frac{K_0}{1 + \varepsilon^2};$$

б) если значения  $n$  – четное, что соответствует сплошной линии на рис. 8.8, квадрат полинома Чебышева принимает значение единица:

$$C_n^2(0) = 1.$$

С одной стороны, значение амплитуды на нулевой частоте, равное  $G(0) = 1 - |s_{11}(0)|^2$ , определяется величиной сопротивлений  $R_r$  и  $R_n$ . С другой стороны, известно, что амплитуда пропускания  $G_{\text{пр}} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2}$ . Поэтому требуется проверить выполнение равенства  $G_{\text{пр}} = G(0)$ . Если оно не выполняется, нужно применить трансформатор сопротивлений или изменить соотношение  $R_n$  и  $R_r$ . Во многих случаях значение  $K_0$  принимает значение, равное единице, если трансформатор сопротивлений уравнивал  $R_n$  и  $R_r$ .

Таким образом, определяется аппроксимирующая передаточная функция  $G(p)$ , затем находится функция входного сопротивления  $Z_{11}(p)$  и реализуется лестничная схема фильтра.

2. Далее реализуется входное сопротивление  $Z_{11}(p)$  в виде одного из двух типов лестничных схем (как и при синтезе фильтров с аппроксимацией Баттерворта).

Первый тип схем (рис. 8.6) – это схемы, функция сопротивления  $Z_{11}(p)$  которых в точке  $p = \infty$  имеют полюс, т. е. схемы с первой последовательной индуктивностью.

Будем использовать обозначения:

$$\gamma_1 = \frac{\pi}{2n}, \quad \gamma_j = \gamma_1 j, \quad a = \frac{1}{n} \operatorname{arsh} \frac{1}{\varepsilon}, \quad \mathcal{A} = \frac{1}{n} \operatorname{arsh} \frac{\sqrt{1 - K_0}}{\varepsilon}, \quad (8.7)$$

где  $j$  – натуральные числа,  $j = 1, 2, 3, \dots$

Величина первой индуктивности определяется выражением

$$L_1 = \frac{2R_1 \sin \gamma_1}{\omega_{\text{пр}} (\text{sha} - \text{sha})}.$$

Затем используются следующие рекуррентные соотношения:

$$\begin{cases} L_{2m-1} C_{2m} = \mathbf{F}_1(m); \\ L_{2m+1} C_{2m} = \mathbf{F}_2(m). \end{cases}$$

В этих соотношениях величины  $\mathbf{F}_1(m)$  и  $\mathbf{F}_2(m)$  определяются по следующим формулам:

$$\mathbf{F}_1(m) = \frac{4 \sin \gamma_{4m-3} \sin \gamma_{4m-1}}{\omega_{\text{пр}}^2 f_{2m-1}(a, \mathfrak{A})}; \quad (8.8a)$$

$$\mathbf{F}_2(m) = \frac{4 \sin \gamma_{4m-1} \sin \gamma_{4m+1}}{\omega_{\text{пр}} f_{2m}(a, \mathfrak{A})}, \quad (8.8b)$$

где  $fk(a, \mathfrak{A}) = \text{sh}^2 a + \text{sh}^2 \mathfrak{A} + \sin^2 \gamma_{2k} - 2 \text{sh} \mathfrak{A} \cdot \text{sha} \cos \gamma_{2k}$ .

По этим соотношениям рассчитываются номиналы элементов, полагая  $m = 1, 2, 3$  и так далее, пока не будут рассчитаны номиналы всех элементов.

Для схем второго типа (рис. 8.7) в точке  $p = \infty$  функция сопротивления  $Z_{11}(p)$  имеет нуль, следовательно, обратная ей функция  $\frac{1}{Z_{11}(p)}$  имеет полюс. Первым элементом в схемах второго типа является параллельная емкость.

Расчет выполняется аналогично. Первая емкость вычисляется по формуле

$$C_1 = \frac{2 \sin \gamma_1}{\omega_{\text{пр}} R_1 (\text{sha} - \text{sh} \mathfrak{A})},$$

где величины  $\gamma_j$ ,  $a$ ,  $\mathfrak{A}$  рассчитываются по формулам (8.7). Для вычисления номиналов элементов используются рекуррентные соотношения:

$$\begin{cases} C_{2m-1} L_{2m} = \mathbf{F}_1(m); \\ C_{2m+1} L_{2m} = \mathbf{F}_2(m). \end{cases}$$

В этих соотношениях величины  $\mathbf{H}_1(m)$  и  $\mathbf{H}_2(m)$  так же, как и для схем первого типа определяются по формулам (8.8а) и (8.8б).

Полагая  $m = 1, 2, 3$  и так далее, рассчитываются номиналы всех элементов.

**Пример.** Рассмотрим, как осуществляется синтез ФНЧ с аппроксимацией Баттерворта.

Требуется определить порядок и рассчитать величины элементов реактивного фильтра, удовлетворяющего требованиям:

$$R_r = R_n = 100 \text{ Ом}; G_{\text{пр}} = -1 \text{ дБ}; \omega_{\text{зап}} = 4\omega_{\text{пр}}; \omega_{\text{пр}} = 104; G_{\text{зап}} = -60 \text{ дБ}.$$

В примере, рассмотренном выше, для ФНЧ Баттерворта было рассчитаны следующие параметры:  $G_{\text{пр}} = 0,794$ ,  $n = 6$ .

В силу равенства сопротивлений генератора и нагрузки справедливо:  $s_{11}(0) = 0$ . Из этого следует, что  $K_0 = 1$ .

Используя соотношения (8.4а)–(8.4в), определяем:

$$\gamma_1 = \frac{180^\circ}{2 \cdot 6} = 15^\circ.$$

Из выражения для амплитуды пропускания  $G_{\text{пр}} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2}$  определяем величину коэффициента  $\varepsilon$ :  $\varepsilon = 0,509$ , после чего вычисляем  $A_0$ :

$$A_0 = \frac{2^n \sqrt{\varepsilon}}{\omega_{\text{пр}}} = \frac{2^6 \sqrt{0,509}}{10^4} = 1,787 \cdot 10^{-4}.$$

Рассчитаем номиналы элементов фильтра:

• Для  $m = 1$ :

– первая индуктивность:  $L_1 = 1,787 \cdot 10^{-4} \cdot 100 \cdot \sin 15^\circ = 4,6 \text{ мГн}$ ;

– вторая емкость:  $C_2 = \frac{1,787 \cdot 10^{-4}}{100} \sin 45^\circ = 1,26 \text{ мкФ}$ .

• Для  $m = 2$ :

– третья индуктивность:  $L_3 = 1,787 \cdot 10^{-4} \cdot 100 \cdot \sin 75^\circ = 17,0 \text{ мГн}$ ;

– четвертая емкость:  $C_4 = \frac{1,787 \cdot 10^{-4}}{100} \sin 105^\circ = 1,73 \text{ мкФ}$ .

• Для  $m = 3$ :

– пятая индуктивность:  $L_5 = 1,787 \cdot 10^{-4} \cdot 100 \cdot \sin 135^\circ = 13,0 \text{ мГн}$ ;

– шестая емкость:  $C_6 = \frac{1,787 \cdot 10^{-4}}{100} \sin 165^\circ = 0,46 \text{ мкФ}$ .

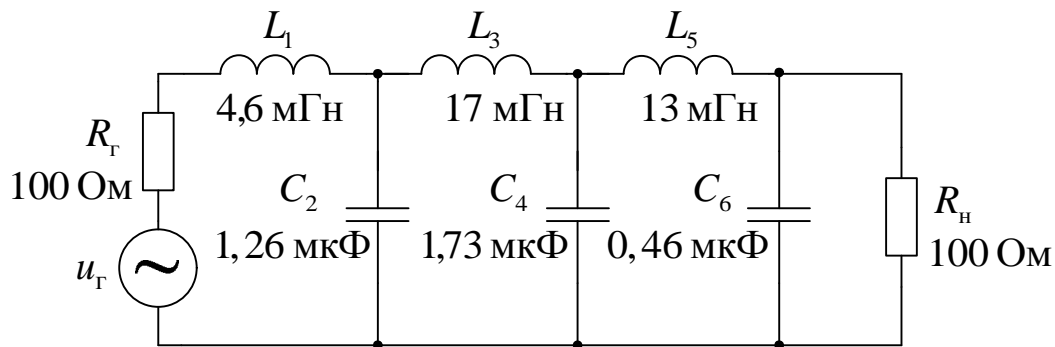


Рис. 8.9. Схема фильтра шестого порядка с характеристикой Баттерворта

Рассчитаны номиналы всех элементов. Полученная схема фильтра Баттерворта изображена на рис. 8.9.

#### 8.4. Замена частотной переменной при расчетах фильтров

В параграфах 8.1–8.3 рассмотрен расчет фильтров нижних частот. Переход к другим видам фильтров производят с помощью замены частотной переменной  $\Omega$ . Осуществляя эту замену, следует иметь в виду, что передаточные функции фильтров аппроксимируются четными по отношению к частоте функциями [см. выражения (8.1), (8.2)].

Обозначим  $\omega$  частоту ФНЧ. Тогда  $\omega'$  – частота другого фильтра. Осуществим замену частотной переменной:

$$\omega = \frac{K}{\omega'}, \quad (8.9)$$

где  $K$  – некая константа. Такая замена (8.9) эквивалентна перемещению местами начала координат и бесконечно удаленной частотной точки. Амплитудно-частотная характеристика ФНЧ преобразуется в АЧХ фильтра верхних частот (ФВЧ), как это показано на рис. 8.10.

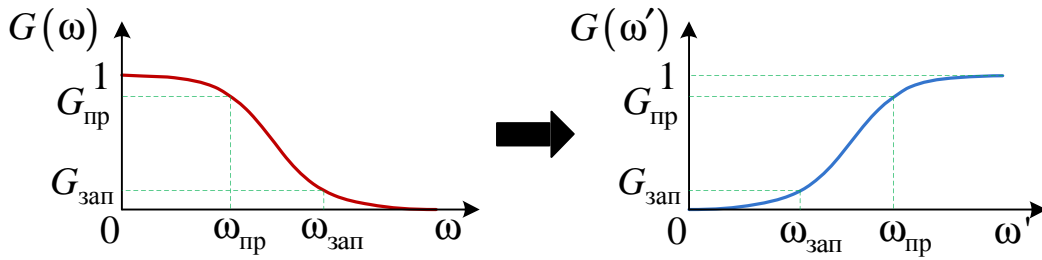


Рис. 8.10. Преобразование частотной характеристики из фильтра нижних частот в фильтр верхних частот

При замене переменной по формуле (8.8) реактивные сопротивления элементов ФНЧ изменяются следующим образом:

$$\omega L \rightarrow \frac{KL}{\omega'} = \frac{1}{\omega' C'}, \text{ где } C' = \frac{1}{KL};$$

$$\omega C \rightarrow \frac{KC}{\omega'} = \frac{1}{\omega' L'}, \text{ где } L' = \frac{1}{KC}.$$

Следовательно, схема соответствующего ФВЧ получается из схемы ФНЧ заменой каждой индуктивности емкостью и каждой емкости индуктивностью. Если константу  $K$  выбрать равной:  $K = \omega_{\text{пр}}^{-2}$ , фильтры и нижних, и верхних частот будут иметь одинаковую частоту пропускания  $\omega_{\text{пр}}$ .

