Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Высшая математика»

Е. З. Авакян, С. Л. Авакян, И. В. Иванейчик

ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ

ПРАКТИКУМ
по дисциплине «Высшая математика»
для студентов всех специальностей
дневной формы обучения

Гомель 2010

УДК 517(075.8)
ББК 22.161я73
А18

*Рекомендовано научно-методическим советом
факультета автоматизированных и информационных систем ГГТУ им. П. О. Сухого
(протокол № 8 от 09.03.2010 г.)*

Рецензент: зав. каф. «Физика» ГГТУ им. П. О. Сухого д-р физ.-мат. наук, проф. *П. А. Хило*

Авакян, Е. З.

А18 Теория пределов : практикум по дисциплине «Высшая математика» для студентов всех специальностей днев. формы обучения / Е. З. Авакян, С. Л. Авакян, И. В. Иванейчик. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2010. – 22 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: http://lib.gstu.local. – Загл. с титул. экрана.

Содержит основной теоретический материал по разделу «Теория пределов». Подробно разобрано решение основных типов задач, что позволяет приобрести навыки, необходимые при решении задач из различных областей естествознания и техники.

Для студентов всех специальностей дневной формы обучения.

УДК 517(075.8)
ББК 22.161я73

1.Предел последовательности.

Пусть аргумент n принимает все значения из *натурального ряда*

$$1,2,3,...,n,...,n',.... \qquad (1)$$

члены которого мы представляем себе упорядоченными по возрастанию (т.е. большее число n' следует за меньшим n). Если каждому n по некоторому правилу или закону поставлено в соответствие x_n, то говорят, что задана последовательность $\{x_n\}$.

$$x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ..., x_{n'}, ... \qquad (2)$$

Например:

$$\left\{\frac{1}{n}\right\} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ... \qquad (3)$$

Определение 1. Число a называется пределом последовательности, если для любого сколь угодно малого положительного ε найдется такой номер N, что для всех $n > N$ выполняется неравенство:

$$|x_n - a| < \varepsilon. \qquad (4)$$

Тот факт, что число a является пределом последовательности x_n, записывается так:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a. \qquad (5)$$

Неравенство (4) эквивалентно неравенствам $-\varepsilon < x_n - a < +\varepsilon$ или $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. Последние неравенства означают, что элемент x_n находится в ε- *окрестности* числа a. ε- *окрестностью* числа a называется интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Поэтому определение предела последовательности можно сформулировать также и следующим образом:

Определение 2. Последовательность x_n имеет предел, если существует число a такое, что в любой ε- *окрестности* числа a находятся все элементы последовательности x_n, начиная с некоторого номера.

Теоремы о пределах последовательности.

Теорема 1. Если последовательность имеет предел, то он единственный.
Теорема 2. Если последовательность имеет предел, то она ограничена.
Теорема 3. Предел суммы (разности) двух последовательностей равен сумме (разности) пределов этих последовательностей.

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Теорема 4. Предел произведения двух последовательностей равен произведению пределов этих последовательностей.

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Теорема 5. Предел частного двух последовательностей равен частному пределов этих последовательностей (при условии, что знаменатель не обращается в нуль).

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n};\quad \left(\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0\right).$$

Теорема 6. Если для двух последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$, члены последовательности $\{z_n\}$ удовлетворяют неравенству $x_n \geq z_n \geq y_n$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

Бесконечно малые и бесконечно большие величины.

Определение 3. Последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно малой, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно большой, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

- Сумма конечного числа бесконечно малых величин есть величина бесконечно малая.
- Произведение конечного числа бесконечно малых величин есть величина бесконечно малая.
- Произведение конечной величины на бесконечно малую величину есть величина бесконечно малая.
- Сумма конечного числа бесконечно больших величин есть величина бесконечно большая.
- Произведение конечного числа бесконечно больших величин есть величина бесконечно большая.
- Произведение конечной величины на бесконечно большую величину есть величина бесконечно большая.
- Если x_n является бесконечно большой величиной, то ее обратная величина $\alpha_n = 1/x_n$ будет бесконечно малой.

Предел последовательности $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$. Число e.

Предел данной последовательности равен

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e, \qquad (6)$$

где число $e = 2{,}7182\cdots$-основание натурального логарифма.

При вычислении пределов типа (6) следует использовать следующие свойства:

1. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n = e^k$ (7)

2. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{an} = e^a$ (8)

3. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+a}\right)^n = e$ (9)

4. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+b} = e$ (10)

Приведем несколько примеров вычисления пределов последовательности.

Пример 1

Вычислить предел последовательности $\{x_n\} = \dfrac{(2n+1)(n-3)(3n+5)}{2n^3}$.

Решение:

В данном примере последовательность представляет собой рациональную дробь, для вычисления пределов такого вида необходимо знаменатель и числитель дроби разделить на n в наивысшей степени. В нашем примере это n^3.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(n-3)(3n+5)}{2n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(2n+1)}{n}\dfrac{(n-3)}{n}\dfrac{(3n+5)}{n}}{\dfrac{2n^3}{n^3}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(2+\dfrac{1}{n}\right)\left(1-\dfrac{3}{n}\right)\left(3+\dfrac{5}{n}\right)}{2} = \frac{2\cdot 1\cdot 3}{2} = 3$$

Так как $\dfrac{c}{n}\to 0$, если $n\to\infty$, а c - ограниченная величина.

