

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Автоматизированный электропривод»

В. И. Луковников, А. В. Козлов

ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

ПОСОБИЕ

**по одноименному курсу для студентов
специальностей 1-53 01 05 «Автоматизированные
электроприводы» и 1-36 01 03 «Технологическое обо-
рудование машиностроительного производства»
дневной и заочной форм обучения**

Гомель 2009

УДК 681.5.01(075.8)
ББК 32.965я73
Л84

*Рекомендовано научно-методическим советом
факультета автоматизированных и информационных систем
ГГТУ им. П. О. Сухого
(протокол № 7 от 29.06.2009 г.)*

Рецензент: зав. каф. «Промышленная электроника» ГГТУ им. П. О. Сухого канд. техн. наук,
доц. Ю. В. Крышнев

Луковников, В. И.
Л84 Теория автоматического управления. Линейные системы : пособие по одному курсу для студентов специальностей 1-53 01 05 «Автоматизированные электроприводы» и 1-36 01 03 «Технологическое оборудование машиностроительного производства» днев. и заоч. форм обучения / В. И. Луковников, А. В. Козлов. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2009. – 169 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: <http://lib.gstu.local>. – Загл. с титул. экрана.

Изложены основные принципы и методы теории автоматического управления: построение систем управления, методы их математического описания, критерии оценки устойчивости и качества регулирования линейных систем автоматического управления современного машиностроения, а также рассмотрены методы синтеза таких систем.

Для студентов специальностей 1-53 01 05 «Автоматизированные электроприводы» и 1-36 01 03 «Технологическое оборудование машиностроительного производства» дневной и заочной форм обучения.

УДК 681.5.01(075.8)
ББК 32.965я73

© Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого», 2009

ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина «Теория автоматического управления» (ТАУ) рассматривает принципы построения систем автоматического управления, закономерности протекающих в них процессов, методы анализа и синтеза наиболее распространенных классов систем.

В ТАУ важным понятием является модель. Под моделью понимают отображение свойств реальной системы в другой системе, реализованной с помощью дифференциальных уравнений, структурных схем в операторной форме, сетей, графов и т.д.

В своей деятельности инженеры-разработчики с помощью моделей изучают различные объекты, которые изначально не удовлетворяют их по своим количественным и качественным характеристикам. Приходится вырабатывать управляющие воздействия на объект, чтобы добиться определенных целей. Так возникает процесс управления. Поскольку управление протекает во времени, то системы управления являются динамическими.

В системах автоматического управления (САУ) процесс управления осуществляется автоматическими устройствами без непосредственного участия человека. Эти системы и будут рассматриваться в данном учебном пособии.

Первые автоматические устройства промышленного назначения были разработаны в связи с появлением паровых машин. Изобретение первого в мире промышленного регулятора было осуществлено русским механиком И.И. Ползуновым в 1765 году. Это был регулятор, поддерживающий уровень воды в котле паровой машины. Предложенный им принцип регулирования по отклонению является одним из основных принципов построения современных систем автоматического управления. Большой вклад в становление автоматического управления внес Д. Уайт, разработавший автоматический регулятор скорости вращения вала паровой машины (1784 г).

Широкое распространение получил также принцип регулирования по возмущению, названный в честь французского инженера, математика Ж.В. Понселе. Согласно этому принципу, в системе управления осуществляется измерение сигнала возмущения и при помощи канала обратной связи происходит компенсация возмущающего воздействия, благодаря чему можно построить систему, инвариантную к внешним возмущениям.

В настоящее время системы автоматического управления нашли широкое применение во всех областях деятельности человека – в промышленности, на транспорте, в связи, в научных исследованиях и т.д.

При их исследовании с научными или инженерными целями в большинстве случаев приходится иметь дело с двумя типами задач. К первому типу можно отнести задачи анализа, когда требуется определить характеристики заранее заданной системы. Во втором случае требуется спроектировать систему, обладающую заданными характеристиками, т.е. решить задачу синтеза. В этом случае современная теория автоматического управления использует два основных подхода к анализу и синтезу систем. Первый подход сводится к составлению структурной схемы системы автоматического управления и определению передаточных функций отдельных элементов и всей системы в целом. Второй подход основан на возможности описания поведения системы некоторым числом дифференциальных уравнений первого порядка относительно переменных состояния с начальными условиями.

Методы анализа и синтеза систем автоматического управления, использующие первый подход, принято называть операторно-частотными методами. Второй подход описания поведения систем автоматического управления, принято называть методами пространства состояния.

В данном учебном пособии будут изложены базовые основы операторно-частотных методов анализа и синтеза систем автоматического управления, ориентированные на современное машиностроение и автоматизацию технологических процессов.

В.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Автоматика – это наука о техническом использовании элементов, устройств и систем, выполняющих свои функции без вмешательства человека.

Теория автоматического управления – это наука о принципах построения (синтеза) и расчёта (анализа) систем автоматики.

Системы автоматики, или автоматические системы применяются в различных областях техники и имеют различную физическую природу своих элементов (механика, гидравлика, электротехника, электроника, пневматика, теплотехника и т.д.).

Теория автоматического управления выявляет и использует общие закономерности анализа и синтеза системы автоматического управления независимо от их физической сущности.

Автоматическое управление – изменение некоторой физической величины по требуемому закону при помощи системы автоматического управления, т.е. без вмешательства человека.

Автоматический регулятор – устройство, осуществляющее автоматическое управление.

Объект регулирования – устройство, над которым осуществляется автоматическое управление. В качестве его может служить самолет, станок, электродвигатель, гидropневмосистема рабочей машины.

Система автоматического управления – это агрегат, объединяющий автоматический регулятор и объект регулирования.

Основной задачей автоматического управления является поддержание определённого закона изменения одной или нескольких физических величин, характеризующих процессы, протекающие в объекте регулирования, без непосредственного участия человека. Эти величины называются управляемыми величинами.

Если в качестве объекта регулирования рассматривается, например, электрический двигатель, то управляемой величиной будет скорость или угол поворота его вала, а управляющей величиной – электрический или механический сигнал задания (в следящих САУ).

Примерами автоматических систем могут служить:

1. Автомат включения освещения, в котором имеется фотоэлемент, реагирующий на силу дневного света и специальное устройство для включения освещения, срабатывающее от определённого сигнала фотоэлемента. Фотоэлемент это такое устройство, которое вырабатывает выходной сигнал в виде электрического напряжения, пропорциональный освещённости окружающей среды;

2. Автомат, выбрасывающий какие-либо определённые предметы (билеты, конфеты, игрушки) при опускании в него определённой комбинации монет;

3. Следящая система, на выходе которой с определённой точностью копируются произвольное во времени изменение какой-либо величины поданной на вход, например, система сопровождения, в которой ствол наземного орудия автоматически поворачивается за летящим самолетом;

4. Система автоматического управления скоростью вращения электродвигателя, поддерживающая постоянную угловую скорость электродвигателя независимо от внешней нагрузки;

5. Гидроусилители, которые применяют для соединения маломощных чувствительных элементов или маломощных, преобразующих сигналы управления, элементов с более мощными исполнительными элементами;

6. Хлебопекарная печь, температура в которой должна изменяться по заданной программе в соответствии с требованиями технологического процесса.

В.2. КЛАССИФИКАЦИЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

В.2.1. КЛАССИФИКАЦИЯ САУ ПО ПРИНЦИПУ ПОСТРОЕНИЯ

Классификация САУ по принципу построения приведена на рис.1.



Рис.1. Классификация САУ по принципу построения

Принцип построения САУ определяется способом соединения автоматического регулятора и объекта регулирования (рис.2).

На функциональных схемах САУ (рис.2) обозначено:

$x_{вх}$ – управляющий сигнал; $x_{вых}$ – регулируемая величина (сигнал); Δx – сигнал ошибки регулирования, f – внешний сигнал возмущения.

Функциональная схема САУ – это условное графическое изображение САУ в виде квадратов, связанных стрелками друг с другом. Квадрат изображает элемент САУ, выполняющий определённую функцию, причём эта функция кратко записана внутри квадрата буквами или символами.

Элемент САУ – конструктивно обособленная часть САУ, выполняющая определённую самостоятельную функцию по управлению объектами регулирования. Стрелки на функциональных схемах показывают направления передачи информации с помощью сигналов.

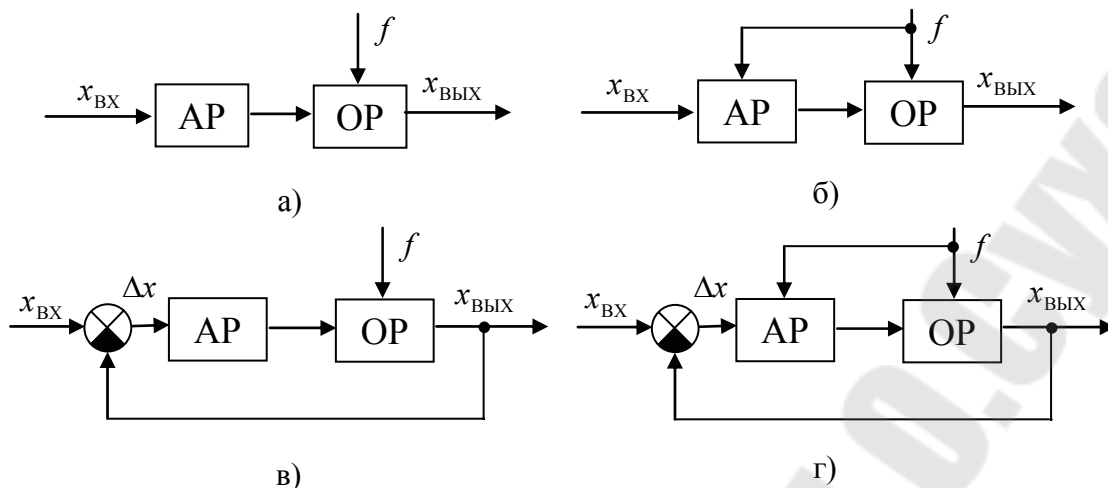


Рис.2. Общие функциональные схемы САУ, иллюстрирующие принципы регулирования по разомкнутой схеме (а) и по замкнутой схеме: по возмущению (б), по отклонению (в), с комбинацией регулирования по отклонению и возмущению (г)

Сигнал – физическая величина (напряжение, ток, перемещение, давление, тепловое или световое излучение и т.д.), несущая информацию о состоянии элементов САУ. Эти сигналы имеют обычно различную физическую природу, поэтому далее, в аналитических преобразованиях они будут в относительных единицах.

В разомкнутых САУ сигналы $x_{\text{ВЫХ}}$ и f никак не влияют на управляющий сигнал $x_{\text{ВХ}}$ или автоматический регулятор (рис.2.а), а в замкнутых САУ влияют (рис.2.б, в, г), так как каналы передачи сигналов образуют замкнутые контуры.

Если в процессе управления учитывается, а затем компенсируется возмущение f , то такой подход называется принципом Понселе – регулированием по возмущению (рис. 2.б).

Если же в процессе управление $x_{\text{ВЫХ}}$ сравнивается с заданием $x_{\text{ВХ}}$, а затем отклонение $\Delta x = x_{\text{ВХ}} - x_{\text{ВЫХ}}$ компенсируется, т.е. устремляется к нулю, то такой подход называется принципом Ползунова–Уатта, или регулированием по отклонению (рис.2.в).

В случае объединения обоих принципов создается комбинированное управление (рис.2.г).

В процессе управления по возмущению (рис.2.б) регулируемая величина не измеряется, а используется информация о внешнем воздействии (возмущении) f . При этом сначала необходимо выяснить, какое возмущающее воздействие является основным, а затем требуемым образом воздействовать на автоматический регулятор, чтобы значение управляемого сигнала не зависело от возмущения f .

Пример1. Построение системы стабилизации частоты вращения электродвигателя постоянного тока независимого возбуждения станка по принципу Понселе (регулирование по возмущению).

На рис.3. представлена функциональная схема САУ, реализованная по принципу регулирования по возмущению.

На схеме обозначено:

ТП - тиристорный преобразователь с коэффициентом передачи $K_{ТП}$. Этот элемент САУ преобразовывает нерегулируемое переменное напряжение сети в постоянное регулирование напряжения $U_{я}$, подаваемое на якорную обмотку электродвигателя;

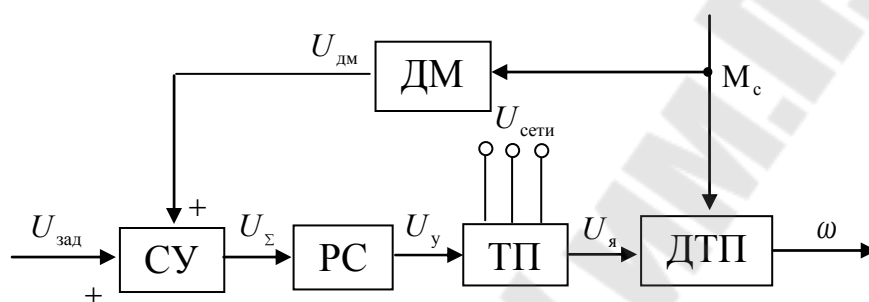


Рис.3. Система автоматического управления стабилизации скорости электродвигателя реализованная по принципу Понселе

ДТП – электродвигатель постоянного тока независимого возбуждения (объект регулирования);

РС – автоматический регулятор с коэффициентом передачи K_p , вырабатывающий на своем выходе электрическое напряжение U_y ;

ДМ – датчик момента сопротивления M_c с коэффициентом передачи $K_{дм}$, вырабатывающий сигнал $U_{дм}$ в виде электрического напряжения пропорционального величине нагрузки на валу двигателя;

СУ – сравнивающее устройство, выполняющее функцию суммирования сигналов;

ω – угловая скорость вращения якоря электродвигателя (выходной сигнал).

$U_{дм}, U_{\Sigma}, U_{я}, U_y$ – промежуточные сигналы (электрические напряжения) в САУ;

Проанализируем, как изменяется скорость вращения электродвигателя ω без системы управления и с учётом системы управления, если нагрузка на его валу будет увеличиваться.

Без системы управления в установившемся режиме ДПТНВ по якорной цепи описывается уравнением

$$U_{\text{я}} = I_{\text{я}} \cdot R_{\text{я}} + E_{\text{я}} = \frac{M_{\text{с}} \cdot R_{\text{я}}}{K_{\text{е}} \cdot \Phi_{\text{вN}}} + K_{\text{е}} \cdot \Phi_{\text{вN}} \cdot \omega, \quad (1)$$

где $M_{\text{с}} = M_{\text{дв}} = K_{\text{е}} \cdot \Phi_{\text{вN}} \cdot I_{\text{я}}$ – момент сопротивления на валу;

$\Phi_{\text{вN}}$ – номинальный магнитный поток (const);

$K_{\text{в}}$ – магнитная постоянная;

$E_{\text{я}} = K_{\text{е}} \cdot \Phi_{\text{вN}} \cdot \omega$ – ЭДС вращения (противоЭДС);

$U_{\text{я}}$ – напряжение питания якорной цепи электродвигателя.

Из уравнения (1) для якорной цепи электродвигателя следует, что

$$\omega = \frac{1}{K_{\text{е}} \cdot \Phi_{\text{вN}}} \cdot U_{\text{я}} - \frac{M_{\text{с}} \cdot R_{\text{я}}}{K_{\text{е}}^2 \cdot \Phi_{\text{вN}}^2} = \omega_{\text{зад}} - \Delta \omega. \quad (2)$$

Уравнение (2) - это уравнение механической характеристики ДПТ НВ, в котором первое слагаемое представляет собой заданную скорость $\omega_{\text{зад}}$ напряжением $U_{\text{я}}$ якорной обмотки (управление и задание), а второе – ошибку по скорости $\Delta \omega$ (отклонение от заданной скорости) из-за нагрузочного момента $M_{\text{с}}$ на валу электродвигателя.

С системой управления по возмущению, согласно рис.3, можно описать ДПТ НВ уравнениями для установившегося режима в следующем виде

$$\left\{ \begin{array}{l} U_{\text{дм}} = K_{\text{дм}} \cdot M_{\text{с}}, \\ U_{\Sigma} = U_{\text{зад}} + U_{\text{дм}}, \\ U_{\text{у}} = K_{\text{р}} \cdot U_{\Sigma}, \\ U_{\text{я}} = K_{\text{тп}} \cdot U_{\text{у}}, \\ \omega = \frac{1}{K_{\text{е}} \cdot \Phi_{\text{вN}}} \cdot U_{\text{я}} - \frac{R_{\text{я}}}{K_{\text{е}}^2 \cdot \Phi_{\text{вN}}^2} \cdot M_{\text{с}}. \end{array} \right. \quad (3)$$

Методом подстановки исключим промежуточные сигналы $U_{\text{дм}}, U_{\Sigma}, U_{\text{я}}, U_{\text{у}}$ в системе уравнений (3) и найдём выражение для механической характеристики САУ ДПТ НВ

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{K_p \cdot K_{\text{ТП}}}{K_e \cdot \Phi_{\text{вН}}} \cdot U_{\text{зад}} + \left(\frac{K_{\text{дм}} \cdot K_p \cdot K_{\text{ТП}}}{K_e \cdot \Phi_{\text{вН}}} - \frac{R_{\text{я}}}{K_e^2 \cdot \Phi_{\text{вН}}^2} \right) \cdot M_{\text{с}} = \\ &= \omega_{\text{зад}} - \Delta \omega_{\text{М}}. \end{aligned} \quad (4)$$

По (4) видно, что в данном случае можно сделать скоростную ошибку нулевой ($\Delta \omega_{\text{М}} = 0$), если настроить регулятор так, что бы его коэффициент передачи был равен

$$K_p = \frac{R_{\text{я}}}{K_{\text{я}} \cdot \Phi_{\text{вН}} \cdot K_{\text{дм}} \cdot K_{\text{ТП}}},$$

при этом уравнение механической характеристики примет вид

$$\omega = \frac{R_{\text{я}}}{K_{\text{я}}^2 \cdot \Phi_{\text{вН}}^2 \cdot K_{\text{дм}}} \cdot U_{\text{зад}}.$$

На рис.4. представлены механические характеристики ДПТНВ без системы управления и в ее составе.

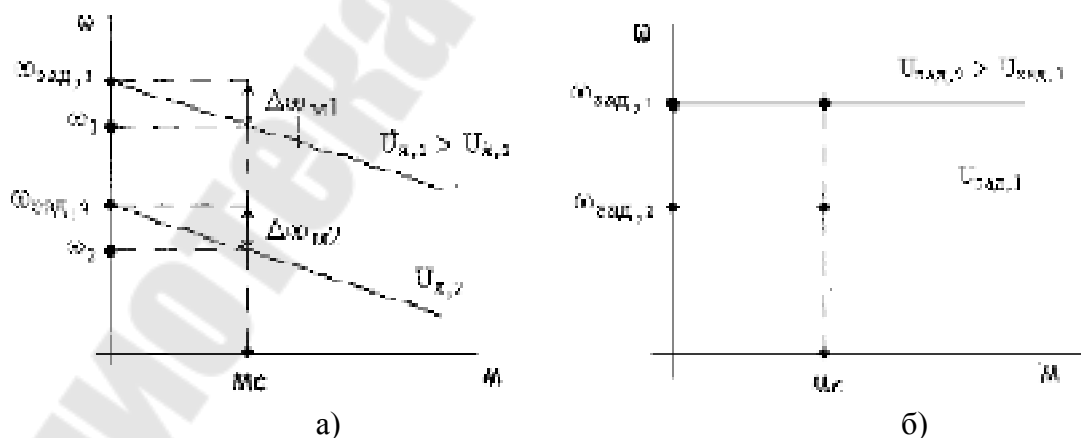


Рис 4. Механические характеристики ДПТ НВ без САУ (а) и в составе САУ (б)

Из механических характеристик (рис 4) ДПТНВ видно, что при правильной настройке регулятора скорости САУ, построенной по

принципу регулирования по возмущению, можно получить абсолютно жёсткие механические характеристики (рис.4.б).

Достоинством такого способа управления является возможность полной компенсации возмущения, а недостатком – невозможность учета всех возмущающих воздействий, так как в реальных САУ их оказывается очень много. Это, например, колебания напряжения сети электропитания, разогрев обмоток и магнитопровода электрических машин, входящих в САУ, изменение давления и температуры рабочей жидкости гидросистемы и т.д. Чтобы учесть все эти факторы, приходится вводить в САУ большое количество компенсирующих связей, что значительно усложняет настройку и понижает надежность работы САУ.

Пример 2. Построение системы стабилизации частоты вращения электродвигателя постоянного тока независимого возбуждения по принципу Ползунова – Уатта (регулирование по возмущению).

На рис.5 представлена функциональная схема САУ, реализованная по принципу регулирования по отклонению.

На функциональной схеме САУ (рис.5) обозначено:

СУ - сравнивающее устройство, выполняющее функцию вычитания таким образом, что на его выходе получается сигнал рассогласования $\Delta U = U_{\text{зад}} - U_{\text{тг}}$;

ТГ - тахогенератор, устройство, вырабатывающее электрическое напряжение $U_{\text{тг}}$ пропорциональное скорости вращения двигателя.

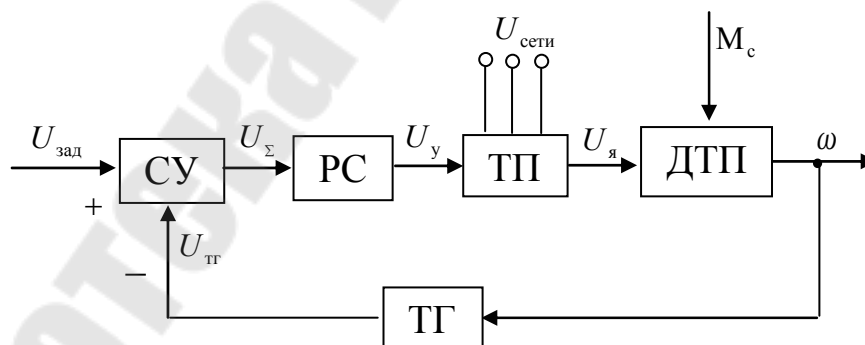


Рис.5. Система автоматического управления стабилизации скорости электродвигателя реализованная по принципу Ползунова - Уатта

Согласно рис 5 рассматриваемую САУ можно описать следующей системой уравнений

$$\begin{cases} \Delta U = U_{\text{зад}} - U_{\text{тг}}, \\ U_{\text{я}} = K_{\text{р}} \cdot \Delta U, \\ U_{\text{я}} = K_{\text{р}} \cdot U_{\Sigma}, \\ U_{\text{тг}} = K_{\text{тг}} \cdot \omega, \\ \omega = \frac{1}{K_{\text{е}} \cdot \Phi_{\text{вН}}} \cdot U_{\text{я}} - \frac{R_{\text{я}}}{K_{\text{е}}^2 \cdot \Phi_{\text{вН}}^2} \cdot M_{\text{с}}. \end{cases} \quad (5)$$

Методом исключения промежуточных переменных в (5) получим выражение для механической характеристики данной САУ ДПТ НВ в виде

$$\omega = \frac{K_{\text{р}} \cdot K_{\text{тг}}}{K_{\text{е}} \cdot \Phi_{\text{вН}} + K_{\text{р}} \cdot K_{\text{тг}} \cdot K_{\text{тг}}} \cdot U_{\text{зад}} - \frac{R_{\text{я}}}{K_{\text{е}} \cdot \Phi_{\text{вН}} (K_{\text{е}} \cdot \Phi_{\text{вН}} + K_{\text{р}} \cdot K_{\text{тг}} \cdot K_{\text{тг}})} \cdot M_{\text{с}} = \omega_{\text{зад}} - \Delta \omega. \quad (6)$$

Из полученного выражения механической характеристики САУ, реализованной по Ползунова-Уатта (6) видно, что в данной САУ скоростную ошибку $\Delta \omega_{\text{м}}$ нулевой при реальных параметрах элементов получить не удаётся, но получить её не более допустимой ошибки $[\Delta \omega_{\text{м}}]$ можно. Для этого первоначально надо настроить обратную связь, исходя из теоретически возможного условия, что при $K_{\text{р}} \rightarrow \infty$ - отклонение $\Delta \omega_{\text{м}} \rightarrow 0$. При этом условии расчётное соотношение для требуемого коэффициента передачи обратной связи

$$K_{\text{тг}} = \frac{U_{\text{зад}}}{\omega_{\text{зад}}}.$$

В техническом задании на проектирование САУ оговаривается допустимая ошибка по скорости из-за нагрузочного момента $[\Delta \omega_{\text{м}}]$, тогда согласно (6) будем иметь

$$\frac{R_{\text{я}} \cdot M_{\text{с}}}{K_{\text{е}} \cdot \Phi_{\text{вN}} \cdot (K_{\text{е}} \cdot \Phi_{\text{вN}} + K_{\text{р}} \cdot K_{\text{тп}} \cdot \frac{U_{\text{зад}}}{\omega_{\text{зад}}})} < [\Delta \varphi].$$

Из последнего неравенства выразив $K_{\text{р}}$, а также используя подставку $[s] = \frac{[\Delta \varphi]}{\omega_{\text{зад}}}$ получим

$$K_{\text{р}} \geq \frac{R_{\text{я}} \cdot M_{\text{с}} - K_{\text{е}}^2 \cdot \Phi_{\text{вN}}^2 \cdot \omega_{\text{зад}} \cdot [s]}{K_{\text{тп}} \cdot U_{\text{зад}} \cdot K_{\text{е}} \cdot \Phi_{\text{вN}} \cdot [s]},$$

где $[s]$ - допустимый статизм (скоростная ошибка по моменту в относительных единицах).

Таким образом, более высокое качество управления позволяют получить замкнутые САУ, построенные по принципу управления по отклонению, так как применение даже одной обратной связи по управляемой величине позволяет учесть влияние всех возмущений и также их компенсировать, используя астатические САУ. Недостатком принципа управления по отклонению является инерционность системы и обратно-пропорциональная зависимость между точностью и устойчивостью САУ, поэтому часто используют комбинацию двух рассмотренных принципов управления, а именно комбинированное управление.

Комбинированные САУ имеют более высокое качество управления, чем системы, работающие только по отклонению, так как информация о значении возмущающего воздействия f позволяет автоматическому регулятору работать с предвидением, т.е. начинать компенсацию внешнего возмущения, нарушающего нормальную работу объекта управления, раньше, чем возникнет достаточно большое отклонение. Одновременно это дает возможность повысить точность и быстродействие системы.

В.2.2. КЛАССИФИКАЦИЯ САУ ПО ЧИСЛУ КОНТУРОВ РЕГУЛИРОВАНИЯ

Если принять во внимание, что канал управления – это часть САУ, в котором информация передаётся в одном направлении, а кон-

тур регулирования – это замкнутая часть САУ, образованная несколькими каналами для регулирования одной выходной величины (координаты), то можно осуществить следующую классификацию САУ (рис.6).

Одноконтурные САУ имеют один контур регулирования одной величины, образованный каналами передачи сигналов: прямым ($x_{вх}$), обратной связи ($x_{ос}$) и (или) возмущения (f).

В многоконтурных САУ таких контуров, а значит и регулируемых величин несколько, причём среди них могут быть главные и второстепенные. В них контуры управления могут быть автономными (рис.7.а), когда каждый управляющий сигнал воздействует только на одну «свою» регулируемую величину, и связанными (рис.7.б.в), т.е. влияющими друг на друга. В связанных САУ изменение хотя бы одной регулируемой или управляемой координаты ведёт к изменению других координат системы.

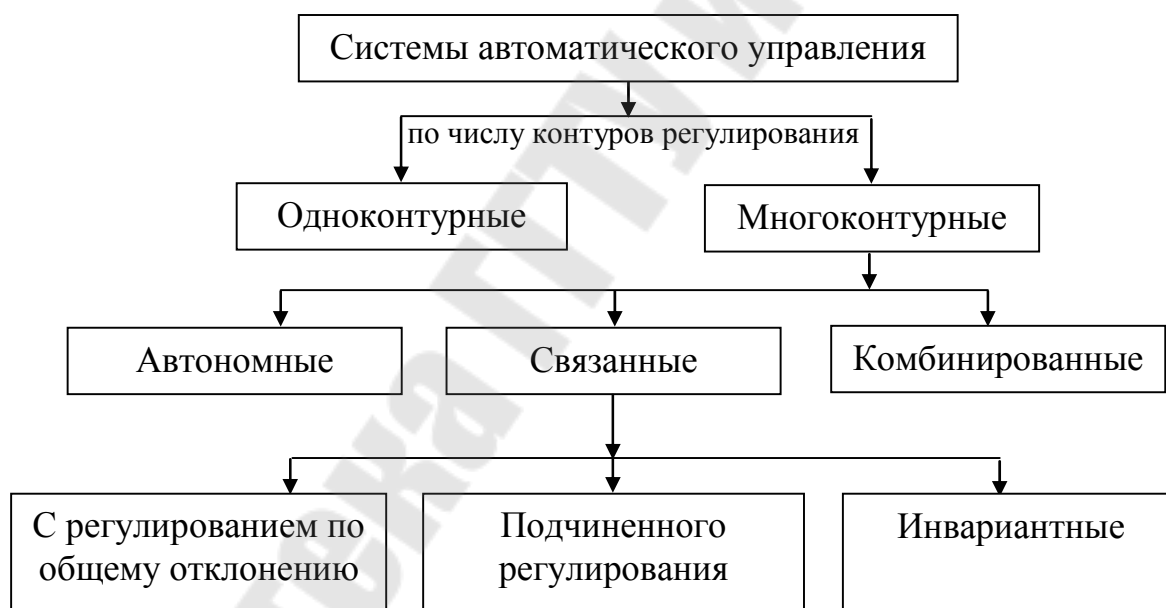


Рис.6. Классификация САУ по числу контуров регулирования

В САУ подчиненного регулирования (рис.7.в) контуры управления располагаются один внутри другого (концентрично), причем быстродействие контуров «от центра к периферии» уменьшается. Это позволяет взаимосвязь контуров почти исключить за счет разделения процессов регулирования различных величин по времени.

Наличие в САУ не только контуров для управляющих сигналов, но и контуров по возмущающим воздействиям позволяет построить

инвариантные САУ, в которых регулируемые величины «не чувствуют» возмущающих воздействий.

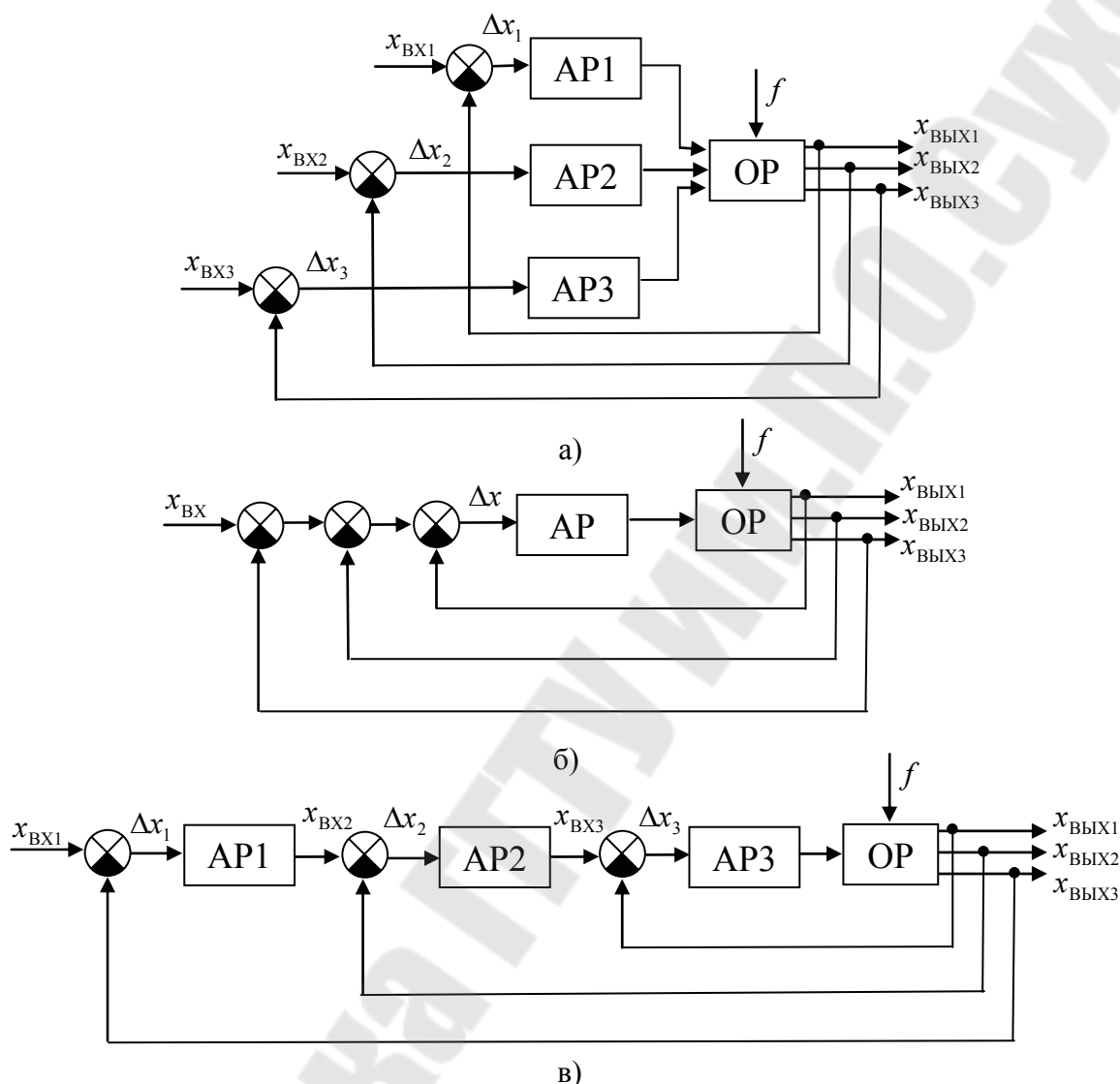


Рис.7. Функциональные схемы трехконтурных САУ автономной (а), с общим отклонением (б), подчиненного регулирования (в)

В.2.3. КЛАССИФИКАЦИЯ САУ ПО ХАРАКТЕРУ ПАРАМЕТРОВ

Основными характеристиками элементов и САУ в целом являются статическая характеристика $x_{\text{ВЫХ}}(x_{\text{ВХ}})$ в установившемся режиме и переходная характеристика $x_{\text{ВЫХ}}(t)$, при $x_{\text{ВХ}} = 1(t)$ в динамическом.

Основным параметром статической характеристики является крутизна $\frac{\partial x_{\text{ВЫХ}}}{\partial x_{\text{ВХ}}} = K$ – коэффициент передачи, а переходной – посто-

янная времени T и коэффициент затухания ξ . Характер этих параметров элементов и определяет данную классификацию (рис.8).

Линейными (нелинейными) называются САУ, состоящие из элементов с линейными (нелинейными) статическими характеристиками (рис.9).