Для получения АЧХ полосно-пропускающего фильтра осуществляется следующая замена частотной переменной:

$$\omega = K\omega'_0 \left( \frac{\omega'}{\omega'_0} - \frac{\omega'_0}{\omega'} \right), \quad (8.10)$$

где  $\omega'_0$ ,  $K$  – некоторые константы. Согласно (8.10) четная функция ФНЧ  $G(\omega)$  преобразуется в четную функцию ППФ  $G(\omega')$ , имеющую на каждой частотной полуоси геометрическую симметрию по отношению к точкам  $\omega'_0$  и  $-\omega'_0$ , как это изображено на рис. 8.11.

Граничные частоты ППФ  $\omega'_1$  и  $\omega'_2$  связаны с граничной частотой ФНЧ  $\omega_{\text{пр}}$  следующими соотношениями:

$$2\Delta\omega' = \omega'_2 - \omega'_1 = \frac{\omega_{\text{пр}}}{K} \text{ и } \omega'_1\omega'_2 = (\omega'_0)^2.$$

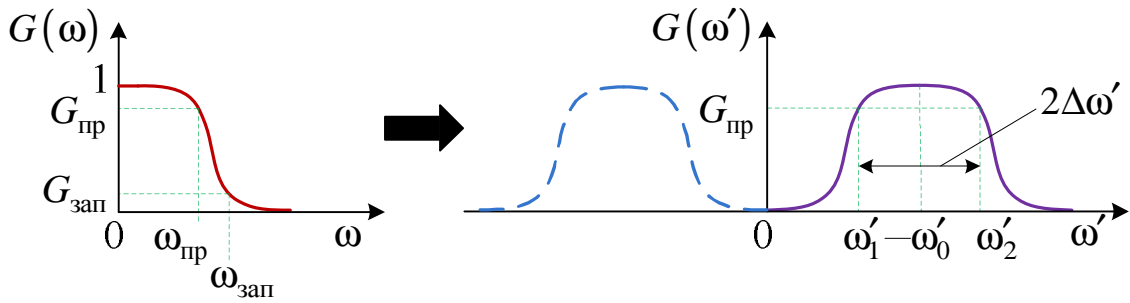


Рис. 8.11. Преобразование частотной характеристики из фильтра нижних частот в полосно-пропускающий фильтр

Индуктивность ФНЧ после замены частотной переменной согласно выражению (8.9) преобразуется в ППФ в последовательный колебательный контур. При этом выполняются соотношения:

$$\omega L \rightarrow K\omega'_0 L \left( \frac{\omega'}{\omega'_0} - \frac{\omega'_0}{\omega'} \right) = \omega' L' - \frac{1}{\omega' C'},$$

где  $L' = KL$ , а  $C' = \frac{1}{KL(\omega'_0)^2}$ .

Одновременно с этим емкость ФНЧ после замены частотной переменной преобразуется в ППФ в параллельный колебательный контур. При этом справедливо:

$$\omega C \rightarrow K\omega'_0 C \left( \frac{\omega'}{\omega'_0} - \frac{\omega'_0}{\omega'} \right) = \omega' C'' - \frac{1}{\omega' L''},$$

где  $C'' = KC$ , а  $L'' = \frac{1}{KC(\omega'_0)^2}$ .

Следовательно, при расчете ППФ достаточно задать среднюю частоту  $\omega'_0$  и полосу пропускания  $2\Delta\omega'$ .

При замене частотной переменной по формуле (8.8) амплитудно-частотная характеристика ФНЧ преобразуется в АЧХ ФВЧ. Применение замены (8.9) АЧХ ФНЧ приводит к ППФ.

Таким образом, любой из рассмотренных типов частотно-избирательных фильтров может быть легко рассчитан на основе единого прототипа – ФНЧ.



# Глава 9. Методы анализа линейных цепей дискретного времени

## 9.1. Сигналы дискретного времени и линейные разностные уравнения

Математическое исследование дискретных цепей существенно упрощается в том случае, если все величины рассматриваются в дискретные равноотстоящие моменты времени. Для этого непрерывные сигналы заменяются дискретными во времени сигналами (ДВ-сигналами), которые математически описываются при помощи решетчатой функции.

*Решетчатая функция* времени  $x[nT]$ , или в сокращенной записи  $x[n]$  – это математическая функция, значения которой определены в дискретные равноотстоящие друг от друга моменты времени  $t = nT$ , где  $n$  – целое положительное число  $0, 1, 2 \dots$ , а  $T$  – период дискретности. То есть решетчатая функция представляет собой числовую последовательность:  $x[0], x[1T], x[2T], x[3T], \dots, x[nT]$ .

Если период дискретности  $T$  задан, то решетчатая функция однозначно формируется из исходной непрерывной.

Дискретные во времени сигналы могут задаваться:

- посредством графиков (рис. 9.1);
- математическими формулами, например,  $x[n] = 2^n$ ;
- в виде таблиц;
- в виде комбинаций этих методов.

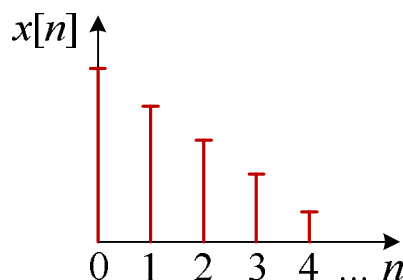


Рис. 9.1. Графическое задание ДВ-сигнала

Дискретный по времени режим работы свойственен многим бытовым системам, например, кино, банковские операции, медицинские назначения больному. Можно отметить, что регулярность – это дис-

кретность в пространстве, которую отражают такие физические системы, как линии задержки с отводами или дифракционные решетки и т. д.

Очень частая причина замена непрерывных во времени систем (НВ-систем) системами дискретного времени (ДВ-системами) – сделать возможность обработку сигнала на компьютере.

Линейное разностное уравнение  $N$ -го порядка с постоянными коэффициентами, связывающее входной сигнал  $f[n]$  с выходным сигналом  $y[n]$ , имеет вид:

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n+k] = f[n], \quad (9.1)$$

где  $f[n]$  – известная функция;  $\{a_k\}$  – заданные величины.

Это уравнение можно рассматривать как рекуррентную формулу, позволяющую вычислить  $y[n]$ ,  $y[n+1]$ ,  $y[n+2]$ ..., если известны значения  $y[0]$ ,  $y[1]$ ,  $y[2]$ , ...  $y[n-1]$ . В этом заключается одно из отличий разностных уравнений от дифференциальных.

Рассмотрим составление разностных уравнений для электрических цепей на следующих примерах.

**Пример.** Дана электрическая цепь из сосредоточенных элементов изображенная на рис. 9.2. Заменим непрерывный сигнал ДВ-сигналом.

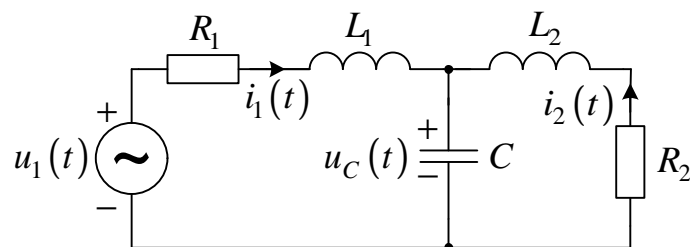


Рис. 9.2. Электрическая цепь из сосредоточенных элементов

Система уравнений Кирхгофа для данной цепи имеет вид:

$$\begin{cases} L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + R_1 i_1(t) + u_C(t) = u_1(t); \\ L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + R_2 i_2(t) + u_C(t) = 0; \\ C \frac{du_C(t)}{dt} = i_1(t) + i_2(t). \end{cases}$$

Выразим из этих уравнений производные:

$$\begin{cases} \frac{di_1(t)}{dt} = -i_1(t) \frac{R_1}{L_1} - \frac{1}{L_1} u_C(t) + \frac{1}{L_1} u_1(t); \\ \frac{di_2(t)}{dt} = -i_2(t) \frac{R_2}{L_2} - \frac{1}{L_2} u_C(t); \\ \frac{du_C(t)}{dt} = \frac{1}{C} i_1(t) + \frac{1}{C} i_2(t). \end{cases} \quad (9.2)$$

Заменяем производные в этих выражениях разностями:

$$\frac{dx(t)}{dt} \approx \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t},$$

где  $\Delta t$  – небольшое приращение времени, которое в нашем случае соответствует периоду дискретизации решетчатой функции, которой описывается ДВ-сигнал.

Получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} i_1(t + \Delta t) = i_1(t) \left( 1 - \frac{\Delta t R_1}{L_1} \right) - \frac{\Delta t}{L_1} u_C(t) + \frac{\Delta t}{L_1} u_1(t); \\ i_2(t + \Delta t) = i_2(t) \left( 1 - \frac{\Delta t R_2}{L_2} \right) - \frac{\Delta t}{L_2} u_C(t); \\ u_C(t + \Delta t) = u_C(t) + \frac{\Delta t}{C} i_1(t) + \frac{\Delta t}{C} i_2(t). \end{cases}$$

Обозначим далее  $t = n\Delta t$ , осуществим замену  $i_1(t) = i_1(n\Delta t) = i_1[n]$ ;  $i_2(t) = i_2(n\Delta t) = i_2[n]$  и т. д.

Примем для расчета следующие номиналы элементов цепи:  $R_1 = R_2 = 1$  кОм;  $C = 0,2$  мкФ;  $L_1 = L_2 = 0,1$  Гн;  $\Delta t = 10$  мкс.

Получим нашу систему уравнений в виде:

$$\begin{cases} i_1[n+1] = i_1[n] 0,9 - 10^{-4} u_C[n] + 10^{-4} u_1[n]; \\ i_2[n+1] = i_2[n] 0,9 - 10^{-4} u_C[n]; \\ u_C[n+1] = u_C[n] + 50i_1[n] + 50i_2[n]. \end{cases}$$

Расчет можно вести с помощью полученных рекуррентных соотношений. Однако при этом алгоритм оказывается численно неустойчивым. В результате последовательного выполнения одних и тех же действий накапливается ошибка вычислений. Полная накопленная ошибка приложенного решения растет во времени – решение расходится, т. е. алгоритм неустойчив.

Поэтому часто используется неявный алгоритм. Для этого производные в выражениях (9.2) заменяются разностями:

$$\frac{dx(t)}{dt} \approx \frac{x(t) - x(t - \Delta t)}{\Delta t}.$$

Заменим в уравнениях (9.2) производные на разность, а время следующим выражением:  $t = [n + 1]\Delta t$ .

Получим:

$$\begin{cases} 1,1i_1[n+1] \approx i_1[n] - 10^{-4}u_c[n+1] + 10^{-4}u_1[n+1]; \\ 1,1i_2[n+1] \approx i_2[n] - 10^{-4}u_c[n+1]; \\ u_c[n+1] \approx u_c[n] + 50i_1[n+1] + 50i_2[n+1]. \end{cases}$$

В этом алгоритме систему уравнений нужно решать при каждой итерации, так как новые значения  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $u_c$  при  $n + 1$  зависят друг от друга.

**Пример.** Рассмотрим случай, в котором дискрета  $n$  соответствует пространству, а не времени. Составим уравнения по закону Кирхгофа для однородной многозвенной цепи лестничного типа, которая изображена на рис. 9.3.