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)(n-3)(3n+5)}{2n^3} = 3$

Пример 2

Вычислить предел последовательности $\{x_n\} = \dfrac{n}{\sqrt[3]{3n^3+10}}$.

Решение:

Аналогичный прием во многих случаях можно применять и для дробей, содержащих иррациональности.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[3]{3n^3+10}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n}}{\sqrt[3]{\frac{3n^3}{n^3}+\frac{10}{n^3}}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{3+\frac{10}{n^3}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}.$$

Ответ: $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[3]{3n^3+10}}=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

Пример 3

Вычислить предел последовательности $\{x_n\}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$.

Решение:

Для вычисления подобных пределов с неопределенностью $(\infty-\infty)$, необходимо умножить и разделить $\{x_n\}$ на его сопряженное. Это необходимо для того, чтобы воспользоваться формулой «разность квадратов» $\left(a^2-b^2=(a-b)(a+b)\right)$ и, избавившись от квадратного корня, получить дробь.

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0.$$

Ответ: $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0$.

Пример 4

Вычислить предел последовательности $\{x_n\}=\sqrt[3]{n}\left(\sqrt[3]{n^2}-\sqrt[3]{n(n-1)}\right)$.

Решение:

Для вычисления подобных пределов необходимо умножить и разделить $\{x_n\}$ на неполный квадрат суммы. Это необходимо для того, чтобы воспользоваться формулой «разность кубов» $\left(a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)\right)$ и, избавившись от кубических корней, получить дробь. Неполным квадратом суммы в нашем примере является: $\sqrt[3]{n^4}+\sqrt[3]{n^2}\sqrt[3]{n(n-1)}+\sqrt[3]{n^2(n-1)^2}$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{n}\left(\sqrt[3]{n^2}-\sqrt[3]{n(n-1)}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{n}\,\frac{\left(\sqrt[3]{n^2}-\sqrt[3]{n(n-1)}\right)\left(\sqrt[3]{n^4}+\sqrt[3]{n^2}\sqrt[3]{n(n-1)}+\sqrt[3]{n^2(n-1)^2}\right)}{\sqrt[3]{n^4}+\sqrt[3]{n^2}\sqrt[3]{n(n-1)}+\sqrt[3]{n^2(n-1)^2}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n}\left(n^2-n(n-1)\right)}{\sqrt[3]{n^4}+\sqrt[3]{n^2}\sqrt[3]{n(n-1)}+\sqrt[3]{n^2(n-1)^2}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^4}}{\sqrt[3]{n^4}+\sqrt[3]{n^2}\sqrt[3]{n(n-1)}+\sqrt[3]{n^2(n-1)^2}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\sqrt[3]{1-\frac{n^3}{n^4}}+\sqrt[3]{1-\frac{2n^3}{n^4}+\frac{n^2}{n^4}}}=\frac{1}{3}.$$

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{n}\left(\sqrt[3]{n^2}-\sqrt[3]{n(n-1)}\right)=\frac{1}{3}.$

Пример 5

Вычислить предел последовательности $\{x_n\}=\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}$.

Решение:

Последовательность $1,2,3,\ldots,n$ - является арифметической прогрессией с разностью $d=1$. Сумма n первых членов арифметической прогрессии находится по формуле:

$$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n. \qquad (11)$$

Т.е. $S_n=\dfrac{1+n}{2}\cdot n=\dfrac{n+n^2}{2}$, тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+n^2}{2}}{n^2}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n+n^2}{n^2}=\frac{1}{2}.$$

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}=\dfrac{1}{2}.$

Пример 6

Вычислить предел последовательности $\{x_n\}=\dfrac{(3n-1)!+(3n+1)!}{(3n)!\,(n-1)}$.

Решение:

Напомним, что

$$n!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n \qquad (12)$$

$$(n+1)! = (n+1)\cdot n! \qquad (13)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(3n-1)!+(3n+1)!}{(3n)!\ (n-1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{(3n-1)!+(3n+1)\ 3n(3n-1)!}{(3n)\ (3n-1)!\ (n-1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1+(3n+1)3n}{3n(n-1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{9n^2+3n+1}{3n^2-3n} = 3.$$

<u>Ответ:</u> $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n-1)!+(3n+1)!}{(3n)!(n-1)} = 3.$

Пример 7

Вычислить предел последовательности $\{x_n\} = \left(\dfrac{n+5}{n+3}\right)^{3n+1}.$

<u>Решение:</u>

Для вычисления предела преобразуем $\{x_n\}$ к виду (6). С этой целью выделим в числителе выражение, стоящее в знаменателе и почленно разделим, а затем воспользуемся свойствами (7)-(10):