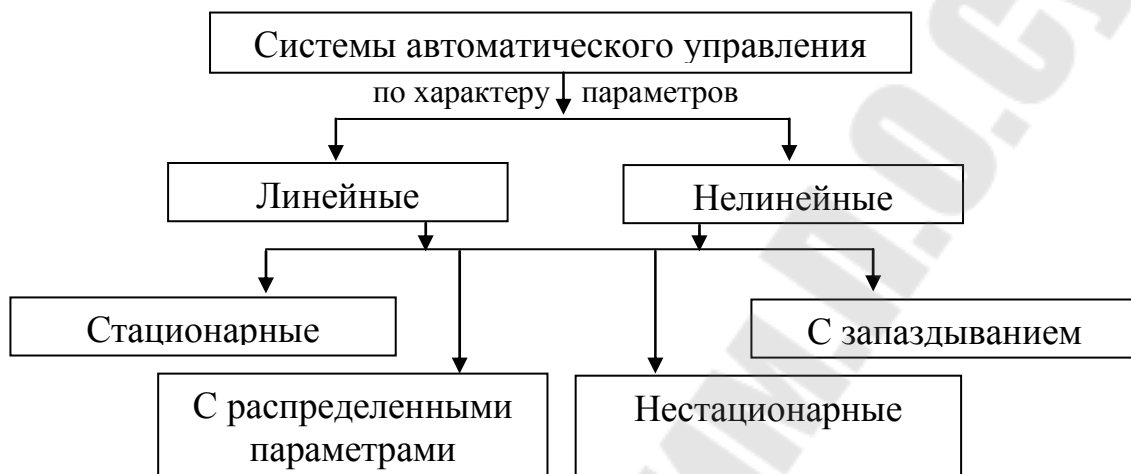


Рис.8. Классификация САУ по характеру параметров

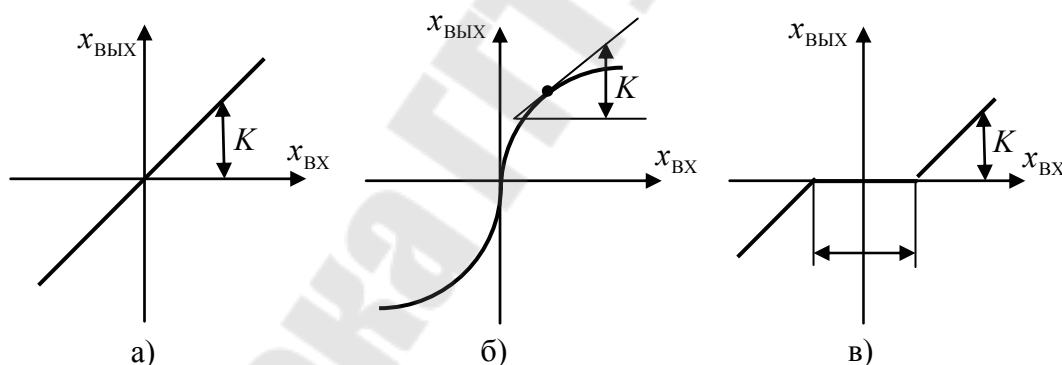


Рис.9 Статические характеристики линейных (а), нелинейных (б) элементов и элементов с зоной нечувствительности (в)

В стационарных САУ параметры элементов не изменяются во времени (коэффициенты в дифференциальных уравнениях, описывающих САУ – величины постоянные), а в нестационарных САУ изменяются.

САУ с запаздыванием имеет в своем составе, хотя бы один элемент, сигнал, на выходе которого, появляется с задержкой во времени относительно момента подачи входного сигнала. Статическая характеристика такого элемента имеет зону нечувствительности (рис.9.в).

В состав САУ с распределенными параметрами входят протяженные элементы, параметры которых распределены в пространстве (многозвен-

ные фильтры, линии передачи высокочастотных сигналов, канаты, трансформаторы и т.д.).

Пример 3. Рассмотрим пример получения статической характеристики потенциометрического датчика положения, который широко используется в следящих системах автоматического управления.

Датчик – это элемент САУ, преобразующий неэлектрический сигнал в электрический сигнал. Рассмотрим выполненный на основе переменного резистора потенциометрический датчик, преобразующий линейную координату положения его «движка» $X_{\text{вх}}$ (входной сигнал) в электрическое напряжение между «движком» и отрицательным выводом потенциометра $U_{\text{вых}}$ (выходной сигнал) Электрические схемы замещения потенциометрического датчика перемещения приведены на рис.10.

Электрическая схема датчика построена при допущениях, что индуктивность L и емкость C обмотки, а также сопротивление R контактов движка пренебрежимо малы. Кроме того, будем считать, что намотка обмотки выполнена равномерной, а нагрузка (входное сопротивление следующего за датчиком электронного блока) чисто активная.

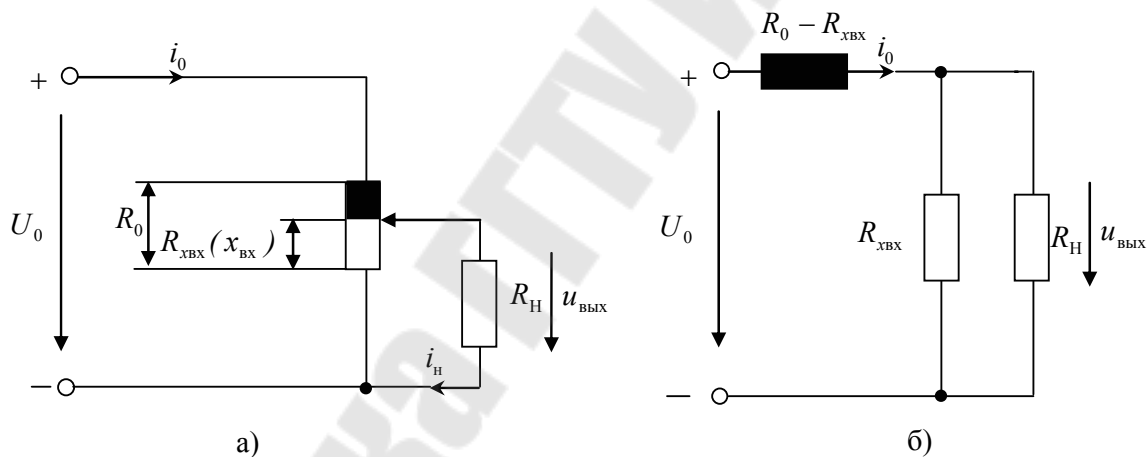


Рис.10 Электрическая схема потенциометрического датчика положения (а) и его последовательно - параллельная схема замещения (б)

Согласно законам Кирхгофа, можно записать систему уравнений:

$$\begin{cases} u_{\text{вых}} = i_0 \cdot \frac{R_{\text{xвх}} \cdot R_{\text{н}}}{R_{\text{xвх}} + R_{\text{н}}}; \\ i_0 = \frac{u_0}{R_0 - R_{\text{xвх}} + \frac{R_{\text{xвх}} \cdot R_{\text{н}}}{R_{\text{xвх}} + R_{\text{н}}}}. \end{cases} \quad (7)$$

Исключая промежуточную переменную тока i_0 в (7), получим

$$u_{\text{ВЫХ}} = u_0 \cdot \frac{R_{\text{H}} \cdot R_{\text{ХВХ}}}{R_0 \cdot R_{\text{ХВХ}} - R_{\text{ХВХ}}^2 + R_0 \cdot R_{\text{H}}}$$

Учитывая, что $R_{\text{ХВХ}} = \frac{R_0}{x_{\text{max}}} \cdot x_{\text{ВХ}}$, и вводя относительные величины

ВХОДНОГО $x_{\text{вх}}^0 = \frac{x_{\text{ВХ}}}{x_{\text{max}}}$ и ВЫХОДНОГО $u_{\text{ВЫХ}}^0 = \frac{u_{\text{ВЫХ}}}{u_0}$, а также полного сопро-

тивления датчика $\rho^0 = \frac{R_0}{R_{\text{H}}}$, окончательно получим управление стати-

ческой характеристики в виде

$$u_{\text{ВЫХ}}^0 = \frac{x_{\text{ВХ}}^0}{\rho^0 \cdot x_{\text{ВХ}}^0 \cdot (1 - x_{\text{ВХ}}^0) + 1} \quad (8)$$

Статические характеристики линейного потенциметрического датчика, построенные по (8), представлены на рис.11.

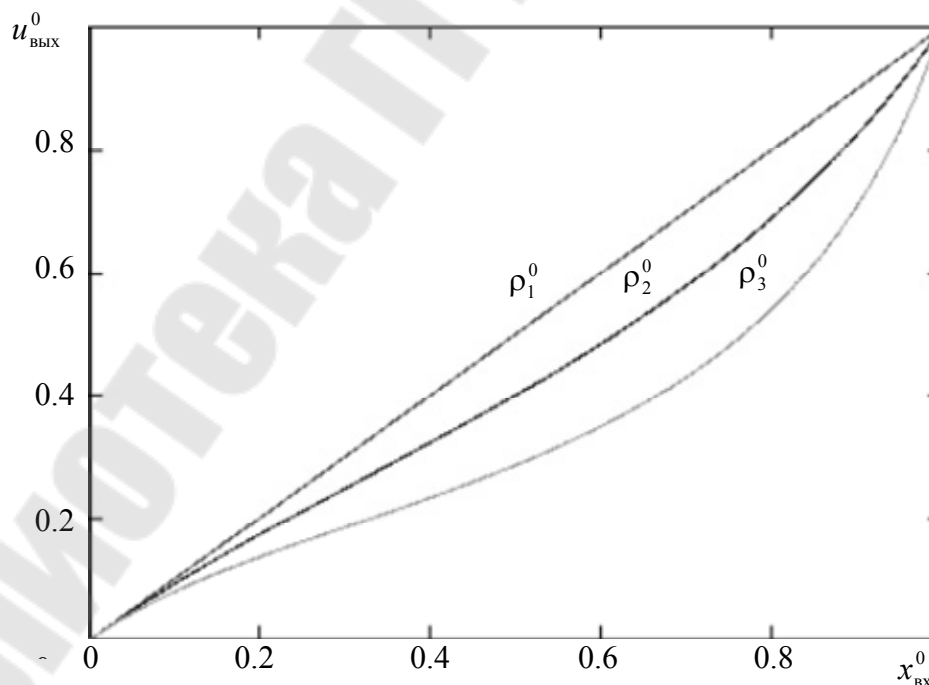


Рис.11. Статические характеристики линейного потенциметрического датчика

Анализ последнего соотношения и вид статических характеристик показывают, что при малых нагрузочных сопротивлениях $R_n \ll R_0$ датчик является нелинейным элементом, а при сопротивлениях нагрузки $R_n \gg R_0$ - линейным элементом со статической характеристикой $u_{\text{вых}}^0 = x_{\text{вх}}^0$.

В связи с этим, при проектировании САУ рекомендуется такие датчики подключать к электронным блокам, имеющим входные сопротивления значительно больше, чем сопротивление датчика.

В.2.4. КЛАССИФИКАЦИЯ САУ ПО ХАРАКТЕРУ УПРАВЛЯЮЩЕГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

Классификация САУ по характеру управляющего воздействия приведена на рис.12. Кратко дадим характеристику каждой системы.

В аналоговых САУ управляющие сигналы непрерывны во времени и могут быть постоянными, либо медленно меняющимися и переменными, несущими полезную информацию в величине, в знаке, в амплитуде, в частоте или в фазе управляющего сигнала (рис.13).

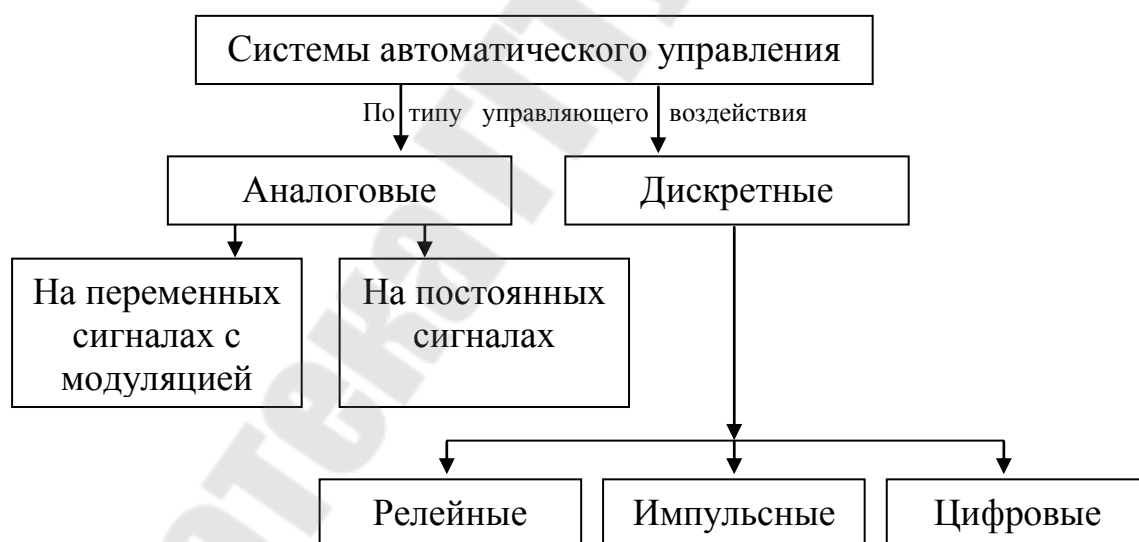


Рис.12. Классификация САУ по типу управляющего воздействия

В дискретных САУ управляющие сигналы прерывисты во времени (рис.14.)

В релейных САУ управляющее воздействие формируется с помощью, так называемых, релейных элементов. Релейный элемент - это переключающее устройство с двумя или более состояниями ус-

тойчивого равновесия. Одно состояние релейного элемента скачком сменяется другим состоянием под влиянием внешнего воздействия, например, изменения температуры, давления, электрического напряжения, освещенности, звука и т.д.

Таким образом, в этих САУ квантование сигнала (разбиение диапазона его изменения на конечное число интервалов) происходит только по уровню. На рис.15. показано как с помощью релейного элемента происходит преобразование аналогового сигнала управления в дискретный сигнал.

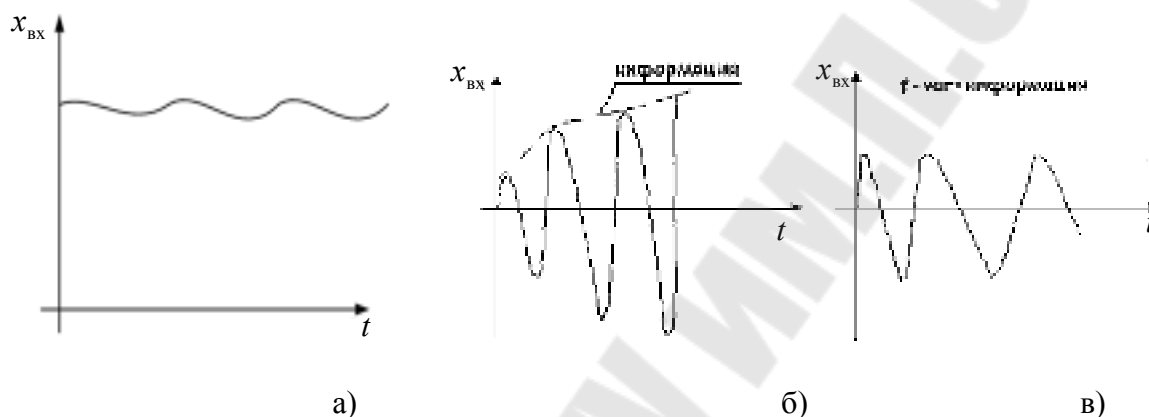


Рис.13. Аналоговые сигналы управления: постоянный а), переменные б) и в).

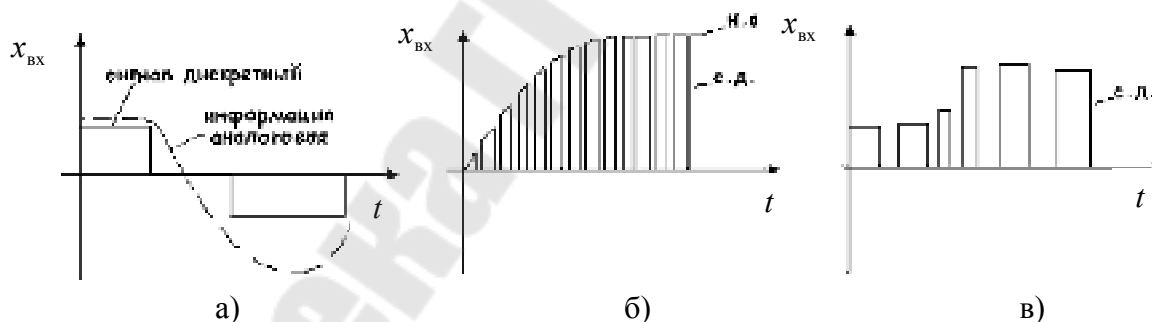


Рис.14. Дискретные сигналы управления: релейный а), импульсный (АИМ) б), цифровой в).

В импульсных САУ управляющее воздействие представляется в виде последовательности импульсов. Последовательность импульсов определяется такими параметрами как длительность импульса ($t_{и}$), период следования импульсов ($T_{и}$) и амплитуда импульсов ($U_{и}$). Таким образом, управляющий сигнал $x_{вх}$ может быть модулирован по ширине, частоте и амплитуде импульсов.

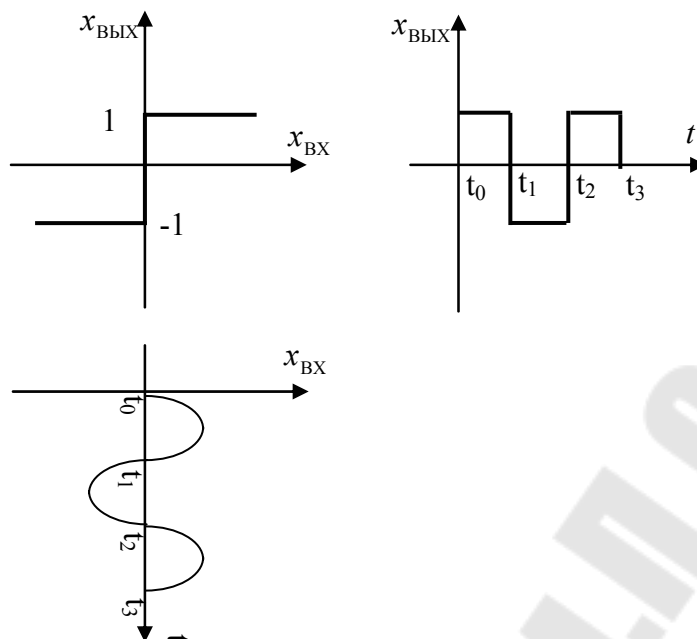


Рис.15. Иллюстрация принципа квантования аналогового синусоидального сигнала релейным элементом

В связи с этим различают:

- широтно-импульсную модуляцию (ШИМ)
($t_{и} = \text{var}, T_{и} = \text{const}, U_{и} = \text{const}$);
- частотно-импульсную модуляцию
($t_{и} = \text{const}, T_{и} = \text{var}, U_{и} = \text{const}$);
- амплитудно-импульсную модуляцию (рис.11.б.)
($t_{и} = \text{const}, T_{и} = \text{const}, U_{и} = \text{var}$).

В цифровых САУ управляющий сигнал может одновременно квантоваться и по уровню и по времени. Такое управление применяется для прецизионных (высокоточных) систем и для сложных объектов с меняющейся программой работы (рис. 14.в).

В.2.5. КЛАССИФИКАЦИЯ САУ ПО ТИПУ ВЫХОДНОГО СИГНАЛА

Данный подход к классификации основан на разновидностях законов воспроизведения выходным сигналом $x_{\text{ВЫХ}}$ входного управляющего воздействия $x_{\text{ВХ}}$. Классификация САУ по типу выходного сигнала приведена на рис.16.

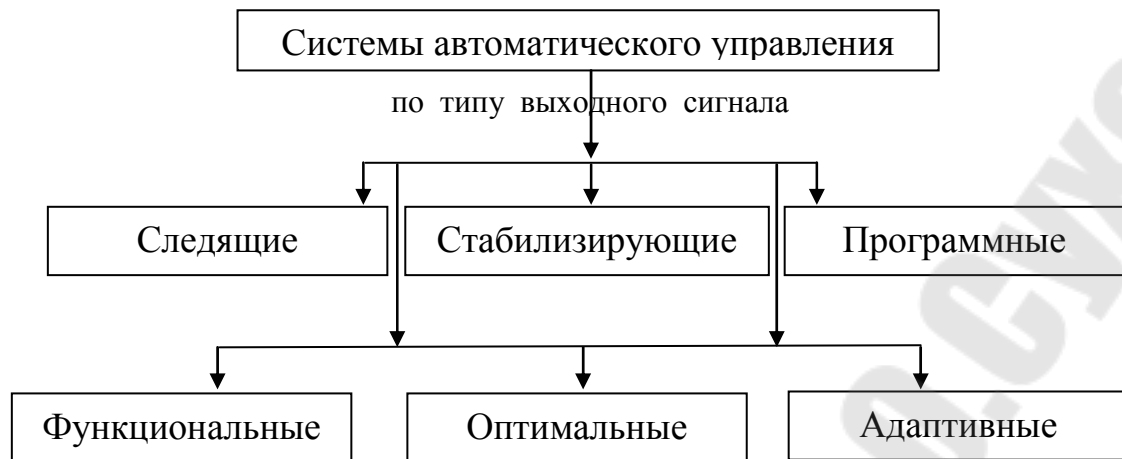


Рис. 16. Классификация САУ по типу выходного сигнала (по закону воспроизведения)

В стабилизирующих САУ $x_{\text{вых}}(t) \approx x_{\text{вх}}(t) = \text{const}$, в следящих САУ $x_{\text{вых}}(t) \approx x_{\text{вх}}(t) = \text{var}$, причем управляющий сигнал $x_{\text{вх}}$ здесь может меняться произвольным образом, в программных САУ $x_{\text{вых}}(t) \approx x_{\text{вх}}(t) = \text{var}$, при этом процесс регулирования происходит по жестко заданной программе.

В функциональных САУ сигналы $x_{\text{вых}}$ и $x_{\text{вх}}$ во времени также меняются произвольно, но между собой эти сигналы связаны заданной функциональной зависимостью. Например, $x_{\text{вых}} = a \cdot x_{\text{вх}}^2$.

В оптимальных (экстремальных) САУ $x_{\text{вых}}(t) \approx x_{\text{вх}}(t) = \text{var}$, но в процессе регулирования поддерживается оптимум по каким-либо техническим показателям (максимальная точность $\delta = \min$, наивысшее быстродействие $t_{\text{пер}} = \min$, минимальные потери $\Delta P = \min$, перегрев не выше допустимого $\Delta t_{\text{пер}} \leq [\Delta t_{\text{пер}}]$ и т.д.).

Адаптивные (самонастраивающиеся) САУ выполняют цель регулирования «подстраиваясь» (автоматически) под изменение условий работы или возмущающих воздействий за счет перестройки своих технических характеристик.

Например, системы автоматического управления большинства автоматизированных электроприводов на РУП «Белорусский металлургический завод» зарубежного исполнения. В соответствии с приведенной классификацией они выполнены по принципу регулирования по отклонению, имеют два контура регулирования по отклонению, построены на линейных и нелинейных элементах со стационарными параметрами, используют аналоговые управляющие сигналы

постоянного тока и предназначены для стабилизации частоты вращения электрических двигателей.

1. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА И СИНТЕЗА САУ

1.1. УСЛОВНО - ГРАФИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ САУ

САУ могут иметь самую различную физическую природу: электрическую, механическую, гидравлическую, оптическую и т.д. С целью обобщения и идеализации (исключение физической сущности), САУ представляют для анализа или синтеза условно графически в виде блок-схем, функциональных схем, принципиальных схем и структурных схем.

Блок-схема, функциональная и структурная схемы графически изображаются в виде квадратов, связанных стрелками.

Стрелки показывают направление передачи информации, а внутри квадратов кратко записывают название элементов САУ для блок-схем, функцию, исполняемую элементом, в функциональных схемах и передаточную функцию в структурных схемах.

Передаточной функцией называют отношение операторных изображений по Лапласу выходной и входной величин, описывающих данный элемент управления.

Блок-схема и функциональная схема САУ дают общее представление о построении и технической реализации системы управления.

Структурная схема САУ является предметом анализа и синтеза системы автоматического управления методами ТАУ!

Принципиальная схема САУ – это условно-графическое изображение системы управления в виде электрической (с элементами механики и гидравлики) схемы соединения деталей, узлов и частей элементов, представленных по ЕСКД. Принципиальная схема – это начальный продукт для анализа и конечный продукт в результате синтеза САУ.

Если необходим анализ (расчет) САУ, то по принципиальной схеме составляют структурную схему и далее используют методы анализа по теории автоматического управления. Если же проводится синтез САУ, то по рассчитанной структурной схеме составляют приемлемый для реализации вариант принципиальной схемы.

Пример 4. Рассмотрим примеры блок-схемы, функциональной и структурной схем одноконтурной системы автоматического управления постоянного тока с каналом обратной связи по угловой скорости.

Такой автоматизированный электропривод (рис.17) выполнен по принципу регулирования отклонения (принцип регулирования Ползунова - Уатта).

На блок-схеме (рис.17) обозначено:

ЗИ – задатчик интенсивности, предназначенный для плавкого пуска электродвигателя (ЭД) за счёт линейного нарастания сигнала задания $U_{зад}$ от нуля до заданного значения;

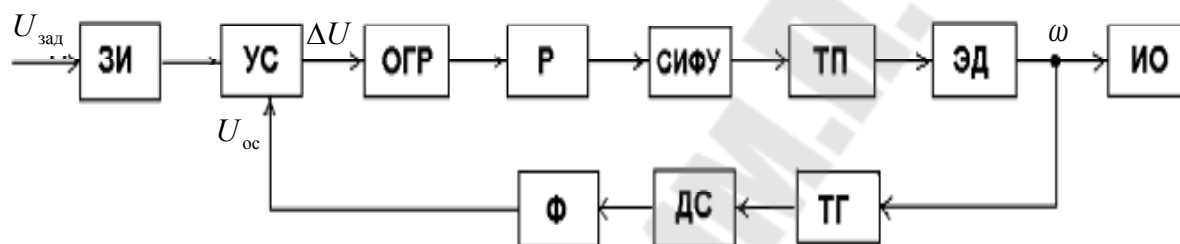


Рис.17. Блок-схема одноконтурной САУ постоянного тока с обратной связью по скорости

УС – устройство сравнения, вырабатывающее сигнал рассогласования: $\Delta U = U_{зад} - U_{ос}$;

ОГР – блок ограничения, обеспечивающий защиту системы управления при недопустимо больших сигналах рассогласования в «скачкообразных» режимах;

Р – автоматический регулятор, обеспечивающий заданные показатели качества процесса регулирования по точности, быстродействию, динамичности;

СИФУ – система импульсно-фазового управления тиристорно – транзисторным преобразователем;

ТП – тиристорно-транзисторный преобразователь переменного нерегулируемого напряжения сети в регулируемое постоянное напряжение для питания якорной обмотки электродвигателя;

ЭД – электродвигатель постоянного тока;

ТГ – тахогенератор, измеряющий частоту вращения (угловую скорость) электродвигателя и преобразующий ее в электрическое напряжение;

ДС – датчик скорости, выполняемый обычно в виде электронного блока, осуществляющего гальваническую развязку ТГ и УС и преобразования сигнала к удобному виду и величине;

Ф – электрический фильтр высокочастотных коллекторных пульсаций тахогенератора ТГ;

ИО – исполнительный орган рабочей машины (лента конвейера, крюк крана, шпиндель станка, кабина лифта и т.д.).

По блок-схеме (рис.17) можно составить функциональную схему (рис.18), в квадратах которой рисуются статические или динамические характеристики, которые дают представление о функции данного элемента САУ. Иногда в квадратах записываются функции буквенных обозначениях по ЕСКД.

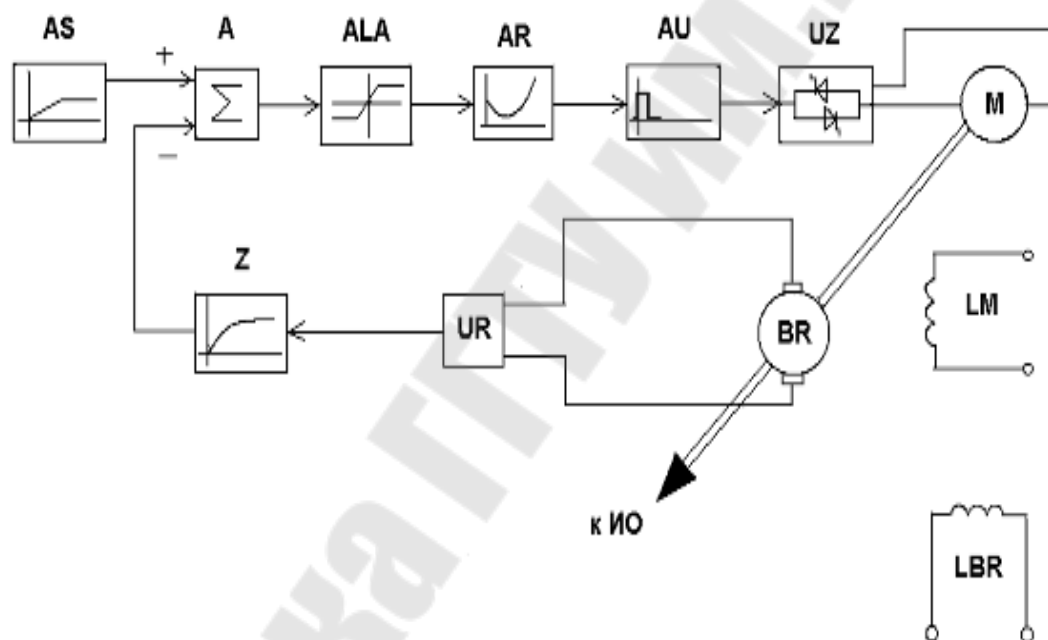
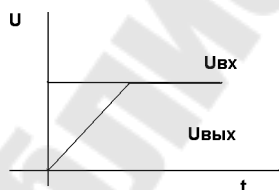
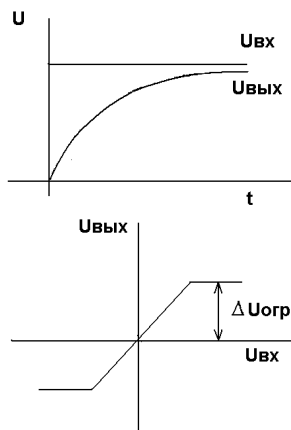


Рис. 18. Функциональная схема одноконтурной САУ постоянного тока по блок - схеме (рис.17)

В схеме использованы графические обозначения, например:



– переходная характеристика скорости;



– переходная характеристика фильтра;

– статическая характеристика ограничителя.

Кроме того, имеются и буквенные обозначения, в которых первые буквы означают:

А – аналоговый электронный блок, устройство;

В – преобразователь неэлектрических в электрические величины;

U – преобразователи электрических в электрические величины, а вторые:

А – ток;

U – напряжение;

Р – скорость.

И, наконец, по функциональной схеме (рис.18) можно составить структурную схему рассматриваемой САУ (рис.19).

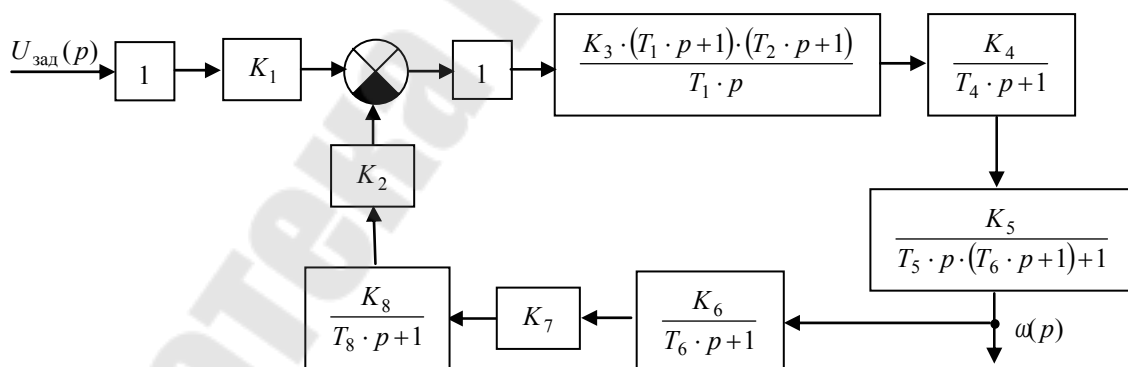


Рис. 19. Структурная схема одноконтурной САУ постоянного тока, составленная по функциональной схеме (рис.18)

На схеме обозначено:

1;1 – коэффициенты передачи задатчика интенсивности ЗИ и устройства ограничения ОГР;

$K_1; K_2$ – коэффициенты передачи устройства сравнения УС;

$K_3; T_1; T_2$ – коэффициент передачи и постоянные времени ПИД-регулятора (пропорционально – интегрально - дифференциального);

$K_4; T_4$ – коэффициент передачи и постоянная времени тиристорного преобразователя ТП;

$K_5; T_5; T_6$ – коэффициент передачи и постоянная времени электродвигателя ЭД;

$K_6; T_7$ – коэффициент передачи и постоянная времени тахогенератора;

K_7 – коэффициент передачи датчика скорости ДС;

$K_8; T_8$ – коэффициент передачи и постоянная времени фильтра Ф.

1.2. ОСНОВЫ ОПЕРАТОРНО-ЧАСТОТНОГО МЕТОДА АНАЛИЗА И СИНТЕЗА САУ

При исследовании систем автоматического управления в большинстве случаев приходится иметь дело с двумя типами задач.

Это задачи анализа и синтеза САУ!!!

Для их решения современная теория автоматического управления использует два различных подхода.

Первый подход основан на возможности описания САУ дифференциальными уравнениями первого порядка относительно, так называемых переменных состояния и дальнейшего использования этих уравнений. Метод, в котором применяется такой подход, носит название метода пространства состояний. Его можно использовать для исследования как линейных так и нелинейных САУ. Преимуществами его являются широкие возможности формализации процедур анализа САУ, которые позволяют сложные аналитические задачи решать при помощи современной компьютерной техники.

Второй подход сводится к составлению структурных схем и определению передаточных функций элементов и систем управления. Этот подход имеет ограничения в использовании при анализе и синтезе нелинейных элементов и систем управления, но очень удобен при исследовании линейных САУ. Метод, использующий этот подход, называется операторно-частотным методом, базирующимся на операторном преобразовании Лапласа.

В данном учебном пособии будут изложены основы операторно-частотного метода для решения задач анализа и синтеза линейных систем автоматического управления.

1.2.1. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ ЭЛЕМЕНТОВ УПРАВЛЕНИЯ САУ

Анализ и синтез САУ производят по математическим моделям с помощью различных методов, приемов, критериев и правил.

Наиболее распространёнными способами математического описания, используемыми при анализе и синтезе САУ, являются дифференциальные и матричные уравнения, а также структурные схемы, которые являются интерпретацией дифференциальных уравнений в операторной форме записи.

Любой физический процесс или техническое устройство (тепловой двигатель, электрический или гидравлический двигатель, механическая передача, электрическая цепь и т.д.) в общем случае описываются нелинейным дифференциальным уравнением или линейным нестационарным дифференциальным уравнением вида (9)

$$\begin{aligned} a_1(t) \cdot \frac{d^n x_{\text{ВЫХ}}}{dt^n} + a_2(t) \cdot \frac{d^{n-1} x_{\text{ВЫХ}}}{dt^{n-1}} + \dots + a_n \cdot x_{\text{ВЫХ}} = \\ = b_1(t) \cdot \frac{d^m x_{\text{ВХ}}}{dt^m} + \dots + b_m(t), \end{aligned} \quad (9)$$

где $a_1(t), a_2(t), \dots, a_n(t)$ – нестационарные коэффициенты дифференциального уравнения, определяющие основные параметры элемента управления;

$b_1(t), \dots, b_m(t)$ – нестационарные коэффициенты дифференциального уравнения, определяющие входные воздействия на элемент управления.

Анализ и синтез САУ по уравнениям такого вида довольно трудоемок, поэтому, когда это возможно, САУ или элементы управления, входящие в состав САУ, линеаризуют в пределах рабочей точки (рабочая точка определяется по статической характеристике элемента управления). В результате такой математической операции САУ или элемент САУ становится линейным с постоянными коэффициентами, а дифференциальное уравнение (9) примет вид

$$a_1 \cdot \frac{d^n x_{\text{ВЫХ}}}{dt^n} + a_2 \cdot \frac{d^{n-1} x_{\text{ВЫХ}}}{dt^{n-1}} + \dots + a_n \cdot x_{\text{ВЫХ}} = b_1 \cdot \frac{d^m x_{\text{ВХ}}}{dt^m} + \dots + b_m, \quad (10)$$

где a_1, a_2, \dots, a_n – постоянные коэффициенты дифференциального уравнения, определяющие основные параметры элемента управления после линеаризации;

b_1, \dots, b_m – постоянные коэффициенты дифференциального уравнения, определяющие входные воздействия на элемент управления после линеаризации.

Теперь к (10) уже можно применить операторное преобразование Лапласа, после чего (10) примет вид

$$A_1 \cdot p^n \cdot X_{\text{ВЫХ}}(p) + A_2 \cdot p^{n-1} \cdot X_{\text{ВЫХ}}(p) + \dots + A_n \cdot X_{\text{ВЫХ}}(p) = \\ = B_1 \cdot p^m X_{\text{ВХ}}(p) + \dots + B_m$$

или

$$W(p) = \frac{X_{\text{ВЫХ}}(p)}{X_{\text{ВХ}}(p)} = \frac{B_1 \cdot p^m + \dots + B_m}{A_1 \cdot p^n + A_2 \cdot p^{n-1} + \dots + A_n}. \quad (11)$$

Полученное выражение (11) представляет собой передаточную функцию элемента САУ.