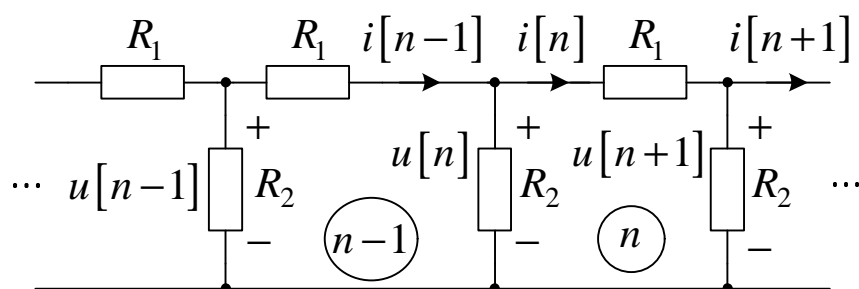


Рис. 9.3. Цепь лестничного типа

Напряжения и токи в цепи на рис. 9.3 удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\begin{cases} u[n+1] = u[n] - i[n]R_1; \\ i[n+1] = i[n] - \frac{u[n+1]}{R_2}. \end{cases}$$

Из первого уравнения выразим значение тока  $i[n] = \frac{u[n]}{R_1} - \frac{u[n+1]}{R_1}$

и подставим его во второе уравнение:

$$\frac{u[n+1]}{R_1} - \frac{u[n+2]}{R_1} = \frac{u[n]}{R_1} - \frac{u[n+1]}{R_1} - \frac{u[n+1]}{R_2}.$$

Или можно записать иначе:

$$R_2 u[n+2] - (2R_2 + R_1)u[n+1] + R_2 u[n] = 0. \quad (9.3)$$

Положим все сопротивления равными 1 Ом. Пусть с одной стороны цепь запитана источником напряжения  $u_0$ , как это показано на рис. 9.4.

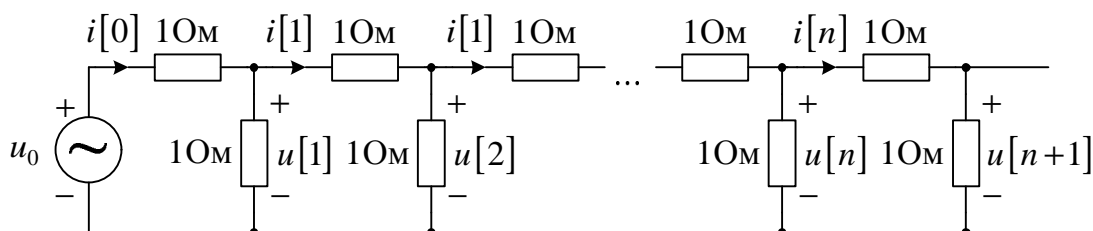


Рис. 9.4. Цепь лестничного типа, запитанная с одной стороны источником постоянного напряжения

Для  $R_1 = R_2 = 1$  Ом уравнение (9.3) преобразуется к виду:

$$u[n+2] - 3u[n+1] + u[n] = 0. \quad (9.4)$$

При этом должны выполняться граничные условия:

$$u[0] = u_0 \text{ и } u[n] \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Решение ищем в виде:  $u[n] = Az^n$ ,

где  $A$  – константа, которая находится исходя из начальных условий;  $z$  – некоторое число, в общем случае комплексное.

Такие однородные решения называются *дискретными экспонентами* (ДВ-экспонентами). Подставим полученное решение в уравнение (9.3):

$$Az^{n+2} - 3Az^{n+1} + Az^n = Az^n (z^2 - 3z + 1) = 0.$$

Если выражение  $u[n] = Az^n \neq 0$ , то  $z^2 - 3z + 1 = 0$ . Из последнего уравнения находим корни:

$$z_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \text{ или } z_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \text{ а } z_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

Тогда общее решение уравнения (9.3) (поскольку оно линейное) выражается следующим образом:

$$u[n] = C \left( \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + D \left( \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Имеем:

$$z_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} = 2,7 > 1; \quad z_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = 0,38 < 1.$$

Как видно из полученного решения, функция  $z^n = z_2^n$  будет возрастать с ростом  $n$ . Поэтому второй корень  $z_2$  не удовлетворяет граничным условиям.

Принимаем  $u[n] = u[0] \left( \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$ , причем  $n \geq 0$ .

Для нахождения тока  $i[0]$  запишем:

$$u[0] = u[1] + i[0] \cdot 1 \text{ Ом.}$$

Откуда получаем:

$$i[0] = u[0] - u[1] = u_0 \left( 1 - \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right) = u_0 \left( \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right).$$

Определим входное сопротивление:

$$Z_{\text{вх}} = \frac{u[0]}{i[0]} = \frac{u_0 \cdot 2}{u_0 (\sqrt{5} - 1)} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,62 \text{ Ом.}$$

Определить входное сопротивление в этом примере можно и иным способом. Пусть  $R_{\text{вх}}$  – входное сопротивление рассматриваемой бесконечной цепи, тогда добавление впереди еще одного звена не должно изменить величины  $R_{\text{вх}}$ . Значит,  $R_{\text{вх}}$  должно быть равно входному сопротивлению одного звена, нагруженного на  $R_{\text{вх}}$  (рис. 9.5).

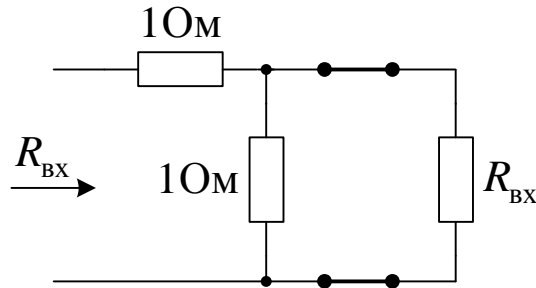


Рис. 9.5. К определению входного сопротивления бесконечной лестничной схемы из резисторов

Из схемы, представленной на рис. 9.5, получаем уравнение:

$$R_{\text{вх}} = 1 + \frac{R_{\text{вх}}}{1 + R_{\text{вх}}} \quad \text{или} \quad R_{\text{вх}}^2 + R_{\text{вх}} = 1 + R_{\text{вх}} + R_{\text{вх}}.$$

Преобразуя данное выражение, имеем:

$$R_{\text{вх}}^2 - R_{\text{вх}} - 1 = 0.$$

Решением этого уравнения будет:

$$R_{\text{вх}} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Отрицательным сопротивление цепи быть не может, поэтому:

$$R_{\text{вх}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,62 \text{ Ом}.$$

## 9.2. Z-преобразование

Метод прямого Z-преобразования используется для нахождения реакции систем дискретного времени на внешнее воздействие. Метод аналогичен преобразованию Лапласа для непрерывных систем (НВ-систем). ДВ-экспонента  $z^n$  выполняет в этом случае роль множителя  $e^{pt}$ .

Z-преобразованием дискретной последовательности  $x[n]$  называется ряд следующего вида:

$$\tilde{X}(z) = Z\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] \cdot z^{-n}, \quad (9.5)$$

где  $Z\{x[n]\}$  – символьное обозначение Z-преобразования;  $x[n]$  – оригинал функции;  $\tilde{X}(z)$  – ее изображение, т. е. результат Z-преобразования.

Запись  $x[n] \in \tilde{X}(z)$  обозначает, что функция  $\tilde{X}(z)$  является изображением решетчатой функции  $x[n]$ .

Если модуль функции  $x[n]$  растет не быстрее, чем дискретная экспонента  $z^n$ , ряд (9.5) сходится для всех  $z$ , находящихся вне некоторого круга на комплексной  $z$ -плоскости (рис. 9.6), радиус которого  $r_0$  называется *радиусом сходимости*.

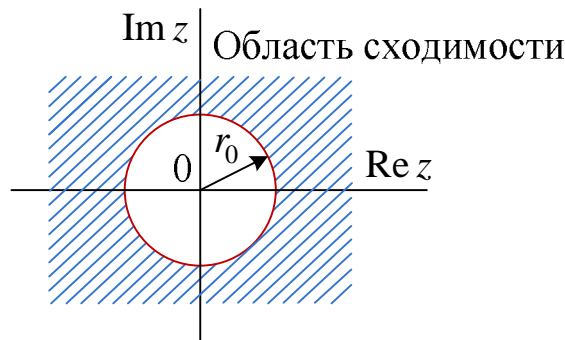


Рис. 9.6. Область сходимости ряда Z-преобразования

Существует взаимно однозначное соответствие между функцией  $x[n]$  и ее  $z$ -изображением  $\tilde{X}(z)$ . Это значит, что каждому значению  $x[n]$ , определенному для  $n \geq 0$ , соответствует одно и только одно значение  $z$ -изображения  $\tilde{X}(z)$ , определенное для области  $|z| > r_0$ , причем верно и обратное утверждение.

**Пример.** Пусть функция  $x[n]$  задана выражением  $x[n] = Aa^n$ , причем  $n \geq 0$ . Рассмотрим, как изменяются области сходимости Z-преобразования этой функции в зависимости от значения величины  $a$ .

Пусть  $a < 1$ , т. е.  $x[n]$  – убывающая последовательность в виде дискретной экспоненты, представленной на рис. 9.7,  $a$ .



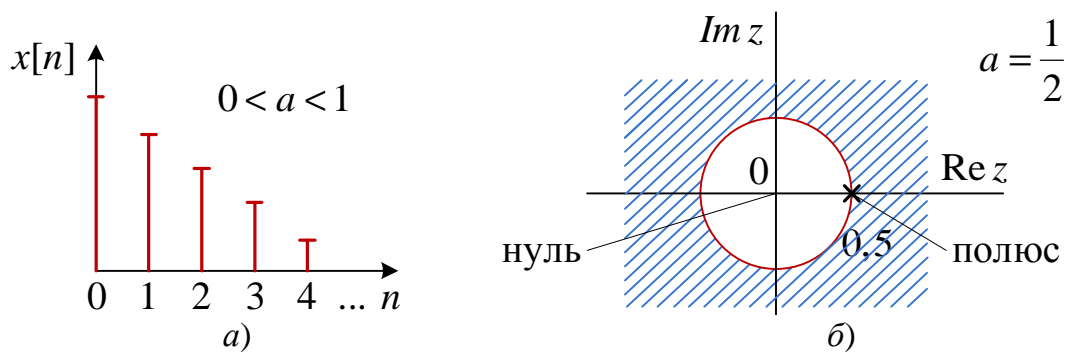


Рис. 9.7. Область сходимости дискретной функции  $x[n] = Aa^n$  при  $0 < a < 1$ :  
*a* – графическое изображение функции

*b* – область сходимости изображения данной функции при  $a = \frac{1}{2}$

Z-преобразование данной функции определится в виде:

$$\mathcal{X}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} Aa^n z^{-n} = A \sum_{n=0}^{\infty} (aZ^{-1})^n = \frac{A}{1 - aZ^{-1}}.$$

Область сходимости  $z$ -изображения определяется при ограничении  $|aZ^{-1}| < 1$ , откуда получим:  $|z| > |a|$ , причем радиус сходимости определится как  $r_0 = |a|$ .

Эти формулы справедливы и в том случае, если  $a$  – комплексное число.

Изображение  $\mathcal{X}(z)$  имеет нуль при  $z = 0$  и полюс при  $z = a$  на окружности, ограничивающей область сходимости. Пример области сходимости при  $a = \frac{1}{2}$  изображен на рис. 9.7, *b*.