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+5}{n+3}\right)^{3n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3+2}{n+3}\right)^{3n+1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n+3}\right)^{3n+1} = e^{2\cdot 3} = e^6.$$

<u>Ответ:</u> $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+5}{n+3}\right)^{3n+1} = e^6.$

Задания

<u>Задание 1.1</u> Вычислить предел числовой последовательности

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2+3n+6}{7n^2+4}$ 3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^4+n+3}{7n^2+1}$

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2+n+3}{2n^3+4}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3}{5n^3}$ 5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2+(n-1)^2}$ 6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(5n+1)\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{\sqrt[4]{9n^8+3n+2}}$

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^6+3}+\sqrt{n^3+1}}{\left(\sqrt{n^2+1}+2n\right)^2}$ 8. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+5n+1}-n}$ 9. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{n}\left(\sqrt[3]{n^2}-\sqrt[3]{n^2-2n}\right)$

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{(n+1)!-n!}$ 11. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$ 12. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+3)!}{n\left((2n+1)!+(2n+2)!\right)}$

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$ 14. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3^n}}$ 15. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+5}{n+2}\right)^{5n}$

16. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2+4n-1}{3n^2+2n+7}\right)^{2n+5}$

17. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{(n-1)\cdot n}\right)$

***Ответы:*1.** 0, **2.**$\frac{5}{7}$, **3.**∞, **4.** $\frac{1}{5}$, **5.** 3, **6.** $\frac{5}{\sqrt{3}}$, **7.** $\frac{1}{9}$, **8.** $\frac{2}{5}$, **9.** $\frac{2}{3}$,**10.**0,**11.** 1,**12.** 2,**13.** $\frac{1}{2}$, **14.** $\frac{4}{3}$, **15.**e^{15},**16.**$e\sqrt[3]{e}$,**17.** 1.

2. Предел функции.

Приведем два определения предела функции:

Определение 4 (по Коши). Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x\to a$, если для любого сколь угодно малого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что для всех x удовлетворяющих неравенству $|x-a|<\delta$ выполняется:

$$\left|f(x)-A\right|<\varepsilon. \tag{14}$$

Определение 5 (по Гейне). Число A называется пределом функции $f(x)$, при стремлении x к a, если какую бы последовательность $\{x_n\}$ с пределом a, извлеченную из множества X, ни пробегала независимая переменная x, соответствующая последовательность значений функции $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$,..., $f(x_n)$,... всегда имеет предел A.

Обозначают этот факт так:

$$\lim_{x\to a} f(x)=A. \tag{15}$$

Из определения предела функции по Гейне следует, что все теоремы о пределах последовательности можно обобщить на случай предела функции.

Далее приведем несколько примеров вычисления предела функции.

Пример 8

Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-3x+2}$

Решение:

При подстановке в числитель и знаменатель $x=1$ мы получаем неопределенность типа $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Выделяем критический множитель $x-1$, разложив на множители квадратный трехчлен в знаменателе и воспользовавшись формулой разности кубов в числителе. Затем сократим полученное выражение на $x-1$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x-2}=\frac{1+1+1}{1-2}=-3.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-3x+2}=-3$

Пример 9

Вычислить предел функции

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}.$$

Решение:

При подстановке $x=3$ в предел мы получаем неопределенность типа $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Числитель разложим на множители: $x^2+x-12=(x-3)(x+4)$; далее знаменатель и числитель нашей дроби умножим на величину сопряженную знаменателю, т.е.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+4)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}\right)}{\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}\right)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+4)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}\right)}{x-2-(4-x)}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+4)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}\right)}{2(x-3)}=$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x+4)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}\right)}{2}=\frac{7\left(\sqrt{3-2}+\sqrt{4-3}\right)}{2}=7.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}=7.$

Задания

Задание 2.1 Вычислить предел функции

18. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+1}{5x-10}$ 19. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{5x-10}$ 20. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+1}{x^2-2x-3}$

21. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-2x-3}$ 22. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$ 23. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^4-6x^3+5x^2-4x+2}{5x^3-8x^2+x+2}$

24. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-3x-2}{x^3-4x^2+4x}$ 25. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1-x^3}\right)$ 26. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x^2}{x^4-3x^2+1}$

27. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-5x^3+x^2}{5x^3+x^2+3}$ 28. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)$ 29. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{x^2-2x-8}$

32. $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{\sqrt[3]{x}+2}$

30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$ 31. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{\sqrt[3]{x-6}+2}$

33. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{4}}\dfrac{\sqrt[3]{\dfrac{x}{16}}-\dfrac{1}{4}}{\sqrt{\dfrac{1}{4}+x}-\sqrt{2x}}$

34. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^4+x^2}-\sqrt{x^4-x^2}}$

35. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}$

***Ответы:*18.** 2, **19.** 0, **20.**∞, **21.** $\frac{3}{2}$, **22.**$-\frac{2}{5}$, **23.** $\frac{5}{6}$, **24.** ∞, **25.**-1,
26. 0,**27.**-1,**28.** $\frac{1}{4}$,**29.** $\frac{1}{18}$,**30.** $\frac{1}{3}$, **31.** 144, **32.**-2,**33.**$-\frac{\sqrt{2}}{3}$, **34.** 1, **35.**$\pm\frac{5}{2}$.