Таким образом, многие физические процессы и технические устройства можно представить через передаточные функции $W(p)$, поэтому для анализа математической модели САУ необходимо четко знать и понимать, что собой представляют передаточные функции элементов системы управления и самой системы целиком.

Передаточная функция элемента САУ - это отношение операторного изображения выходного сигнала элемента системы к операторному изображению его входного сигнала.

Далее будем рассматривать только методы анализа и синтеза линейных и линеаризованных систем автоматического управления по структурным схемам.

Рассмотрим ряд примеров получения передаточных функций элементов систем управления.

Пример 5. Найти передаточную функцию регулятора САУ, построенного на операционном усилителе по схеме рис.20.

Используя метод узловых потенциалов, а также считая, что в идеальном операционном усилителе $R_{\text{ВХ}} \rightarrow \infty, R_{\text{ВЫХ}} \rightarrow 0, K_{\text{ОУ}} \rightarrow \infty$ получим систему уравнений в операторной форме, описывающую регулятор САУ (рис.20).

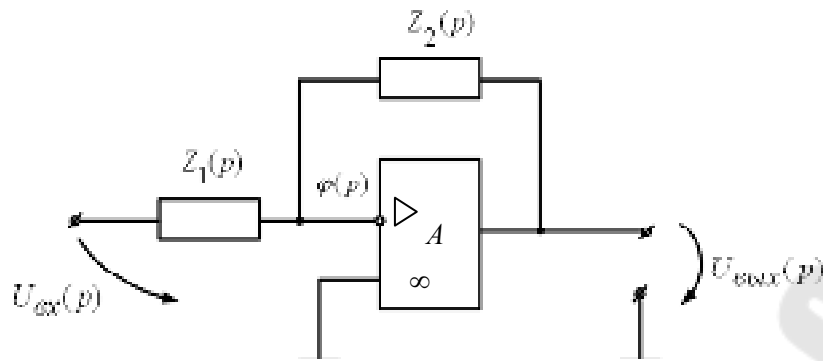


Рис.20. Электрическая схема регулятора САУ для примера 5

$$\begin{cases} \varphi(p) \cdot \left(\frac{1}{Z_1(p)} + \frac{1}{Z_2(p)} \right) - U_{\text{вых}}(p) \cdot \frac{1}{Z_2(p)} = \frac{U_{\text{вх}}(p)}{Z_1(p)}, \\ U_{\text{вых}}(p) = -K_{\text{оу}} \cdot \varphi(p). \end{cases} \quad (12)$$

где $Z_1(p)$, $Z_2(p)$ – операторные сопротивления (входное и обратной связи) соответственно.

Выражая из системы уравнений (12) отношение операторных изображений выходного напряжения $U_{\text{вых}}(p)$ к входному $U_{\text{вх}}(p)$, получим передаточную функцию регулятора в виде

$$W(p) = \frac{U_{\text{вых}}(p)}{U_{\text{вх}}(p)} = -\frac{Z_2(p)}{Z_1(p)}. \quad (13)$$

Пример 6. Найти передаточную функцию регулятора САУ, построенного на операционном усилителе по схеме рис.21, где имеются дополнительные операторные сопротивления делителя $Z_3(p)$ и $Z_4(p)$.

В соответствии с методом узловых потенциалов составим систему операторных уравнений, описывающих регулятор (рис.21)

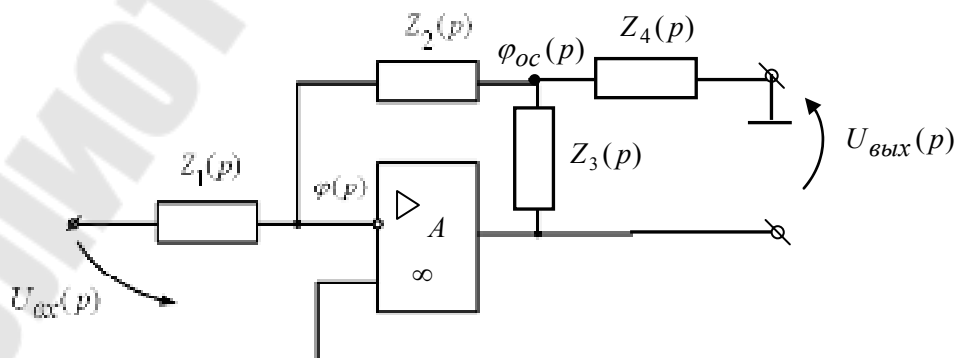


Рис.21. Электрическая схема регулятора САУ для примера 6

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(p) \cdot \left(\frac{1}{Z_1(p)} + \frac{1}{Z_2(p)} \right) - \varphi_{oc}(p) \cdot \frac{1}{Z_2(p)} - \\ - U_{\text{ВЫХ}}(p) \cdot \frac{1}{R_{\text{ВХ}}} = \frac{U_{\text{ВХ}}(p)}{Z_1(p)}, \\ \varphi_{oc}(p) \cdot \left(\frac{1}{Z_2(p)} + \frac{1}{Z_3(p)} + \frac{1}{Z_4(p)} \right) - \varphi(p) \cdot \frac{1}{Z_2(p)} - \\ - U_{\text{ВЫХ}}(p) \cdot \frac{1}{Z_3(p)} = 0, \\ U_{\text{ВЫХ}}(p) = -K_{oy} \cdot \varphi(p), \end{array} \right. \quad (14)$$

где $Z_1(p)$, $Z_2(p)$ – операторные сопротивления входное и обратной связи соответственно;

$Z_3(p)$, $Z_4(p)$ – операторные сопротивления делителя.

Из третьего уравнения системы (14) следует, что $\varphi(p) \rightarrow 0$ при $K_{oy} \rightarrow \infty$, тогда согласно первому уравнению системы (14) имеем

$$\varphi_{oc}(p) = -U_{\text{ВХ}}(p) \cdot \frac{Z_2(p)}{Z_1(p)}. \quad (15)$$

Подставим (15) во второе уравнение (14) и получим

$$-U_{\text{ВХ}}(p) \cdot \frac{Z_2(p)}{Z_1(p)} \cdot \left(\frac{1}{Z_2(p)} + \frac{1}{Z_3(p)} + \frac{1}{Z_4(p)} \right) = U_{\text{ВЫХ}}(p) \cdot \frac{1}{Z_3(p)}. \quad (16)$$

По (16) получим искомую передаточную функцию регулятора

$$W(p) = \frac{U_{\text{ВЫХ}}(p)}{U_{\text{ВХ}}(p)} = -\frac{Z_2(p)}{Z_1(p)} \cdot \left[1 + \frac{Z_3(p) \cdot (Z_2(p) + Z_4(p))}{Z_2(p) \cdot Z_4(p)} \right]. \quad (17)$$

В операционных усилителях обычно $|Z_2(p)| \gg |Z_3(p) + Z_4(p)|$, поэтому в расчетах можно использовать приближенное соотношение для передаточной функции (17) в виде (18)

$$W(p) \approx -\frac{Z_2(p)}{Z_1(p)} \cdot \left[1 + \frac{Z_3(p)}{Z_4(p)} \right]. \quad (18)$$

Пример 7. Используя, полученную в примере 5, формулу (13), найти передаточную функцию пропорционально-интегрального (ПИ) регулятора по схеме (рис.20), если $Z_1(p) = R_1$, а $Z_2(p) = R_2 + \frac{1}{C_2 \cdot p}$

По формуле (13) имеем

$$W(p) = -\frac{Z_2(p)}{Z_1(p)} = -\frac{R_2 + \frac{1}{C_2 \cdot p}}{R_1} = -\frac{R_2 \cdot C_2 \cdot p + 1}{R_1 \cdot C_2 \cdot p}. \quad (19)$$

Обозначим через $K = \frac{R_2}{R_1}$, а через $T = R_2 \cdot C_2$, тогда передаточная функция (19) примет вид

$$W(p) = \frac{K \cdot (T \cdot p + 1)}{T \cdot p},$$

где K, T – коэффициент передачи и постоянная времени регулятора.

Знак минус, в выражении (19) появляется технически из-за подачи входного сигнала $U_{\text{вх}}(p)$ на инверсный вход операционного усилителя и при аналитических расчетах его можно не учитывать (до реализации электронной схемы регулятора).

1.2.2. ОПЕРАТОРНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭЛЕКТРОДВИГАТЕЛЯ ПОСТОЯННОГО ТОКА НЕЗАВИСИМОГО ВОЗБУЖДЕНИЯ

Электродвигатель постоянного тока состоит из двух основных частей: индуктора (неподвижная часть) и якоря (вращающаяся часть).

Индуктор состоит из стального полого цилиндрического ярма, к которому изнутри прикреплены стальные полюса с обмоткой возбуждения. Обмотка возбуждения при протекании по ней тока создает основной магнитный поток электродвигателя.

Якорь состоит из цилиндрического сердечника, собранного из листов электротехнической стали, и закрепленной в пазах сердечника

обмотки якоря. Якорь располагается внутри индуктора в магнитном поле, создаваемом полюсами с обмоткой возбуждения. Поэтому при протекании тока по обмотке якоря возникают электромагнитные силы (по закону Ампера), которые, воздействуя на витки якорной обмотки, заставляют якорь вращаться и преодолевать момент нагрузки, приложенный к валу электродвигателя.

Мысленно выделим в электродвигателе три основных части: электрическую, магнитную и механическую (рис.22), при этом остальными частями пренебрежем. При составлении схем замещения будем пренебрегать также сопротивлением щеточно-коллекторного узла, ёмкостью обмоток, магнитными потоками рассеивания, действиями вихревых токов. Кроме того будем считать индуктивности обмоток машины постоянными, поскольку электродвигатель работает на линейном участке кривой намагничивания. В механической части будем учитывать только момент нагрузки от рабочей машины, остальными моментами трения пренебрежем. Кроме того, в механической части будем учитывать момент инерции якоря и нагрузки. Поскольку учитывается только линейная часть кривой намагничивания, то схема замещения магнитной цепи электродвигателя не потребуются.

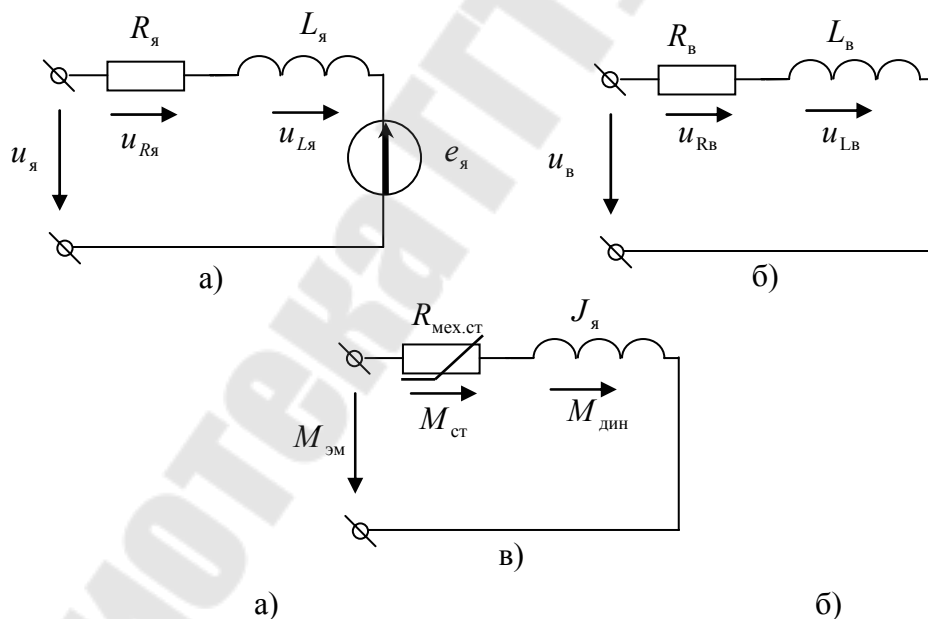


Рис.22. Схемы замещения обмотки якоря (а), обмотки возбуждения (б) и механической части (в) ДПТНВ

На схемах (рис.22) обозначено:

$u_я, i_я, u_в, i_в$ – напряжения и токи в обмотках якоря и возбуждения;

$R_{\text{я}}, R_{\text{в}}, L_{\text{я}}, L_{\text{в}}$ – активные сопротивления и индуктивности обмоток якоря и возбуждения;

$e_{\text{я}}$ – электродвижущая сила (ЭДС) якоря, возникающая в якорной обмотке по закону Фарадея из-за её вращения в магнитном поле;

$M_{\text{эм}}, \omega$ – электромагнитный момент и угловая скорость якоря электродвигателя;

$J_{\text{я}}$ – момент инерции якоря и нагрузки;

$R_{\text{мех.ст}}$ – механическое сопротивление сухого трения, создающее постоянный (статический) нагрузочный момент $M_{\text{ст}}$, не зависящий от угловой скорости ω якоря.

Составим систему дифференциальных уравнений по законам Кирхгофа и Ньютона

$$\begin{cases} u_{\text{я}} = u_{\text{Ря}} + u_{\text{Ля}} + e_{\text{я}}, \\ u_{\text{в}} = u_{\text{Рв}} + u_{\text{Лв}}, \\ M_{\text{эм}} = M_{\text{ст}} + M_{\text{дин}}. \end{cases}$$

Используя законы Ома и Фарадея, получим

$$\begin{cases} u_{\text{я}} = i_{\text{я}} \cdot R_{\text{я}} + L_{\text{я}} \cdot \frac{di_{\text{я}}}{dt} + e_{\text{я}}, \\ u_{\text{в}} = i_{\text{в}} \cdot R_{\text{в}} + L_{\text{в}} \cdot \frac{di_{\text{в}}}{dt}, \\ M_{\text{эм}} = M_{\text{ст}} + J_{\text{я}} \cdot \frac{d\omega}{dt}. \end{cases}$$

Данная система уравнений недостаточна, поскольку она имеет три уравнения для пяти неизвестных величин ($i_{\text{я}}, i_{\text{в}}, e_{\text{я}}, \omega, M_{\text{эм}}$) при трех заданных величинах ($u_{\text{я}}, u_{\text{в}}, M_{\text{ст}}$). Дополним эту систему уравнений двумя алгебраическими уравнениями, известными из теории электрических машин:

$e_{\text{я}} = K_{\text{Е}} \cdot \Phi_{\text{в}} \cdot \omega$ – ЭДС якорной обмотки электродвигателя;

$M_{\text{эм}} = K_{\text{Е}} \cdot \Phi_{\text{в}} \cdot i_{\text{я}}$ – электромагнитный момент электродвигателя;

$K_{\text{Е}}$ – конструктивная постоянная электродвигателя.

Тогда в целом математическая модель ДПТНВ примет следующий вид

$$\begin{cases} u_{\text{я}} = i_{\text{я}} \cdot R_{\text{я}} + L_{\text{я}} \cdot \frac{di_{\text{я}}}{dt} + e_{\text{я}}, \\ u_{\text{в}} = i_{\text{в}} \cdot R_{\text{в}} + L_{\text{в}} \cdot \frac{di_{\text{в}}}{dt}, \\ M_{\text{эм}} = M_{\text{ст}} + J_{\text{я}} \cdot \frac{d\omega}{dt}, \\ e_{\text{я}} = K_{\text{Е}} \cdot \Phi_{\text{в}} \cdot \omega, \\ M_{\text{эм}} = K_{\text{Е}} \cdot \Phi_{\text{в}} \cdot i_{\text{я}}. \end{cases} \quad (20)$$

Переходя к изображениям по Лапласу и преобразовывая, представим (20) в операторной форме

$$\begin{cases} I_{\text{я}}(p) = \frac{1/R_{\text{я}}}{T_{\text{я}} \cdot p + 1} \cdot (U_{\text{я}}(p) - L\{K_{\text{Е}} \cdot \Phi_{\text{в}} \times \omega\}), \\ I_{\text{в}}(p) = \frac{1/R_{\text{в}}}{T_{\text{в}} \cdot p + 1} \cdot U_{\text{в}}(p), \\ \omega(p) = \frac{1}{J \cdot p} \cdot (L\{K_{\text{Е}} \cdot \Phi \times i_{\text{я}}\} - M_{\text{с}}(p)), \end{cases} \quad (21)$$

где L – обозначение интегрального преобразования по Лапласу;

$T_{\text{в}} = \frac{L_{\text{в}}}{R_{\text{в}}}$ и $T_{\text{я}} = \frac{L_{\text{я}}}{R_{\text{я}}}$ – электромагнитные постоянные времени

цепей возбуждения и якоря соответственно.

Как видно из (21) математическая модель ДПТНВ имеет нелинейности в виде произведений переменных « $K_{\text{Е}} \cdot \Phi \times \omega$ » и « $K_{\text{Е}} \cdot \Phi \times i_{\text{я}}$ ». Использовать ее в таком виде для операторной модели не удобно, поэтому ее для решения задач анализа или синтеза либо линеаризуют в окрестностях рабочей точки, либо, если процессы в

САУ протекают при постоянстве магнитного потока электродвигателя $\Phi = \Phi_{BN} = const$ используют упрощенную математическую модель в виде

$$\begin{cases} I_{\text{я}}(p) = \frac{1/R_{\text{я}}}{T_{\text{я}} \cdot p + 1} \cdot (U_{\text{я}}(p) - K_{\text{Е}} \cdot \Phi_{\text{BN}} \cdot \omega(p)), \\ \omega(p) = \frac{1}{J \cdot p} \cdot (K_{\text{Е}} \cdot \Phi_{\text{BN}} \cdot I_{\text{я}}(p) - M_{\text{с}}(p)), \end{cases} \quad (22)$$

где Φ_{BN} – номинальный магнитный поток возбуждения.

По (22) видно, что математическая модель ДПТНВ по каналу якоря полностью линейна, а магнитный поток электродвигателя представляется как постоянная величина при операторных переменных.

Эта математическая модель далее будет использоваться для получения структурных схем и передаточных функций каналов ДПТНВ.

1.2.3. СТРУКТУРНЫЕ СХЕМЫ ЭЛЕКТРОДВИГАТЕЛЯ ПОСТОЯННОГО ТОКА НЕЗАВИСИМОГО ВОЗБУЖДЕНИЯ

Математическую модель (22) условно-графически можно представить в виде структурной схемы, которая изображается в виде прямоугольников с записанными внутри их передаточными функциями, соединенных стрелками, показывающих направление передачи информации или прохождения сигналов.

По определению передаточной функции (см. раздел 1.1.) графическое изображение (рис.23.а) означает аналитическую операцию масштабирования

$$X_{\text{ВЫХ}}(p) = W(p) \cdot X_{\text{ВХ}}(p).$$

Кроме того, в структурных схемах используются знаки суммирования (рис.23.б)

$$X_{\text{ВЫХ}}(p) = \pm X_{\text{ВХ1}}(p) \pm X_{\text{ВХ2}}(p),$$

и знаки съема информации (рис.23.в).

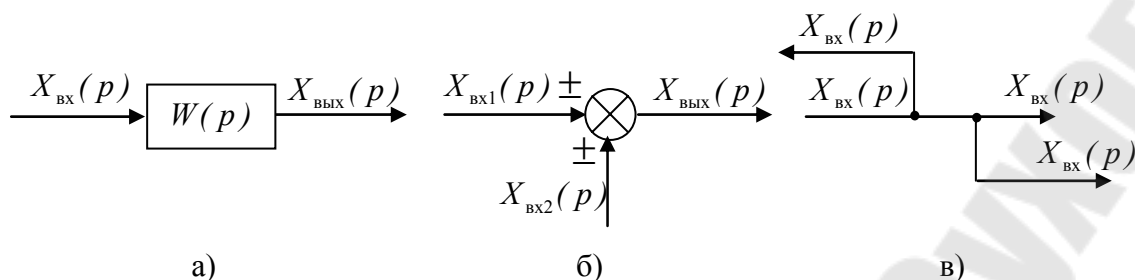


Рис.23. Элементы структурных схем для графического отображения математических моделей систем автоматического управления

Учитывая это, представим математическую модель (21) в виде структурной схемы, изображенной на рис.24. Как видно из схемы, ДПТНВ обладает двумя каналами управления. В динамических режимах каждый канал позволяет $M_{эм}$ и скорость ω регулировать момент электродвигателя.

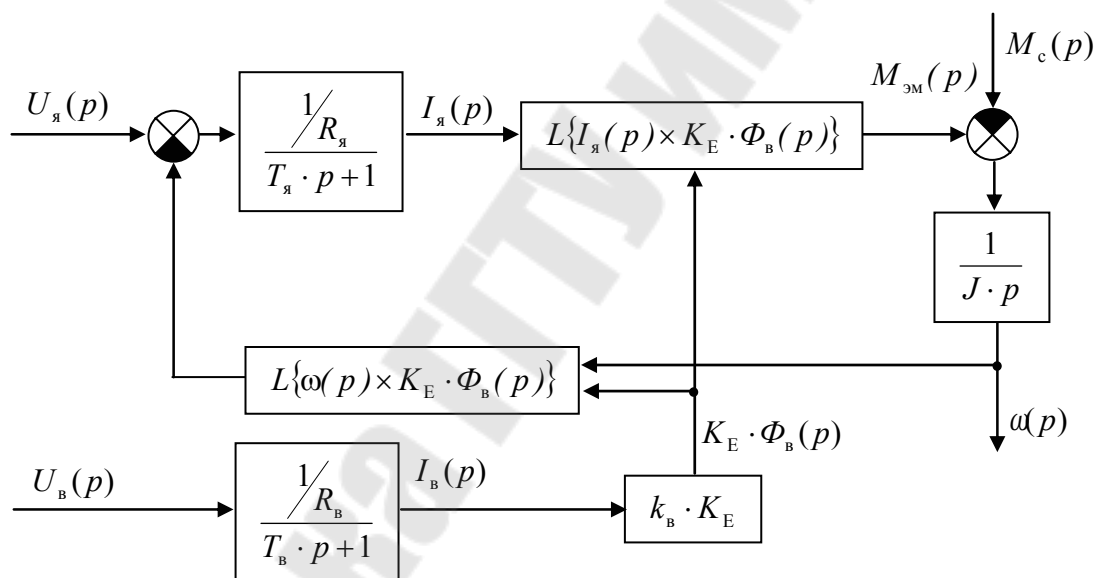


Рис.24. Полная структурная схема ДПТНВ

На структурной схеме (рис.24) обозначено:

$k_в$ – коэффициент пропорциональности между током возбуждения и потоком возбуждения электродвигателя, определяемый по кривой намагничивания.

Согласно (22), для режимов $\Phi = \Phi_{вN} = const$ структурная схема ДПТНВ упрощается и принимает вид, представленный на рис.25.а.

Используя понятие электрохимической постоянной времени:
 $T_{эм} = \frac{J \cdot R_я}{(k \cdot \Phi)^2}$ и представляя статический ток нагрузки по закону

Ампера в виде $I_c(p) = \frac{M_c(p)}{K_E \cdot \Phi_{вн}}$, структурную схему (рис.25.а) можно

представить в виде, показанном на рис.25.б.

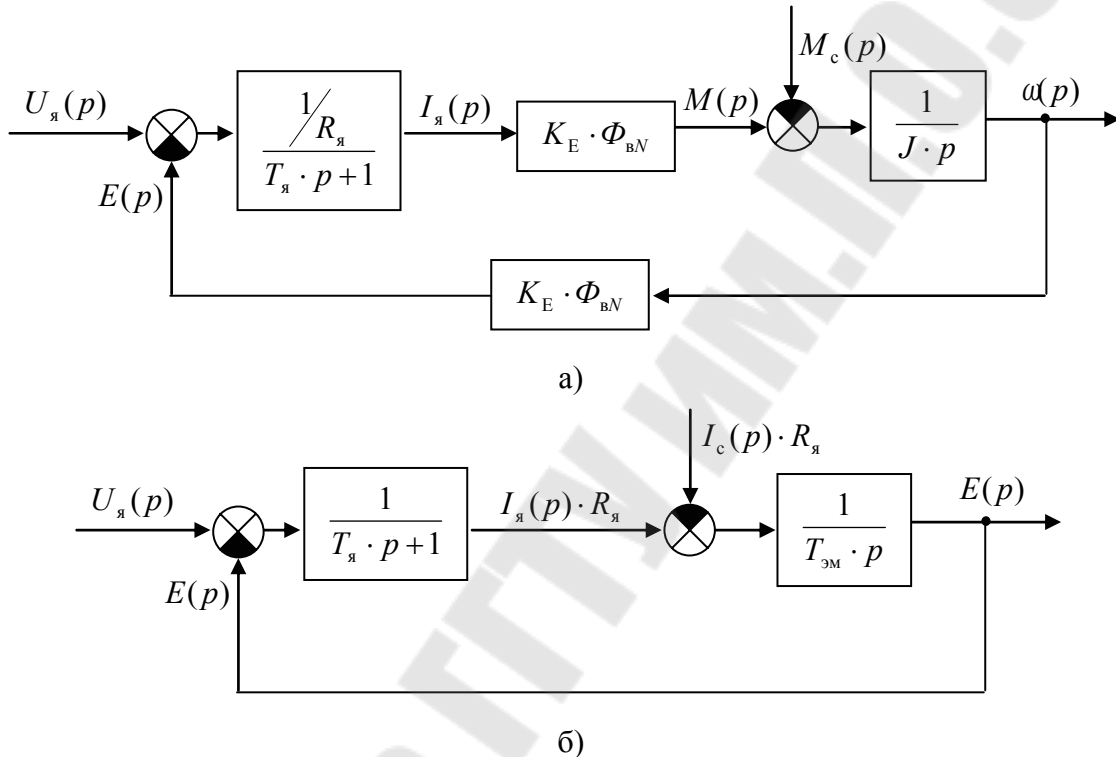


Рис.25. Структурные схемы ДПТНВ при постоянстве магнитного потока возбуждения $\Phi = \Phi_{вн} = const$

Таким образом, по структурным схемам электродвигателя постоянного тока независимого возбуждения (рис.24 - рис.25) видно, что он представляет собой систему с внутренней обратной связью по скоростной ЭДС E , причем она здесь выполняет функцию **внутреннего автоматического регулятора**.

Например, при увеличении нагрузки на валу с $M_1 = M_{с1}$ до $M_2 = M_{с2}$ скорость электродвигателя начнет снижаться, значит и уменьшится и ЭДС $e_я$, следовательно, вырастет ток $i_я$, обусловив тем самым рост электромагнитного момента $M_{эм}$. Таким образом, электродвигатель самостоятельно, без каких-либо внешних воздействий перейдет в новое установившееся состояние.

1.3. СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ САУ

Каждый элемент управления, входящий в состав САУ (усилитель мощности, регулятор, датчик скорости, электродвигатель, гидродвигатель и т.д.) представляется определенным типом динамического звена или их определенного соединения (параллельного, последовательного и т.д.), поэтому САУ в целом можно рассматривать как комбинацию типовых динамических звеньев (п.1.4).

Изображение системы управления в виде совокупности типовых и нетиповых динамических звеньев с указанием связей между ними носит название структурной схемы системы. Звено в этом случае выступает как элементарная структурная единица, преобразователь информации.

Структурный анализ САУ позволяет изучить влияние звеньев и их соединений на свойства всей САУ в целом, путем определения и исследования ее передаточной функции.

Структурная схема обычно составляется на основе анализа блок-схемы или функциональной схемы САУ по следующему алгоритму (см. раздел 1.2.2):

1. По блок-схеме или функциональной схеме САУ составляют уравнения связи отдельных элементов САУ;
2. Переходят от полученных уравнений связи к уравнениям связи в форме преобразования Лапласа при нулевых начальных условиях;
3. Решают каждое уравнение относительно изображения выходной величины и строят по ним структурные схемы отдельных элементов;
4. Соединяют построенные схемы между собой в соответствии с прохождением сигналов и окончательно получают искомую структурную схему системы (см. например математическую модель (22) и структурные схемы на рис.24 - рис.25).

Динамические звенья на схеме обозначаются в виде прямоугольника с указанием входной и выходной величин в операторной форме. Внутри прямоугольника записывается передаточная функция. Точки, от которых сигналы начинают проходить по двум или нескольким направлениям, называются точками съема. Суммирование сигнала обозначается сумматором. Связи между звеньями, а также между звеньями и сумматорами изображаются сплошными линиями со стрелками, указывающими направление передачи воздействий.

Рассмотрим основные типы соединений динамических звеньев.

Последовательное соединение звеньев.

Такое соединение изображено на рис.26. Оно характеризуется тем, что выход предыдущего звена подается на вход последующего без точки съема.

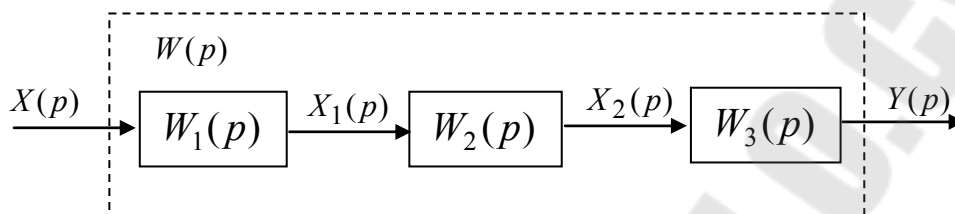


Рис.26. Последовательное соединение динамических звеньев

По рис.26 можно записать следующее соотношение, основываясь на понятии «передаточная функция»

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{X_1(p)}{X(p)} \cdot \frac{X_2(p)}{X_1(p)} \cdot \frac{Y(p)}{X_2(p)} = W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot W_3(p).$$

Таким образом, передаточная функция последовательного соединения звеньев равна произведению передаточных функций звеньев, входящих в это соединение. Это правило преобразований справедливо для соединения любого числа динамических звеньев.

Параллельное соединение звеньев.

Это соединение изображено на рис.27. При таком соединении на вход всех звеньев подается одновременно один и тот же входной сигнал, а выходные сигналы этих звеньев алгебраически суммируются, образуя общую выходную величину.

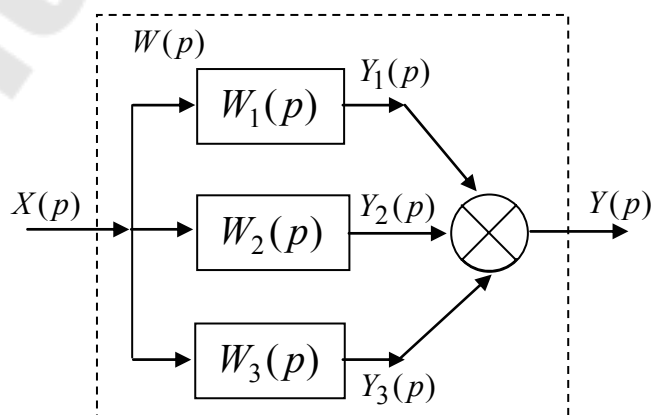


Рис.27. Параллельное соединение динамических звеньев

По рис.27 можно записать следующее соотношение

$$W(p) = \frac{Y_1(p) + Y_2(p) + Y_3(p)}{X(p)} = \frac{Y_1(p)}{X(p)} + \frac{Y_2(p)}{X(p)} + \frac{Y_3(p)}{X(p)} =$$

$$= W_1(p) + W_2(p) + W_3(p).$$

Таким образом, передаточная функция параллельного соединения звеньев равна алгебраической сумме передаточных функций звеньев, входящих в это соединение. Это правило преобразований справедливо для соединения любого числа динамических звеньев.

Звено с обратной связью.

Звено с обратной связью изображено на рис.28. Здесь выход звена соединяется с его входом через звено с передаточной функцией $W_{oc}(p)$, в результате чего образуется замкнутый контур передачи воздействий. Обратная связь может быть положительной, если сигнал $Y_1(p)$, снимаемый с выхода второго звена, суммируется с сигналом $X(p)$ на входе, и отрицательной (ООС), если $Y_1(p)$ вычитается.

По рис.28. можно составить следующую систему уравнений

$$\begin{cases} \Delta X(p) = X(p) \pm Y_1(p), \\ Y_1(p) = Y(p) \cdot W_{oc}(p), \\ Y(p) = \Delta X(p) \cdot W_{пк}(p). \end{cases}$$

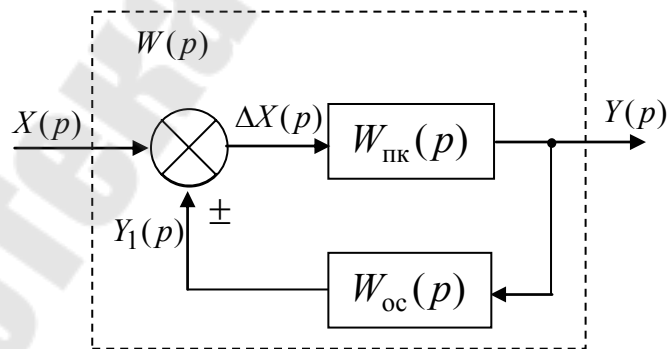


Рис.28. Динамическое звено с обратной связью

Решая эту систему уравнений относительно сигналов $X(p)$ и $Y(p)$, получим передаточную функцию для звена с обратной связью

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{W_{\text{пк}}(p)}{1 \pm W_{\text{пк}}(p) \cdot W_{\text{ос}}(p)}. \quad (23)$$

Знак «минус» в (23) соответствует положительной обратной связи, а знак «плюс» отрицательной.

В общем случае, сложная цепь динамических звеньев, образующих САУ, включает в себя комбинации всех трех рассмотренных случаев, т.е. представляет собой смешанное соединение звеньев.

В тех случаях, когда структурная схема системы оказывается сложной и содержит перекрестные связи, ее упрощают и сводят к простейшему эквивалентному виду, пользуясь правилами преобразования структурных схем.

Основные правила структурных преобразований, включая и рассмотренные выше, сведены в таблицу 1.

Пример 8. Рассмотрим пример применения правил структурных преобразований для определения передаточной функции канала «момент-скорость» ДПТНВ $W(p) = \frac{\omega(p)}{M_c(p)}$, используя структурную схему, представленную на рис.25.а.