Рассмотрим область сходимости  $z$ -изображения при  $a = 1$ . В этом случае функция  $x[n] = A = \text{const}$  и ей соответствует изображение на рис. 9.8, *a*. Z-преобразование данной функции определится в виде:

$$\mathcal{X}(z) = \frac{A}{1 - z^{-1}}.$$

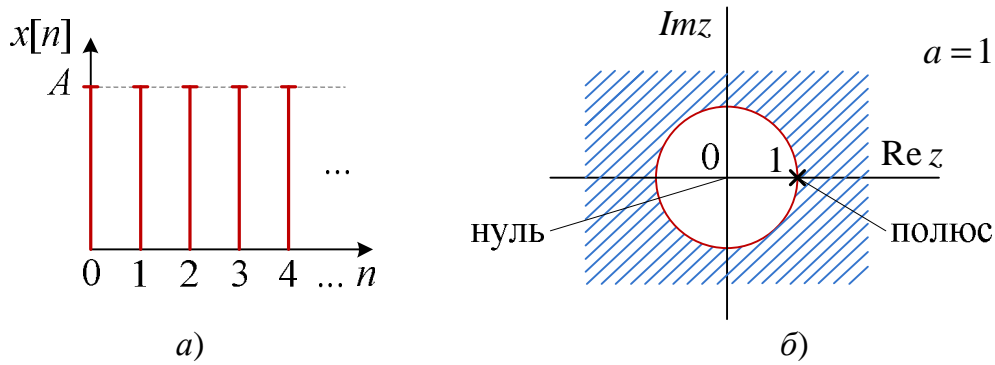


Рис. 9.8. Область сходимости дискретной функции  $x[n] = Aa^n$  при  $a = 1$ :  
 а – графическое изображение функции  $x[n] = A$  при  $n \geq 0$ ;  
 б – область сходимости Z-преобразования этой функции

Радиус сходимости  $z$ -изображения  $X^0(z)$  в этом случае равен единице, в точке  $z = 1$   $z$ -изображение  $X^0(z)$  имеет полюс.

Рассмотрим область сходимости  $z$ -изображения при отрицательных меньших единицы по модулю значениях  $a$ . Пусть  $a = -0,8$ , т. е. функция определяется выражением  $x[n] = A(-0,8)^n$  при  $n \geq 0$ . ДВ-функция будет знакопеременной. Графическое изображение данной функции и область сходимости ее Z-преобразования приведены на рис. 9.9. Полюс располагается на отрицательной части оси  $\text{Re } z$ .

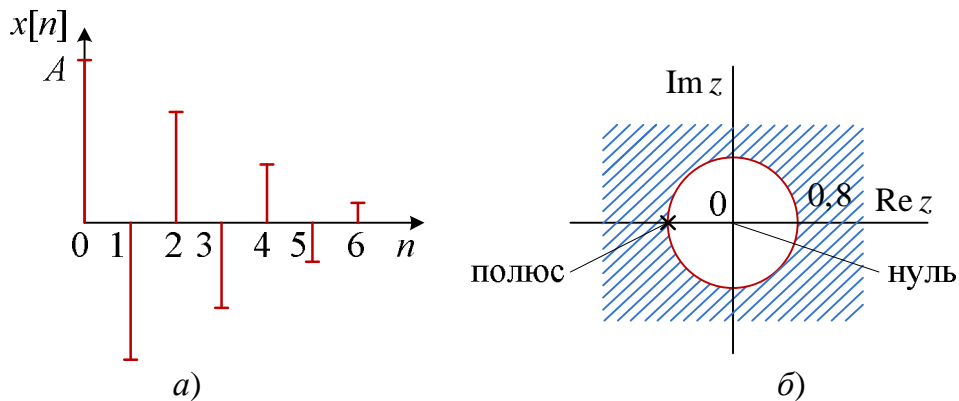


Рис. 9.9. Область сходимости дискретной функции  $x[n] = Aa^n$  при  $|a| < 1$ :  
 а – графическое изображение функции  $x[n] = A(-0,8)^n$   
 при  $n \geq 0$ ; б – область сходимости Z-преобразования этой функции

**Пример.** Определим по известному  $z$ -изображению  $X^0(z)$  выражение для функции  $x[n]$ . Пусть

$$\mathcal{X}^0(z) = \frac{30z^2}{6z^2 - z - 1} = \frac{5}{1 - \frac{1}{6}z^{-1} - \frac{1}{6}z^{-2}}.$$

Согласно теореме единственности этому  $z$ -изображению должна соответствовать единственная функция  $x[n]$  при  $n \geq 0$ . Для того чтобы найти  $x[n]$ , нужно разложить  $z$ -изображение  $\mathcal{X}^0(z)$  в ряд по степеням  $z^{-1}$ . Для этого разделим числитель выражения для  $\mathcal{X}^0(z)$  на знаменатель. Получим:

$$\begin{array}{r} \frac{30z^2}{30z^2 - 5z - 5} \quad \left| \frac{6z^2 - z - 1}{5 + \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{35}{36}z^{-2} + \dots} \right. \\ \underline{-5z + 5} \\ 5z - \frac{5}{6} - \frac{5}{6}z^{-1} \\ \underline{\phantom{5z} - \frac{35}{36} + \frac{5}{6}z^{-1}} \\ \frac{35}{6} + \frac{5}{6}z^{-1} \end{array}$$

Таким образом,  $Z$ -преобразование функции  $x[n]$  будет равно:

$$\mathcal{X}^0(z) = \frac{30z^2}{6z^2 - z - 1} = 5 + \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{35}{36}z^{-2} + \mathbf{L}$$

Поскольку по определению  $\mathcal{X}^0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] \cdot z^{-n}$ , получаем:

$$x[0] = 5, \quad x[1] = \frac{5}{6}, \quad x[2] = \frac{35}{36} \text{ и т. д.}$$

Более эффективный способ определения функции  $x[n]$  по известному  $z$ -изображению – метод разложения  $\mathcal{X}^0(z)$  на элементарные дроби (как в операторном методе). После разложения  $z$ -изображения получаем:

$$\mathcal{X}^0(z) = \frac{30z^2}{6z^2 - z - 1} = \frac{5}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{1}{3}z^{-1}\right)} = \frac{3}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)} + \frac{2}{\left(1 + \frac{1}{3}z^{-1}\right)}.$$

В этом выражении коэффициенты в числителе определяются обычным способом. Тогда, поскольку  $Z$ -преобразование – это линей-

ная операция, на основании теоремы единственности и выражения (9.4) получим выражение для функции  $x[n]$ :

$$x[n] = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2\left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

Рассчитываем значения при  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

$$x[0] = 5; \quad x[1] = \frac{3}{2} - \frac{2}{3} = \frac{5}{6}; \quad x[2] = 3\frac{1}{4} + 2\frac{1}{9} = \frac{27+8}{36} = \frac{35}{36}.$$

И наконец, задачу нахождения функции  $x[n]$  можно решить, используя обратное Z-преобразование:

$$Z^{-1}\{\tilde{X}(z)\} = x[n].$$

Формула для вычисления этого преобразования имеет следующий вид:

$$x[n] = Z^{-1}\{\tilde{X}(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{r_0} z^{n-1} \tilde{X}(z) \cdot dz = \sum_k \text{res}\left(z^{n-1} \tilde{X}(z)\right),$$

где интеграл берется по окружности радиуса  $r_0$  (радиуса сходимости). Согласно теореме Коши о вычетах этот интеграл равен сумме вычетов подынтегральной функции внутри круга радиуса  $r_0$  (с учетом множителя  $\frac{1}{2\pi j}$ ). Таким образом, получаем:

$$x[n] = \sum_k \text{res}\left[z^{n-1} \tilde{X}(z)\right].$$

**Пример.** Рассмотрим пример определения функции  $x[n]$  по известному  $z$ -изображению  $\tilde{X}(z) = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$  при помощи вычетов.

$$\text{Имеем: } x[n] = \sum_k \text{res}\left[\frac{z^n(z+1)}{(z-1)^3}\right].$$

Функция  $\frac{z^n(z+1)}{(z-1)^3}$  имеет один полюс третьего порядка в точке  $z = 1$ .

Следовательно, получаем:

$$\begin{aligned}
x[n] &= \frac{1}{2!} \cdot \frac{d^2}{dz^2} (z^n(z+1)) \Big|_{z=1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2}{dz^2} (z^{n+1} + z^n) \Big|_{z=1} = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dz} ((n+1) \cdot z^n + nz^{n-1}) \Big|_{z=1} = \frac{1}{2} ((n+1)nz^{n-1} + n(n-1)z^{n-1}) \Big|_{z=1} = \\
&= \frac{1}{2} (n^2 + n + n^2 - n) = n^2.
\end{aligned}$$

### 9.3. Свойства Z-преобразования

Как было изложено выше, дискретный сигнал  $x[n]$  и его Z-преобразование  $\tilde{X}(z)$  связаны следующим выражением:

$$\tilde{X}(z) = Z\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] \cdot z^{-n}.$$

Одним из важнейших свойств Z-преобразования является свойство его единственности, в соответствии с которым последовательность  $x[n]$  однозначно определяется  $z$ -изображением  $\tilde{X}(z)$  в области его сходимости. И наоборот,  $z$ -изображение  $\tilde{X}(z)$  однозначно определяет последовательность  $x[n]$ . Рассмотрим другие свойства Z-преобразования:

1. *Свойство линейности (суперпозиции).*

Пусть функция  $x[n]$  имеет  $z$ -изображение  $\tilde{X}(z)$ , а функция  $y[n]$  имеет изображение  $\tilde{Y}(z)$ . Из выражения (9.4) следует, что Z-преобразование  $\tilde{X}(z)$  линейно связано с оригиналом  $x[n]$ . Отсюда вытекает следующее свойство:

$$Z\{\alpha x[n] + \beta y[n]\} = \alpha \tilde{X}(z) + \beta \tilde{Y}(z),$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  – константы, не зависящие ни от  $n$ , ни от  $z$ .

2. *Z-преобразование задержанной последовательности (теорема сдвига).*

Z-преобразование задержанной на число отсчетов  $N \geq 0$  последовательности  $x[(n-N)]$  равно  $z$ -изображению незадержанной последовательности  $x[n]$ , умноженному на  $z^{-N}$ :

$$Z\{x[n-N]\} = \tilde{X}(z) \cdot z^{-N}.$$

3. Z-преобразование свертки последовательностей (теорема о свертке).

Сверткой дискретных последовательностей  $x_1[n]$  и  $x_2[n]$  называется последовательность  $x[n]$ , определяемая соотношением:

$$x[n] = \sum_{m=0}^{\infty} x_1[m] \cdot x_2[(n-m)].$$

Z-изображение свертки равно произведению z-изображений свертываемых последовательностей:

$$Z\{x[n]\} = \tilde{X}(z) = \tilde{X}_1(z) \cdot \tilde{X}_2(z).$$

Рассмотрим на примерах частные случаи применения теоремы сдвига Z-преобразования.