2.1 Первый замечательный предел.

Первым замечательным пределом называют предел вида:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \qquad (16)$$

Следствия первого замечательного предела.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1.$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1.$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=1.$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin mx}{x}=m$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin mx}{\sin nx}=\frac{m}{n}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^{\alpha} x}{x^{\beta}}=\begin{cases}0, \alpha>\beta\\ \infty, \alpha<\beta\\ 1, \alpha=\beta\end{cases}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^{\alpha}(mx)}{\sin^{\beta}(nx)}=\begin{cases}0, \alpha>\beta\\ \infty, \alpha<\beta\\ \frac{m}{n}, \alpha=\beta\end{cases}$

Для пределов, содержащих $tgx, \arcsin x, arctgx$, справедливы свойства, аналогичные 4 – 7.

Определение 6. Функция $\alpha=\alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x\to a$, если

$$\lim_{x\to a}\alpha(x)=0 \qquad (17)$$

Определение 7. Если отношение бесконечно малых $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ стремится к единице при $x\to a$:

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1, \qquad (18)$$

то бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ *называются эквивалентными бесконечно малыми,* и пишут

$$\alpha(x)\sim\beta(x) \text{ при } x\to a.$$

На основании приведенных определений и первого замечательного предела (16) можно записать следующие соотношения эквивалентности при $x \to 0$:

$$\sin x \sim x, \sin kx \sim kx, \sin^m x \sim x^m \qquad (19)$$

$$tgx \sim x, tgkx \sim kx, tg^m x \sim x^m \qquad (20)$$

$$\arcsin x \sim x, \arcsin kx \sim kx, \arcsin^m x \sim x^m \qquad (21)$$

$$arctgx \sim x, arctgkx \sim kx, arctg^m x \sim x^m \qquad (22)$$

Пример 10

Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$

Решение:

При подстановке $x = 0$ имеем неопределенность типа $\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = 2\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x^2} = 2\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Здесь мы воспользовались эквивалентностью (19) $\sin^2\dfrac{x}{2} \sim \dfrac{x^2}{4}$ при $x \to 0$.

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

Пример 11

Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tgx - \sin x}{x^3}$

Решение:

При подстановке $x = 0$ имеем неопределенность типа $\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left(\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{\cos x} - 1\right) =$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\frac{1-\cos x}{\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{x^3}=\frac{1}{2}$

Пример 12

Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{tg3x}{\sin 5x}$.

Решение:

При подстановке $x=\pi$ имеем неопределенность типа $\left(\frac{0}{0}\right)$.

В данном примере мы не можем применить первый замечательный предел, так как $x\to\pi$, в подобных случаях необходимо сделать замену переменной. Причем, новая переменная должна стремиться к нулю.

$$\lim_{x\to\pi}\frac{tg3x}{\sin 5x}=\left\{\begin{matrix} y=x-\pi; \\ x\to\pi; y\to 0; \end{matrix}\right\}=\lim_{y\to 0}\frac{tg3(y+\pi)}{\sin 5(y+\pi)}=\lim_{y\to 0}\frac{tg(3y+3\pi)}{\sin(5y+5\pi)}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{tg3y}{-\sin 5y}=-\lim_{y\to 0}\frac{3y}{5y}=-\frac{3}{5}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{tg3x}{\sin 5x}=-\frac{3}{5}$.

Задания

Задание 2.2 Вычислить предел функции, используя первый замечательный предел и его следствия.

36. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}$

37. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 7x}$

38. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg\ 2x}{tg\ 5x}$

39. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\arcsin 6x}{3x}$

40. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg\ 3x}{arctg 2x}$

41. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}$

42. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 5x}{5x\sin 2x}$

43. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{tgx}\right)$

44. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sin(x-5)}{x^2-25}$

45. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$

46. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\ tg\frac{\pi x}{2}$

47. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{ctg\frac{\pi x}{2a}}$

48. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x \sqrt[3]{x-\frac{\pi}{2}}}{\sqrt[3]{(1-\sin x)^2}}$ 49. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos x - \sin x}{\cos 2x}$ 50. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos x}$

51. $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{1-\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{4}-\sin\frac{x}{4}\right)}$

52. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos 2x}}{tg^2\frac{x}{2}}$ 53. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{\pi}-\sqrt{\arccos x}}{\sqrt{x+1}}$

Ответы:**36.** 1, **37.** $\frac{3}{7}$, **38.**$\frac{2}{5}$, **39.** 4, **40.**$\frac{3}{2}$, **41.** $\frac{9}{2}$, **42.** $\frac{5}{2}$, **43.**0, **44.** $\frac{1}{10}$,**45.**$\frac{1}{2}$,**46.** $\frac{2}{\pi}$, **47.** $-\frac{a}{\pi}$, **48.** $-\sqrt[3]{4}$, **49.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$, **50.**2,**51.**$\frac{\sqrt{2}}{2}$, **52.** 6, **53.**$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

2.2 Второй замечательный предел.