Для этого изобразим структурную схему ДПТНВ (рис.25.а) в виде, представленном на рис.29, имея в виду, что из-за отсутствия отклонения сигнал $U_y(p) = 0$, и используя правило структурных преобразований для последовательного соединения динамических звеньев, найдем передаточную функцию обратной связи

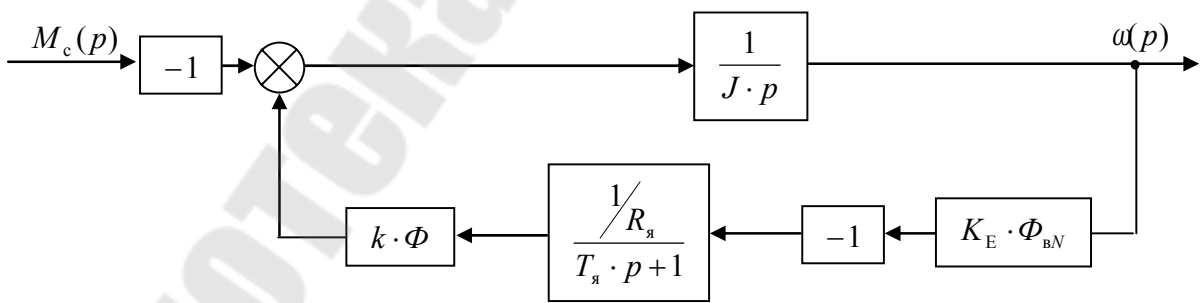
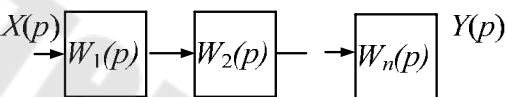
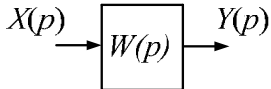
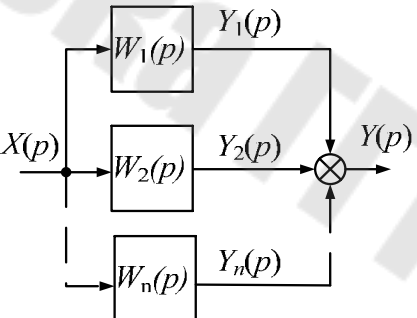
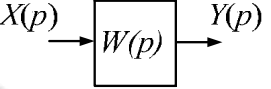
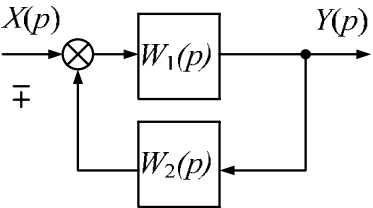
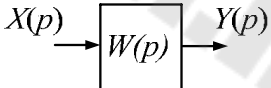
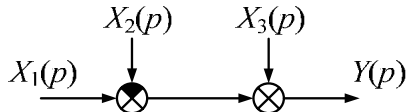
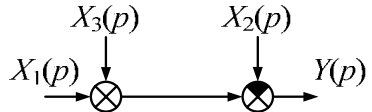


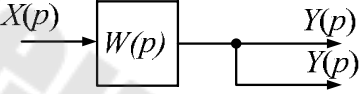
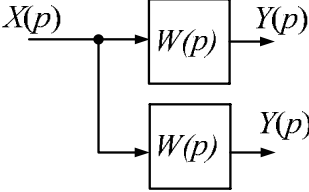
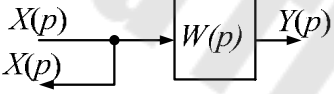
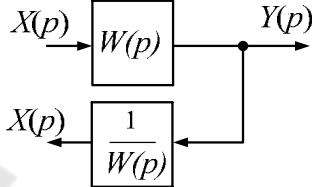
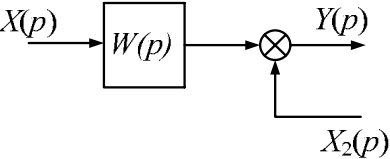
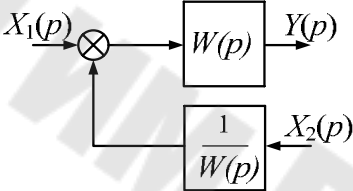
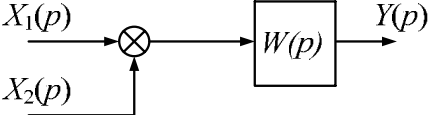
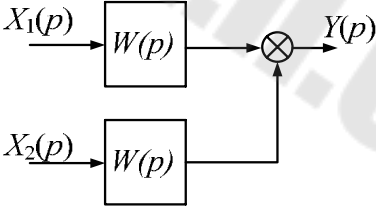
Рис.29. Структурная схема канала «момент-скорость» ДПТНВ

$$W_{\text{ос}}(p) = K_E \cdot \Phi_{\text{BN}} \cdot (-1) \cdot \frac{1/R_{\text{я}}}{T_{\text{я}} \cdot p + 1} \cdot K_E \cdot \Phi_{\text{BN}} = - \frac{(K_E \cdot \Phi_{\text{BN}})^2 / R_{\text{я}}}{T_{\text{я}} \cdot p + 1} \quad (24)$$

Таблица 1

Правила структурных преобразований

№ п/п	Название операции	Исходная схема	Преобразованная схема	Уравнение
1	Объединение последовательно соединенных звеньев			$W(p) = \prod_{i=1}^n W_i(p)$
2	Объединение параллельно соединенных звеньев			$W(p) = \sum_{i=1}^n W_i(p)$
3	Объединение замкнутого контура			$W(p) = \frac{W_1(p)}{1 \pm W_1(p) \cdot W_2(p)}$
4	Перестановка сумматоров			$Y(p) = X_1(p) - X_2(p) + X_3(p)$

№ п/п	Название операции	Исходная схема	Преобразованная схема	Уравнение
5	Перенос точки съема через звено на его вход			$Y(p) = X(p) \cdot W(p)$
6	Перенос точки съема через звено на его выход			$X(p) = Y(p) \cdot \frac{1}{W(p)}$
7	Перенос сумматора через звено на его вход			$Y(p) = X_1(p) \cdot W(p) + X_2(p)$
8	Перенос сумматора через звено на его выход			$Y(p) = [X_1(p) + X_2(p)] \cdot W(p)$

Теперь, с учетом (24) структурная схема рассматриваемого канала (рис.29) станет компактней и примет вид, представленный на рис.30.

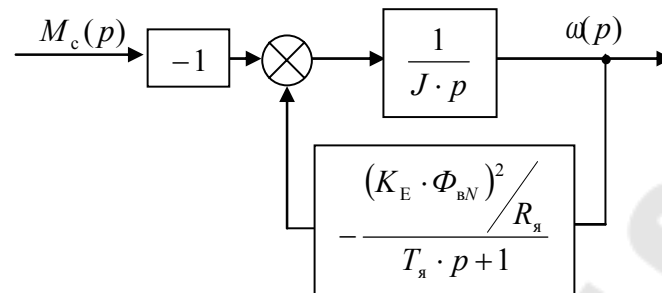


Рис.30. Преобразованная структурная схема канала «момент-скорость» ДПТНВ по рис.29

Далее, сначала используем правило объединения замкнутого контура, а затем последовательного соединения звеньев получим искомую передаточную функцию в виде (25)

$$\begin{aligned}
 W(p) = \frac{\omega(p)}{M_c(p)} &= (-1) \cdot \frac{1/J_я \cdot p}{1 - \frac{1}{J_я \cdot p} \cdot \left(\frac{(K_E \cdot \Phi_{BN})^2 / R_я}{T_я \cdot p + 1} \right)} = \\
 &= -\frac{K \cdot (T_я \cdot p + 1)}{T_{эм} \cdot p \cdot (T_я \cdot p + 1) + 1}, \quad (25)
 \end{aligned}$$

где $K = \frac{R_я}{(K_E \cdot \Phi_{BN})^2}$ – коэффициент передачи канала «момент-скорость».

1.4. МЕТОД ДИНАМИЧЕСКИХ ЗВЕНЬЕВ

Динамическим звеном называются элементы или части элементов САУ любой физической природы и конструкции, описываемые дифференциальным уравнением одного конкретного вида, то есть имеющие одну и ту же передаточную функцию.

Обзор реальных элементов показывает, что большинство из них описывается однотипными передаточными функциями, например:

$$W_1(p) = \frac{K}{T \cdot p + 1}; \quad W_2(p) = \frac{K}{T_1 \cdot T_2 \cdot p^2 + T_2 \cdot p + 1}; \quad W_3(p) = T \cdot p + 1$$

и т. д.

Это и есть динамические звенья!!!

Метод динамических звеньев заключается в том, что расчет или синтез САУ по любой структурной схеме сводится к анализу или синтезу ее операторно-частотных характеристик через подобные характеристики динамических звеньев.

1.4.1. ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗВЕНЬЕВ САУ

Статические характеристики

Статические характеристики – это зависимости выходной величины $x_{\text{ВЫХ}}(t)$ от входной $x_{\text{ВХ}}(t)$ в установившемся режиме.

В качестве типовых воздействий используют постоянные

$$x_{\text{ВХ}}(t) = X_0 \cdot 1(t),$$

или гармонические

$$x_{\text{ВХ}}(t) = X_m \sin(\omega \cdot t + \psi)$$

входные сигналы.

В первом случае статическая характеристика определяется как

$$x_{\text{ВЫХ}}(x_{\text{ВХ}}) = x_{\text{ВЫХ}}(x_{\text{ВХ}}(t)) \Big|_{t \rightarrow \infty},$$

а во втором случае статическую характеристику называют частотной и различают следующие ее разновидности:

1. Амплитудно-фазочастотная характеристика (АФЧХ) — это зависимость отношения комплексного изображения выходной величины $x_{\text{ВЫХ}}(j\omega)$ к комплексному изображению входной $x_{\text{ВХ}}(j\omega)$ от изменения частоты входного сигнала ω ;

2. Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) – это зависимость отношения амплитуды выходного сигнала $x_{\text{ВЫХ}.m}(\omega)$ к амплитуде входного $x_{\text{ВХ}.m}(\omega)$ от изменения его частоты ω ;

3. Фазо-частотная характеристика (ФЧХ) – это зависимость сдвига фазы выходного сигнала $\varphi_{\text{ВЫХ}}(\omega)$ по отношению к входному $\varphi_{\text{ВХ}}(\omega)$ от изменения его частоты ω ;

4. Вещественно-частотная характеристика (ВЧХ) – это вещественная часть А.Ф.Ч.Х.;

5. Мнимо-частотная характеристика (МЧХ) – это мнимая часть А.Ф.Ч.Х.

Частотные характеристики получили свое название в зависимости от математических операций с АФЧХ.

Если, например, комплексные изображения входного и выходного сигналов соответственно равны

$$x_{\text{ВХ}}(j\omega) = x_{\text{ВХ}.m}(\omega) \cdot e^{j\varphi_{\text{ВХ}}(\omega)}$$

и

$$x_{\text{ВЫХ}}(j\omega) = x_{\text{ВЫХ}.m}(\omega) \cdot e^{j\varphi_{\text{ВЫХ}}(\omega)},$$

то АФЧХ будет определяться как

$$W(j\omega) = \frac{x_{\text{ВЫХ}}(j\omega)}{x_{\text{ВХ}}(j\omega)} = \frac{x_{\text{ВЫХ}.m}(\omega)}{x_{\text{ВХ}.m}(\omega)} e^{j(\varphi_{\text{ВЫХ}}(\omega) - \varphi_{\text{ВХ}}(\omega))}. \quad (26)$$

Значит АЧХ, ФЧХ, ВЧХ, МЧХ равны соответственно

$$A(\omega) = \text{mod}[W(j\omega)] = \frac{x_{\text{ВЫХ}.m}(\omega)}{x_{\text{ВХ}.m}(\omega)}; \quad (27)$$

$$\varphi(\omega) = \text{arg}[W(j\omega)] = \varphi_{\text{ВЫХ}}(\omega) - \varphi_{\text{ВХ}}(\omega); \quad (28)$$

$$P(\omega) = \text{Re}[W(j\omega)] = A(\omega) \cdot \cos \varphi(\omega); \quad (29)$$

$$Q(\omega) = \text{Im}[W(j\omega)] = A(\omega) \cdot \sin \varphi(\omega). \quad (30)$$

АЧХ и ФЧХ связаны с ВЧХ и МЧХ следующими соотношениями

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}; \quad (31)$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}. \quad (32)$$

АФЧХ, соответствующая выражению (26), носит название частотной передаточной функции. Частотную передаточную функцию $W(j\omega)$ нетрудно получить из передаточной функции по Лапласу $W(p)$, если использовать мнемоническое правило

$$W(j\omega) = W(p) \Big|_{p=j\omega}, \quad (33)$$

т.е. в передаточной функции по Лапласу $W(p)$ переменную p нужно заменить на мнимо-частотную переменную $j\omega$.

Пример 9. Найти все частотные характеристики динамического звена, представленного передаточной функцией

$$W(p) = \frac{2}{4 \cdot p + 1}.$$

Используя (33) амплитудно-фазочастотную характеристику можно записать в виде

$$W(j\omega) = \frac{2}{4 \cdot j\omega + 1}. \quad (34)$$

Умножим числитель и знаменатель (34) на сопряженное знаменателю комплексное выражение « $1 - j4 \cdot \omega$ »

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= \frac{2 \cdot (1 - j4 \cdot \omega)}{(1 + j4 \cdot \omega) \cdot (1 - j4 \cdot \omega)} = \frac{2 - j8 \cdot \omega}{1 + 16 \cdot \omega^2} = \\ &= \frac{2}{1 + 16 \cdot \omega^2} - j \frac{8 \cdot \omega}{1 + 16 \cdot \omega^2}. \end{aligned} \quad (35)$$

Так как $W(j\omega) = P(\omega) + j\psi(\omega)$, то из (35) следует

$$\begin{aligned} P(\omega) &= \frac{2}{1 + 16 \cdot \omega^2} - \text{вещественно-частотная характеристика,} \\ Q(\omega) &= \frac{8 \cdot \omega}{1 + 16 \cdot \omega^2} - \text{мнимо-частотная характеристика.} \end{aligned}$$

Для определения АЧХ и ФЧХ воспользуемся соотношениями (31) и (32)

$$A(\omega) = \sqrt{\frac{4 + 64 \cdot \omega^2}{(1 + 16 \cdot \omega^2)^2}} = 2 \sqrt{\frac{(1 + 16 \cdot \omega^2)}{(1 + 16 \cdot \omega^2)^2}} = \frac{2}{\sqrt{1 + 16 \cdot \omega^2}} - \text{амплитудно-}$$

но-частотная характеристика;

$$\varphi(\omega) = -\arctg \frac{\frac{8 \cdot \omega}{1 + 16 \cdot \omega^2}}{\frac{2}{1 + 16 \cdot \omega^2}} = -\arctg(4 \cdot \omega) - \text{фазо-частотная характе-}$$

ристика.

Пример 10. Определить сигнал на выходе САУ (рис.31) по известному входному сигналу $x_{\text{ВХ}}(t) = 2 \cdot \sin(10 \cdot t)$, и передаточной функции системы $W(p) = \frac{4}{0.1 \cdot p + 1}$.

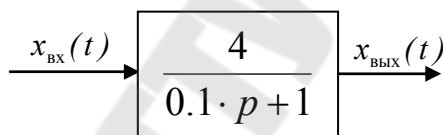


Рис.31. Структурная схема к примеру 10

При воздействии гармонического входного сигнала $x_{\text{ВХ}}(t)$ на САУ выходной сигнал $x_{\text{ВЫХ}}(t)$ по истечении времени переходного процесса (в установившемся режиме) также будет гармоническим, но отличающимся от входного амплитудой и фазой

$$\begin{aligned} x_{\text{ВЫХ}}(t) &= x_{\text{ВЫХ}m} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_{\text{ВЫХ}}) = \\ &= A(\omega) \cdot x_{\text{ВХ}m} \cdot \sin(\omega \cdot t + (\varphi_{\text{ВХ}} + \varphi(\omega))). \end{aligned} \quad (36)$$

Следовательно, для определения $x_{\text{ВЫХ}}(t)$ необходимо найти $A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$.

По передаточной функции $W(p)$ найдем

$$A(\omega) = \frac{4}{\sqrt{(0.1 \cdot \omega)^2 + 1}} \text{ и } \varphi(\omega) = -\arctg(0.1 \cdot \omega).$$

На частоте $\omega = 10 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ АЧХ и ФЧХ соответственно равны

$$A(\omega) = \frac{4}{\sqrt{2}}, \quad \varphi(\omega) = -45^\circ.$$

Таким образом, согласно (36)

$$x_{\text{вых}}(t) = \frac{8}{\sqrt{2}} \sin(10 \cdot t - 45^\circ).$$

Как видно из рассмотренных примеров, частотные характеристики представляют собой довольно сложные нелинейные выражения, которые построить без применения вычислительной техники затруднительно, поэтому для практических целей (при решении задач анализа и синтеза САУ) наиболее часто используется представление $A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ на логарифмической плоскости.

Главным достоинством логарифмических частотных характеристик является возможность построения их во многих случаях практически без вычислительной работы.

Для построения логарифмической амплитудно-частотной характеристики (ЛАЧХ) находится величина

$$L(\omega) = 20 \cdot \lg|W(j\omega)| = 20 \cdot \lg[A(\omega)]. \quad (37)$$

Эта величина выражается в децибелах. Бел представляет собой логарифмическую единицу, соответствующую десятикратному увеличению мощности между «входом» и «выходом»

$$1 \text{ Бел} = \lg\left(\frac{P_2}{P_1}\right),$$

где P_1, P_2 – входная и выходная мощность соответственно.

Эта логарифмическая величина названа по имени изобретателя телефона американца шотландского происхождения А.Г. Белла. Например, один бел соответствует увеличению мощности в 10 раз, а 2 бела - уже в 100 раз и т.д.

Но для выражения отношения амплитуд двух физических величин, не связанных с мощностью (входных и выходных перемещений, скоростей, напряжений, токов и т.д.) Бел определяется уже по формуле

$$1 \text{ Бел} = 2 \cdot \lg \left(\frac{x_{\text{ВЫХ.}m}(\omega)}{x_{\text{ВХ.}m}(\omega)} \right),$$

Децибел равен одной десятой части бела, поэтому в правой части (37) стоит множитель 20. Один децибел соответствует изменению амплитуды выходного сигнала в $\sqrt[20]{10}$, то есть представляет собой сравнительно малую величину.

Динамические (временные) характеристики.

Динамические характеристики - это зависимости выходной величины от времени в переходном режиме при действии внешнего входного воздействия.

В качестве типовых входных воздействий используют скачок постоянного входного сигнала (рис.32.а), который задается через единичную функцию $1(t)$ и сигнал в виде импульса (рис.32.б), который задается через дельта-функцию $\delta(t)$.

В первом случае динамическая характеристика называется переходной $h(t)$, а во втором – весовой функцией $w(t)$.

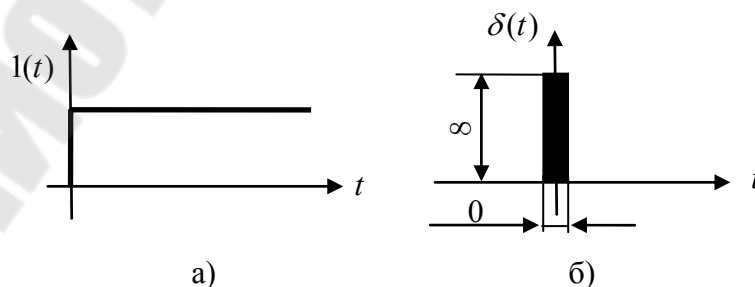


Рис.32. Графическое представление единичной функции (а) и дельта функции (б)

Единичная функция $1(t)$ и дельта функция $\delta(t)$ связаны между собой соотношением

$$\delta(t) = \frac{d}{dt}(1(t)).$$

Ступенчатая функция $1(t)$ представляет собой распространенный вид входного воздействия в САУ. К такому виду сводится, например, типовое изменение нагрузки на валу двигателя, мгновенный поворот входного вала следящей системы и т.д.

Основное свойство импульсной функции $\delta(t)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1,$$

т.е. она представляет собой импульс с бесконечно большой амплитудой и бесконечно малой шириной, но занимает единичную площадь (рис.32.б).

Импульсная функция $\delta(t)$, также представляет собой часто встречающийся вид входного воздействия в САУ. К такому виду можно свести, некоторые аварийные режимы, такие как, например, кратковременный удар нагрузки на валу двигателя, кратковременный ток короткого замыкания, отключаемый плавкими вставками предохранителей.

В действительности реальные импульсные воздействия всегда конечны по величине и продолжительности, но их продолжительность всегда незначительна по сравнению со временем переходного процесса, а величина бросков значительно выше номинальных значений. Поэтому с большой степенью точности реальный импульс может быть заменен своей идеализированной математической моделью - дельта-функцией $\delta(t)$.

Между статическими и динамическими характеристиками имеются взаимосвязи, определяемые через передаточную функцию $W(p)$. Приведем их в виде соотношений:

1. Передаточная функция

$$W(p) = \frac{X_{\text{вых}}(p)}{X_{\text{вх}}(p)}$$

следует из дифференциального уравнения при нулевых начальных условиях формальной заменой $\frac{d}{dt} \rightarrow p$;

2. АФЧХ получается из передаточной функции $W(p)$ путем замены комплексной переменной p на мнимо-частотную переменную $j\omega$;

3. Статическая характеристика $X_{\text{вых}}(X_{\text{вх}})$ получается из передаточной функции $W(p)$ заменой $p \rightarrow 0$ (только для позиционных динамических звеньев);

4. Переходная характеристика $h(t)$ при сигнале на входе $X_{\text{вх}}(t) = X_0 \cdot 1(t)$ получается с помощью обратного преобразования Лапласа по формуле

$$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{X_0}{p} \cdot W(p) \right\};$$

5. Весовая характеристика $w(t)$ при сигнале на входе $X_{\text{вх}}(t) = X_0 \cdot \delta(t)$ получается с помощью обратного преобразования Лапласа по формуле

$$w(t) = L^{-1} \{ X_0 \cdot W(p) \};$$

6. Связь между переходной и весовой характеристиками определяется по формуле

$$w(t) = \frac{d h(t)}{dt};$$

7. Связь между передаточной функцией $W(p)$ и весовой характеристикой $w(t)$ определяется с помощью прямого и обратного преобразования по Лапласу по следующим соотношениям

$$W(p) = L[w(t)] \text{ или } w(t) = L^{-1}[W(p)].$$

1.4.2. ТИПОВЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗВЕНЬЯ.

Типовые динамические звенья классифицируются в соответствии с видом статических характеристик следующим образом:

1. Позиционные звенья со статической характеристикой (рис.33.а)

$$x_{\text{ВЫХ}} = k_1 \cdot x_{\text{ВХ}};$$

2. Интегрирующие звенья, со статической характеристикой (рис.33.б)

$$\frac{dx_{\text{ВЫХ}}}{dt} = (x_{\text{ВЫХ}})' = k_2 \cdot x_{\text{ВХ}};$$

3. Дифференцирующие звенья, со статической характеристикой (рис.33.в)

$$x_{\text{ВЫХ}} = k_3 \cdot \frac{dx_{\text{ВХ}}}{dt} = k_3 \cdot (x_{\text{ВХ}})'$$

Статические характеристики трех представленных на рис.33 типов динамических звеньев линейны, но явная зависимость между входным $x_{\text{ВХ}}$ и выходным $x_{\text{ВЫХ}}$ сигналами присуща только позиционным звеньям. У интегрирующих динамических звеньев производная выходного сигнала $\frac{dx_{\text{ВЫХ}}}{dt}$ пропорциональна входному сигналу $x_{\text{ВХ}}$, а у дифференцирующих звеньев наоборот – выходной сигнал $x_{\text{ВЫХ}}$ пропорционален производной входного сигнала $\frac{dx_{\text{ВХ}}}{dt}$.

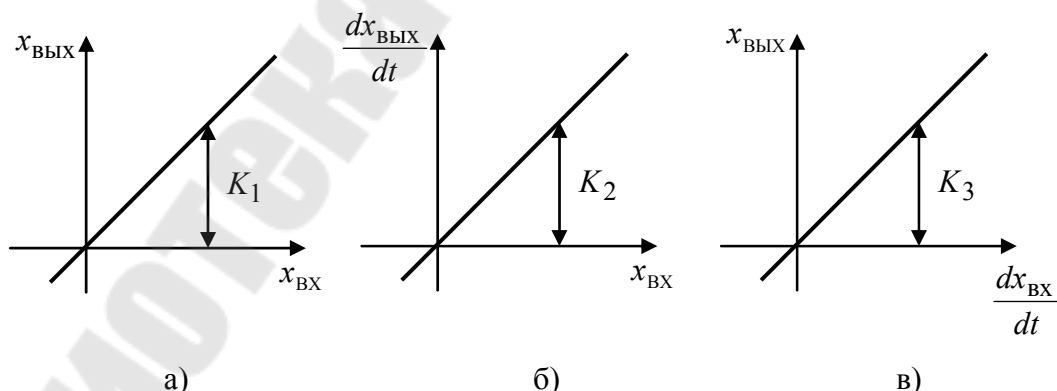


Рис.33 Статические характеристики типовых динамических звеньев: позиционных (а), интегрирующих (б), дифференцирующих (в)

На рис.33 обозначено:

K_1, K_2, K_3 – коэффициенты пропорциональности между «выходом» и «входом».

1.4.2.1. ПОЗИЦИОННЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗВЕНЬЯ

К ним относятся: безинерционное звено и апериодические звенья первого и второго порядков. Рассмотрим примеры и основные характеристики позиционных звеньев.

Безинерционное звено

Это звено описывается как в статическом, так и в динамическом режиме обыкновенным алгебраическим уравнением вида

$$a_0 \cdot x_{\text{ВЫХ}} = b_0 \cdot x_{\text{ВХ}} \quad (38)$$

где a_0, b_0 – постоянные коэффициенты.

Примером такого звена являются механический редуктор, делитель напряжения, различного рода датчики сигналов (потенциометрические, индукционные и т.д.), жесткие механические передачи и т.д.

В действительности безинерционное звено является некоторой идеализацией реальных звеньев. Так, например, механический редуктор можно отнести к безинерционному звену, только если не учитывать явления скручивания и люфта, а статические характеристики большинства датчиков (в частности потенциометрического датчика положения (рис.10-рис.11)) нелинейны.

Таким образом, реальные звенья лишь в первом приближении можно описывать безинерционным звеном, но для решения большинства инженерных задач этого оказывается достаточно.

В операторном виде уравнение звена (38) будет выглядеть

$$a_0 \cdot X_{\text{ВЫХ}}(p) = b_0 \cdot X_{\text{ВХ}}(p),$$

откуда передаточная функция

$$W(p) = \frac{X_{\text{ВЫХ}}(p)}{X_{\text{ВХ}}(p)} = \frac{b_0}{a_0} = K, \quad (39)$$

где $K = \frac{b_0}{a_0}$ – коэффициент передачи безинерционного звена.

На рис.34 изображена схема пропорционального регулятора (П-регулятора), который описывается передаточной функцией (39) безинерционного звена.

В соответствии с ранее полученным результатом (см. пример 5) имеем

$$W(p) = \frac{Z_2(p)}{Z_1(p)} = -\frac{R_2}{R_1} = -K.$$

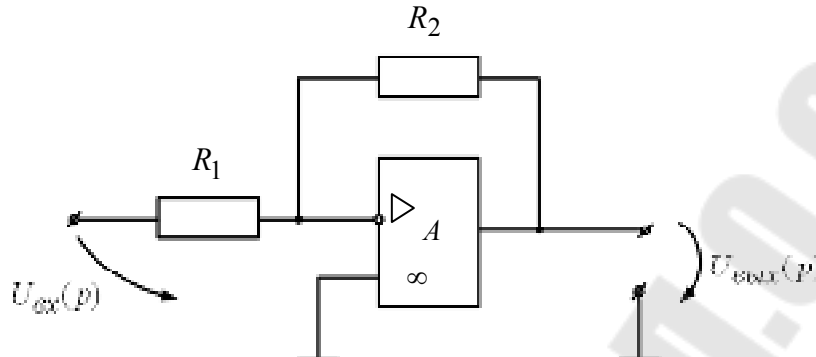


Рис.34. Принципиальная электрическая схема П-регулятора

Знак «-» возникает из-за инвертирования входного сигнала.

Характеристики безинерционного звена определим через передаточную функцию $W(p)$ с помощью вышеизложенных взаимосвязей (см. раздел 1.4.1).

1. Дифференциальное уравнение $x_{\text{ВЫХ}} = K \cdot x_{\text{ВХ}}$;
2. Передаточная функция $W(p) = \frac{x_{\text{ВЫХ}}(p)}{x_{\text{ВХ}}(p)} = K$;
3. Статическая характеристика $x_{\text{ВЫХ}} = W(p)|_{p=0} \cdot x_{\text{ВХ}} = K \cdot x_{\text{ВХ}}$;
4. Амплитудно-фазочастотная характеристика (АФЧХ)
 $W(j\omega) = W(p)|_{p=j\omega} = K$;

Графически АФЧХ вырождается в точку, расположенную на комплексной плоскости на вещественной оси на расстоянии K от начала координат (рис.35.б).

5. Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ)
 $A(\omega) = \text{mod}[W(j\omega)] = K$;

6. Фазочастотная характеристика (ФЧХ) $\varphi(\omega) = \text{arg}[W(j\omega)] = 0$;

7. Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика (ЛАЧХ)

$$L(\omega) = 20 \lg[A(\omega)] = 20 \lg K;$$

8. Логарифмическая фазо-частотная характеристика (ЛФЧХ)

$$\varphi(\lg \omega) = 0;$$

9. Переходная характеристика $h(t) = k \cdot 1(t)$;

10. Весовая характеристика $w(t) = \frac{d[h(t)]}{dt} = L^{-1}[W(p)] = k \cdot \delta(t)$.

Весовая характеристика представляет собой импульсную функцию, площадь которой равна K

Перечисленные выше характеристики обычно изображают графически (рис.35.ж).

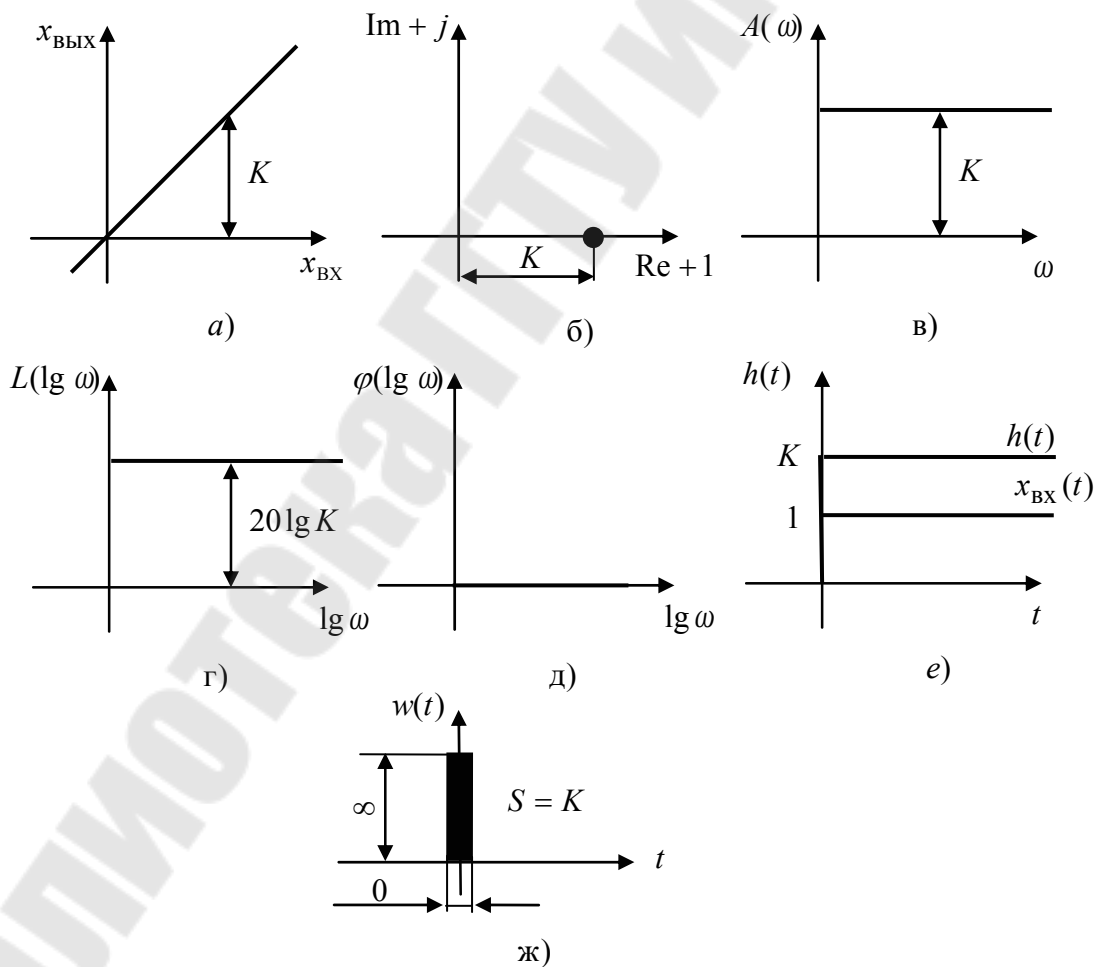


Рис.35. Характеристики безинерционного звена: статическая (а), АФЧХ (б), АЧХ (в), ЛАЧХ (г), ЛФЧХ (д), переходная (е), весовая (ж)

По графическим изображениям характеристик (рис.35) видно, что реакция безинерционного звена на входное воздействие любого вида сводится лишь к изменению величины этого воздействия в K раз, при этом временные и частотные параметры воздействия остаются без изменения.

Апериодическое звено первого порядка

Это звено описывается линейным дифференциальным уравнением первого порядка, имеющим вид:

$$a_0 \cdot \frac{dx_{\text{ВЫХ}}}{dt} + a_1 \cdot x_{\text{ВЫХ}} = b_0 \cdot x_{\text{ВХ}}, \quad (40)$$

где a_0 , b_0 , a_1 – постоянные коэффициенты.

Рассмотрим некоторые примеры реализации апериодических звеньев первого порядка:

1. Двигатель любого типа в первом приближении (электрический, гидравлический и т.д.). Входной величиной $x_{\text{ВХ}}$ здесь является управляющее воздействие в двигателе, например, расход жидкости в гидравлическом двигателе, электрическое напряжение в электрическом двигателе, а выходной $x_{\text{ВЫХ}}$ - скорость вращения ω (рис.36.а);

2. Резервуар с газом, где входная величина – давление P_1 перед впускным отверстием, а выходная величина - давление газа P_2 в резервуаре (рис.36.б);

3. Нагревательная печь, где входной величиной является – количество тепла в единицу времени (тепловая мощность) Q , выходной – температура в печи t° (рис.36.в);

4. Пассивные RL и RC электрические цепи и RC (рис.36.г).

В операторном виде уравнение звена (40) записывается

$$a_0 \cdot p \cdot X_{\text{ВЫХ}}(p) + a_1 \cdot X_{\text{ВЫХ}}(p) = b_0 \cdot X_{\text{ВХ}}(p),$$

откуда передаточная функция

$$W(p) = \frac{X_{\text{ВЫХ}}(p)}{X_{\text{ВХ}}(p)} = \frac{b_0}{a_0 \cdot p + a_1} = \frac{K}{T \cdot p + 1}, \quad (41)$$

где $K = \frac{b_0}{a_1}$ – коэффициент передачи звена;

$T = \frac{a_0}{a_1}$ – постоянная времени звена.

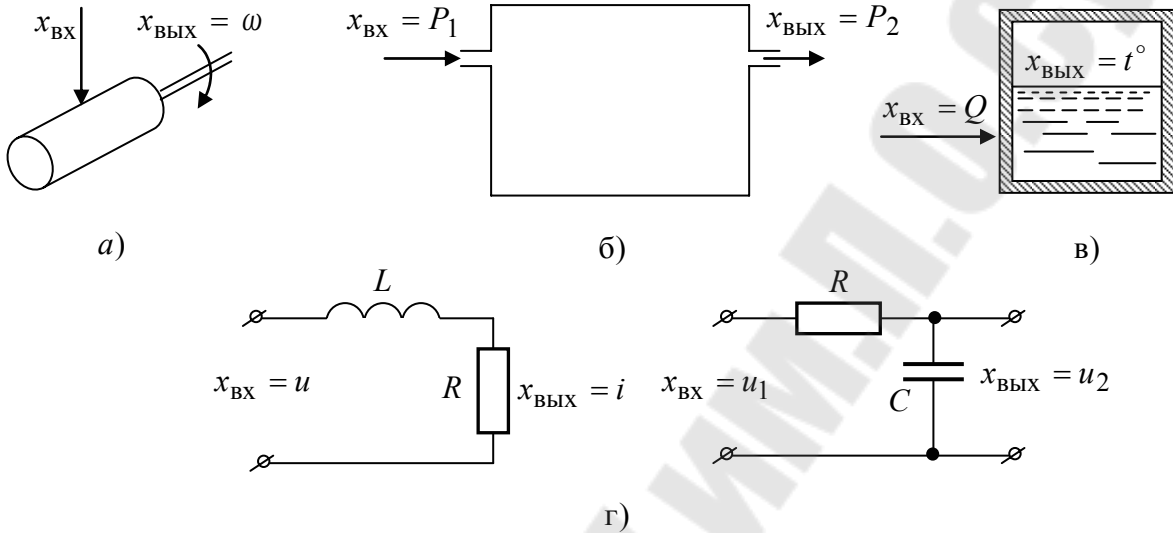


Рис.36. Примеры реальных аperiodических звеньев первого порядка: двигатель (а), резервуар с газом (б), нагревательная печь (в), электрические цепи (г).

На рис.37 изображена схема аperiodического регулятора имеющего передаточную функцию (41).