Определим z-изображение дискретного единичного скачка  $1[n]$ , изображенного на рис. 9.10, который описывается следующим математическим выражением:

$$1[n] = \begin{cases} 0, & n < 0; \\ 1, & n \geq 0. \end{cases}$$

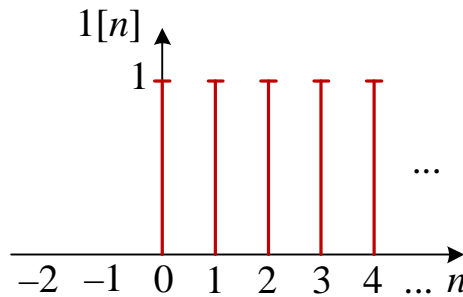


Рис. 9.10. Дискретная функция единичного скачка

Z-изображение дискретного единичного скачка:

$$\tilde{1}(z) = Z\{1[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} 1[n] \cdot z^{-n} = \frac{1}{1-z^{-1}}.$$

Z-изображение дискретного единичного скачка, сдвинутого на  $N$  тактов:

$$\tilde{1}(z-N) = Z\{1[n-N]\} = z^{-N} \tilde{1}(z) = \frac{z^{-N}}{1-z^{-1}}.$$

Тогда  $z$ -изображение дискретной экспоненты, сдвинутой на  $N$  тактов, примет вид:

$$Z\{a^{n-N}\} = z^{-N} \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z^{-N}}{1-az^{-1}}.$$

Найдем изображение функции  $x[n+m]$ , где  $n = k - m$  или  $k = n + m$ :

$$\begin{aligned} \tilde{X}(n+m) &= Z\{x[n+m]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n+m] \cdot z^{-n} = z^m \sum_{n=0}^{\infty} x[n+m] \cdot z^{-(n+m)} = \\ &= z^m \sum_{k=m}^{\infty} x[k] \cdot z^{-k} = z^m \left( \sum_{k=0}^{\infty} x[k] \cdot z^{-k} - \sum_{k=0}^{m-1} x[k] \cdot z^{-k} \right) = z^m \left( \tilde{X}[z] - \sum_{k=0}^{m-1} x[k] \cdot z^{-k} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, принимая в  $m=1$ , можно записать  $z$ -изображение последовательности  $x[n+1]$  в виде:

$$Z\{x[n+1]\} = z(\tilde{X}(z) - x[0]).$$

Если примем  $m=2$ , то  $Z\{x[n+2]\} = z(\tilde{X}(z) - x[0] - x[1] \cdot z^{-1})$ , и т. д.

**Пример.** Рассмотрим уравнение вида:  $y[n+2] - \frac{1}{6}y[n+1] - \frac{1}{6}y[n] = 2x[n]$ , в котором  $x[n] = 1[n]$ ,  $y[0] = 0$ ,  $y[1] = 1$ .

Воспользуемся последним свойством для его решения. Возьмем  $Z$ -преобразование от левой и правой частей уравнения:

$$z^2(\tilde{Y}(z) - y[0] - y[1]z^{-1}) - \frac{1}{6}z(\tilde{Y}(z) - y[0]) - \frac{1}{6}\tilde{Y}(z) = 2\tilde{X}(z) = \frac{2}{1-z^{-1}}.$$

Перегруппируем полученное выражение и учтем начальные условия:

$$\tilde{Y}(z) \left( z^2 - \frac{z}{6} - \frac{1}{6} \right) = \frac{2}{1-z^{-1}} + z = \frac{2+z-1}{1-z^{-1}} = \frac{1+z}{1-z^{-1}}.$$

Выразим Z-преобразование искомой функции:

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{z+1}{(1-z^{-1})\left(z^2 - \frac{z}{6} - \frac{1}{6}\right)} = \frac{z^{-1} + z^{-2}}{(1-z^{-1})\left(1 - \frac{z^{-1}}{6} - \frac{z^{-2}}{6}\right)} = \\ &= \frac{3}{1-z^{-1}} - \frac{3,6}{1-\frac{z^{-1}}{2}} + \frac{0,6}{1+\frac{z^{-1}}{3}}. \end{aligned}$$

Используя свойство линейности и пример (параграф 9.2, с. 159), получим решение уравнения в виде:

$$y[n] = 3 - 3,6\left(\frac{1}{2}\right)^n + 0,6\left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

Для проверки посчитаем начальные условия:  $y[0] = 0$ ,  $y[1] = 1$ .

**Пример.** Рассмотрим импульсную функцию дискретного времени (рис. 9.11), которую математически можно описать следующим образом:

$$P_N[n] = \begin{cases} 1; & 0 \leq n < N; \\ 0; & n < 0, n > N. \end{cases}$$

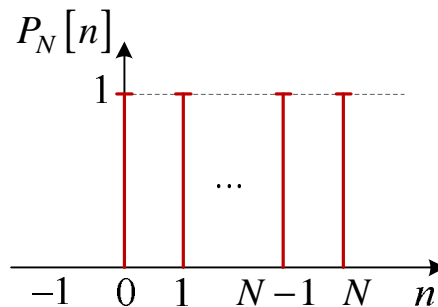


Рис. 9.11. Импульсная функция дискретного времени

Представим эту функцию в виде разности двух функций единичного скачка:

$$P_N[n] = 1[n] - 1[n - N].$$

Теперь, используя свойства линейности и задержки Z-преобразования, z-изображение импульсной функции дискретного времени легко вычисляется в виде:



$$Z\{P_N[n]\} = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{z^{-N}}{1-z^{-1}} = \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}.$$

Частным случаем данной функции при  $N=1$  можно считать дискретный единичный импульс (единичный отсчет), который описывается выражением

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0; \\ 0, & n \neq 0. \end{cases} \quad (9.6)$$

Z-преобразование единичного отсчета равно:

$$Z\{\delta[n]\} = \frac{1-z^{-1}}{1-z^{-1}} = 1.$$

#### 9.4. Реакция на единичный отсчет и свертка в дискретном времени

Графическое представление функции единичного отсчета (единичная импульсная функция дискретного времени), которая описывается выражением (9.5), представлено на рис. 9.12.

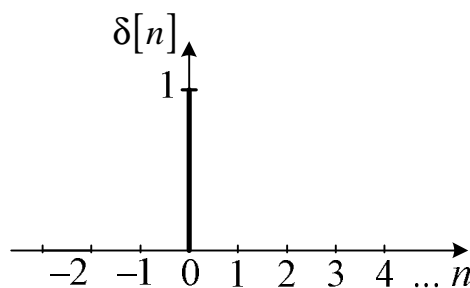


Рис. 9.12. Функция единичного отсчета

Функция единичного отсчета играет важную роль в теории систем дискретного времени. Функция единичного отсчета – аналог единичного импульса в непрерывных системах. Реакция на единичный отсчет  $g[n]$  полностью характеризует реакцию системы на любой другой входной сигнал.

Как видно из параграфа 9.3, Z-преобразование функции единичного отсчета равно единице:

$$Z\{\delta[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta[n] \cdot z^{-n} = 1.$$

Если  $\tilde{X}(z)$  и  $\tilde{Y}(z)$  – Z-преобразования соответственно входного и выходного сигналов цепи, то передаточная функция дискретного времени цепи определится как:

$$W(z) = \frac{\tilde{Y}(z)}{\tilde{X}(z)}.$$

Z-преобразование реакции на единичный отсчет равно дискретной передаточной функции цепи, т. е.

$$Z\{g[n]\} = \tilde{W}(z).$$

При известной реакции  $g[n]$  можно найти реакцию цепи на произвольное входное воздействие  $x[n]$  следующим образом: сначала определяется z-изображение функций  $g[n]$  и  $x[n]$ , затем выполняется обратное Z-преобразование произведения  $W(z) X(z)$ .

Впрочем, по известной реакции  $g[n]$  можно рассчитать реакцию на произвольное входное воздействие  $x[n]$  непосредственно во временной области – при помощи теоремы о свертке:

$$y[n] = \sum_{m=0}^{\infty} x[m] \cdot g[(n-m)].$$

**Пример.** В качестве примера определим реакцию  $y[n]$  системы, изображенной на рис. 9.13, а, на входную единичную ступенчатую функцию  $x[n] = 1[n]$ .

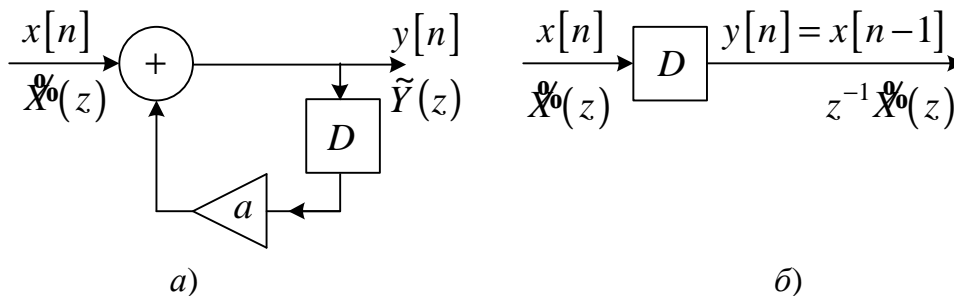


Рис. 9.13. Структурная схема системы дискретного времени:  
а – ДВ-система; б – элемент единичной задержки

Схема состоит из элемента единичной задержки  $D$  (рис. 9.13, б), который осуществляет задержку на один такт, сумматора сигналов и умножителя на величину коэффициента  $a$ . Выходной сигнал элемента единичной задержки в данный момент времени представляет копию сигнала, поступившего на его вход на единицу времени раньше.

По схеме можно составить выражение для выходного сигнала, являющееся выходным сигналом сумматора:

$$Y(z) = X(z) + az^{-1}Y(z),$$

откуда получаем передаточную функцию в виде:

$$W(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - az^{-1}}.$$

Выполняем обратное  $Z$ -преобразование от полученной передаточной функции  $\tilde{W}(z)$  и определяем реакцию системы на единичный отсчет:  $g[n] = a^n$ , при  $n \geq 0$ .

Реакция рассмотренной системы (рис. 9.13) на единичный отсчет для  $0 < a < 1$  приведена на рис. 9.14, а. Рассчитаем реакцию данной цепи на входную единичную ступенчатую функцию.

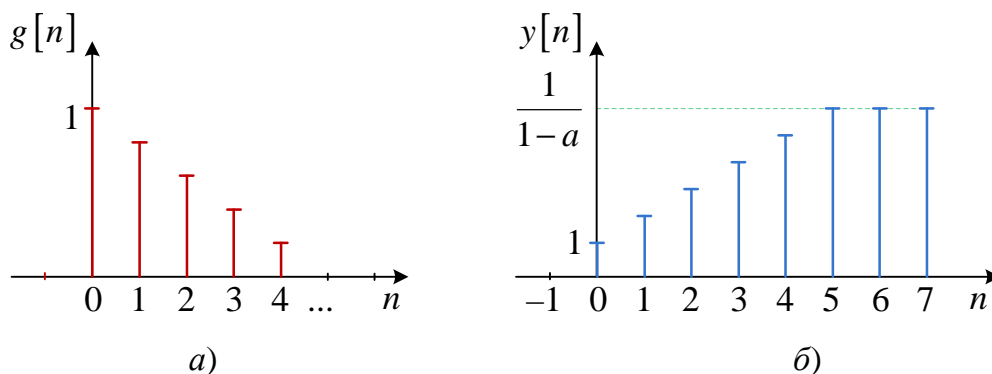


Рис. 9.14. Реакция ДВ-системы на типовые входные воздействия:  
 а – реакция системы на единичный отсчет;  
 б – реакция системы на единичную ступенчатую функцию

Для входного сигнала  $x[n] = 1[n]$   $Z$ -преобразование – определяется формулой  $\tilde{X}(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$ . Следовательно,  $Z$ -преобразование выходного сигнала можно определить из выражения для передаточной функции:

$$Y(z) = \frac{1}{(1-az^{-1})(1-z^{-1})} = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{a}{1-az^{-1}}.$$

Вычисляя обратное Z-преобразование, получаем:

$$y[n] = \frac{1}{1-a} - \frac{a}{1-a} a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}, \text{ при } n \geq 0.$$

Графическое изображение функции  $y[n]$  приведено на рис. 9.14, б.