Вторым замечательным пределом называют предел вида:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e, \qquad (23)$$

или эквивалентное выражение

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e. \qquad (24)$$

Следствия второго замечательного предела.

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{x}} = e^k$
2. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{m/x} = e^m$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x} = \ln a$

Частный случай: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = 1$

На основании перечисленных следствий 1-4 и определения эквивалентности бесконечно малых (18) можно записать следующие соотношения эквивалентности при $x \to 0$:

$$\ln(1+x) \sim x \qquad (25)$$
$$e^x - 1 \sim x \qquad (26)$$
$$a^x - 1 \sim x \ln a \qquad (27)$$

Пример 13

Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 3x)^{\frac{1}{x}}$.

Решение:

При подстановке $x=0$ имеем неопределенность типа (1^{∞}).

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin 3x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{x}} = e^3.$$

При решении мы воспользовались соотношением эквивалентности (19) и следствием 1 из второго замечательного предела.

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 3x)^{\frac{1}{x}} = e^3$

Пример 14

Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}$

Решение:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x + 1 - 1)}{x^2} = \left\{\cos x - 1 = -2\sin^2\frac{x}{2}\right\} =$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1-\frac{x^2}{2}\right)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-x^2/2}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Мы воспользовались соотношениями эквивалентности (19) и (25).

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$

Пример 15

Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{3x}-3^{2x}}{tgx}$

Решение:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^{3x}-3^{2x}}{tgx}=\lim_{x\to 0}\frac{2^{3x}-1-\left(3^{2x}-1\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2^{3x}-1}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{3^{2x}-1}{x}=$$

$$=3\lim_{x\to 0}\frac{2^{3x}-1}{3x}-2\lim_{x\to 0}\frac{3^{2x}-1}{2x}=3\ln 2-2\ln 3=\ln\frac{8}{9}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{3x}-3^{2x}}{tgx}=\ln\dfrac{8}{9}$

Задания

Задание 2.3 Вычислить предел функции, используя второй замечательный предел и его следствия.

54. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$

55. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}$

56. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^3+x}{3x^3+x^2+2}\right)^{x^2}$

57. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-2^x}{5x}$

58. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x(ln(x+a)-lnx)\right)$

59. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ln(x+a)-lnx}{x}$

Задание 2.4 Вычислить предел функции, используя эквивалентность бесконечно малых величин

60. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ln(1+sin^2x)}{x\,sin4x}$

61. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4arctg3x}{9ln(1-2x)}$

62. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{tg^2x}-1}{x\,arcsin5x}$

63. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-cosx}{e^{x^2}-1}$

64. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arcsin2x}{\ln(e-x)-1}$

65. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{3x}-3^{2x}}{tg6x}$

66. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{lnx}$

67. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{sin(\pi(x+2))}$

68. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{ln(9-2x^2)}{sin2\pi x}$

69. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\ln(tgx)}{\cos 2x}$ 70. $\lim\limits_{x\to 2\pi} \dfrac{(x-2\pi)^2}{tg(\cos x-1)}$ 71. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{e^{\sin 2x}-e^{tg 2x}}{\ln 2x-\ln\pi}$

Ответы: **54.** e^2, **55.** $\frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}$, **56.** 0, **57.** $\frac{1}{5}\ln\frac{3}{2}$, **58.** a, **59.** $\frac{1}{a}$, **60.** $\frac{1}{4}$, **61.** $-\frac{2}{3}$, **62.** $\frac{1}{5}$, **63.** $\frac{1}{2}$, **64.** $-2e$, **65.** $\ln\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}}$, **66.** 2, **67.** $\frac{1}{2\pi}$, **68.** $-\frac{4}{\pi}$, **69.** -1, **70.** -2, **71.** -2π.

2.3 Вычисление предела от показательно-степенной функции.

Рассмотрим теперь показательное степенное выражение $u(x)^{v(x)}$, где U и υ являются функциями одной и той же переменной x.

$$\lim_{x\to a} u(x)^{v(x)}. \qquad (28)$$

Для вычисления предела (28) необходимо вычислить отдельно два предела $\lim\limits_{x\to a} u(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} v(x)$. Рассмотрим различные случаи, которые могут возникнуть.

1. $\lim\limits_{x\to a} u(x) = A;\ \lim\limits_{x\to a} v(x) = B$, тогда

$$\lim_{x\to a} u(x)^{v(x)} = A^B \qquad (29)$$

Пример 16

Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to\pi/2} x^{\sin x}$

Решение:

Вычислим отдельно пределы основания и показателя степени:

$$\lim_{x\to\pi/2} x = \frac{\pi}{2},\quad \lim_{x\to\pi/2} \sin x = \sin\frac{\pi}{2} = 1,$$

поэтому

$$\lim_{x\to\pi/2} x^{\sin x} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\sin\pi/2} = \frac{\pi}{2}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to\pi/2} x^{\sin x} = \dfrac{\pi}{2}$

2. $\lim\limits_{x\to a} u(x) = A$; $\lim\limits_{x\to a} v(x) = \infty$, тогда

$$\lim_{x\to a} u(x)^{v(x)} = \begin{cases} 0; & |A| < 1; \\ \infty; & |A| > 1. \end{cases}$$

Пример 17

Вычислить предел функции

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{3x+4}\right)^x,$$

Решение:

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+3}{3x+4} = \frac{2}{3} < 1;\ \lim\limits_{x\to\infty} x = \infty$, тогда

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{3x+4}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{\infty} = 0.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{3x+4}\right)^x = 0$

3. $\lim\limits_{x\to a} u(x) = 1;\ \lim\limits_{x\to a} v(x) = \infty$.