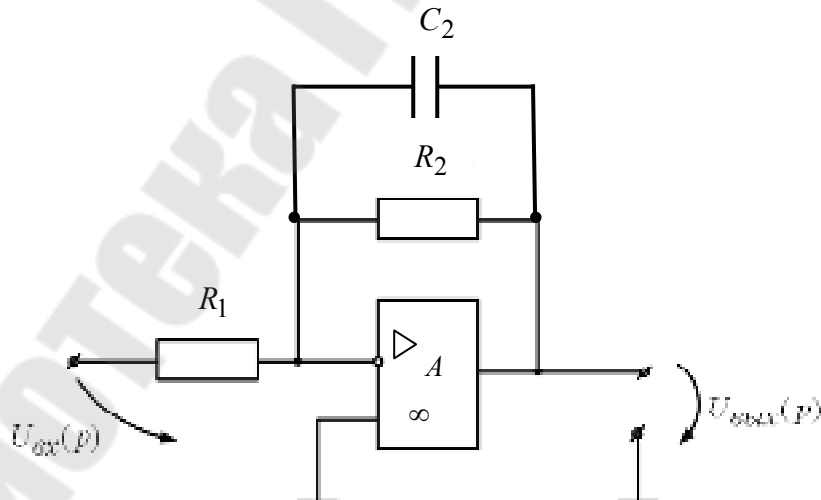


Рис.37. Принципиальная электрическая схема аperiodического регулятора

Согласно (9) имеем

$$\begin{aligned}
 W(p) &= -\frac{Z_2(p)}{Z_1(p)} = -\frac{R_2 \cdot \frac{1}{C_2 \cdot p}}{R_2 + \frac{1}{C_2 \cdot p}} = -\frac{\frac{R_2}{C_2 \cdot p}}{R_2 \cdot C_2 p + 1} = \\
 &= \frac{R_2}{R_1 \cdot (R_2 \cdot C_2 \cdot p + 1)} = -\frac{K}{T \cdot p + 1}, \quad (42)
 \end{aligned}$$

где $K = \frac{R_2}{R_1}$, $T = R_2 \cdot C_2$ – коэффициент передачи и постоянная времени звена соответственно.

Знак «-» в (42) возникает из-за инвертирования входного сигнала.

Структурно такой регулятор можно представить как последовательное соединение двух динамических звеньев: безинерционного и апериодического первого порядка (рис.38)

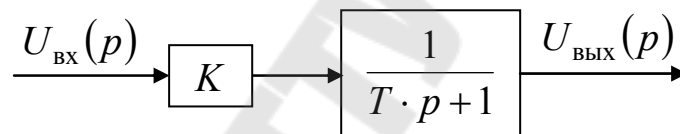


Рис.38. Структурная схема апериодического регулятора

Характеристики апериодического звена первого порядка будут таковы:

1. Дифференциальное уравнение и передаточная функция

$$T \cdot \frac{dx_{\text{ВЫХ}}}{dt} + x_{\text{ВЫХ}} = K \cdot x_{\text{ВХ}}, \quad W(p) = \frac{K}{T \cdot p + 1} = \frac{X_{\text{ВЫХ}}(p)}{X_{\text{ВХ}}(p)},$$

2. Статическая характеристика (рис 36.а)

$$x_{\text{ВЫХ}} = W(p) \Big|_{p=0} \cdot x_{\text{ВХ}} = K \cdot x_{\text{ВХ}};$$

3. Амплитудно-фазочастотная характеристика (АФЧХ)

$$W(j\omega) = \frac{1}{T \cdot j\omega + 1}.$$

Графически АФЧХ для положительных частот имеет вид полуокружности с диаметром, равным коэффициенту передачи K . Длина радиус-вектора соответствует АЧХ, а угол, который образуют вещественная ось и радиус вектор соответствует ФЧХ (рис.39.б);

4. Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) (рис.39.в)

$$A(\omega) = \operatorname{mod} \left[\frac{K}{T \cdot j\omega + 1} \right] = \frac{K}{\sqrt{T^2 \cdot \omega^2 + 1}}.$$

Из анализа амплитудной характеристики следует, что колебания малых частот $\omega < \frac{1}{T}$ пропускаются данным звеном с отношением амплитуд выходной и входной величин, близким к статическому коэффициенту передачи K , колебания же больших частот $\omega > \frac{1}{T}$ проходят с сильным ослаблением амплитуды, т.е. плохо пропускаются или совсем не пропускаются данным звеном. Чем меньше постоянная времени T , тем более вытянута амплитудная характеристика $A(\omega)$ вдоль оси частот, т.е. полоса пропускания шире

$$\Delta\omega_n = \frac{1}{T} - \left(-\frac{1}{T} \right) = \frac{2}{T};$$

5. Фазочастотная характеристика (ФЧХ) (рис.39.г)

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arg} \left[\frac{1}{T \cdot j\omega + 1} \right] = -\operatorname{arctg}(T \cdot \omega).$$

На малых частотах фазовый сдвиг между входным и выходным сигналом стремится к нулю $\varphi \rightarrow 0$, а на больших $-\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}$.

6. Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика (ЛАЧХ) (рис.40.а)

$$\begin{aligned} L(\omega) &= 20 \cdot \lg[A(\omega)] = 20 \cdot \lg \frac{K}{\sqrt{T^2 \cdot \omega^2 + 1}} = \\ &= 20 \cdot \lg K - 20 \cdot \lg \sqrt{T^2 \cdot \omega^2 + 1}. \end{aligned} \quad (43)$$

Рассмотрим выражение (43) более подробно. При $T^2 \cdot \omega^2 \gg 1$, т.е. $\omega \gg \sqrt{\frac{1}{T^2}}$ (на больших частотах) (43) будет иметь вид

$$L(\omega) \approx 20 \cdot \lg K - 20 \cdot \lg(T \cdot \omega). \quad (44)$$

Первое слагаемое (44) представляет собой прямую, параллельную оси частот, а второе – наклонную. Сопряжение этих прямых будет происходить при частоте $\omega = \frac{1}{T}$ – частоте излома звена.

При $T^2 \cdot \omega^2 \ll 1$, т.е. $\omega \ll \sqrt{\frac{1}{T^2}}$ (на низких частотах) выражение (43) будет

$$L(\omega) = 20 \cdot \lg K - 20 \cdot \lg 1 = 20 \cdot \lg K,$$

т.е. на низких частотах ЛАЧХ апериодического звена представляет собой только прямую параллельную оси частот $\lg \omega$.

Таким образом, ЛАЧХ может быть представлена в виде двух прямых, сопрягаемых в точке $\omega = \frac{1}{T}$ (частота излома звена).

Такая ЛАЧХ носит название асимптотической (приближенной) вследствие того, что эти прямые являются асимптотами, к которым стремятся ветви графика характеристики $L(\omega)$. При этом максимальная погрешность построения будет на частоте излома звена, и не будет превышать 3 дБ

$$\begin{aligned} L(\omega) \Big|_{\omega^2 \cdot T^2 = 1} &= 20 \cdot \lg K - 20 \cdot \lg \sqrt{T^2 \cdot \omega^2 + 1} \Big|_{\omega^2 \cdot T^2 = 1} = \\ &= 20 \cdot \lg K - 20 \cdot \lg 2 = 20 \cdot \lg K - 3 \text{ дБ}; \end{aligned}$$

Единица приращения частоты соответствует одной декаде, т.е. удешагерению частоты, Например, 1 дек соответствует частоте равной 10 с^{-1} , а две декады – уже частоте 100 с^{-1} . Таким образом, под декадой понимается интервал на оси абсцисс, соответствующий десятикратному изменению частоты.

Наклон ЛАЧХ $L(\omega)$ после частоты излома $\omega_{\text{изл}}$ для апериодического звена остается все время постоянным и всегда составляет $-20 \frac{\text{дБ}}{\text{дек}}$;

6. Логарифмическая фазочастотная характеристика (ЛФЧХ) (рис.40.б)

$$\varphi(\omega) = -\arctg(T \cdot \omega) = -\arctg(T \cdot 10^{\lg \omega})$$

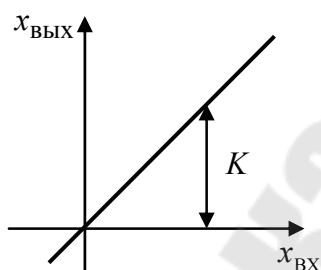
где $\lg \omega$ - десятичный логарифм частоты.

7. Переходная характеристика (рис.41.а)

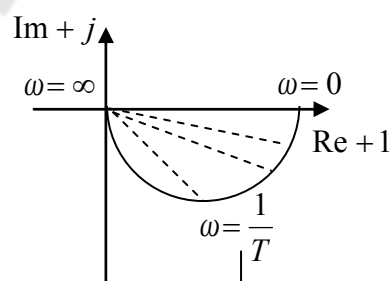
$$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{p} \cdot W(p) \right\} = K \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right);$$

8. Весовая характеристика (рис.41.б)

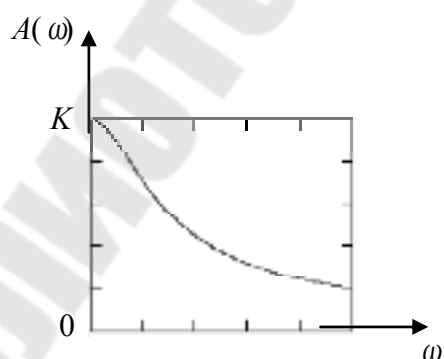
$$w(t) = \frac{d[h(t)]}{dt} = \frac{K}{T} \cdot e^{-\frac{t}{T}}.$$



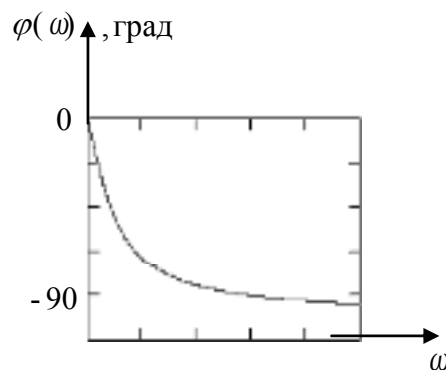
а)



б)

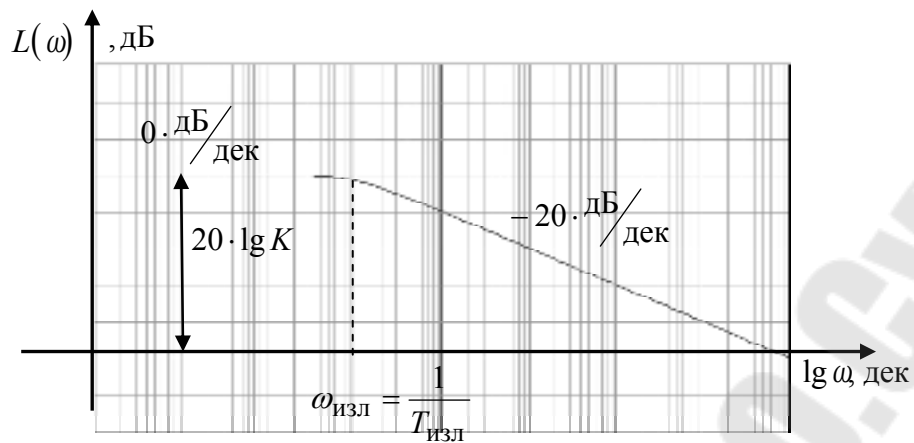


в)

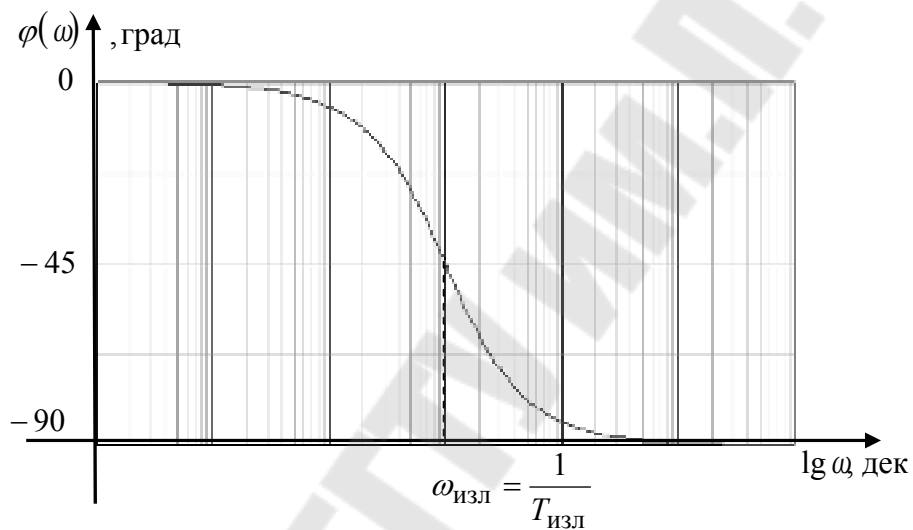


г)

Рис.39. Статическая (а) и АФЧХ (б), АЧХ (в), ФЧХ (г) характеристики апериодического звена первого порядка

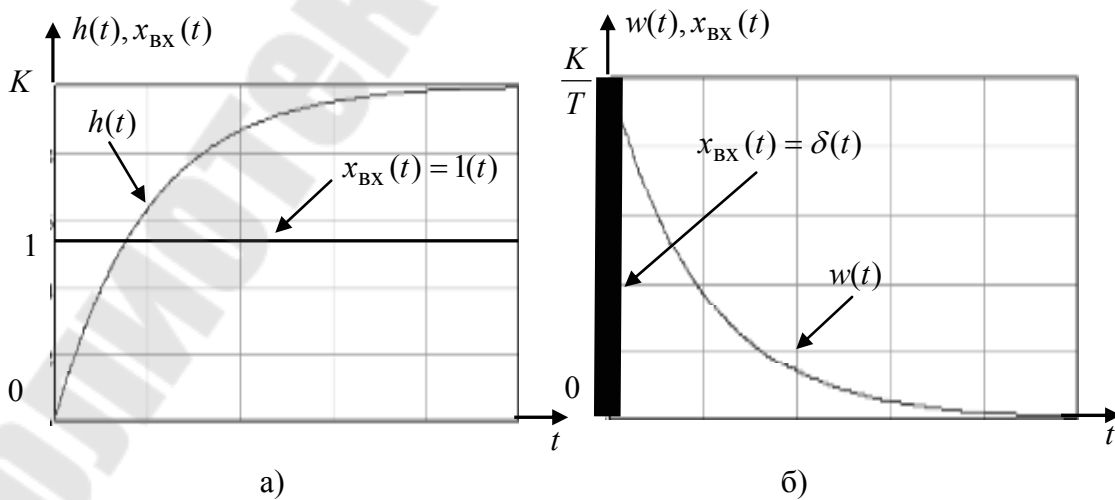


а)



б)

Рис.40. Логарифмические частотные характеристики аperiodического звена первого порядка: ЛАЧХ (а), ЛФЧХ (б)



а)

б)

Рис.41. Временные характеристики аperiodического звена первого порядка: переходная (а), весовая (б)

По характеристикам видно, что реакция апериодического звена первого порядка на входное воздействие $x_{\text{ВХ}}$ замедленна. С ростом частоты входного сигнала амплитуда выходного резко падает, вследствие чего апериодическое звено можно назвать фильтром, который не пропускает на выход высокочастотные сигналы.

Далее для остальных типовых динамических звеньев будем рассматривать только дифференциальные уравнения, передаточные функции, ЛАЧХ, ЛФЧХ и временные характеристики (только для позиционных звеньев), так как на основе их будет строиться анализ и синтез САУ. При необходимости остальные характеристики можно получить так, как было показано выше.

Апериодическое звено второго порядка

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение вида

$$a_0 \cdot \frac{d^2 x_{\text{ВЫХ}}}{dt^2} + a_1 \cdot \frac{dx_{\text{ВЫХ}}}{dt} + x_{\text{ВЫХ}} = b_1 x_{\text{ВХ}}, \quad (45)$$

где a_0 , a_1 – постоянные коэффициенты.

В (45) введем следующие обозначения

$$a_0 = T^2; a_1 = 2 \cdot \xi \cdot T, b_1 = K$$

откуда $T = \sqrt{a_0}$ – постоянная времени звена; $\xi = \frac{a_1}{2T} = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0}}$ – коэффициент затухания звена; K – коэффициент передачи звена

После подстановки новых обозначений уравнение (45) запишется в следующем виде:

$$T^2 \cdot \frac{d^2 x_{\text{ВЫХ}}}{dt^2} + 2 \cdot \xi \cdot T \cdot \frac{dx_{\text{ВЫХ}}}{dt} + x_{\text{ВЫХ}} = K \cdot x_{\text{ВХ}} \quad (46)$$

Если в (46) $\xi > 1$, то звено называется апериодическим второго порядка, и его передаточная функция может быть представлена, как функция двух последовательно соединенных апериодических звеньев первого порядка

$$W(p) = \frac{X_{\text{ВЫХ}}(p)}{X_{\text{ВХ}}(p)} = \frac{K}{T^2 \cdot p^2 + 2 \cdot \xi \cdot T \cdot p + 1} = \frac{K}{T_1 \cdot p + 1} \cdot \frac{1}{T_2 \cdot p + 1}, \quad (47)$$

где $T_1 = \xi \cdot T + \sqrt{\xi^2 \cdot T^2 - T^2} = T \cdot (\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})$;
 $T_2 = \xi \cdot T + \sqrt{\xi^2 \cdot T^2 - T^2} = T \cdot (\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})$ – постоянные времени звена, полученные в результате разложения знаменателя передаточной функции (47).

При $\xi = 1$ получим $T_1 = T_2 = T$ и передаточная функция звена $W(p)$ будет иметь следующий вид

$$W(p) = \frac{X_{\text{ВЫХ}}(p)}{X_{\text{ВХ}}(p)} = \frac{K}{(T \cdot p + 1)^2}.$$

При $\xi < 1$ звено носит название колебательного и его свойства и характеристики будут рассмотрены далее.

Ниже приведены примеры аperiodических звеньев второго порядка:

1. Двойной резервуар с газом (рис.42.а).
2. Электродвигатель постоянного тока при определенном соотношении постоянных времени $T_m > 4 \cdot T_y$ (рис.42.б);
3. Пружина с успокоительным устройством (рис.42.в);
4. Электрическая цепь в виде последовательного колебательного контура (рис.42.г).

ЛАЧХ и ЛФЧХ аperiodического звена второго порядка найдем как суммы характеристик аperiodических звеньев первого порядка, при этом для простоты примем коэффициент передачи звена $K = 1$

$$\begin{aligned} L(\omega) &= L_1(\omega) + L_2(\omega) = \\ &= 20 \cdot \lg \frac{1}{\sqrt{T_1^2 \cdot \omega^2 + 1}} + 20 \cdot \lg \frac{1}{\sqrt{T_2^2 \cdot \omega^2 + 1}} \end{aligned} \quad (48)$$

$$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) = -\arctg[T_1 \cdot \omega] - \arctg[T_2 \cdot \omega]. \quad (49)$$

Из (48) и (49) следует, что результирующие ЛАЧХ и ЛФЧХ аperiodического звена второго порядка находятся графическим построе-

нием и последующим суммированием ЛАЧХ и ЛФЧХ апериодических звеньев первого порядка (рис.43).

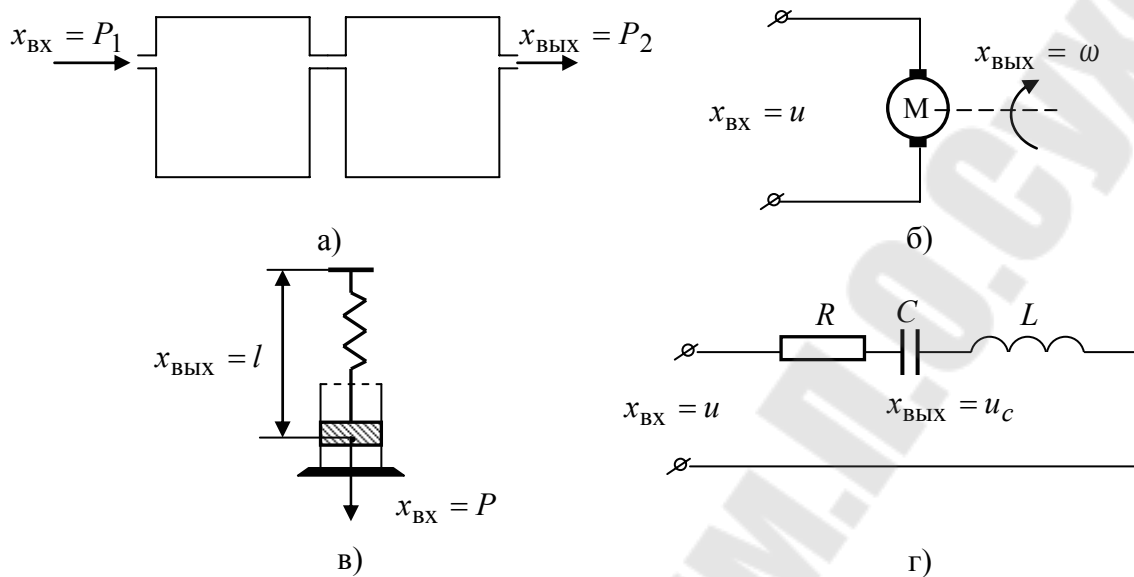


Рис.42. Примеры реальных апериодических звеньев второго порядка: двойной резервуар с газом (а), электрический двигатель постоянного тока (б), пружина с успокоительным устройством (в), электрическая RLC-цепь (г)

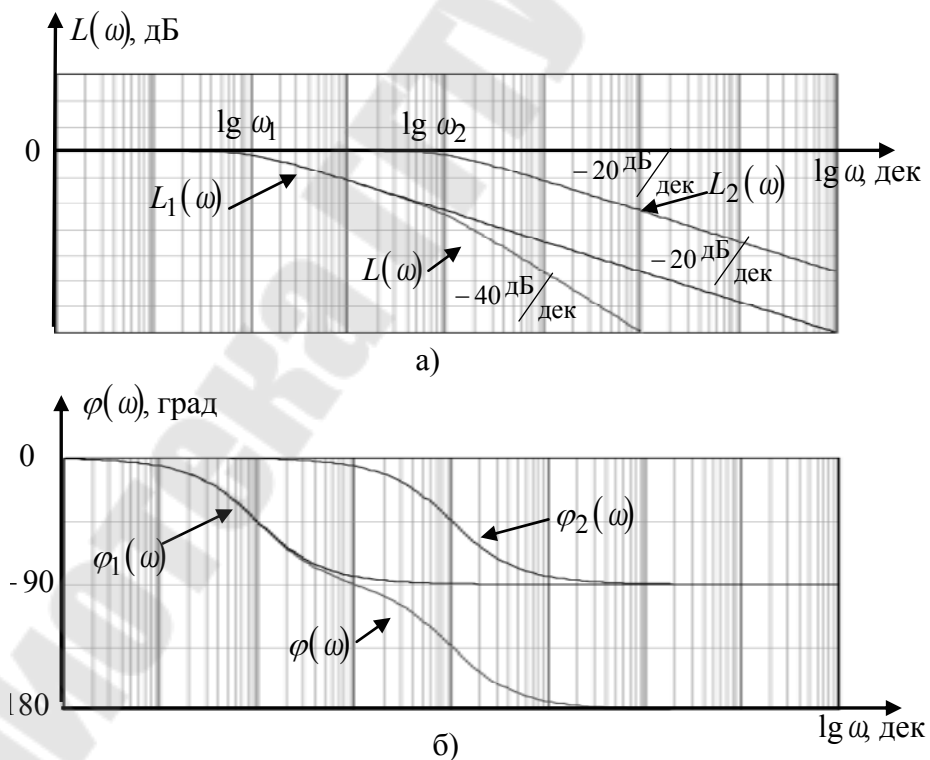


Рис.43. ЛАЧХ (а) и ЛФЧХ (б) апериодического звена второго порядка для случая $T_1 > T_2$

Наличие коэффициента передачи K у апериодического звена второго порядка сместит параллельно самой себе ЛАЧХ $L(\omega)$ вверх

на величину равную $20 \cdot \lg K$. ЛФЧХ при этом не изменится, т.к. коэффициент передачи представляет собой безинерционное звено, а его ЛФЧХ $\varphi = 0$ (рис. 35.д).

Временные характеристики у рассматриваемого звена определяются следующим образом

$$h(t) = K \cdot \left(1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} \cdot e^{-\frac{t}{T_2}} \right),$$

$$w(t) = \frac{K}{T_1 - T_2} \cdot \left(e^{-\frac{t}{T_1}} - e^{-\frac{t}{T_2}} \right).$$

Они представлены на рис.44.

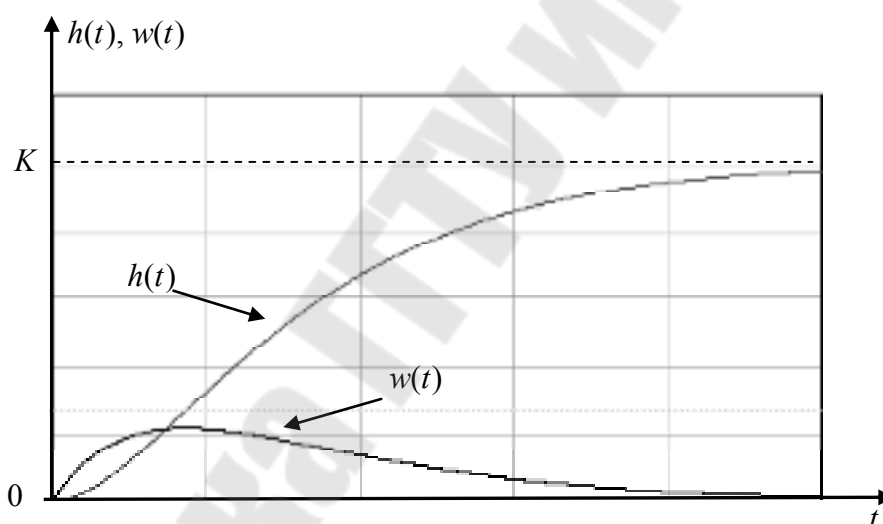


Рис. 44. Временные характеристики аperiodического звена второго порядка.

Колебательное звено

Если в дифференциальном уравнении (46) $\xi < 1$, то это колебательное звено. Передаточная функция для него будет иметь вид

$$W(p) = \frac{K}{T^2 \cdot p^2 + 2 \cdot \xi \cdot T \cdot p + 1}.$$

Примерами колебательных звеньев являются, например: RLC - цепи при определенных параметрах R, L, C (рис. 42.г); электродвига-

тель постоянного тока при определенном соотношении постоянных времени $T_M < 4 \cdot T_{\text{я}}$ (маломощные, малоинерционные электрические двигатели) (рис.42.б); упругие механические передачи.

Основные характеристики колебательного звена:

1. АФЧХ

$$W(j\omega) = \frac{K}{-T^2 \cdot \omega^2 + 2 \cdot \xi \cdot T \cdot j\omega + 1} = \frac{K}{(1 - T^2 \cdot \omega^2) + 2 \cdot \xi \cdot T \cdot j\omega};$$

2. ЛАЧХ

$$L(\omega) = 20 \cdot \lg \frac{K}{\sqrt{(1 - T^2 \cdot \omega^2)^2 + 4 \cdot \xi^2 \cdot T^2 \cdot \omega^2}};$$

3. ЛФЧХ

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{2 \cdot \xi \cdot T \cdot \omega}{1 - T^2 \cdot \omega^2}.$$

4. Переходная $h(t)$ и весовая $w(t)$ функции

$$h(t) = K \cdot \left(1 - e^{-\frac{\xi \cdot t}{T}} \cdot \left(\cos\left(\frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{T} \cdot t\right) + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{T} \cdot t\right) \right) \right),$$

$$w(t) = \frac{K \cdot \xi}{T \cdot \sqrt{1 - \xi^2}} \cdot e^{-\frac{\xi \cdot t}{T}} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{T} \cdot t\right).$$

ЛАЧХ колебательного звена на частоте $\omega = \frac{1}{T}$ имеет резонансный пик, и чем меньше коэффициент затухания ξ , тем большую амплитуду он имеет. На рис.45 представлены ЛАЧХ и ЛФЧХ колебательного звена для различных ξ , построенные для случая $K = 1$.

Временные характеристики колебательного звена приведены на рис.46.

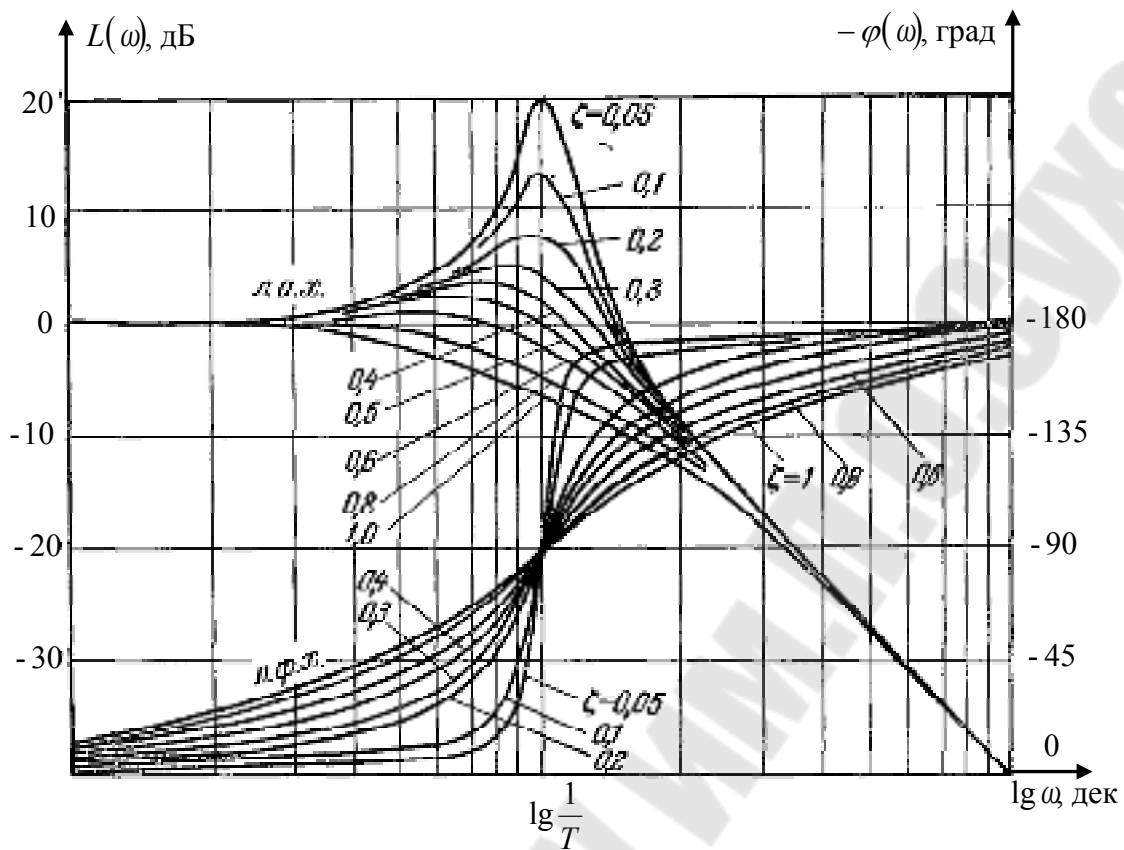


Рис. 45. ЛАЧХ и ЛФЧХ колебательного звена.

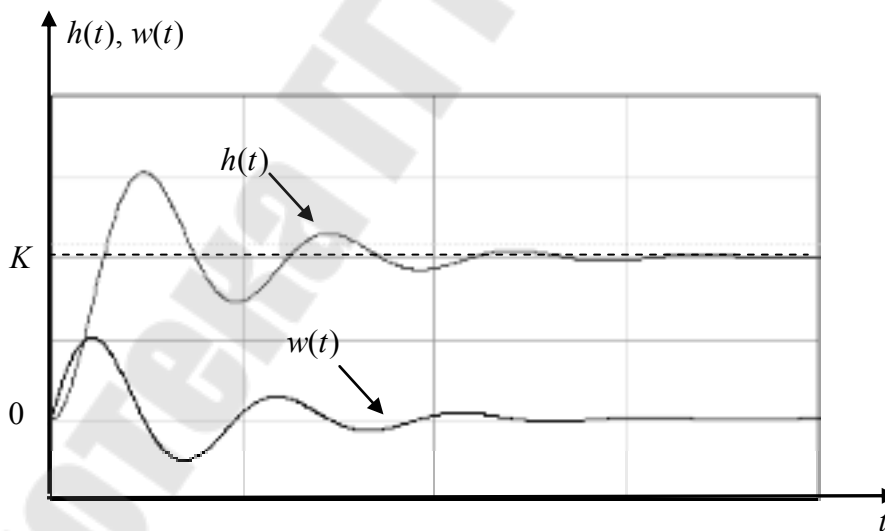


Рис. 46. Временные характеристики колебательного звена.

Консервативное (резонансное) звено

Если в дифференциальном уравнении (46) $\xi = 1$, то это консервативное звено. Передаточная функция для него будет иметь вид

$$W(p) = \frac{K}{T^2 \cdot p^2 + 1}.$$

Примерами консервативных динамических звеньев могут служить те же элементы управления, что и в случае апериодического звена второго порядка и колебательного звена, но обладающие особыми параметрами.

Основные характеристики консервативного звена:

1. АФЧХ

$$W(j\omega) = \frac{K}{-T^2 \cdot \omega^2 + 1};$$

2. ЛАЧХ

$$L(\omega) = 20 \cdot \lg \frac{K}{\sqrt{1 - T^2 \cdot \omega^2}};$$

3. ЛФЧХ

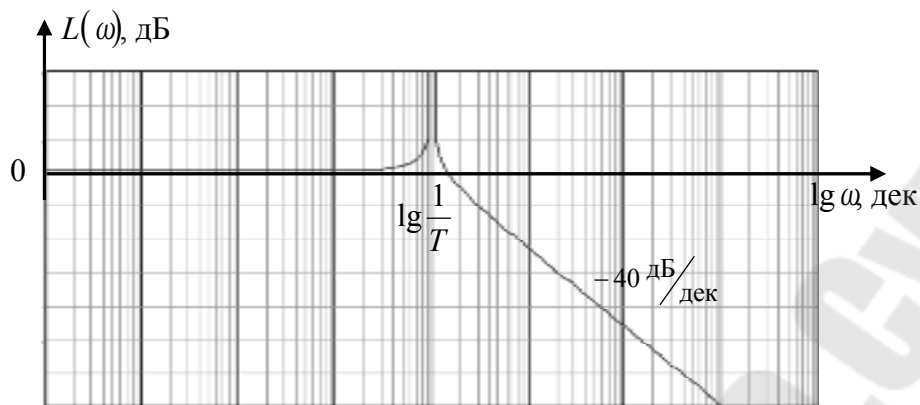
$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{0}{1 - T^2 \cdot \omega^2} \Rightarrow \begin{cases} 0^\circ & \text{при } \omega < \frac{1}{T}, \\ -180^\circ & \text{при } \omega > \frac{1}{T}. \end{cases}$$

4. Переходная $h(t)$ и весовая $w(t)$ функции

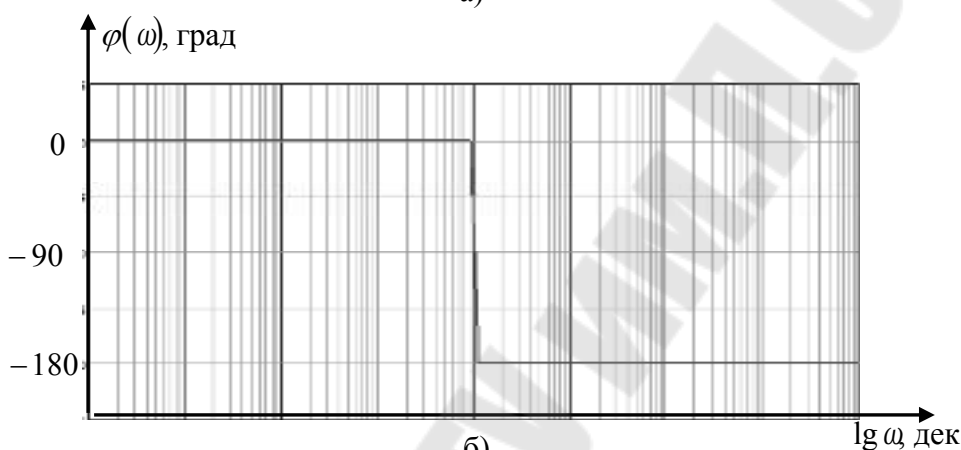
$$h(t) = K \cdot \left(1 - \cos \frac{t}{T} \right),$$

$$w(t) = \frac{dh(t)}{dt} = \frac{K}{T} \cdot \sin \frac{t}{T}.$$

Частотные (при $K = 1$) и временные характеристики консервативного звена представлены на рис.47 – рис.48 соответственно.