Для сравнения рассчитаем реакцию цепи на единичную ступень по теореме свертки:

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{m=0}^n x[m] g[n-m] = \sum_{m=0}^n 1 a^{n-m} = \\ &= a^n + a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1 = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}. \end{aligned}$$

Как очевидно, ответ получается такой же, как и при расчете сигнала посредством передаточной функции.

## 9.5. Дискретное преобразование Фурье

Рассмотрим решетчатую функцию  $x[n]$ . Поставим ей в соответствие функцию времени:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot \delta\left(t - \frac{n}{2D}\right)$$

Возьмем от полученного выражения преобразование Фурье:

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot \delta\left(t - \frac{n}{2D}\right) \cdot e^{-j2\pi ft} dt = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \frac{n}{2D}\right) \cdot e^{-j2\pi ft} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot e^{-j2\pi f \frac{n}{2D}}. \end{aligned} \quad (9.7)$$

Нетрудно видеть, что полученная функция  $X(f)$  – периодическая функция с периодом  $2D$ , т. е. для нее справедливо

$$X(f) = X(f + 2D).$$

Выражение (9.7) представляет собой не что иное, как разложение данной функции в ряд Фурье. Тогда коэффициенты определяются в виде:

$$x[n] = \frac{1}{2D} \int_{-D}^D X(f) \cdot e^{j2\pi f \frac{n}{2D}} df.$$

Известно, что функция  $X(f)$  есть дискретное во времени преобразование Фурье (ДВПФ) последовательности  $x[n]$ .

Удобно ввести частотную переменную  $\varphi = \frac{f}{2D}$ . Тогда период функции  $X(\varphi)$  будет равен единице и для нее справедливы следующие соотношения:

$$\begin{cases} X[\varphi] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot e^{-j2\pi n\varphi}; \\ x[n] = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(\varphi) \cdot e^{j2\pi n\varphi} d\varphi. \end{cases} \quad (9.8)$$

Второе равенство представляет ДВ-функцию  $x[n]$  как взвешенную сумму ДВ-экспонент в виде  $z^n = (e^{j2\pi\varphi})^n$ , где  $z = e^{j2\pi\varphi}$ .

Таким образом, все значения  $z$ , используемые в этом представлении, лежат на единичной окружности в  $z$ -плоскости. Тогда первое выражение в системе (9.8) при  $z = e^{j2\pi\varphi}$  принимает вид:

$$\tilde{X}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot z^{-n}. \quad (9.9)$$

Выражение (9.8) полностью совпадает по форме с выражением для  $Z$ -преобразования, за исключением нижнего предела, который в данном случае продлен до  $-\infty$ .

Таким образом, уравнение (9.9) – это двустороннее  $Z$ -преобразование последовательности  $x[n]$ . Полученное  $Z$ -преобразование  $\tilde{X}(z)$  описывает веса собственных функций  $z^n$ , которые при суммировании (интегрировании) определяют значения  $x[n]$ .

## 9.6. Некоторые свойства дискретного по времени преобразования Фурье

Многие из теорем и свойств обычного Фурье преобразования применимы и к ДВПФ. Однако, поскольку функция  $X(\varphi)$  является периодической, а  $x[n]$  представляет собой последовательность, некоторые теоремы изменяют свою форму, а другие и вовсе неприменимы.

**Пример.** Рассмотрим последовательность вида  $x[n] = \alpha^n \cdot 1[n]$ , где  $|\alpha| < 1$ . Применим к этой последовательности дискретное преобразование Фурье:

$$\begin{aligned} X(\varphi) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot e^{-j2\pi n\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n e^{-j2\pi n\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha e^{-j2\pi\varphi})^n = \\ &= \frac{1}{1 - \alpha e^{-j2\pi\varphi}}. \end{aligned}$$

Если коэффициент  $\alpha \rightarrow 1$ , то  $\alpha^n \cdot 1[n] \rightarrow 1[n]$ , т. е. последовательность будет иметь вид:  $x[n] = 1[n]$ . От такой последовательности ДВПФ найдем как:

$$X(\varphi) = \frac{1}{1 - e^{-j2\pi\varphi}} + \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\varphi - n).$$

Если  $\alpha \rightarrow 0$ , то  $\alpha^n \cdot 1[n] \rightarrow \delta[n]$ , т. е. в этом случае последовательность выглядит как  $x[n] \rightarrow \delta[n]$ , где  $\delta[n]$  – единичный отсчет, ДВПФ равно единице.

К основным свойствам ДВПФ относятся:

### 1. Линейность.

Из определения ДВПФ следуют принципы его линейности и суперпозиции.

Таким образом, можно записать, что ДВПФ суммы последовательностей  $s[n] = x[n] + y[n]$  равен сумме ДВПФ этих последовательностей  $S[\varphi] = X(\varphi) + Y(\varphi)$ . При умножении последовательности на константу  $\alpha x[n]$  ДВПФ тоже умножается на константу  $\alpha X(\varphi)$ .

### 2. Задержка.

Это свойство также следует непосредственно из определения ДВПФ. При задержке входной последовательности на  $N$  тактов, т. е.

$s[m] = x[n - N]$ , где  $m = (n - N)$ , ДВПФ домножается на  $e^{-j2\pi\varphi N}$ , т. е.

$$S[m] = e^{-j2\pi\varphi N} X(\varphi).$$

**Пример.** Рассмотрим импульсную функцию дискретного времени, изображенную на рис. 9.15, а, которую математически можно описать следующим образом:

$$x[n] = \begin{cases} 1 & \text{при: } \frac{1-N}{2} \leq n \leq \frac{N-1}{2}; \\ 0 & \text{при: } n < \frac{1-N}{2}, n > \frac{N-1}{2}. \end{cases} \quad (9.10)$$

Опираясь на свойства линейности и задержки, рассмотрим как будет выглядеть ДВПФ последовательности такого вида.

Пусть  $N$  – нечетное число. Функция  $x[n]$  может быть представлена разностью двух функций единичного скачка:

$$x[n] = 1 \left[ n + \frac{N-1}{2} \right] - 1 \left[ n - \frac{N+1}{2} \right].$$

Тогда дискретное преобразование Фурье  $X[\varphi]$  входной функции  $x[n]$  вычисляется следующим образом:

$$X(\varphi) = e^{j2\pi\varphi \frac{N-1}{2}} \left[ \frac{1}{1 - e^{-j2\pi\varphi}} + \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\varphi - n) \right] - e^{-j2\pi\varphi \frac{N+1}{2}} \left[ \frac{1}{1 - e^{-j2\pi\varphi}} + \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\varphi - n) \right].$$

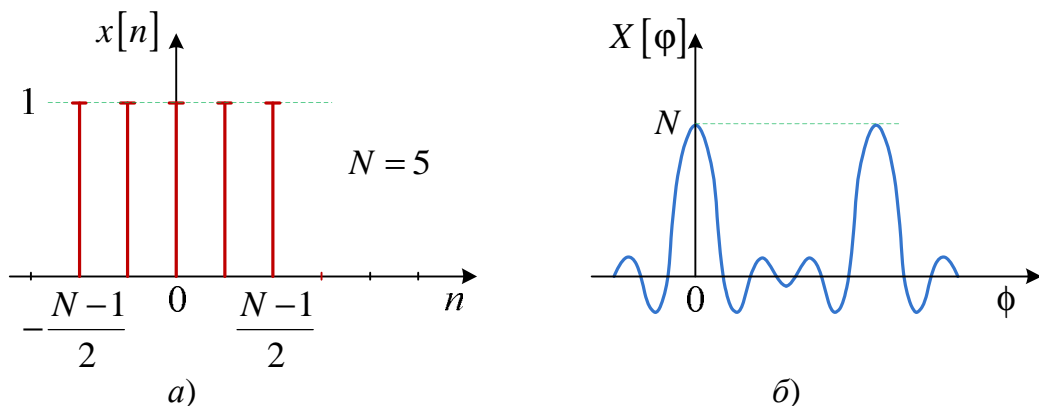


Рис. 9.15. Графическое изображение импульсной функции ДВ и ее ДВПФ: а – импульсная функция ДВ при  $N = 5$ ; б – ДВПФ данной функции

Для целых значений  $\varphi$  справедливо:  $e^{j2\pi\varphi\frac{N-1}{2}} = e^{-j2\pi\varphi\frac{N+1}{2}}$ , поэтому импульсные члены ряда уничтожаются. Тогда окончательно получаем:

$$X(\varphi) = \frac{e^{j2\pi\varphi\frac{N-1}{2}} - e^{-j2\pi\varphi\frac{N+1}{2}}}{1 - e^{-j2\pi\varphi}} = \frac{e^{-j\pi\varphi} (e^{j\pi\varphi N} - e^{-j\pi\varphi N})}{e^{-j\pi\varphi} (e^{j\pi\varphi} - e^{-j\pi\varphi})} = \frac{\sin \pi\varphi N}{\sin \pi\varphi}.$$

Графическое изображение полученного ДВПФ  $X[\varphi]$  функции  $x[n]$ , определяемой выражением (9.10) при  $N = 5$ , приведена на рис. 9.15, б.

### 3. Свертка.

Как изложено выше, сверткой дискретных последовательностей  $x_1[n]$  и  $x_2[n]$  называется последовательность  $x[n]$ , определяемая соотношением

$$x[n] = \sum_{m=0}^{\infty} x_1[m] \cdot x_2[n - m].$$

Дискретное по времени преобразование Фурье свертки  $X[\varphi]$  последовательностей  $x_1[n]$  и  $x_2[n]$  равно произведению ДВПФ свертываемых последовательностей  $X_1[\varphi]$   $X_2[\varphi]$  соответственно:

$$X(\varphi) = X_1(\varphi) \cdot X_2(\varphi).$$

4. Дискретное по времени преобразование Фурье произведения последовательностей.

Произведению счетных последовательностей  $x_1[n]$  и  $x_2[n]$  соответствует свертка их ДВПФ:

$$S[\nu] = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X_1[\nu] \cdot X_2[\varphi - \nu] \cdot d\nu.$$

Это выражение представляет собой круговую свертку функций  $X_1[\varphi] \cdot X_2[\varphi]$ .

## 9.7. Применение дискретного по времени преобразования Фурье к анализу электронных схем

Рассмотрим несколько примеров применения ДВПФ при анализе электронных схем.



**Пример.** Найдем ДВПФ сигнала на выходе элемента единичной задержки  $Y[\varphi]$  (рис. 9.16) при известном сигнале на входе, определяемого последовательностью  $x[n]$ :

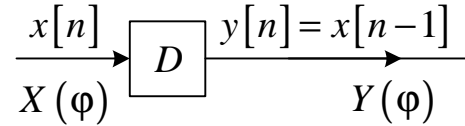


Рис. 9.16. Элемент единичной задержки

Примем  $n-1=m$  или, что равнозначно,  $m+1=n$ . Из определения ДВПФ (9.8) находим:

$$\begin{aligned} Y[\varphi] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-1] \cdot e^{-j2\pi n\varphi} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \cdot e^{-j2\pi m\varphi} e^{-j2\pi\varphi} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] \cdot e^{-j2\pi n\varphi} = X[\varphi] \cdot e^{-j2\pi\varphi}. \end{aligned}$$

Таким образом, ДВПФ задержанной на один такт входной последовательности равно произведению ДВПФ входного сигнала на множитель  $e^{-j2\pi\varphi}$ , о чем и говорит теорема о задержке.