Искомый предел будет равен

$$\lim_{x\to a} u(x)^{v(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} v(x)(u(x)-1)}.$$

Пример 18

Вычислить предел функции $\lim_{x\to 1}(\cos 2\pi x)^{\frac{1}{(1-x)\ln x}}$

Решение:

$$\lim_{x\to 1}(\cos 2\pi x)^{\frac{1}{(1-x)\ln x}} = e^{\lim\limits_{x\to 1}(\cos 2\pi x - 1)\frac{1}{(1-x)\ln x}} = \left\{\begin{matrix} y = 1 - x \\ x = 1 - y \\ y \to 0 \text{ при } x \to 1 \end{matrix}\right\} =$$

$$= e^{\lim\limits_{y\to 0}(-2\sin^2 \pi y)\frac{1}{y\ln(1-y)}} = e^{-2\lim\limits_{y\to 0}(\sin \pi y)^2\frac{1}{y\ln(1-y)}} = e^{-2\lim\limits_{y\to 0}\frac{(\pi y)^2}{y\cdot(-y)}} = e^{2\pi^2}$$

Ответ: $\lim_{x\to 1}(\cos 2\pi x)^{\frac{1}{(1-x)\ln x}} = e^{2\pi^2}$

Задания

Задание 2.5 Вычислить предел показательно-степенной функции.

$72.\lim\limits_{x\to 3}\left(2-\frac{x}{3}\right)^{\sin\pi x}$ $\qquad$ $73.\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{tg4x}{x}\right)^{2+x}$ $\qquad$ $74.\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{5+x}{2-x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

$75.\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{6-x}{3}\right)^{tg\frac{\pi x}{6}}$ $\qquad$ $76.\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos^2\sqrt{x}}\right)^{\frac{1}{2x}}$ $\qquad$ $77.\lim\limits_{x\to 0}(\cos 10x)^{\frac{1}{5x^2}}$

$78.\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos 3x)^{\frac{1}{\cos x}}$ $\qquad$ $79.\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(tg\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}}$ $\qquad$ $80.\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{3x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}}$

$81.\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{tg\frac{\pi x}{2}}$

$82.\lim\limits_{x\to 2\pi}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 2x}}$ $\qquad$ $83.\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{\cos x}{\cos 2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$

***Ответы:*72. 1, 73. 16, 74.∞, 75. $e^{\frac{2}{\pi}}$, 76.$\sqrt{e}$, 77. $\frac{1}{e^{10}}$, 78. $\frac{1}{e^3}$, 79.e,**

80. e^3, 81.$e^{\frac{4}{\pi}}$, 82.$\frac{1}{\sqrt[8]{e}}$, 83. $\frac{1}{e^{tg2}}$.

3. Непрерывность функции.

3.1 Односторонние пределы.

Определение 8. Левой (правой) ε −окрестностью точки x_0 называется множество значений x, удовлетворяющих неравенству

$$x_0-\varepsilon<x<x_0\ (x_0<x<x_0+\varepsilon). \qquad (30)$$

Определение 9. Число A называется левосторонним (правосторонним) пределом функции $f(x)$, если для любого сколь угодно малого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что для всех x принадлежащих левой (правой) δ −окрестности точки a выполняется:

$$|f(x)-A|<\varepsilon. \qquad (31)$$

Левосторонний и правосторонний пределы обозначаются следующим образом:

$$f(a-0)=\lim\nolimits_{x\to a-0}f(x)$$
$$f(a+0)=\lim\nolimits_{x\to a+0}f(x).$$

Пример 19.

Вычислить односторонние предел функции $f(x)=e^{\frac{1}{2-x}}$ *при* $x\to 2$.

Решение:

Найдем левосторонний предел. Заметим, что при $x \to 2$ слева, выражение $2 - x > 0$. Таким образом

$$\lim_{x\to 2-0} e^{\frac{1}{2-x}} = \{e^{\infty}\} = \infty$$

.

Для вычисления правостороннего предела заметим, что при $x \to 2$ справа, выражение $2 - x < 0$. Поэтому,

$$\lim_{x\to 2+0} e^{\frac{1}{2-x}} = \lim_{x\to 2+0} e^{-\frac{1}{|x-2|}} = \lim_{x\to 2+0} \frac{1}{e^{\frac{1}{|x-2|}}} = \left\{\frac{1}{e^{\infty}}\right\} = 0.$$

Ответ: $\lim_{x\to 2-0} e^{\frac{1}{2-x}} = \infty, \lim_{x\to 2+0} e^{\frac{1}{2-x}} = 0.$

3.2 Определения непрерывности функции.