а)



б)

Рис. 47. ЛАЧХ (а) и ЛФЧХ (б) консервативного звена

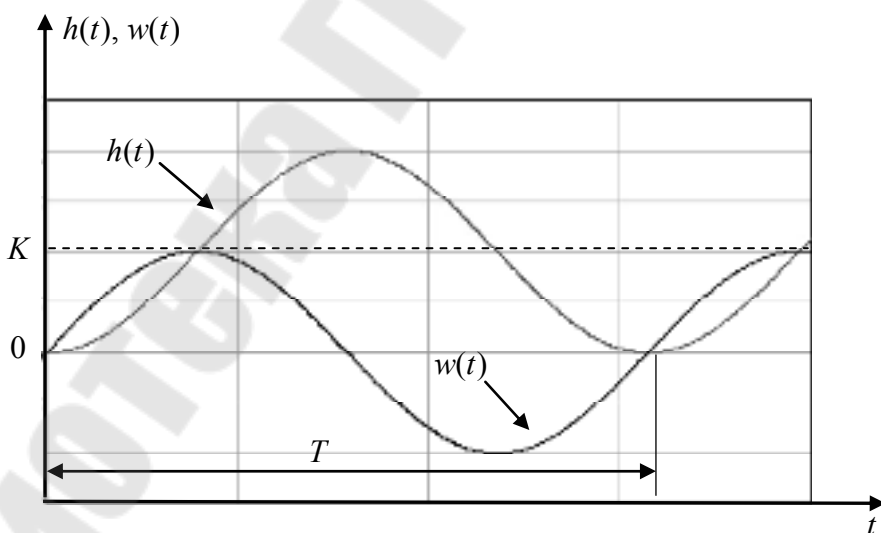


Рис. 48. Временные характеристики колебательного звена.

ЛАЧХ консервативного звена не существует в точке соответствующей частоте $\omega_p = \frac{1}{T}$, а ЛФЧХ делает скачок от 0 град до -180 град.

По временным характеристикам видно, что на выходе консервативного звена имеются незатухающие колебания с периодом соответствующим постоянной времени T звена.

1.4.2.2. ДИФФЕРЕНЦИРУЮЩИЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗВЕНЬЯ

К ним относятся: идеальное дифференцирующее звено, форсирующие звенья первого и второго порядков, дифференцирующие звенья с замедлением и с форсированием. Рассмотрим примеры и основные характеристики этих звеньев.

Идеальное дифференцирующее звено

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение вида

$$a_1 \cdot x_{\text{ВЫХ}} = b_1 \cdot \frac{dx_{\text{ВХ}}}{dt}, \quad (50)$$

где a_1, b_1 – постоянные коэффициенты.

В (50) введем обозначение постоянной времени звена $T = \frac{b_1}{a_1}$.

Передаточная функция идеального дифференцирующего звена в этом случае будет иметь вид

$$W(p) = \frac{X_{\text{ВЫХ}}(p)}{X_{\text{ВХ}}(p)} = T \cdot p.$$

Примеры идеальных дифференцирующих звеньев изображены на рис.49. Наиболее точно описывается дифференциальным уравнением (50) тахогенератор постоянного тока. Это устройство, относится к датчикам, используемым в САУ, в котором происходит преобразования скорости вращения якоря тахогенератора ω (или углового перемещения α) в пропорциональное ей электрическое напряжение u вырабатываемое тахогенератором. Если в качестве входной величины рассматривать угол поворота его якоря $x_{\text{ВХ}} = \alpha$, а в качестве выходной - $x_{\text{ВЫХ}} = u$, то дифференциальное уравнение для тахогенератора запишется в виде

$$u = K \cdot \frac{d\alpha}{dt} = T \cdot \frac{d\alpha}{dt}.$$

Для этого звена коэффициент передачи K и постоянная времени T являются синонимичными параметрами, т.е. при расчетах можно использовать оба обозначения.

Приближенно в качестве идеального дифференцирующего звена может рассматриваться электрическая схема (рис.49.б), где операционный усилитель работает в режиме дифференцирования.

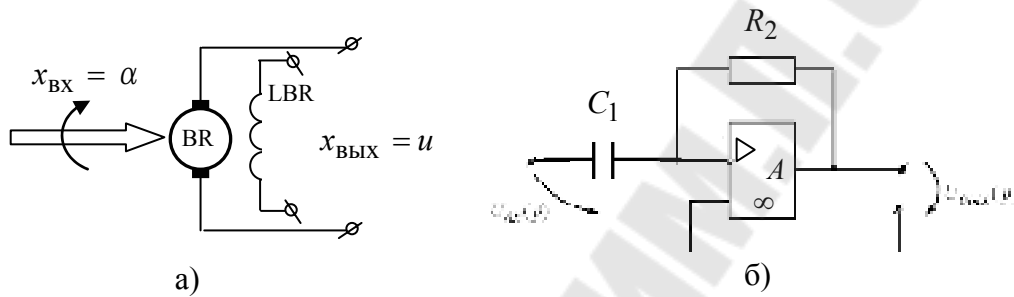


Рис.49. Примеры идеальных дифференцирующих звеньев: тахогенератор постоянного тока (а), операционный усилитель в режиме дифференцирования (б).

Основные характеристики идеального дифференцирующего звена (рис.50):

1. ЛАЧХ $L(\omega) = 20 \lg(T \cdot \omega)$;
2. ЛФЧХ $\varphi(\omega) = 90^\circ$;
3. Переходная характеристика $h(t) = \delta(t)$;
4. Весовая характеристика $w(t) = \frac{d}{dt}(\delta(t))$.

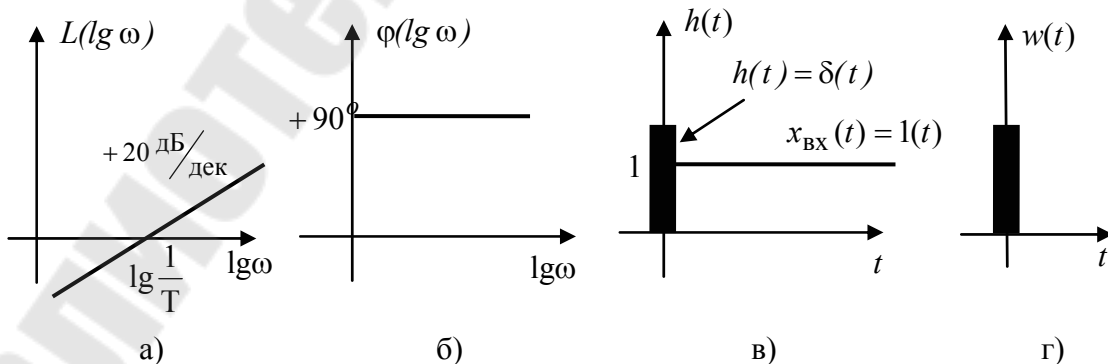


Рис.50. Логарифмические частотные: ЛАЧХ (а), ЛФЧХ (б) и временные: переходная (в), весовая (г) характеристики идеального дифференцирующего звена

Форсирующее звено первого порядка

Это звено описывается линейным дифференциальным уравнением первого порядка, имеющим вид:

$$x_{\text{ВЫХ}} = K \cdot \left(T \cdot \frac{dx_{\text{ВХ}}}{dt} + x \right), \quad (51)$$

В операторном виде уравнение звена (51) записывается

$$X_{\text{ВЫХ}}(p) = K \cdot (T \cdot p \cdot X_{\text{ВХ}}(p) + X_{\text{ВХ}}(p)),$$

откуда передаточная функция

$$W(p) = \frac{X_{\text{ВЫХ}}(p)}{X_{\text{ВХ}}(p)} = K \cdot (T \cdot p + 1), \quad (52)$$

где K, T – коэффициент передачи и постоянная времени звена.

Приближенно в качестве форсирующего звена первого порядка может рассматриваться электрическая схема, изображенная на рис.51

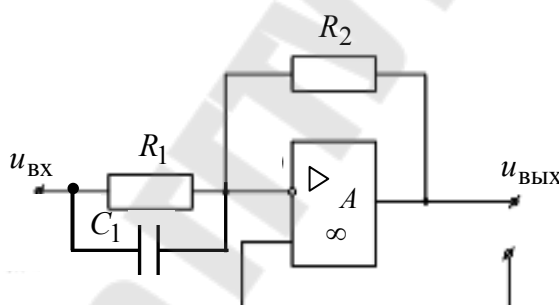


Рис.51. Принципиальная электрическая схема форсирующего звена первого порядка

Основные характеристики форсирующего звена первого порядка (рис.52):

1. ЛАЧХ

$$L(\omega) = 20 \lg K \cdot \sqrt{T^2 \cdot \omega^2 + 1} = 20 \lg K + 20 \lg \cdot \sqrt{T^2 \cdot \omega^2 + 1};$$

2. ЛФЧХ

$$\varphi(\omega) = \arctg(T \cdot \omega) = \arctg(T \cdot 10^{\lg \omega});$$

3. Переходная характеристика $h(t) = T \cdot \delta(t) + 1(t)$;

4. Весовая характеристика $w(t) = T \cdot \frac{d}{dt}(\delta(t)) + \delta(t)$.

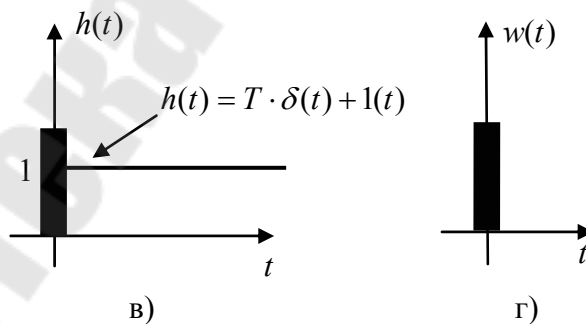
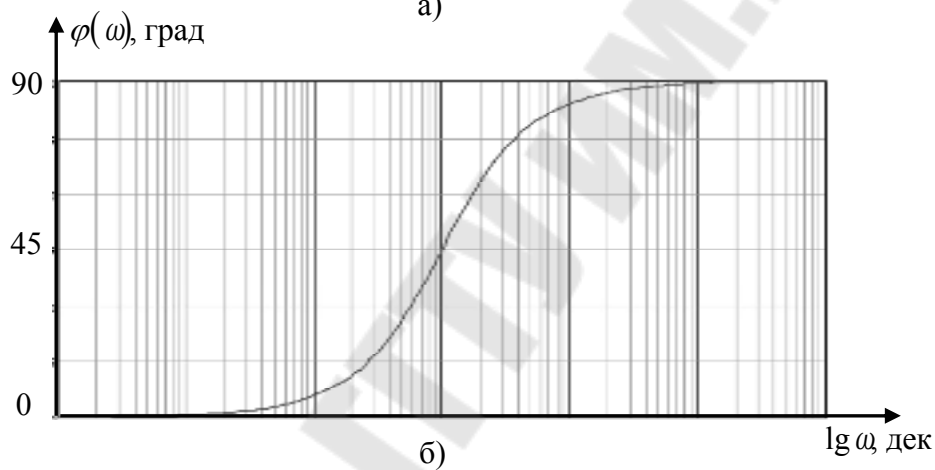
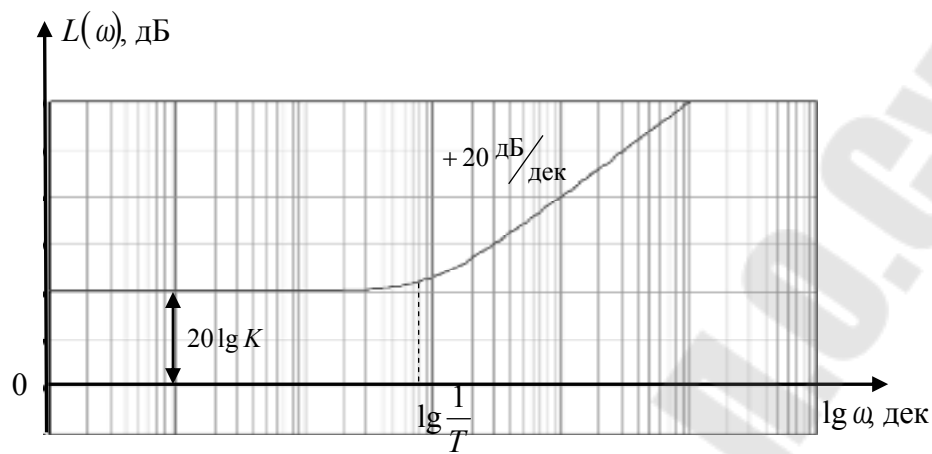


Рис.52. Логарифмические частотные: ЛАЧХ (а), ЛФЧХ (б) и временные: переходная (в), весовая (г) характеристики форсирующего звена первого порядка

Из характеристик видно, что форсирующее звено реагирует на входное воздействие «быстро и энергично». Это звено хорошо пропускает сигналы в области высоких частот, т.е. оно работает как усилитель. Но для реальных САУ высокочастотная область ограничена из-за невозможности бесконечно наращивать амплитуду.

Логарифмические частотные характеристики форсирующего звена первого порядка (рис.52 а,б) обладают зеркальной симметрией по отношению к логарифмическим частотным характеристикам апериодического звена первого порядка (рис.40 а,б).

Форсирующее звено второго порядка

Это звено описывается линейным дифференциальным уравнением первого порядка, имеющим вид:

$$x_{\text{ВЫХ}} = K \cdot \left(T^2 \cdot \frac{d^2 x_{\text{ВХ}}}{dt^2} + 2 \cdot \xi \cdot T \cdot \frac{dx_{\text{ВХ}}}{dt} + x_{\text{ВХ}} \right), \quad (53)$$

где K, ξ, T – коэффициент передачи, коэффициент затухания и постоянная времени звена.

Передаточная функция звена, соответствующая (53) примет вид

$$W(p) = \frac{X_{\text{ВЫХ}}(p)}{X_{\text{ВХ}}(p)} = K \cdot (T^2 \cdot p^2 + 2 \cdot \xi \cdot T \cdot p + 1).$$

Это тип звеньев в САУ реализуется с помощью электрических схем на активных (операционные усилители) и пассивных (R, L, C) элементах.

Логарифмические частотные характеристики форсирующего звена второго порядка получаются зеркальным отражением соответствующих характеристик апериодического звена второго порядка (рис.43). Например, при $\xi > 1$ это звено будет составным, и состоять из последовательного соединения двух форсирующих звеньев первого порядка с постоянными времени T_1, T_2 , определяемые по (47).

Временные характеристики звена аналогичны временным характеристикам форсирующего звена первого порядка (рис.52 в, г).

На рис.53 представлены ЛАЧХ и ЛФЧХ форсирующего звена второго порядка для случая $K = 1$ и $\xi > 1$.

Дифференцирующее звено с замедлением

Дифференциальное уравнение звена имеет вид

$$T \cdot \frac{dx_{\text{ВЫХ}}}{dt} + x_{\text{ВЫХ}} = K \cdot \frac{dx_{\text{ВХ}}}{dt} \quad (54)$$

где K, T – коэффициент передачи и постоянная времени звена.

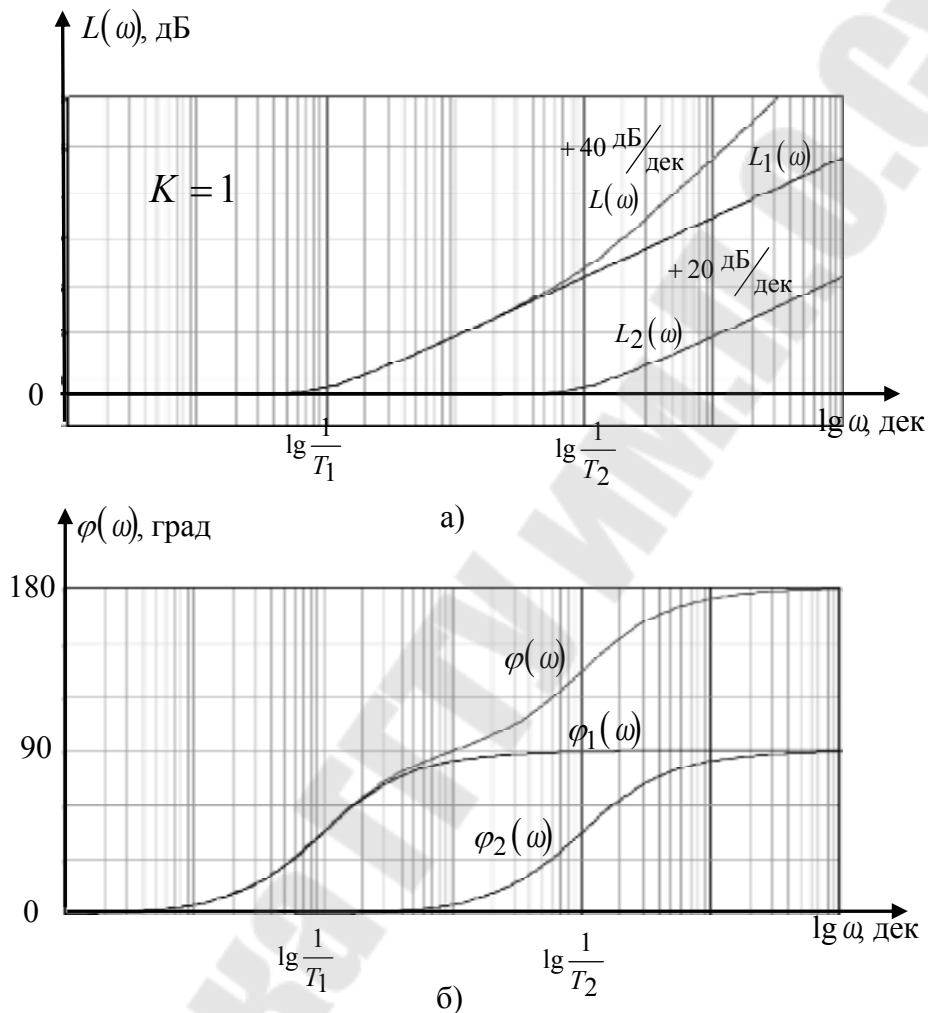


Рис.53. Логарифмические частотные: ЛАЧХ (а), ЛФЧХ (б) характеристики форсирующего звена второго порядка

Уравнению (54) соответствует передаточная функция

$$W(p) = \frac{X_{\text{ВЫХ}}(p)}{X_{\text{ВХ}}(p)} = \frac{K \cdot p}{T \cdot p + 1}$$

Наиболее часто в качестве дифференцирующих звеньев с замедлением используются электрические цепи (рис.54.а,б,в). В некоторых случаях используются устройства, состоящие из гидравлического

демпфера и пружины, только входной величиной будет перемещение точки b под действием силы F (рис.54 г).

Так как

$$\frac{K \cdot p}{T \cdot p + 1} = p \cdot \frac{K}{T \cdot p + 1},$$

то дифференцирующее звено с замедлением, согласно правилам структурных преобразований, можно рассматривать как последовательное соединение идеального дифференцирующего и апериодического звеньев. Учитывая этот факт, изобразим логарифмические частотные характеристики звена (рис.55).

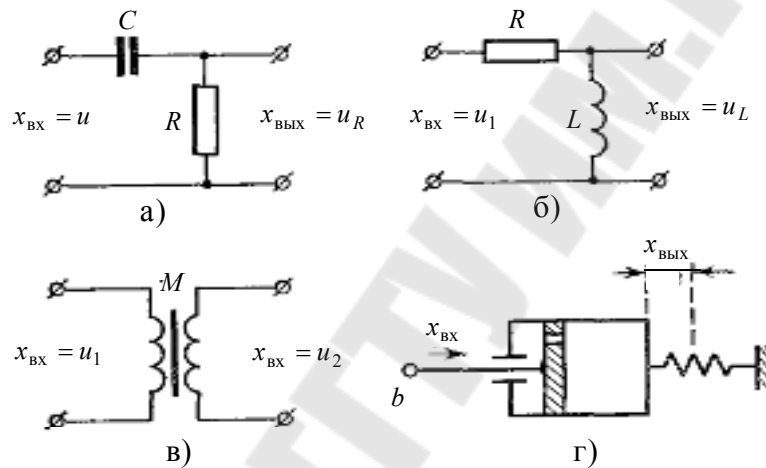


Рис.54. Примеры дифференцирующих звеньев с замедлением: RC-цепь (а), RL-цепь (б), трансформатор (в), демпфер с пружиной (г)

Из характеристик (рис.52) видно, что ЛАЧХ имеет другой вид, чем у идеального дифференцирующего звена. Характеристики совпадают в области низких частот. В области высоких частот реальное звено пропускает сигнал хуже, чем идеальное звено. Фазовые сдвиги, вносимые звеном, являются наибольшими на низких частотах. На высоких частотах сдвиг постепенно уменьшается, стремясь в пределе к нулю.

Временные характеристики (рис.56) определяются следующими соотношениями

$$h(t) = \frac{K}{T} \cdot e^{-\frac{t}{T}} \text{ и } w(t) = T \cdot \delta(t) - \frac{K}{T^2} \cdot e^{-\frac{t}{T}}.$$

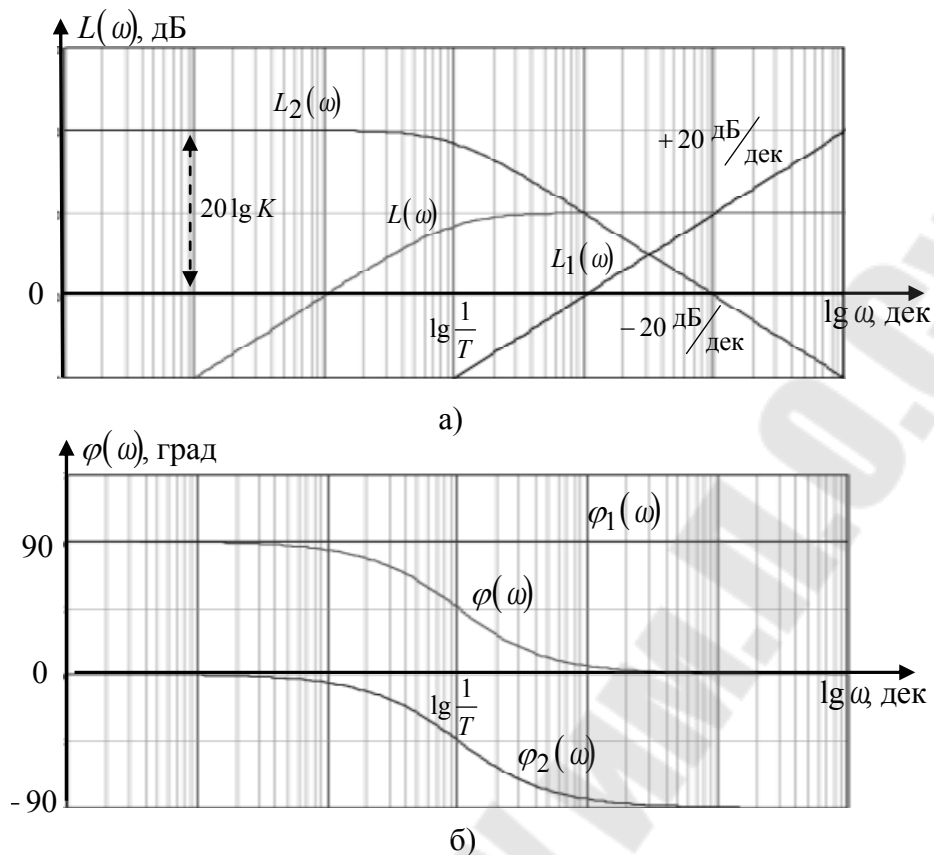


Рис.55. Логарифмические частотные: ЛАЧХ (а), ЛФЧХ (б) характеристики дифференцирующего звена с замедлением

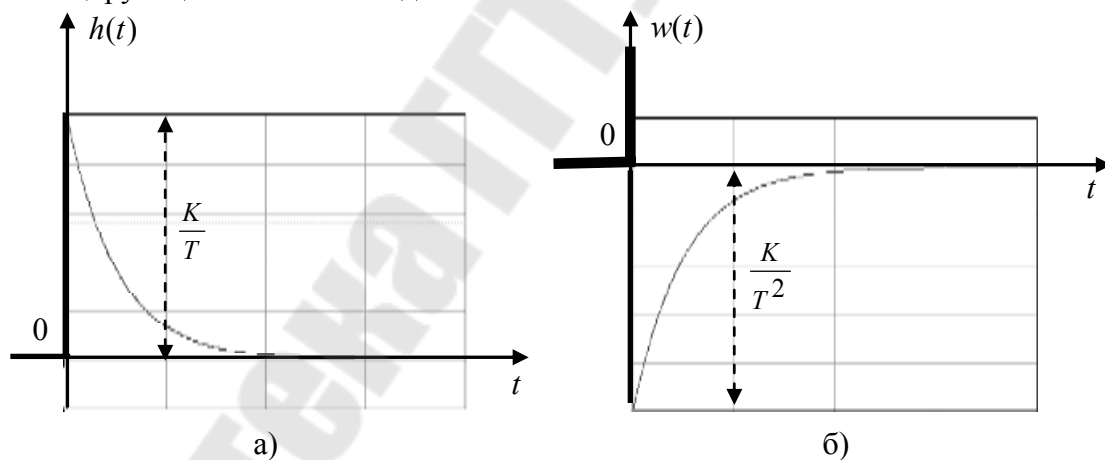


Рис.56. Временные характеристики: переходная (а), весовая (б) дифференцирующего звена с замедлением

Дифференцирующее звено с форсированием

Дифференциальное уравнение звена имеет вид

$$x_{\text{ВЫХ}} = K \cdot \left(T \cdot \frac{d^2 x_{\text{ВХ}}}{dt^2} + \frac{dx_{\text{ВХ}}}{dt} \right), \quad (55)$$

где K, T – коэффициент передачи и постоянная времени звена.

Уравнению (54) соответствует передаточная функция

$$W(p) = \frac{X_{\text{ВЫХ}}(p)}{X_{\text{ВХ}}(p)} = K \cdot p \cdot (T \cdot p + 1).$$

Примерами такого рода звеньев являются пассивные и активные цепи на LRC – элементах. Один из вариантов реализации такой схемы представлен на рис.57.

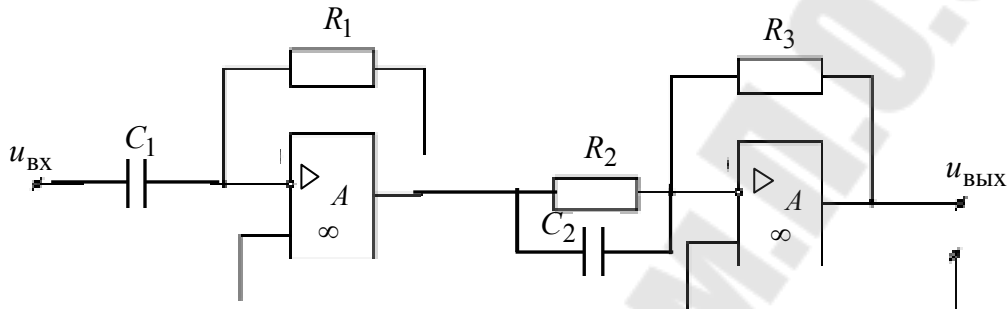


Рис.57. Реализация дифференцирующего звена с форсированием на операционных усилителях

Это звено также является составным и представляет собой последовательное соединение идеального дифференцирующего звена и форсирующего звена первого порядка. В соответствии с этим логарифмические частотные характеристики будут иметь вид, представленный на рис.58. Временные характеристики этого звена сходны с характеристиками идеального дифференцирующего звена (рис.47).

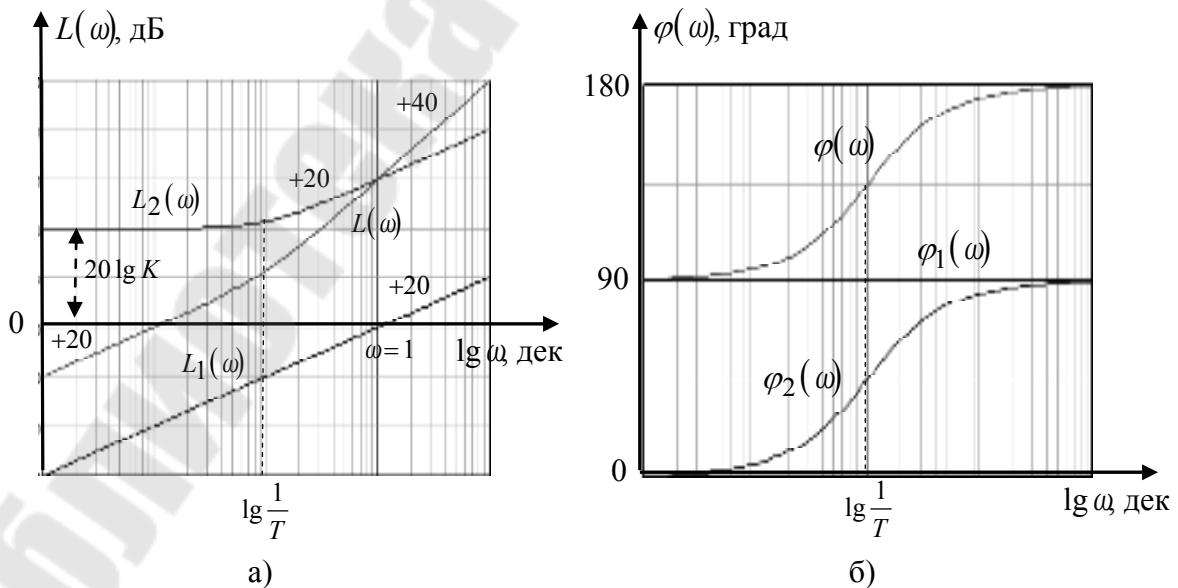


Рис.58. Логарифмические частотные: ЛАЧХ (а), ЛФЧХ (б) характеристики дифференцирующего звена с форсированием

В отличие от дифференцирующего звена с замедлением у этого звена в области высоких частот сигнал проходит заметно лучше. В реальных системах область высоких частот ограничена, из-за невозможности постоянно наращивать мощность сигнала, не имея источника неисчерпаемой энергии.

1.4.2.3. ИНТЕГРИРУЮЩИЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗВЕНЬЯ

К ним относятся: идеальное интегрирующее звено, интегрирующие звенья с замедлением и с форсированием. Рассмотрим примеры и основные характеристики этих звеньев.

Идеальное интегрирующее звено

Это звено описывается линейным дифференциальным уравнением вида

$$T \cdot \frac{dx_{\text{ВХ}}}{dt} = x_{\text{ВХ}},$$

где T – постоянная времени звена.

Передаточная функция идеального интегрирующего звена тогда будет иметь вид

$$W(p) = \frac{X_{\text{ВЫХ}}(p)}{X_{\text{ВХ}}(p)} = \frac{1}{T \cdot p}.$$

Чаще всего, в качестве такого звена используется операционный усилитель в режиме интегрирования (рис.59)

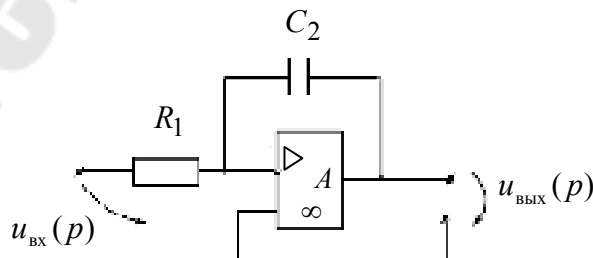


Рис.59. Операционный усилитель в режиме интегрирования входного сигнала

Основные характеристики идеального дифференцирующего звена (рис.60):

1. ЛАЧХ $L(\omega) = -20 \lg(T \cdot \omega)$;

2. ЛФЧХ $\varphi(\omega) = -90^\circ$;

3. Переходная характеристика $h(t) = \frac{1}{T} \cdot t$;

4. Весовая характеристика $w(t) = \frac{d}{dt}(h(t)) = \frac{1}{T} \cdot 1(t)$.

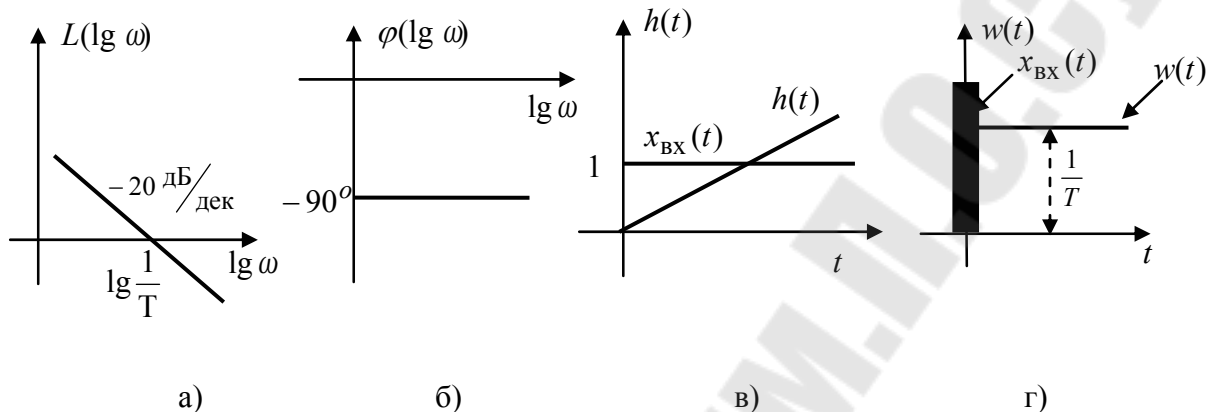


Рис.60. Логарифмические частотные: ЛАЧХ (а), ЛФЧХ (б) и временные: переходная (в), весовая (г) характеристики идеального интегрирующего звена

Интегрирующее звено с замедлением

Дифференциальное уравнение звена имеет вид

$$T \cdot \frac{d^2 x_{\text{ВЫХ}}}{dt^2} + \frac{dx_{\text{ВЫХ}}}{dt} = K \cdot x_{\text{ВХ}}, \quad (56)$$

где K, T – коэффициент передачи и постоянная времени звена.

Уравнению (56) соответствует передаточная функция

$$W(p) = \frac{X_{\text{ВЫХ}}(p)}{X_{\text{ВХ}}(p)} = \frac{K}{p \cdot (T \cdot p + 1)} = \frac{1}{p} \cdot \frac{K}{(T \cdot p + 1)}. \quad (57)$$

Это звено также составное, и наличие в нем апериодической составляющей (57) определяет название этого звена (в области высоких частот происходит ослабление входного сигнала).

Примером интегрирующего звена с замедлением является электрический двигатель (рис.42.б), но если только в качестве выходной величины рассматривать не угловую скорость вращения якоря ω , а угол поворота якоря α , являющийся интегралом от угловой скорости ω .