**Пример.** Определим передаточную функцию дискретной системы схемы, изображенной на рис. 9.17, которая состоит из элемента единичной задержки  $D$ , двух сумматоров и двух умножителей на величину  $a$  и величину  $b$  соответственно. Знаки у входов сумматоров показывают, с каким знаком (положительным или отрицательным) сигналы проходят на выход  $X(\varphi)$ .

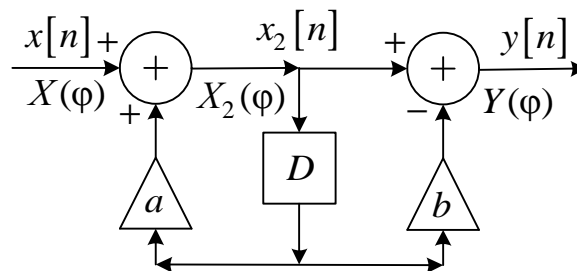


Рис. 9.17. Структурная схема дискретной системы

Для ДВПФ сигнала на выходе первого сумматора  $X_2(\varphi)$  имеем:

$$X_2(\varphi) = X(\varphi) + ae^{-j2\pi\varphi} X_2(\varphi).$$

Отсюда выражаем  $X_2(\varphi)$ :

$$X_2(\varphi) = \frac{X(\varphi)}{1 - ae^{-j2\pi\varphi}}.$$

Дискретное по времени преобразование Фурье выходной величины  $Y[\varphi]$  определится в виде:

$$\begin{aligned} Y(\varphi) &= X_2(\varphi) - be^{-j2\pi\varphi} X_2(\varphi) = X_2(\varphi)(1 - be^{-j2\pi\varphi}) = \\ &= \frac{X(\varphi)}{1 - ae^{-j2\pi\varphi}} (1 - be^{-j2\pi\varphi}). \end{aligned}$$

Тогда передаточная функция для данной схемы запишется как:

$$W(\varphi) = \frac{Y(\varphi)}{X(\varphi)} = \frac{1 - be^{-j2\pi\varphi}}{1 - ae^{-j2\pi\varphi}}.$$

Реакция на единичный отсчет находится как обратное дискретное преобразование Фурье:

$$g[n] = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} W(\varphi) \cdot e^{j2\pi\varphi n} d\varphi a^n 1[n] - ba^{n-1} 1[n-1].$$

## 9.8. Дискретное преобразование Фурье периодических сигналов

Как известно, преобразование Фурье периодической функции времени (которая изображена на рис. 9.18, а) представляет собой импульсную последовательность в частотной области (рис. 9.18, б), называемую спектром, при этом амплитуды импульсов спектра равны коэффициентам ряда Фурье.

С другой стороны, преобразование Фурье импульсной последовательности во временной области (рис. 9.18, в) является периодической функцией частоты (рис. 9.18, г) – ДВПФ для счетной последовательности. Следовательно, преобразование Фурье функции времени в виде периодической импульсной последовательности (рис. 9.18, д) должно представлять собой периодическую импульсную последовательность в частотной области (рис. 9.18, е). При этом расчетные формулы вместо интегралов будут содержать суммы последовательностей импульсов. Обе суммы должны быть конечными, поскольку

периодическая импульсная последовательность содержит лишь конечное число различных импульсов.

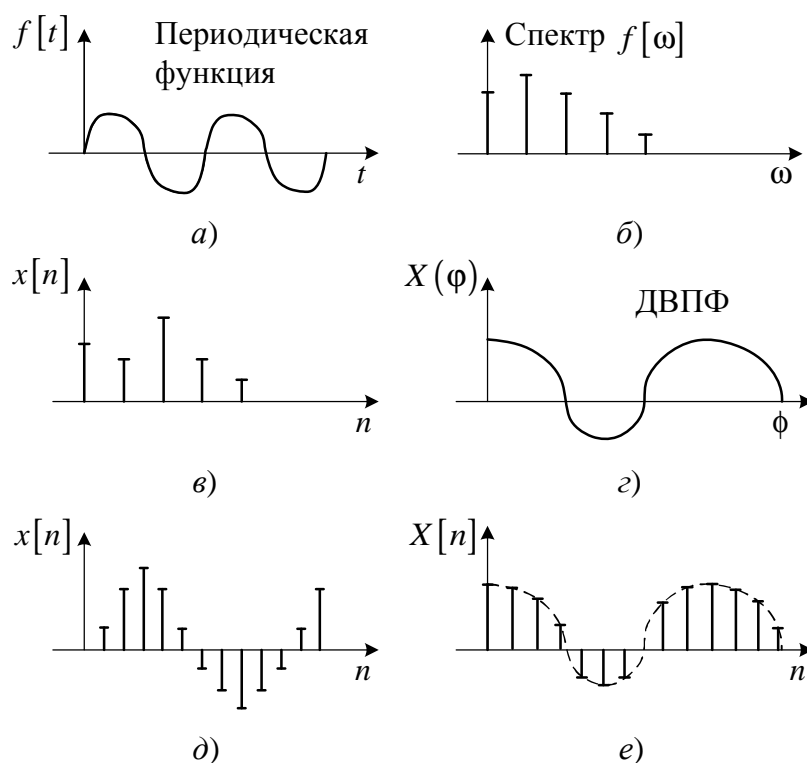


Рис. 9.18. Электронные сигналы и их спектры:  
 а – периодический непрерывный сигнал;  
 б – спектр периодического непрерывного сигнала;  
 в – дискретный сигнал; г – спектр дискретного сигнала;  
 д – дискретный периодический сигнал; е – спектр дискретного периодического сигнала

Будем обозначать строчными буквами сигналы во временной области, а прописными – их преобразования Фурье.

В математике показывается, что дискретное преобразование Фурье  $X[k]$  и дискретный периодический сигнал  $x[n]$  связаны следующими соотношениями:

$$X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j2\pi nk/N}; \quad (9.11)$$

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \cdot e^{j2\pi nk/N}. \quad (9.12)$$

Формулы (9.11) и (9.12) составляют пару преобразований Фурье: выражение (9.11) – прямое ДПФ периодической импульсной

функции; выражение (9.12) – обратное ДПФ периодической импульсной функции.

**Пример.** Пусть дискретный сигнал в интервале своей периодичности задан четырьмя равностоящими отсчетами:  $x[n] = 1, 0, -1, 0$ . Определим коэффициенты ДПФ этого сигнала.

По формуле (9.11) вычисляем:

$$X[0] = \frac{1}{4}(1+0-1+0) = 0;$$

$$X[1] = \frac{1}{4}\left(1+0-1e^{-j2\pi\frac{2}{4}}+0\right) = \frac{1}{4}(1+1) = \frac{1}{2}; k=1;$$

$$X[2] = \frac{1}{4}\left(1+0-1e^{-j2\pi\frac{2^2}{4}}+0\right) = \frac{1}{4}(1-1) = 0; k=2;$$

$$X[3] = \frac{1}{4}\left(1+0-1e^{-j2\pi\frac{3}{4}}+0\right) = \frac{1}{4}(1+1) = \frac{1}{2}; k=3.$$

Таким образом, ДПФ будет иметь отсчеты:  $X[k] = 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$ .

Одним из основных свойств любого преобразования Фурье является то, что свертке функции в одной области (временной или частотной) соответствует умножение в другой.

Как было изложено выше, произведению счетных последовательностей  $x_1[n]$  и  $x_2[n]$  соответствует круговая свертка ДВПФ, т. е. функций  $X_1[\varphi]$  и  $X_2[\varphi]$ :

$$S[\nu] = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X_1[\nu] \cdot X_2[\varphi - \nu] \cdot d\nu.$$

Последовательности (9.11) и (9.12) имеют периодический характер в обеих областях, т. е. можно записать, что  $x[n] = x[n+N]$ , а  $X[k] = X[k+N]$ . При этом можно ввести дискретный эквивалент круговой свертки:

$$x[n] \otimes y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \cdot y[n-k].$$

Нетрудно показать, что ДПФ круговой свертки двух периодических последовательностей  $x_1[n]$  и  $x_2[n]$  с одинаковым периодом  $N$  равно произведению их ДПФ, умноженному на  $N$ :

$$\text{ДПФ}\{x_1[n] \otimes x_2[n]\} = NX_1[k] \cdot X_2[k].$$

Из свойства симметрии следует, что ДПФ произведения двух периодических последовательностей с одинаковым периодом  $N$  равно круговой свертке их ДПФ:

$$\text{ДПФ}\{x_1[n]x_2[n]\} = X_1[k] \otimes X_2[k].$$

В заключение приведем два замечания.

**Первое замечание.** О вычислении ДПФ.

В настоящее время дискретный спектральный анализ является одним из наиболее распространенных методов исследования сигналов с использованием компьютера. Как видно из формул (9.11) и (9.12), чтобы вычислить ДПФ последовательности из  $N$  элементов, требуется выполнить  $N^2$  операций с комплексными числами. Если число  $N$  велико (1000 и более), вычисления требуют больших временных затрат. Выходом из положения является алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ), который появился в шестидесятых годах двадцатого века.

Алгоритм БПФ базируется на свойствах симметрии и периодичности множителей  $\exp(\pm j2\pi nk/N)$  в формулах ДПФ (9.11) и (9.12). При этом существенно, что число отсчетов  $N = 2^p$ , где  $p$  – целое число. Идея заключается в следующем: входная последовательность  $x[n]$  разбивается на две части с четными и нечетными номерами (рис. 9.19). Для каждой части вычисляется ДПФ (порядок последовательности становится  $\frac{N}{2}$ ).

В силу симметрии и периодичности экспонент коэффициенты ДПФ исходной последовательности вычисляются через коэффициенты ДПФ с четными и нечетными номерами порядка  $\frac{N}{2}$ . Число опера-

ций  $2\left(\frac{N}{2}\right)^2 + N$ , что значительно меньше  $N^2$  при большом  $N$ . Ис-

пользуя этот же принцип, можно каждое из ДПФ  $\frac{N}{2}$  чисел свести к

вычислению двух ДПФ  $\frac{N}{4}$  чисел и  $\frac{N}{2}$  операциям типа умножение-сложение и т. д.

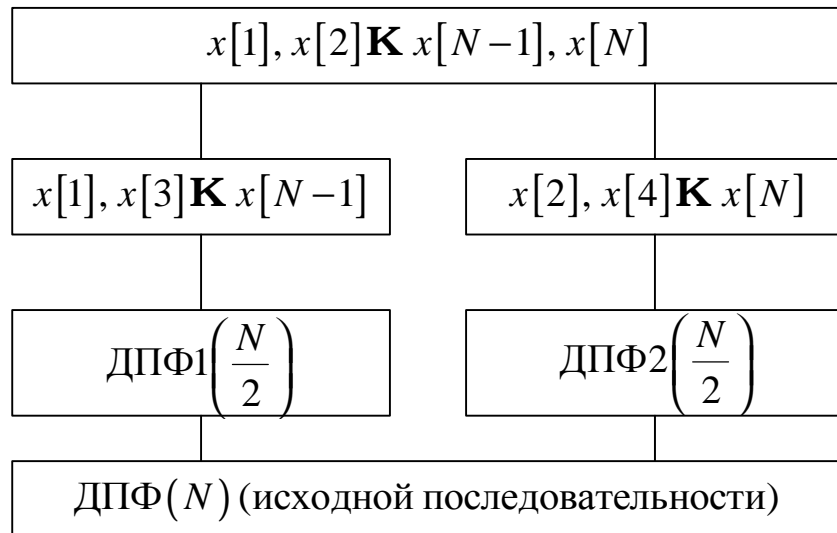


Рис. 9.19. Алгоритм быстрого преобразования Фурье

Если соблюдено условие  $N = 2^p$ , деление можно продолжить и далее. Число операций будет равно примерно  $N \log_2 N$ .