*Определение 10.*Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции:

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta f = 0 \tag{32}$$

*Определение 11.*Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если предел функции при $x \to x_0$ равен значению функции в точке x_0.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \tag{33}$$

*Определение 12.*Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если для любого сколь угодно малого положительного ε найдется такое $\delta > 0$, что для всех x удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$ выполняется:

. $$|f(x) - f(x_0)| \tag{34}$$

*Определение 13.*Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 слева (справа), если существуют односторонние пределы и $f(x_0-0)=f(x_0)$ ($f(x_0+0)=f(x_0)$).

Необходимое и достаточное условие непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0. Для того, чтобы функция $f(x)$ была непрерывной в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы

$$f((x_0-0)=f(x_0)=f(x_0+0) \qquad (35)$$

3.3 Классификация точек разрыва.

Определение 14. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0. Точка x_0 называется точкой разрыва функции $f(x)$, если функция либо неопределена в точке x_0, либо не является в ней непрерывной.

Определение 15. Точка x_0 называется **точкой устранимого разрыва**, если $f((x_0-0)=f(x_0+0)$, но при этом $f(x)$ неопределена в точке x_0.

Определение 16. Точка x_0 называется **точкой разрыва первого рода**, если $f(x_0-0), f(x_0+0)$ –существуют и конечны , причем

$$f(x_0-0)\neq f(x_0+0).$$

Определение 17. Точка x_0 называется **точкой разрыва второго рода**, если хотя бы один из односторонних пределов неопределен или равен бесконечности.

Пример 20.

Установить характер точки разрыва функции $f(x)=\frac{\sin x}{x}$.

Решение:

Функция $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ неопределена в точке $x_0=0$. Вычислим односторонние пределы $f(x_0-0), f(x_0+0)$.

$$f(0-0)=\lim_{x\to 0-0}\frac{\sin x}{x}=\{x=-|x|\}=\lim_{|x|\to 0}\frac{\sin(-|x|)}{-|x|}=\lim_{|x|\to 0}\frac{\sin(|x|)}{|x|}=1$$

$$f(0+0)=\lim_{x\to 0+0}\frac{\sin x}{x}=\{x=|x|\}=\lim_{|x|\to 0}\frac{\sin(|x|)}{|x|}=1$$

Таким образом, $f((0-0)=f(0+0)$, следовательно, согласно определению 15 точка $x_0=0$ является для функции $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ точкой устранимого разрыва.

Ответ: Точка $x_0=0$ является для функции $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ точкой устранимого разрыва.

Пример 21.

Установить характер точки разрыва функции $f(x)=sign(x)$.

Решение:

Функция $f(x)=sign(x)$ имеет следующий явный вид

$$sign(x) = \begin{cases} -1, x < 0 \\ 1, x > 0 \end{cases}$$

Точкой разрыва функции является точка $x_0 = 0$. Вычислим односторонние пределы.

$$f(0-0) = \lim_{x \to 0-0} sign(x) = \lim_{x \to 0}(-1) = -1$$

$$f(0+0) = \lim_{x \to 0+0} sign(x) = \lim_{x \to 0}(1) = 1$$

Таким образом, $f((0-0) \neq f(0+0)$, следовательно, согласно определению 16, точка $x_0 = 0$ является для функции $f(x) = sign(x)$ точкой разрыва первого рода.

<u>Ответ:</u> Точка $x_0 = 0$ является для функции $f(x) = sign(x)$ точкой разрыва первого рода.

Пример 22.

Установить характер точки разрыва функции $f(x) = e^{\frac{1}{1-x}}$.

<u>Решение:</u>

Точкой разрыва функции $f(x) = e^{\frac{1}{1-x}}$ является точка $x_0 = 1$. Вычислим односторонние пределы .

$$\lim_{x \to 1-0} e^{\frac{1}{1-x}} = \{1 - x > 0, 1 - x = |1 - x|\} = \lim_{x \to 1} e^{\frac{1}{|1-x|}} = \{e^{\infty}\} = \infty$$

$$\lim_{x \to 1+0} e^{\frac{1}{1-x}} = \{1 - x < 0, 1 - x = -|1 - x|\} = \lim_{x \to 1} e^{-\frac{1}{|1-x|}} = \left\{\frac{1}{e^{\infty}}\right\} = 0$$

Один из односторонних пределов равен ∞, следовательно, согласно определению 17, точка $x_0 = 1$ является точкой разрыва второго рода для функции $f(x) = e^{\frac{1}{1-x}}$.

<u>Ответ:</u> Точка $x_0 = 1$ является точкой разрыва второго рода для функции $f(x) = e^{\frac{1}{1-x}}$.

<u>3.4 Асимптоты графика функции.</u>

Определение 18. Прямая, расстояние до которой от графика функции стремится к нулю при стремлении одной из координат к бесконечности, называется **асимптотой**.