Основные характеристики звена (рис.61 – рис.62):

1. ЛАЧХ

$$L(\omega) = 20 \cdot \lg \frac{K}{\omega \cdot \sqrt{T^2 \cdot \omega^2 + 1}} = L_1(\omega) + L_2(\omega) =$$

$$= -20 \cdot \lg \omega - 20 \cdot \lg \frac{K}{\sqrt{T^2 \cdot \omega^2 + 1}};$$

2. ЛФЧХ

$$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) = -90 - \arctg(T \cdot \omega);$$

3. Переходная характеристика $h(t) = K \cdot \left(t - T \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \right);$

4. Весовая характеристика $w(t) = K \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right).$

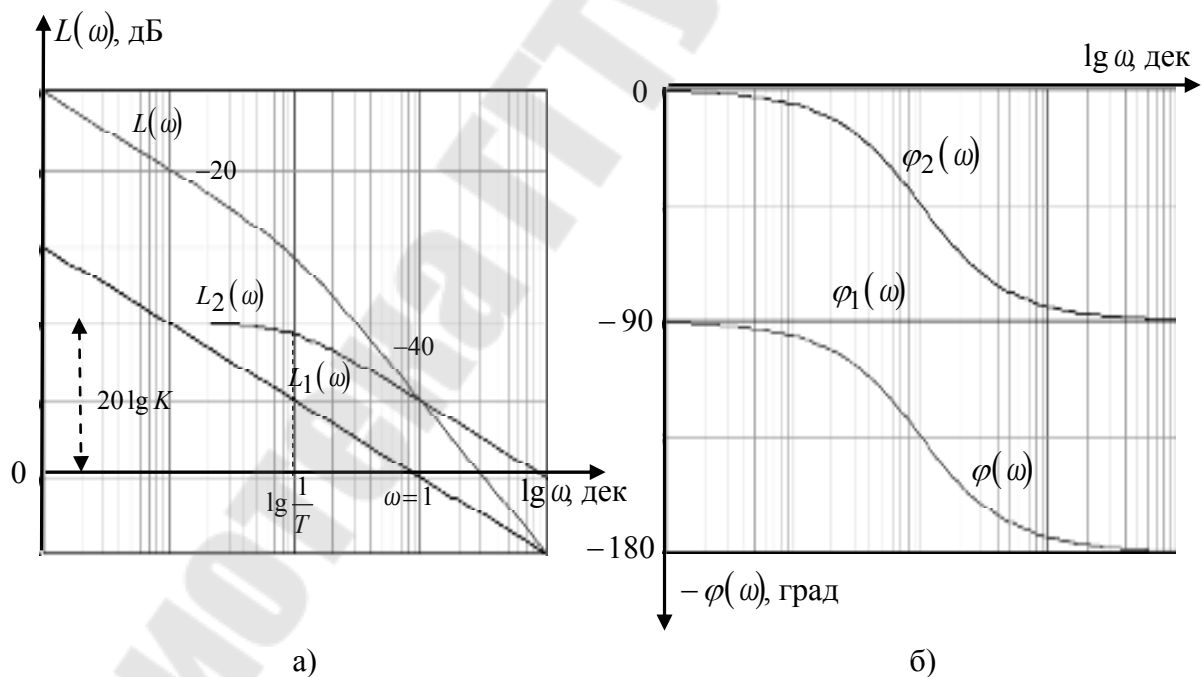


Рис.61. Логарифмические частотные: ЛАЧХ (а), ЛФЧХ (б) характеристики интегрирующего звена с замедлением

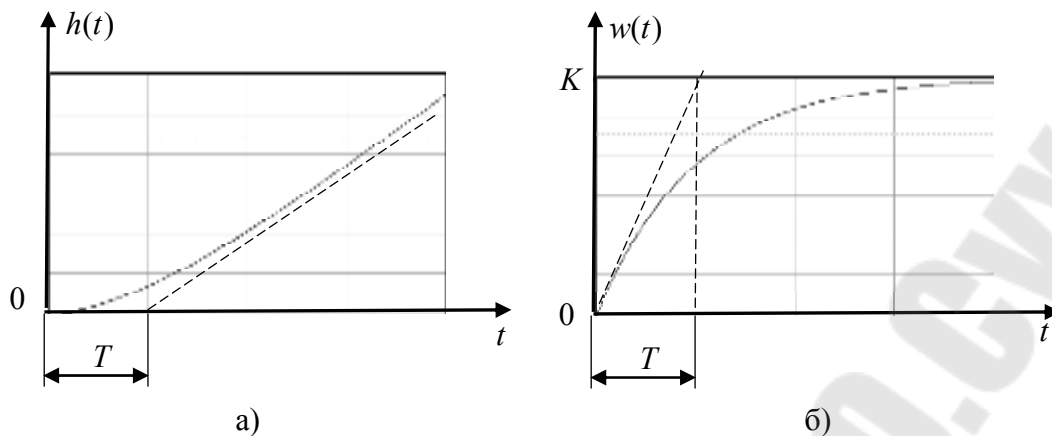


Рис.62. Временные характеристики: переходная (а), весовая (б) интегрирующего звена с замедлением

Интегрирующее звено с форсированием

Дифференциальное уравнение звена имеет вид

$$T_2 \cdot \frac{dx_{\text{ВЫХ}}}{dt} = K \cdot \left(T_1 \cdot \frac{dx_{\text{ВХ}}}{dt} + x_{\text{ВХ}} \right), \quad (58)$$

где T_1, T_2 – постоянные времени звена.

Уравнению (58) соответствует передаточная функция

$$W(p) = \frac{X_{\text{ВЫХ}}(p)}{X_{\text{ВХ}}(p)} = \frac{K \cdot (T_1 \cdot p + 1)}{T_2 \cdot p} = K \cdot \frac{T_1}{T_2} + \frac{K}{T_2 \cdot p}. \quad (59)$$

В литературе интегрирующее звено с форсированием часто встречается под таким названием как пропорционально-интегрирующее звено. Его название как раз соответствует передаточной функции (59).

Примером такого звена может быть комбинация пружины с демпфером (рис.54.г), если в качестве входной величины использовать внешнюю силу F , прикладываемую к точке b , а выходной - перемещение точки b . Также в САУ, в качестве регулятора часто используется электрическая схема на операционном усилителе (рис.20), если

$$Z_1(p) = R_1, Z_2(p) = R_2 + \frac{1}{C_2 \cdot p}.$$

Это звено также является составным и поэтому его основные характеристики можно представить следующим образом (рис.63 – рис.64):

1. ЛАЧХ

$$L(\omega) = 20 \cdot \lg \frac{\sqrt{T_1^2 \cdot \omega^2 + 1}}{\omega \cdot T_2} = L_1(\omega) + L_2(\omega) =$$

$$= 20 \cdot \lg \frac{K}{\sqrt{T_1^2 \cdot \omega^2 + 1}} - 20 \cdot \lg T_2 \cdot \omega;$$

2. ЛФЧХ

$$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) = \arctg(T_1 \cdot \omega) - 90^\circ;$$

3. Переходная характеристика $h(t) = t + K \cdot \frac{T_1}{T_2}$;

4. Весовая характеристика $w(t) = 1(t) + K \cdot \frac{T_1}{T_2} \cdot \delta(t)$.

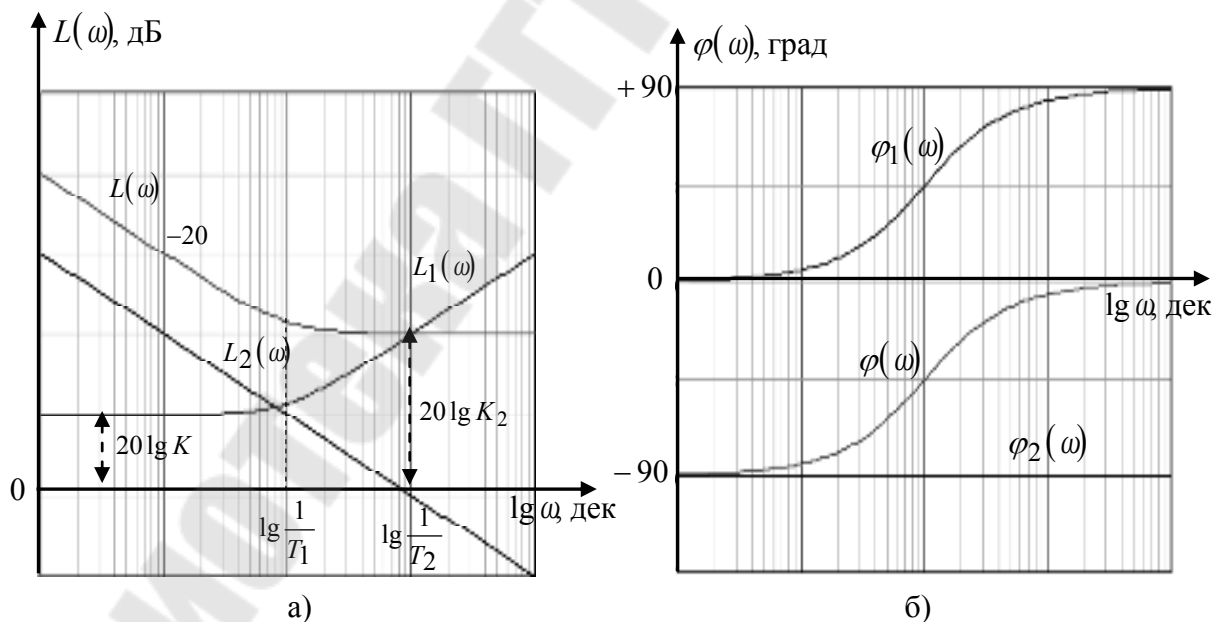


Рис.63. Логарифмические частотные: ЛАЧХ (а), ЛФЧХ (б) характеристики интегрирующего звена с форсированием

По ЛАЧХ и ЛФЧХ интегрирующего звена с форсированием видно, что в области малых частот звено ведет себя как идеальное ин-

тегрирующее. В области больших частот звено ведет себя как безинерционное с постоянным коэффициентом передачи K_2 (рис.63 а).

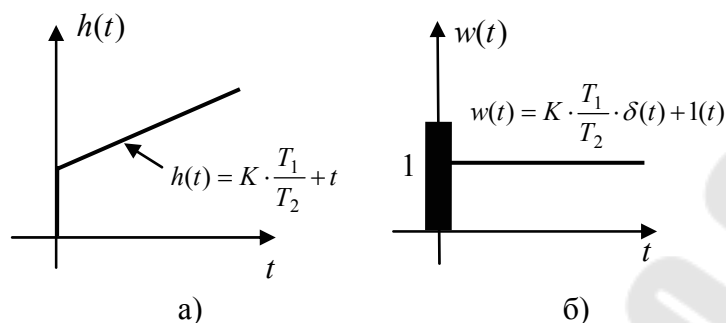


Рис.64. Временные: переходная (а), весовая (б) характеристики интегрирующего звена с форсированием

Свойства звена вводить интегрирующее действие в области малых частот используется для улучшения качественных показателей в САУ.

1.4.2.4. ОСОБЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗВЕНЬЯ

Звено с запаздыванием

Звено с запаздыванием описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$x_{\text{ВЫХ}} = 1 \cdot (t - \tau) \cdot K \cdot x_{\text{ВХ}},$$

где τ – время задержки выходного сигнала $x_{\text{ВЫХ}}$ по отношению к входному $x_{\text{ВХ}}$.

Таковыми звеньями обладают САУ с запаздыванием. Они имеют ту же структуру, что и обыкновенные САУ, но отличаются от последних тем, что в одном или нескольких звеньях имеется запаздывание во времени начала изменения выходной величины τ .

Например, если обыкновенное апериодическое звено описывается уравнением

$$T \cdot \frac{dx_{\text{ВЫХ}}}{dt} + x_{\text{ВЫХ}} = K \cdot x_{\text{ВХ}},$$

то уравнение соответствующего звена с запаздыванием будет иметь вид:

$$T \cdot \frac{dx_{\text{ВЫХ}}}{dt} + x_{\text{ВЫХ}} = K \cdot x_{\text{ВХ}}(t - \tau).$$

Примером звена запаздывания является транспортер (рис.65).

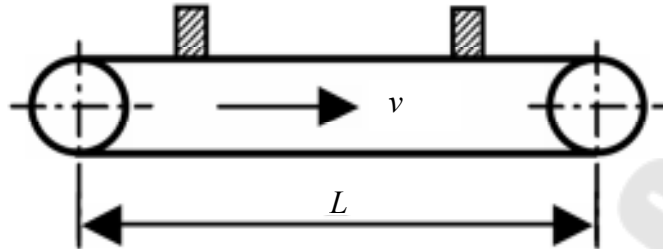


Рис.65. Транспортер. L – длина транспортера, v – скорость движения транспортера

Если за входную величину принять расход материала в начале транспортера, а за выходную – расход в конце транспортера, то выходной сигнал $x_{\text{ВЫХ}}$ будет полностью повторять входной $x_{\text{ВХ}}$, но с запаздыванием τ , равным времени движения материала от места погрузки до места выгрузки материала. При этом величина запаздывания будет определяться уравнением

$$\tau = \frac{L}{v}.$$

Акустическая линия связи (τ – время прохождения звука), или пробка, возникшая на дороге (τ – разница во времени между началом движения первого и последнего автомобиля в очереди) также являются примерами звена с запаздыванием.

Рассмотрим основные характеристики этого звена (рис.66):

1. Передаточная функция $W(p) = K \cdot e^{-p\tau}$;
2. АФЧХ $W(j\omega) = K \cdot e^{-j\omega\tau}$;
3. ЛАЧХ $L(\omega) = 20 \lg K$, дБ;
4. ЛФЧХ $\varphi(\omega) = -\frac{\omega \cdot \tau}{2\pi} \cdot 360$, град;
5. Переходная характеристика $h(t) = K \cdot 1(t - \tau)$;
6. Весовая характеристика $h(t) = K \cdot \delta(t - \tau)$.

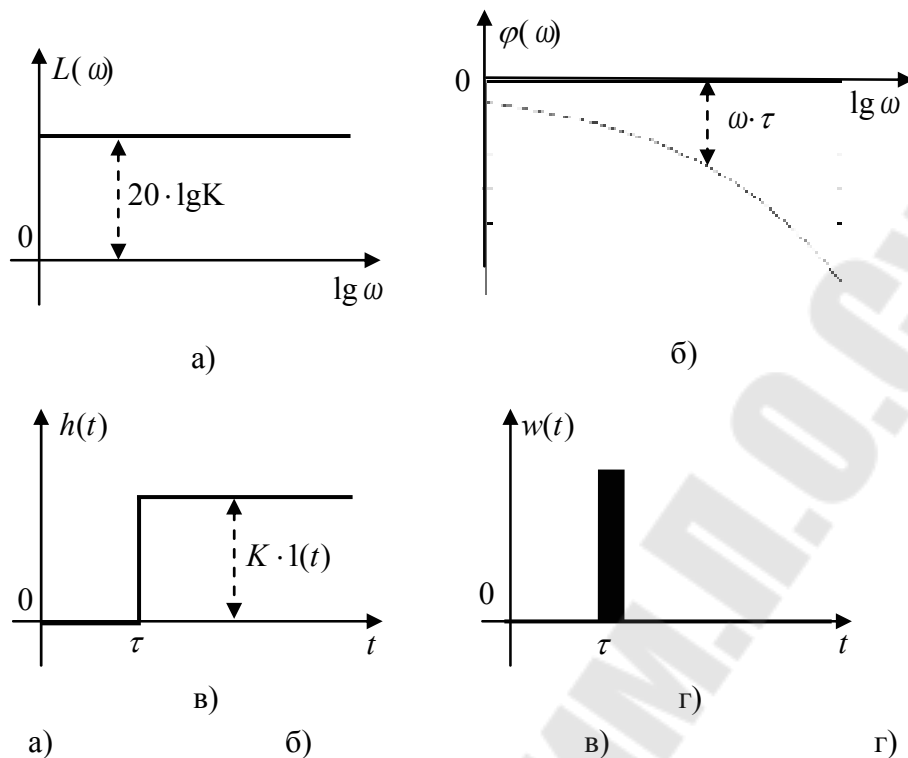


Рис.66. Логарифмические частотные: ЛАЧХ (а), ЛФЧХ (б) и временные: переходная (в), весовая (г) характеристики звена с запаздыванием

Неминимально-фазовые динамические звенья

Звенья позиционного типа (безинерционные, апериодические первого и второго порядков) относятся к устойчивым звеньям или, по-другому, звеньям с самовыравниванием. Под самовыравниванием понимается способность звена самопроизвольно приходить к новому установившемуся значению при ограниченном изменении входной величины или возмущения (скачок входного сигнала $x_{вх} = 1(t)$).

Например, у звеньев интегрирующего типа ограниченное изменение сигнала на входе не вызывает прихода звена к установившемуся режиму, а сигнал на выходе такого звена имеет неограниченное возрастание во времени.

Но существуют звенья, у которых этот процесс выражен еще больше. Это объясняется наличием положительных вещественных корней или комплексных корней с положительной вещественной частью в характеристическом уравнении (характеристическое уравнение получается, если знаменатель передаточной функции приравнять к нулю).

Таким образом, эти звенья будут относиться к категории неустойчивых динамических звеньев. Для понимания этого рассмотрим

пример передаточной функции неустойчивого апериодического звена. Пусть передаточная функция имеет вид

$$W(p) = \frac{K}{T \cdot p - 1}, \quad (60)$$

тогда характеристическое уравнение звена (60) $T \cdot p - 1 = 0$ имеет один положительный вещественный корень $p = \frac{1}{T}$.

Рассмотрим частотные характеристики этого звена:

1. АФЧХ

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= \frac{K}{T \cdot j\omega - 1} \cdot \frac{-1 - T \cdot j\omega}{-1 - T \cdot j\omega} = \frac{-K - T \cdot j\omega}{1 + T^2 \cdot \omega^2} = \\ &= -\frac{K}{1 + T^2 \cdot \omega^2} - j \cdot \frac{K \cdot T \cdot \omega}{1 + T^2 \cdot \omega^2}; \end{aligned}$$

2. АЧХ

$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{1 + T^2 \cdot \omega^2}}; \quad (61)$$

3. ФЧХ

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{-T \cdot \omega}{-1} = \operatorname{arctg}(T \cdot \omega) - 180^\circ. \quad (62)$$

Таким образом, по (61) видно, АЧХ неустойчивого апериодического звена полностью соответствует АЧХ устойчивого апериодического звена, но ФЧХ (62) отличается. Фазовая характеристика неустойчивого звена $\varphi(\omega)$ лежит в третьей декаде на комплексной плоскости и изменяется от -180° до -90° . Для устойчивого апериодического звена

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg}(T \cdot \omega) \text{ и } 0 \leq \varphi \leq -90^\circ.$$

Т.е. разница между устойчивым и неустойчивым звеньями состоит в диапазоне изменения фазовой характеристики $\varphi(\omega)$, при этом амплитудные характеристики у них совпадают.

Наглядно, неустойчивость звена проявляется в виде переходной $h(t)$ и весовой характеристик $w(t)$. Для рассматриваемого неустойчивого апериодического звена они определяются следующими соотношениями

$$h(t) = K \cdot \left(e^{\frac{t}{T}} - 1 \right), \quad w(t) = \frac{K}{T} \cdot e^{\frac{t}{T}}.$$

На рис.67 и рис.68 соответственно приведены логарифмические частотные и временные характеристики неминимально-фазового (неустойчивого) апериодического звена первого порядка.

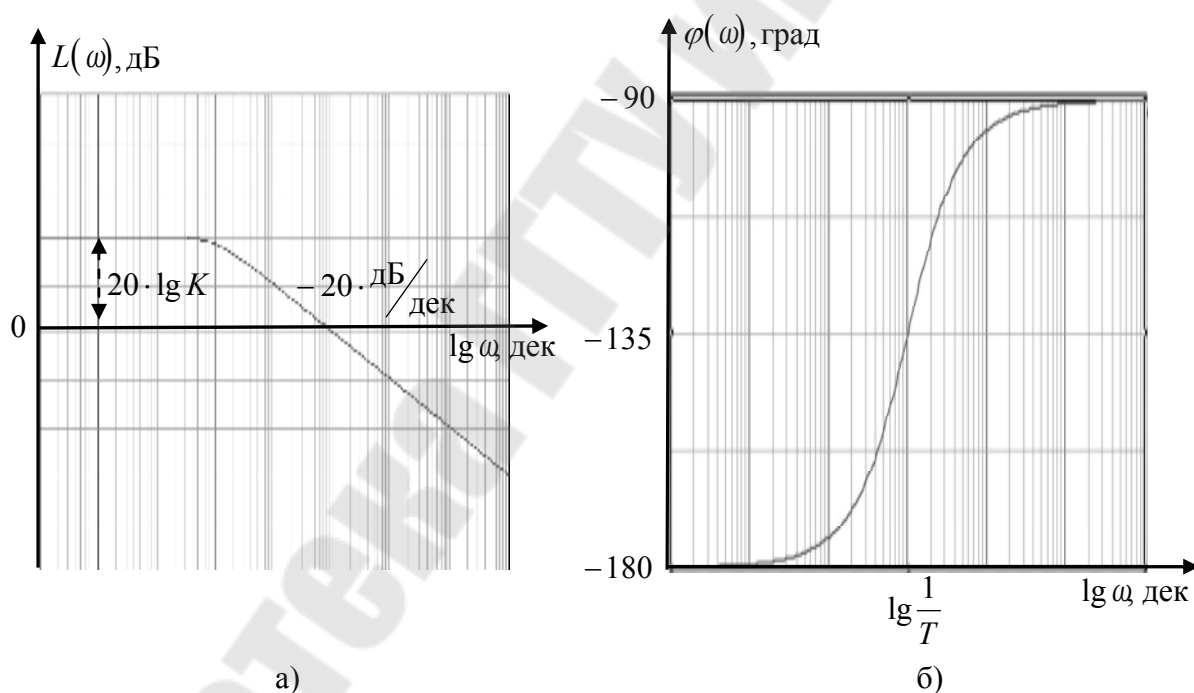


Рис.67. Логарифмические частотные: ЛАЧХ (а), ЛФЧХ (б)) характеристики неминимально-фазового (неустойчивого) апериодического звена

Название «неминимально-фазовое звено» обусловлено тем, что фазовый сдвиг выходного сигнала такого звена по отношению к входному сигналу значительно больше, чем у обычных (минимально-фазовых звеньев).

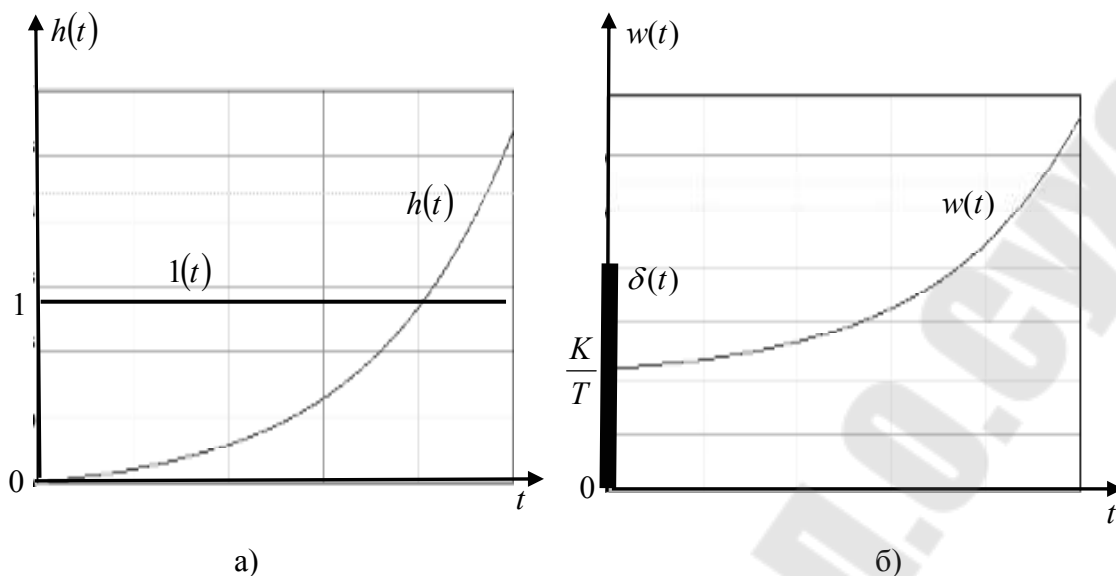


Рис.68. Временные: переходная (а), весовая (б) характеристики неминимально-фазового (неустойчивого) аperiodического звена

Последние дают фазовые сдвиги не более $\pm 90^0$ (звенья первого порядка), не более $\pm 180^0$ (звенья второго порядка), а неминимально-фазовые – значительно большие

Таким звеном может быть, например, двигатель любого типа, если его механическая характеристика (зависимость момента от частоты вращения) $M = f(\omega)$ имеет положительный наклон.

Или, например, если охватить устойчивое аperiodическое звено первого порядка положительной обратной связью с коэффициентом обратной связи $K_{oc} > 1$, то также можно получить неминимально фазовое звено с передаточной функцией (60).

1.4.3. ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ЛАЧХ И ШАБЛОНОВ ДЛЯ ЛФЧХ

Вышеприведенные логарифмические характеристики рассмотренных динамических звеньев показывают их однотипность, а также возможность построения ЛАЧХ ломаной линией, а ЛФЧХ по шаблонам.

Действительно ЛАЧХ для аperiodического звена с коэффициентом передачи $K = 1$ можно приближенно представить так

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{1}{\sqrt{1 + T^2 \cdot \omega^2}} = -20 \lg \sqrt{1 + T^2 \cdot \omega^2}.$$

Если $\omega < \frac{1}{T}$, то $L(\omega) = -20 \lg 1 = 0$;

Если $\omega = \frac{1}{T}$, то $L(\omega) = -20 \lg \sqrt{2} = -3 \text{ дБ} \approx 0$;

Если $\omega > \frac{1}{T}$, то $L(\omega) = -20 \lg(T \cdot \omega)$;

Поэтому получаем, что $L(\omega)$ до частоты излома $\omega = \frac{1}{T}$ — прямая, идущая по оси частот, а за частотой излома $L(\omega)$ представляет собой прямую, идущую с наклоном $-20 \frac{\text{дБ}}{\text{дек}}$ (рис.40.а). Эти приближенные

ЛАЧХ называют асимптотическими, поскольку они являются асимптотами реальных (точных) ЛАЧХ, погрешность при этом не превышает -3 дБ (рис.69).

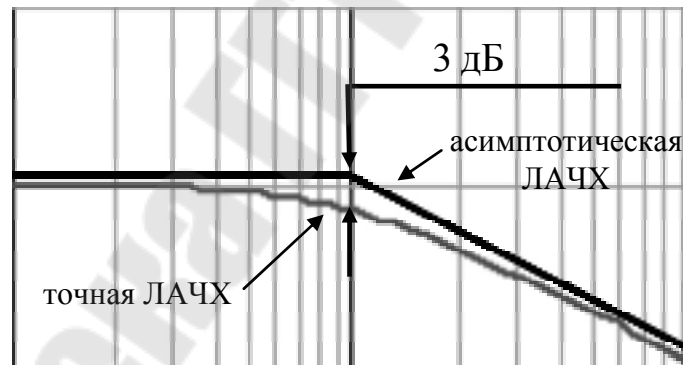


Рис.69. Фрагмент ЛАЧХ на частоте излома $\omega = \frac{1}{T}$

Логарифмические фазовые характеристики удобно строить по шаблонам, имея в виду, что на логарифмической плоскости функция $\pm \arctg(T \cdot \omega)$ симметрична относительно точки с координатами $\left(\frac{1}{T}, \pm 45^\circ\right)$ и ее среднечастотная часть простирается приблизительно на 4 декады по оси частот и 0 до ± 90 по оси фаз.

Пример 11. Построить шаблонную ЛФЧХ для апериодического звена первого порядка с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{1}{T \cdot p + 1} = \frac{1}{0.01 \cdot p + 1}. \quad (63)$$

Для построения шаблонной ЛФЧХ достаточно лишь вычислить при какой частоте ω в декадах характеристика $\varphi(\omega)$ будет иметь перегиб

$$\lg \frac{1}{T} = \lg \frac{1}{0.01} = 2 \text{ дек.}$$

Шаблонная ЛФЧХ, соответствующая (63) приведена на рис.70.

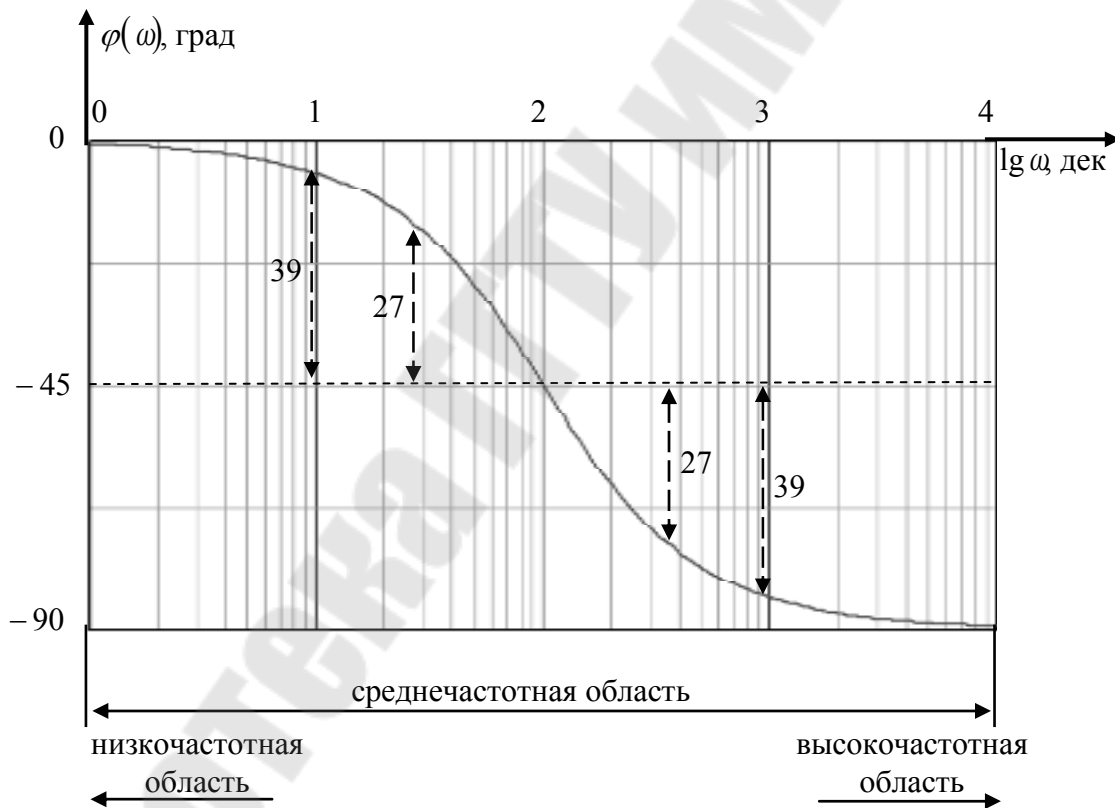


Рис.70. Пример построения шаблонной ЛФЧХ для апериодического звена первого порядка

Если требуется построить ЛАЧХ и ЛФЧХ по составной передаточной функции, то в этом случае ее разбивают на отдельные типовые передаточные функции, далее строят на общей координатной плоскости их ЛАЧХ и ЛФЧХ, после чего производят графическое суммирование

вание элементарных характеристик и получают результирующие логарифмические характеристики составного динамического звена, используя зеркальную симметрию относительно оси частот апериодических и форсирующих звеньев.

1.5. ВИДЫ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ САУ И ИХ ВЗАИМОСВЯЗЬ

С помощью рассмотренных выше характеристик описываются не только типовые динамические звенья, но и реальные элементы, узлы, блоки и САУ в целом.

Рассмотрим классификацию типовых характеристик элементов и САУ (рис.71).

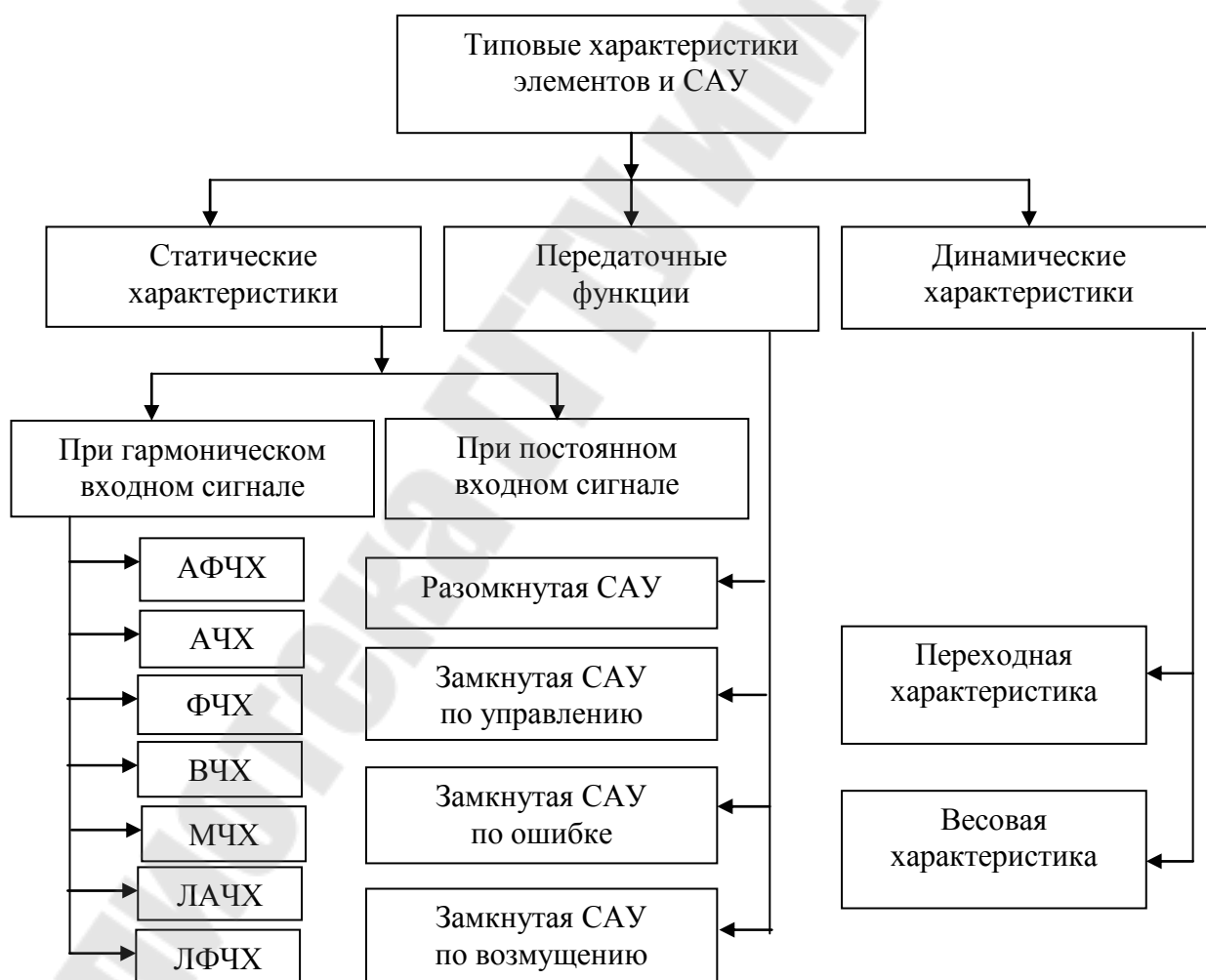


Рис.71. Классификация типовых характеристик элементов и САУ

Из классификации видно, что САУ описываются рядом специфических передаточных функций. Рассмотрим их более подробно.

С помощью правил структурных преобразований одноконтурную САУ с регулированием по отклонению можно представить в нормированном виде, изображенном на рис.72.

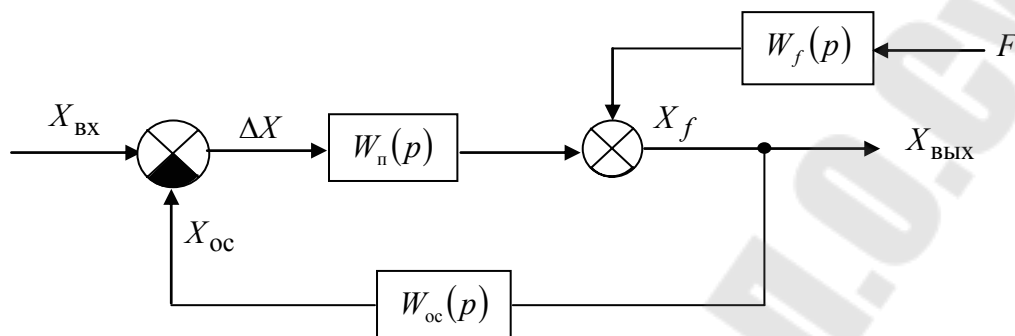


Рис.72. Структурная схема одноконтурной САУ в нормированном виде

Согласно правилу Мейсона (правило суперпозиции), по структурной схеме (рис.72) можно определить типовые передаточные функции по управляющему воздействию при условии $[x_{BX}(p) \neq 0; f(p) = 0]$ и по возмущающему воздействию при условии $[x_{BX}(p) = 0; f(p) \neq 0]$.

Передаточная функция разомкнутой САУ по управлению.

В исходной структурной схеме примем $F(p) = 0$ и разорвем обратную связь (рис.73).

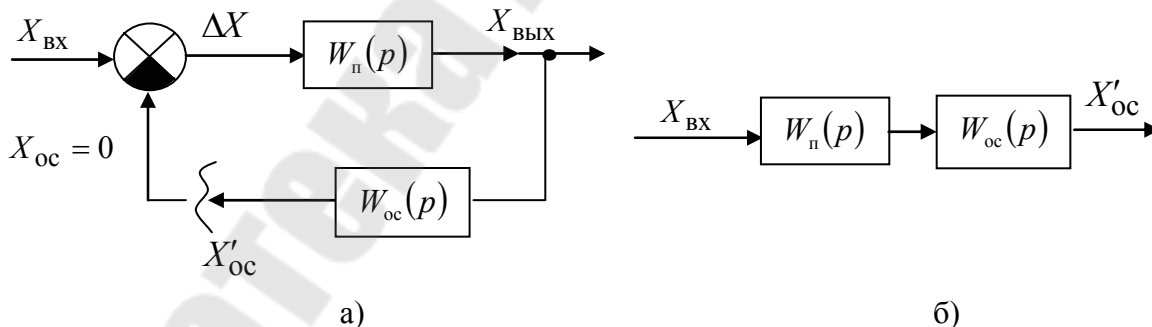


Рис.73. Структурные схемы разомкнутой САУ по управлению: исходная (а) и преобразованная (б).