**Второе замечание.** Хотя при выводе формул (9.11) и (9.12) подчеркивался периодический характер как дискретного сигнала  $x[n]$ , так и дискретного преобразования Фурье  $X[k]$ , их часто используют для анализа непериодических сигналов. Такая возможность связана со следующим. Спектр сигнала конечной длительности  $x_N[n]$  является непрерывной функцией  $X_N(\varphi)$ . Спектр сигнала  $x[n]$ , являющегося периодической функцией и составленного из  $x_N[n]$  путем продолжения его с периодом  $N$ , является дискретным, причем огибающая спектра  $X[k]$  совпадает с  $X_N(\varphi)$ .

Часто величина  $N$  определяется дискретизацией непрерывного сигнала. При этом можно выбрать значение  $N$  по своему усмотрению. Если  $N$  достаточно велико, отсчеты в  $X[k]$  следуют достаточно часто, и таким образом можно с хорошей точностью определить непрерывную функцию  $X_N(\varphi)$ .

## Литература

1. Абаринов, Е. Г. Анализ временных и частотных характеристик звеньев : учеб. пособие по курсу «Методы анализа и расчета электронных схем» для студентов специальности 20.05 «Промышленная электроника» / Е. Г. Абаринов. – Гомель : ГПИ, 1993. – 86 с.
2. Абаринов, Е. Г. Анализ и расчет частотно-избирательных цепей и активных фильтров с помощью относительной расстройки : учеб. пособие по курсу «Методы анализа и расчета электронных схем» для студентов специальности 20.05 «Промышленная электроника» / Е. Г. Абаринов. – Гомель : ГПИ, 1993. – 83 с.
3. Абрахамс, Д. Анализ электрических цепей методом графов : пер. с англ. / Д. Абрахамс, Д. Каверли. – М. : Мир, 1967. – 176 с.
4. Баскаков, С. И. Радиотехнические цепи и сигналы : учебник / С. И. Баскаков. – М. : Ленанд, 2016. – 528 с.
5. Баскаков, С. И. Радиотехнические цепи и сигналы. Руководство к решению задач / С. И. Баскаков. – М. : Высш. шк., 2002. – 214 с.
6. Батура, М. П. Теория электрических цепей / М. П. Батура, А. П. Кузнецов, А. П. Курулев. – М. : Высш. шк., 2015. – 605 с.
7. Бессонов, Л. А. Теоретические основы электротехники. Линейные электрические цепи : в 2 кн. / Л. А. Бессонов – М. : Высш. шк., 1996. – 638 с.
8. Гоноровский, И. С. Радиотехнические цепи и сигналы / И. С. Гоноровский. – М. : Дрофа, 2006. – 719 с.
9. Гоноровский, И. С. Радиотехнические цепи и сигналы. Примеры и задачи / И. С. Гоноровский – М. : Радио и связь, 1989. – 247 с.
10. Зааль, Р. Справочник по расчету фильтров / Р. Зааль ; пер. с нем. Ю. В. Камкина ; под ред. Н. Н. Слепова. – М. : Радио и связь, 1983. – 752 с.
11. Каганов, В. И. Радиотехника + компьютер + Mathcad / В. И. Каганов. – М. : Горячая линия – Телеком, 2001. – 416 с.
12. Матханов, П. Н. Основы анализа электрических цепей / П. Н. Матханов. – М. : Высш. шк., 1990. – 399 с.
13. Устройства СВЧ / Д. М. Сазонов [и др.] – М. : Высш. шк., 1981. – 295 с.
14. Смирнов, В. В. Устройства СВЧ и антенны : учеб. пособие / В. В. Смирнов, В. П. Смолин ; Балт. гос. техн. ун-т. – СПб., 2012. – 188 с.

15. Сиберт, У. М. Цепи, сигналы, системы : в 2 кн. : пер. с англ. / под ред. И. С. Рыжака. – М. : Мир, 1988. – 359 с.

16. Сигорский, В. П. Основы теории электронных схем / В. П. Сигорский, А. И. Петренко. – Киев : Техника, 1971. – 568 с.

17. Ханзел, Г. Справочник по расчету фильтров / Г. Ханзел. – М. : Совет. радио, 1974. – 288 с.

18. Чернецов, В. И. Анализ электрических цепей методом сигнальных графов : учеб. пособие / В. И. Чернецов ; под ред. В. И. Чернецова. – Пенза : Информ.-издат. центр Пенз. гос. ун-та, 2002. – 142 с.

Рекомендуемые литературные источники: *глава 1* – 4, 6–8; *глава 2* – 1, 4, 12, 15; *глава 3* – 3, 6, 7, 16, 18; *глава 4* – 6, 7, 11, 12; *глава 5* – 1, 2, 4, 5, 8, 9, 12, 14; *глава 6* – 2, 4, 5, 8, 9, 14, 15; *глава 7* – 6, 7, 11, 13; *глава 8* – 4, 8, 11, 17; *глава 9* – 4, 8, 15.



# Оглавление

<b>Предисловие</b> .....	3
<b>Глава 1. Классификация электронных цепей</b> .....	4
1.1. Элементы электронных цепей.....	4
1.2. Классификация электронных цепей.....	6
<b>Глава 2. Операторный метод анализа электронных схем</b> .....	7
2.1. Прямое и обратное преобразования Лапласа .....	7
2.2. Теоремы преобразования Лапласа .....	8
2.3. Вычисление обратного преобразования Лапласа.....	10
2.4. Представление элементов цепей в операторном виде .....	13
2.5. Передаточная функция цепи .....	15
2.6. Комплексный коэффициент передачи цепи .....	16
2.7. Основные характеристики цепи .....	19
2.7.1. Ступенчатая и импульсная функции.....	19
2.7.2. Переходная и импульсная характеристики цепи.....	20
<b>Глава 3. Теория направленных графов</b> .....	23
3.1. Направленные графы прохождения сигналов.....	23
3.2. Графы проводимости .....	24
3.3. Решение направленного графа прохождения сигналов... ..	26
3.3.1. Преобразование графов .....	26
3.3.2. Решение графа по формуле Мэзона .....	29
<b>Глава 4. Линейные пассивные четырехполюсники</b> .....	31
4.1. Матрицы и графы четырехполюсников.....	31
4.2. Соединения четырехполюсников.....	33
4.3. Матрицы простейших четырехполюсников.....	35
4.4. Зависимость между матрицами четырехполюсника.....	38
4.5. Свойства матриц четырехполюсников .....	39
4.6. Передаточные и входные функции нагруженного четырёхполюсника.....	42
<b>Глава 5. Расчет линейных пассивных цепей</b> .....	46
5.1. Условия физической реализуемости пассивных четырёхполюсников.....	46
5.2. Условия физической реализуемости реактивных двухполюсников.....	50
5.3. Схемы Фостера и Кауэра для реактивных двухполюсников .....	53
5.4. Условия физической реализуемости реактивных двухполюсников.....	60

5.5. Дифференцирующие и интегрирующие цепи и их характеристики .....	63
5.5.1. Интегрирующее звено.....	63
5.5.2. Инерционное звено.....	64
5.5.3. Идеальное дифференцирующее звено .....	66
5.5.4. Реальное дифференцирующее звено.....	67
5.5.5. Звено неминимально-фазового типа .....	68
5.6. Колебательное звено.....	69
5.7. Пассивные мостовые цепи.....	73
5.7.1. Т-образная фазосдвигающая цепь .....	73
5.7.2. Симметричный двойной Т-мост .....	81
5.7.3. Симметричный делитель Вина .....	83
<b>Глава 6. Анализ активных линейных цепей.....</b>	<b>86</b>
6.1. Матрицы параметров и схемы замещения четырехполюсников .....	86
6.2. Параметры усилительных элементов в режиме малых сигналов.....	89
6.3. Неопределенная матрица усилительных элементов .....	92
6.4. Анализ линейных активных цепей с помощью эквивалентных схем.....	94
6.5. Метод четырехполюсников.....	98
6.6. Графы электронных и полупроводниковых приборов.....	99
6.7. Анализ электронных цепей с помощью графов.....	100
6.8. Схемы с обратной связью.....	106
6.9. Избирательные усилители.....	108
6.9.1. Усилители на основе Т-образной фазосдвигающей цепи.....	108
6.9.2. Частотно-избирательный усилитель на основе делителя Вина.....	111
6.9.3. Частотно-избирательный усилитель на основе 2Т-моста .....	114
<b>Глава 7. Математическое описание цепей с распределенными параметрами .....</b>	<b>116</b>
7.1. Характеристики нагруженной линии передачи .....	116
7.2. Падающие и отраженные волны на входах четырехполюсника .....	121
7.3. Свойства матрицы рассеяния четырехполюсника .....	124
7.4. Преобразование матрицы рассеяния при соединении различных четырехполюсников.....	126

7.4.1. Преобразование матрицы рассеяния при изменении плоскостей отсчета выводов .....	126
7.4.2. Коэффициент отражения на входе четырёхполюсника с нагрузкой на выходе .....	127
7.4.3. Матрица рассеяния каскадного соединения двух четырёхполюсников .....	129
7.5. Матрицы рассеяния и передачи отрезка длинной линии .....	131
7.6. Трансформаторы сопротивлений.....	133
<b>Глава 8. Частотно-избирательные пассивные фильтры .....</b>	<b>135</b>
8.1. Классификация и назначение фильтров .....	135
8.2. Синтез фильтров Баттерворта .....	141
8.3. Синтез фильтров Чебышева .....	146
8.4. Замена частотной переменной при расчетах фильтров .....	150
<b>Глава 9. Методы анализа линейных цепей дискретного времени .....</b>	<b>153</b>
9.1. Сигналы дискретного времени и линейные разностные уравнения.....	153
9.2. Z-преобразование.....	159
9.3. Свойства Z-преобразования .....	165
9.4. Реакция на единичный отсчет и свертка в дискретном времени .....	169
9.5. Дискретное преобразование Фурье .....	172
9.6. Некоторые свойства дискретного по времени преобразования Фурье.....	174
9.7. Применение дискретного по времени преобразования Фурье к анализу электронных схем.....	176
9.8. Дискретное преобразование Фурье периодических сигналов.....	178
<b>Литература .....</b>	<b>183</b>

Учебное электронное издание комбинированного распространения

Учебное издание

**Вяхирев Николай Иванович**  
**Котова Юлия Евгеньевна**  
**Ростокина Ольга Михайловна**

## **МЕТОДЫ АНАЛИЗА И РАСЧЕТА ЭЛЕКТРОННЫХ СХЕМ**

**Учебное пособие**

**Электронный аналог печатного издания**

Редактор *Н. Г. Мансурова*  
Компьютерная верстка *И. П. Минина*

Подписано в печать 20.12.19.  
Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».  
Ризография. Усл. печ. л. 10,93. Уч.-изд. л. 10,57.

Изд. № 6.  
<http://www.gstu.by>

Издатель и полиграфическое исполнение  
Гомельский государственный  
технический университет имени П. О. Сухого.  
Свидетельство о гос. регистрации в качестве издателя  
печатных изданий за № 1/273 от 04.04.2014 г.  
пр. Октября, 48, 246746, г. Гомель