Определение 19. Прямая $x = a$ является **вертикальной асимптотой** графика функции $y = f(x)$, если $\lim_{x \to a \pm 0} f(x) = \pm\infty$.

Определение 20. Прямая $y = kx + b$ является **наклонной асимптотой** графика функции $y = f(x)$, если $\lim_{x \to \pm\infty} |f(x) - y| = 0$.

Из определения 20 следует, что числа k и b могут быть найдены по формулам:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad (36)$$

Если $k = \infty$, то график функции не имеет наклонных асимптот.

$$b = \lim_{x \to \pm\infty}(f(x) - kx) \qquad (37)$$

Если $b = \infty$, то график функции не имеет наклонных асимптот.

В частном случае $k = 0$, наклонная асимптота превращается в **горизонтальную** $y = b$.

Пример 23.

Найти асимптоты графика функции $f(x) = \frac{x^3}{x^2-2x}$.

<u>Решение:</u>

а) Найдем вертикальные асимптоты. Приравнивая знаменатель заданной функции к нулю $x^2 + 2x = 0$, получаем $x_1 = 0, x_2 = 2$.

Вычислим односторонние пределы при $x \to 0, x \to 2$.

$$\lim_{x \to 0 \pm 0} \frac{x^3}{x^2 - 2x} = \lim_{x \to 0 \pm 0} \frac{x^2}{x - 2} = 0$$

Точка $x_1 = 0$ является точкой устранимого разрыва функции.

$$\lim_{x \to 2 \pm 0} \frac{x^3}{x^2 - 2x} = \lim_{x \to 2 \pm 0} \frac{x^2}{x - 2} = \pm\infty$$

Прямая $x = 2$ является вертикальной асимптотой графика функции.

б) Найдем наклонные асимптоты $y = kx + b$.

Числа k и b могут быть найдем по формулам (35),(36).

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2 - 2x}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x^2 - 2x} = 1$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x \to \pm\infty}\left(\frac{x^3}{x^2 - 2x} - x\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3 - x^3 + 2x^2}{x^2 - 2x} = 2$$

Таким образом, график функции $f(x) = \frac{x^3}{x^2-2x}$ имеет наклонную асимптоту $y = x + 2$.

<u>Ответ:</u> График функции $f(x) = \frac{x^3}{x^2-2x}$ имеет вертикальную асимптоту $x = 2$ и наклонную асимптоту $y = x + 2$.

Задания

<u>Задание 3.1</u> Вычислить односторонние пределы функций.

84. $f(x) = 3^{\frac{1}{x-5}}$, при $x \to 5$

85. $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$, при $x \to 0$

86. $f(x) = \frac{3x}{x-4}$, при $x \to 4$

87. $f(x) = arctg\frac{1}{3-x}$, при $x \to 3$

88. $f(x)=\frac{2x^3\sqrt{x^2+4}}{(x+5)^4}$, при $x\to\pm\infty$

89. $f(x)=\frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}$, при $x\to 0$

90. $f(x)=\begin{cases}-5x+6, & x\le 2\\ x^2-3, & x>0\end{cases}$, при $x\to 2$

91. $f(x)=5+\frac{2}{2+5^{\frac{1}{2-x}}}$, при $x\to 2$

Задание 3.2 Определить характер точек разрыва функций.

92. $y=\frac{\sin(x-2)}{x-2}$

93. $y=\frac{|x|}{x}$

94. $y=\frac{2}{(x-1)^2}$

95. $y=\frac{x^2-9}{x-3}$

96. $y=\frac{1}{5+3^{\frac{1}{x}}}$

97. $y=\cos\frac{\pi}{x}$

98. $y=x\cdot\sin\frac{\pi}{x}$

99. $y=(1+x)\,arctg\left(\frac{1}{1-x^2}\right)$

100. $y=\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|$

Задание 3.3 Найти асимптоты кривых

101. $f(x)=x\,e^{-\frac{x^2}{2}}$

102. $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$

103. $f(x)=\frac{5x^3}{x^2-4}$

104. $f(x)=\frac{x^3}{2(x+1)^2}$,

105. $f(x)=x\,e^{\frac{1}{x}}$.

Ответы: **84.** $0;\infty$, **85.** $\infty;0$, **86.** $-\infty;\infty$, **87.** $\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{2}$, **88.** $-2;2$, **89.** $-\sqrt{2};\sqrt{2}$, **90.** $-4;1$, **91.** $5;6$, **101.** $y=0$, **102.** $x=\pm1;y=-x$, **103.** $x=\pm2;y=5x$, **104.** $x=-1;y=\frac{1}{2}x-1$, **105.** $x=0;y=x+1$.

Авакян Елена Зиновьевна
Авакян Сергей Левонович
Иванейчик Ирина Владимировна

ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ

ПРАКТИКУМ
по дисциплине «Высшая математика» для студентов всех специальностей дневной формы обучения

Подписано к размещению в электронную библиотеку
ГГТУ им. П О. Сухого в качестве электронного документа
учебно-методических материалов 05.10.2010.

Рег. № 16Е.
E-mail: ic@gstu.by
http://www.gstu.by