По рис.73 видно, что передаточная функция разомкнутой САУ по управлению будет

$$W(p) = \frac{X'_{oc}(p)}{X_{BX}(p)} = W_{\pi}(p) \cdot W_{oc}(p).$$

Передачная функция замкнутой САУ по управлению.

Если в исходной структурной схеме замкнуть обратную связь, оставив нулевым сигнал возмущения $F(p) = 0$, то получим

$$\Phi_x(p) = \frac{X_{\text{ВЫХ}}(p)}{X_{\text{ВХ}}(p)} = \frac{W_{\text{п}}(p)}{1 + W_{\text{п}}(p) \cdot W_{\text{ос}}(p)} = \frac{W_{\text{п}}(p)}{1 + W(p)}. \quad (64)$$

При единичной обратной связи (64) примет вид

$$\Phi_x(p) = \frac{W_{\text{п}}(p)}{1 + W_{\text{п}}(p)}.$$

Передачная функция замкнутой САУ по отклонению (ошибке).

Оставим сигнал возмущения нулевым $F(p) = 0$ и обратную связь замкнутой. Используя правила структурных преобразований, по рис.74 найдем искомую передачную функцию $\Phi_{\Delta x}(p)$.

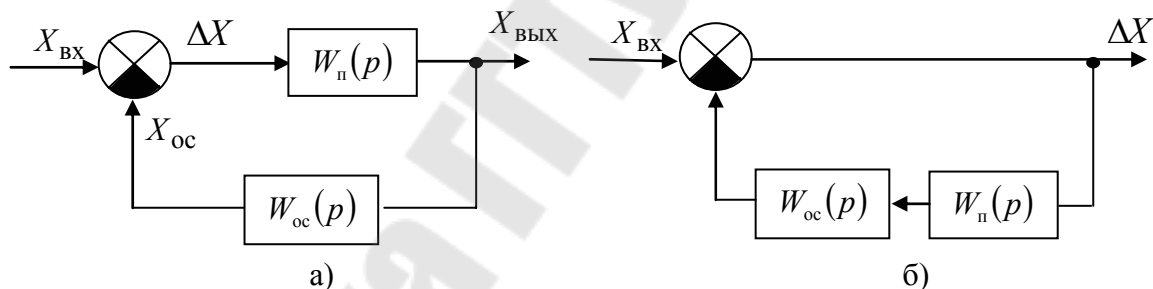


Рис.74. Структурные схемы замкнутой САУ по отклонению: исходная (а) и преобразованная (б).

Она будет определяться следующим выражением

$$\Phi_{\Delta x}(p) = \frac{\Delta X(p)}{X_{\text{ВХ}}(p)} = \frac{1}{1 + W_{\text{ос}}(p) \cdot W_{\text{п}}(p)} = \frac{1}{1 + W(p)}.$$

Передачная функция замкнутой САУ по возмущению.

Теперь, согласно правила Мейсона, положим сигнал управления равным нулю $X_{\text{вх}}(p) = 0$. Структурная схема для этого случая представлена на рис.75.

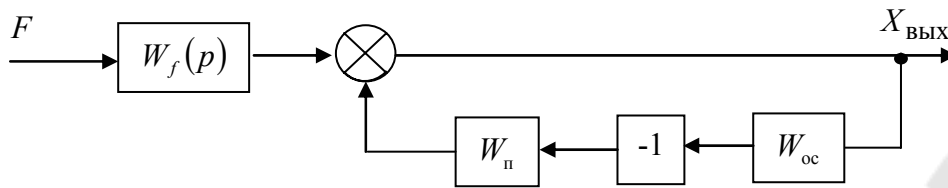


Рис.75. Структурная схема замкнутой САУ по возмущению

По структурной схеме (рис.75) определим искомую передаточную функцию

$$\Phi_f(p) = \frac{X_{\text{ВЫХ}}(p)}{F(p)} = \frac{W_f(p)}{1 + W_{\text{п}}(p) \cdot W_{\text{oc}}(p)} = \frac{W_f(p)}{1 + W(p)}$$

Видно, что все полученные передаточные функции связаны между собой через передаточную функцию разомкнутой САУ по управлению $W(p)$. Это обстоятельство часто используется в частотных методах анализа и синтеза САУ.

Если управляющее и возмущающее воздействия действуют одновременно (рис.72), то изображение выходного сигнала $X_{\text{ВЫХ}}(p)$ САУ можно найти через введенные передаточные функции методом суперпозиции в виде

$$\begin{aligned} X_{\text{ВЫХ}}(p) &= \Phi_x(p) \cdot X_{\text{ВХ}}(p) + \Phi_f(p) \cdot F(p) = \\ &= \frac{W_f(p)}{1 + W(p)} \cdot F(p) + \frac{W_{\text{п}}(p)}{1 + W(p)} \cdot X_{\text{ВХ}}(p). \end{aligned} \quad (65)$$

1.6. СТАТИЧЕСКОЕ И АСТАТИЧЕСКОЕ РЕГУЛИРОВАНИЕ САУ

Кроме рассмотренной классификации типовых динамических звеньев существует еще одна классификация, согласно которой их можно разбить на два типа: статические и астатические звенья.

Динамические звенья, для которых можно задать статическую характеристику в виде жесткой функциональной зависимости выходной величины от входной, называются статическими. Если такая связь отсутствует и каждому значению входной величины соответствует множество значений выходной величины, то такое звено называ-

ется астатическим. Выходная величина астатического звена даже в установившемся режиме является функцией времени (рис.33 б.в.).

Например, апериодическое звено первого порядка, имеющее передаточную функцию (42) является статическим динамическим звеном, т.к. его статическая характеристика, изображенная на рис.33.а, определяется по (42) при условии $p = 0$

$$x_{\text{ВЫХ}} = K \cdot x_{\text{ВХ}},$$

где K – коэффициент передачи звена.

Уже для идеального интегрирующего звена с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{1}{T \cdot p}$$

замену $p = 0$ сделать невозможно. При этом если на вход такого звена подать единичный сигнал $x_{\text{ВХ}} = 1(t)$ в виде скачка, то на выходе будем иметь:

$$x_{\text{ВЫХ}} = \frac{t}{T} \cdot 1(t),$$

т.е. при установившемся сигнале на входе звена равно, например, $x_{\text{ВХ}} = 1$ на выходе будет наблюдаться постоянное линейное нарастание сигнала в соответствии с выражением

$$x_{\text{ВЫХ}} = \frac{t}{T}.$$

Таким образом, все позиционные динамические звенья относятся к классу статических звеньев, а интегрирующие, дифференцирующие, а также неминимально-фазовые (неустойчивые) к классу астатических.

Если на объект регулирования действует сигнал возмущения $F(p)$ (рис.72), то важное значение имеет статическая характеристика САУ в виде $x_{\text{ВЫХ}}(f)$ при постоянном управляющем сигнале на входе САУ $x_{\text{ВХ}} = \text{const}$. В соответствии с тем, какая из двух характеристик

(рис.76) свойственна для данной САУ различают статическое и астатическое регулирование.

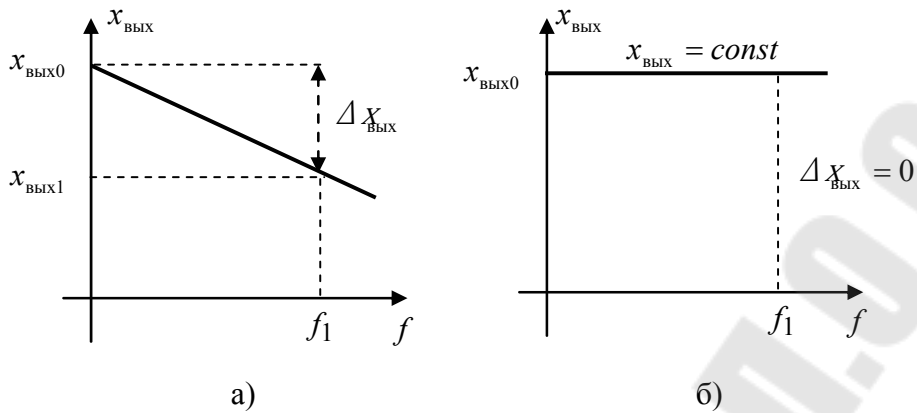


Рис.76. Статические характеристики САУ при статическом (а) и астатическом (б) регулировании

Пример 12. Рассмотрим систему автоматического регулирования уровня воды в баке (рис.77). При этом в качестве выходного сигнала примем уровень воды в баке $x_{\text{ВЫХ}} = y$, а в качестве возмущающего воздействия возьмем поток воды из бака $f = Q$.

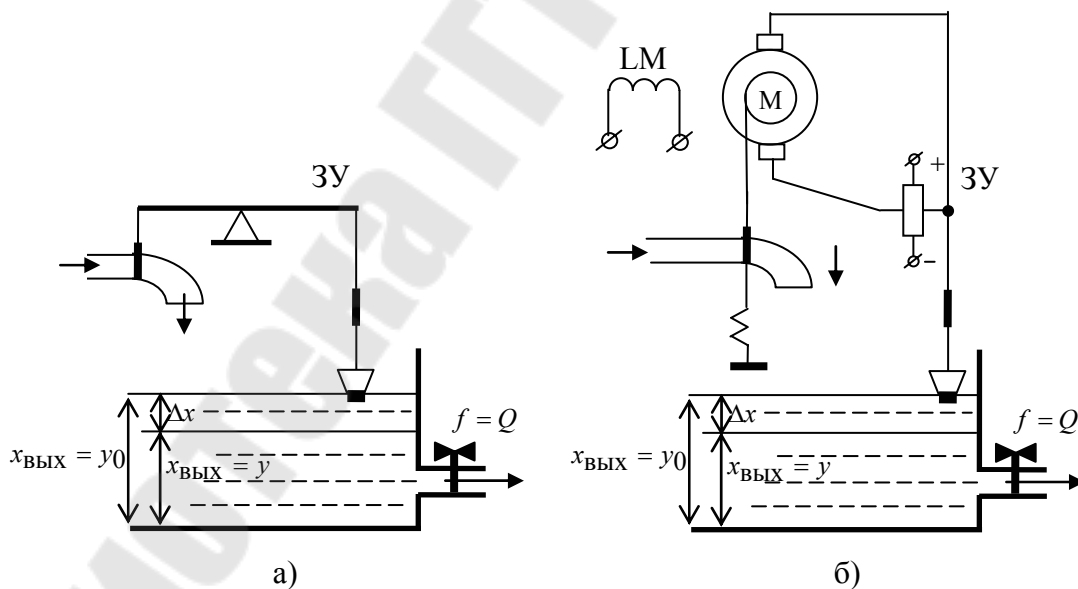


Рис.77. САУ уровнем воды в баке: (а) статическая и (б) астатическая

Сначала рассмотрим статическую САУ (рис.77.а). Пусть при $Q = 0$ имеем $x_{\text{ВЫХ}} = y_0$, при этом отклонение (ошибка управления) также нулевая $\Delta x = 0$. Задающее устройство САУ (ЗУ) при этом настраивается так, чтобы вода в бак не поступала. При $Q \neq 0$, уровень

воды в баке понижается, появляется некоторая ошибка при управлении $\Delta x \neq 0$, поплавков опускается и открывает заслонку, в бак от ЗУ начинает поступать вода. Новое состояние равновесия достигается при равенстве входящего и выходящего потоков воды (но в любом случае при $Q \neq 0$ заслонка должна быть обязательно открыта, что возможно только при $\Delta x \neq 0$). Причем, чем больше Q , тем при больших значениях Δx , устанавливается новое состояние равновесия, т.е. в САУ увеличивается статическая ошибка по возмущению. Статическая характеристика САУ имеет характерный наклон (рис.76.а). Для получения в САУ статического регулирования, все ее звенья должны быть статическими (позиционными).

Часто, для обеспечения требуемого качества САУ статическая ошибка недопустима, тогда переходят к астатическому регулированию, при котором регулируемая величина в установившемся режиме принимает точно требуемое значение независимо от величины возмущающего фактора (рис.77.б). Статическая характеристика астатической САУ не имеет наклона (рис.76.б)). Для того чтобы получить астатическое регулирование, необходимо в САУ включить астатическое звено, например исполнительный электродвигатель M (рис.77.б). Если уровень воды понизится, то поплавков переместит движок потенциометра на некоторую величину, за счет этого появится разность потенциалов на обмотке управления электродвигателя M и он начнет поднимать заслонку до тех пор, пока напряжение на обмотке управления вновь не станет равно нулю, а это возможно только при $x_{\text{вых}} = y_0$. При поднятии уровня воды разность потенциалов сменит знак, и двигатель будет вращаться в противоположную сторону, опуская заслонку.

Достоинства и недостатки статического и астатического регулирования следующие: статические регуляторы обладают статической ошибкой; астатические регуляторы статической ошибки не имеют, но они более инерционны, сложны конструктивно и более дороги. Обеспечение требуемой статической точности регулирования является первой основной задачей при расчете элементов САУ.

2. ПОКАЗАТЕЛИ КАЧЕСТВА РЕГУЛИРОВАНИЯ САУ

Качество процесса регулирования системы автоматического управления определяется следующими показателями: устойчивость, точность, быстродействие и динамичность. При проектировании САУ

необходимо обеспечить каждый из этих показателей, поэтому рассмотрим их подробно.

2.1. УСТОЙЧИВОСТЬ САУ

Понятие устойчивости любой системы в общем случае связано со способностью возвращаться в состояние равновесия после исчезновения внешних сил, которые вывели ее из этого состояния.

Рассмотрим несколько примеров. На рис.78.а изображен шар, лежащий в некотором углублении. При всяком отклонении его от положения равновесия он будет стремиться возвратиться к нему. Такое положение шара будет устойчивым. На рис.78.б изображен другой случай, когда положение шара будет неустойчивым. Шар, изображенный на рис.78.в находится в так называемом безразличном положении равновесия.

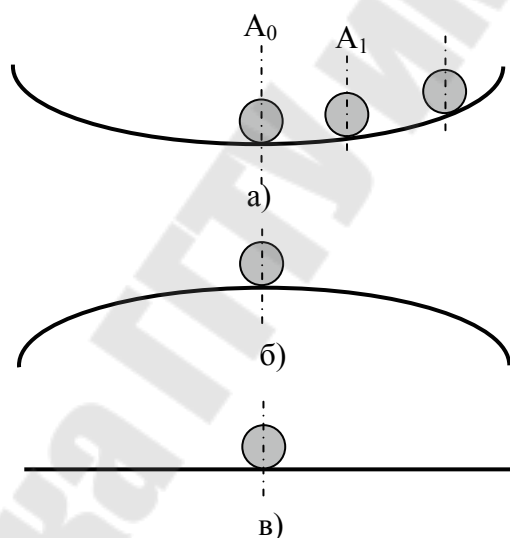


Рис.78. К определению понятия устойчивости системы: система устойчива (а), (в), система неустойчива (б)

Если перейти к системам управления, то устойчивость можно определить следующим образом: если после импульсного воздействия на замкнутую САУ управляющим или возмущающим сигналом в виде дельта-функции $\delta(t)$, она приходит в новое или возвращается в старое положение равновесия, то такая САУ устойчива.

Неустойчивая САУ неработоспособна!

Можно дать и другое определение устойчивости: САУ считается устойчивой, если она занимает требуемое состояние и остается в нем сколь угодно долго. В противном случае САУ будет неустойчивой.

На рис.79 показаны весовые $w(t)$ и переходные $h(t)$ характеристики устойчивых и неустойчивых САУ.

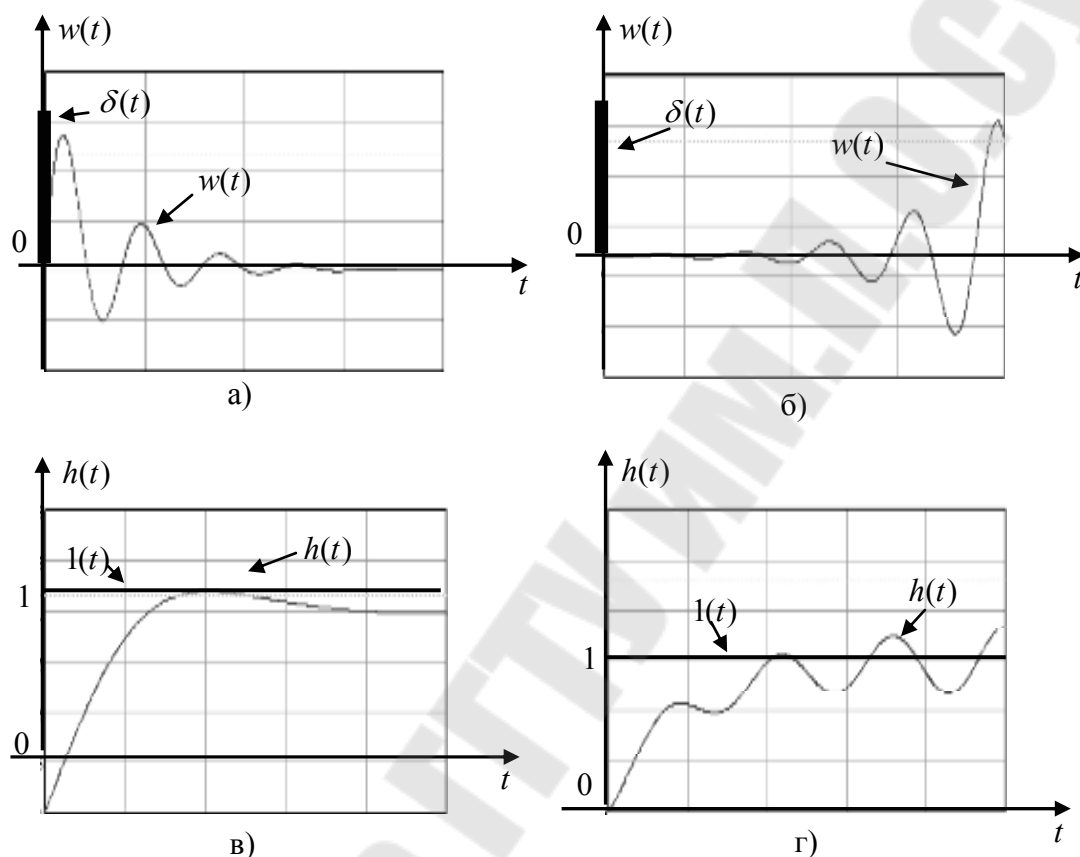


Рис. 79. Временные характеристики устойчивой (а), (в) и неустойчивой (б), (г) САУ

Наиболее распространенными методами анализа устойчивости САУ являются следующие: алгебраический, корневой и частотный методы.

Сущность алгебраического и корневого методов состоит в определении корней и коэффициентов характеристического уравнения САУ, которое можно получить из передаточной функции САУ, если приравнять ее числитель к нулю. Пусть, передаточная функция САУ имеет вид

$$W(p) = \frac{b_0 \cdot p^m + b_1 \cdot p^{m-1} + \dots + b_{m-1} \cdot p + b_m}{a_0 \cdot p^n + a_1 \cdot p^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot p + a_n},$$

тогда соответствующее ей характеристическое уравнение будет иметь вид

$$a_0 \cdot p^n + a_1 \cdot p^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot p + a_n = 0. \quad (66)$$

Корневой метод заключается в следующем: для устойчивости САУ необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения были любыми левыми, то есть имели отрицательные вещественные части (рис.80)

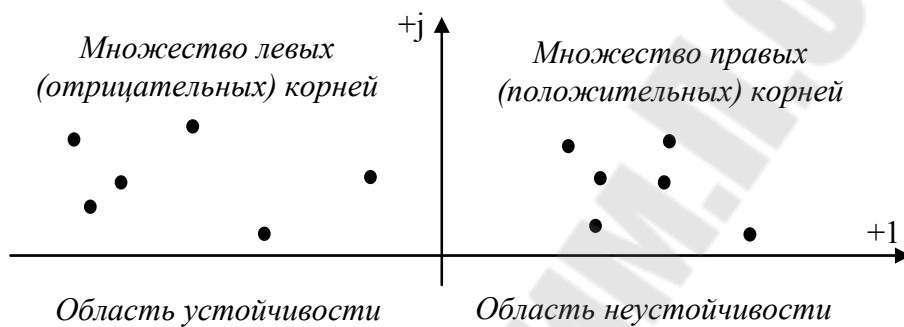


Рис.80. Иллюстрация корневого метода анализа устойчивости

Алгебраический метод определения устойчивости оперирует с коэффициентами характеристического уравнения (66). Далее из коэффициентов характеристического уравнения составляется матрица Гурвица в виде:

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix}.$$

Формируется она следующим образом: в диагональ сверху вниз записываются последовательно коэффициенты a_1, a_2, \dots, a_n . Затем от левого члена диагонали вдоль строки вправо записываются коэффициенты с возрастанием на каждом шаге их номера на две единицы. Если коэффициент с таким номером отсутствует, то вместо него записывают нуль. Далее находится определитель Гурвица Δ_n и его диагональные миноры Δ_i , где $i = 1, \dots, n-1$

$$\Delta_1 = |a_1|; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}; \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}; \dots; \Delta_n = a_n \cdot \Delta_{n-1}.$$

Алгебраический метод устойчивости звучит так: если, при $a_n > 0$ положительны все n определителей Δ_i , то САУ устойчива. Если хотя бы один определитель отрицателен, то САУ неустойчива.

Пример 13.

Пусть характеристическое уравнение САУ имеет вид

$$p^2 + 5p + 6 = 0.$$

Его корни $p_1 = -2$; $p_2 = -3$ отрицательны, следовательно, согласно корневого критерия устойчивости, САУ устойчива.

По алгебраическому критерию устойчивости имеем:

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ a_0 & a_2 \end{bmatrix}; \Delta_1 = |a_1| = 5 > 0; \Delta_n = a_2 \cdot \Delta_1 = 6 \cdot 5 = 30 > 0$$

Так как все определители положительны, то САУ устойчива.

Эти методы могут быть оперативно использованы, если порядок характеристического уравнения невысок. У сложных САУ порядок уравнения может достигать 10 и более, поэтому более широкое употребление получил частотный метод анализа устойчивости. Он основан на использовании частотного критерия Найквиста и Михайлова, согласно которому устойчивость САУ определяется по ЛАЧХ и ЛФЧХ, построенным для разомкнутой САУ.

Согласно этого критерия система будет устойчивой, если ее ЛФЧХ (для разомкнутого состояния) будет пересекать уровень -180° в зоне положительной ЛАЧХ четное число раз (рис.81).

Устойчивая САУ работоспособна. Степень ее устойчивости определяется запасами устойчивости по фазе (Ψ_0) и амплитуде (L_0). На рис.81.г. показано определение запасов устойчивости по логарифмическим частотным характеристикам.

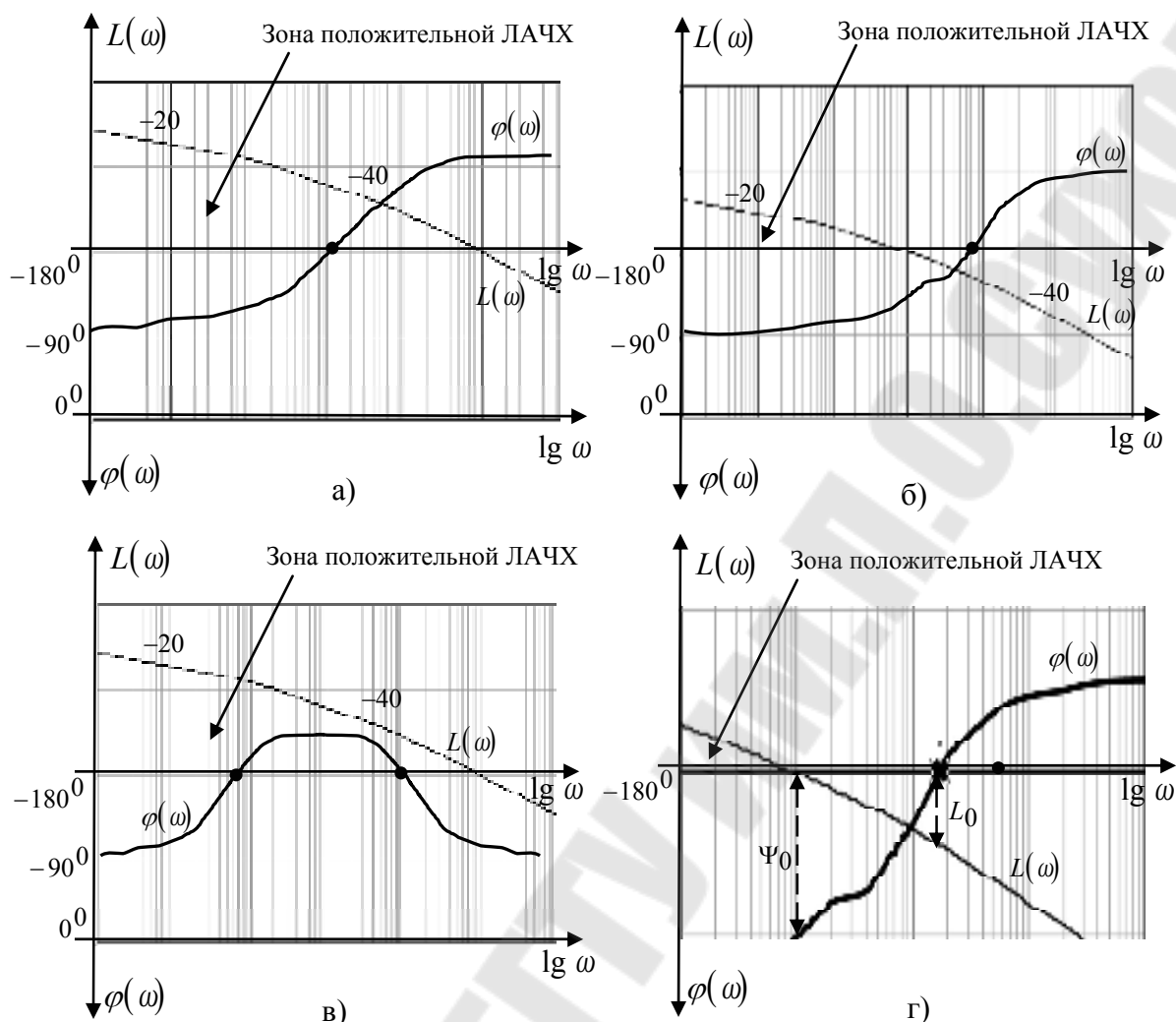


Рис.81. Примеры ЛЧХ устойчивых (б), (в) и неустойчивой (а) и определение запасов устойчивости

Запас устойчивости САУ по амплитуде (L_0) – это величина (ЛЧХ) в децибелах (дБ), которая показывает, насколько нужно изменить коэффициент передачи системы K при неизменных фазовых соотношениях $\varphi(\omega) = const$, чтобы привести ее к границе устойчивости.

Запас устойчивости САУ по фазе (Ψ_0) – величина угла разности фаз в градусах, которая показывает, на сколько должен возрасти отрицательный сдвиг по фазе (запаздывание по фазе) в системе на частоте среза (частота, на которой $L(\omega) = 0$) при неизменном значении коэффициента передачи K , чтобы система оказалась на границе области устойчивости (выходной $x_{\text{вых}}$ и входной $x_{\text{вх}}$ сигналы находились бы в противофазе).

Обеспечение запаса устойчивости необходимо по следующим причинам:

1. При составлении уравнений отдельных элементов допускается некоторая идеализация протекающих в них физических процессов (учитываются только главные факторы и отбрасываются второстепенные);

2. Линеаризация нелинейных уравнений приводит к их еще большей приближенности;

3. Конструктивные параметры элементов, входящие в коэффициенты уравнений, определяются с некоторой погрешностью;

4. При эксплуатации систем возможны изменения параметров элементов вследствие температурных колебаний, старения, нестациональности и т.д.

Наличие определенного запаса устойчивости гарантирует сохранение устойчивости системы при изменении ее параметров в определенных пределах. Чем больше запас устойчивости, тем меньше вероятность того, что система в процессе эксплуатации станет неустойчивой. Запас устойчивости необходим еще и потому, что он определяет характер переходных процессов в системах. Наличие определенного запаса устойчивости обеспечивает работу реальной системы в области устойчивости с требуемым качеством переходного процесса.

Пример 14. Определить устойчивость электромеханической следящей САУ, изображенной на структурной схеме рис.82.

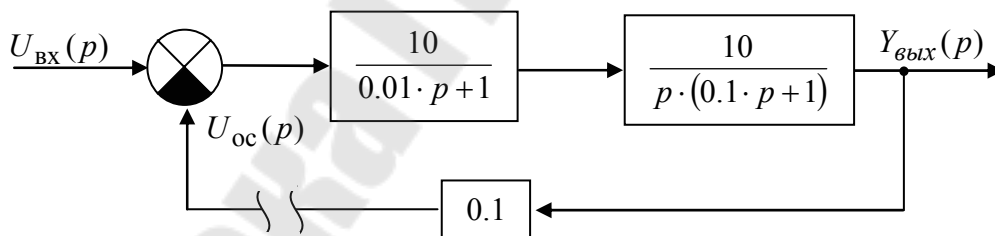


Рис.82. Структурная схема ЭГСАУ к примеру 14

По рис.82 передаточная функция разомкнутой САУ будет иметь вид

$$W(p) = \frac{U_{ос}(p)}{U_{вх}(p)} = \frac{10}{p \cdot (0.1 \cdot p + 1) \cdot (0.01 \cdot p + 1)}. \quad (67)$$

Рассчитаем:

$$20 \cdot \lg K = 20 \text{ дБ}, \lg \omega_1 = \lg \frac{1}{0.01} = 2, \lg \omega_2 = \lg \frac{1}{0.1} = 1.$$

Совмещенные ЛАЧХ и ЛФЧХ САУ, построенные по (67) представлены на рис.83.

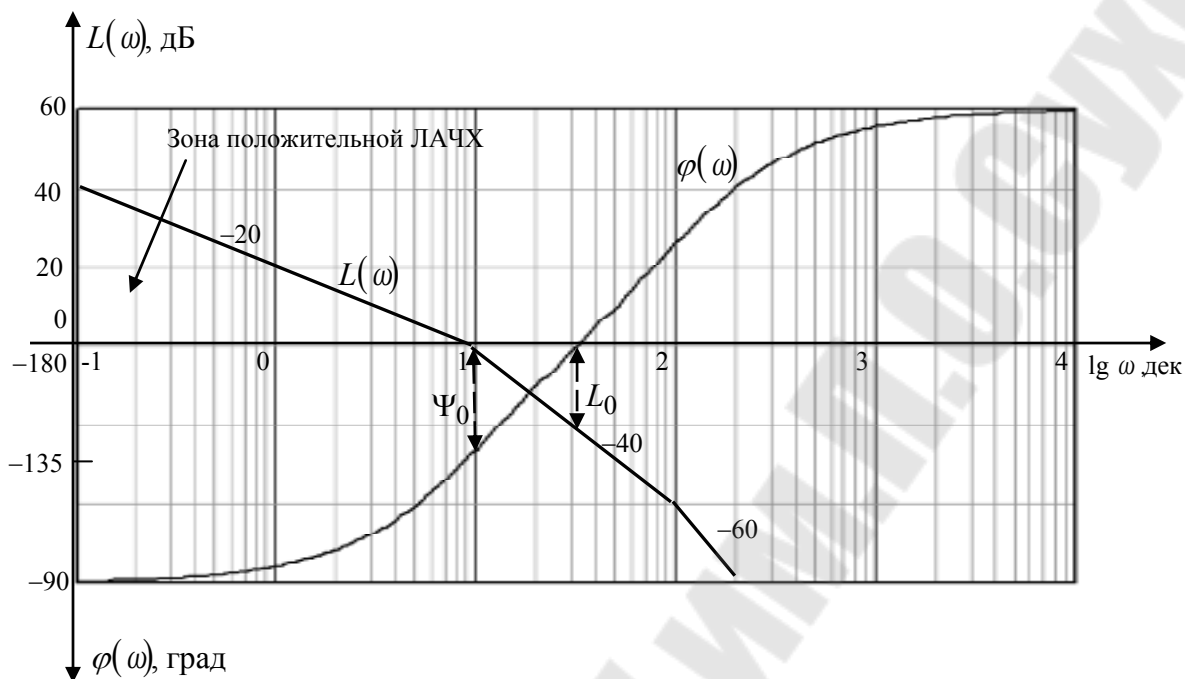


Рис.83. ЛАЧХ и ЛФЧХ ЭГСАУ к примеру 13

По ЛЧХ определяем $L_0 = 20$ дБ, $\Psi_0 = 42^\circ$.

Из этого заключаем, что рассматриваемая САУ (рис.82) устойчива.

2.2. ТОЧНОСТЬ САУ

САУ считается точной, если ее ошибка δ_x в установившемся режиме не превышает заданного (допустимого значения) $[\delta_x]$, т.е. если выполняется неравенство

$$\delta_x \leq [\delta_x].$$

В общем случае ошибка управления представляет собой разность между задаваемым (идеальным) и реальным значениями выходного сигнала

$$\delta_x = x_{\text{ВЫХ}}^{\text{зад}} - x_{\text{ВЫХ}}^{\text{реал}}.$$

В случае отсутствия ошибки в САУ сигнал рассогласования Δx будет нулевым

$$\Delta x = x_{\text{ВХ}}^{\text{зад}} - x_{\text{ОС}}^{\text{зад}} = x_{\text{ВХ}}^{\text{зад}} - K_{\text{ОС}} \cdot x_{\text{ВЫХ}}^{\text{зад}},$$

где $K_{\text{ОС}}$ – коэффициент передачи обратной связи.

Значит между сигналом задания $x_{\text{ВХ}}^{\text{зад}}$ и идеальным значением выходного сигнала $x_{\text{ВЫХ}}^{\text{зад}}$ имеется связь

$$x_{\text{ВЫХ}}^{\text{зад}} = \frac{1}{K_{\text{ОС}}} \cdot x_{\text{ВХ}}^{\text{зад}}.$$

Поэтому ошибку можно определять по следующей формуле

$$\delta_x = x_{\text{ВЫХ}}^{\text{зад}} - x_{\text{ВЫХ}}^{\text{реал}} = \frac{x_{\text{ВХ}}^{\text{зад}}}{K_{\text{ОС}}} - \frac{x_{\text{ОС}}^{\text{реал}}}{K_{\text{ОС}}} = \frac{\Delta x}{K_{\text{ОС}}}.$$

Из последнего выражения видно, что понятия «ошибка управления» и «сигнал рассогласования» тождественны только при $K_{\text{ОС}} = 1$.

Точность САУ определяют экспериментально или рассчитывают в установившемся режиме при типовых управляющих $x_{\text{ВХ}}(t)$ или возмущающих $f(t)$ сигналах, подбирая их в зависимости от назначения САУ.

На рис.84. показано как в САУ с единичной обратной связью $K_{\text{ОС}} = 1$ при скачке входного сигнала $x_{\text{ВХ}}(t) = 1(t)$ определяется **статическая ошибка** $\delta_{\text{СТ}}$, при входном сигнале, нарастающим с постоянной скоростью $x_{\text{ВХ}}(t) = t$, - **кинетическая ошибка** $\delta_{\text{К}}$, при входном сигнале, нарастающим с постоянным ускорением $x_{\text{ВХ}}(t) = t^2$, - **динамическая ошибка** $\delta_{\text{ДИН}}$, при гармоническом входном сигнале $x_{\text{ВХ}}(t) = \sin(\omega \cdot t)$, - амплитуда **синусной ошибки** $\delta_{\text{СИН}}$. Причем все эти ошибки определяются как по управлению, так и по возмущению.

По параметрам входных сигналов и допустимым величинам ошибок $[\delta]$ рассчитываются по Бессекерскому В.А. значения требуемых коэффициентов передачи разомкнутой САУ на определенных частотах.

В логарифмическом масштабе они равны:

$$L_{\text{СТ}} = 20 \cdot \lg A_{\text{СТ}} = 20 \cdot \lg \frac{X_{\text{ВХ.м}} + [\delta_{\text{ф}}]}{[\delta_{\text{СТ}}]}, \quad (68)$$

$$L_{\text{К}} = 20 \cdot \lg A_{\text{К}} = 20 \cdot \lg \frac{\dot{X}_{\text{ВХ.м}} + [\Delta \dot{x}_{\text{ф}}]}{[\delta_{\text{К}}]}, \quad (69)$$

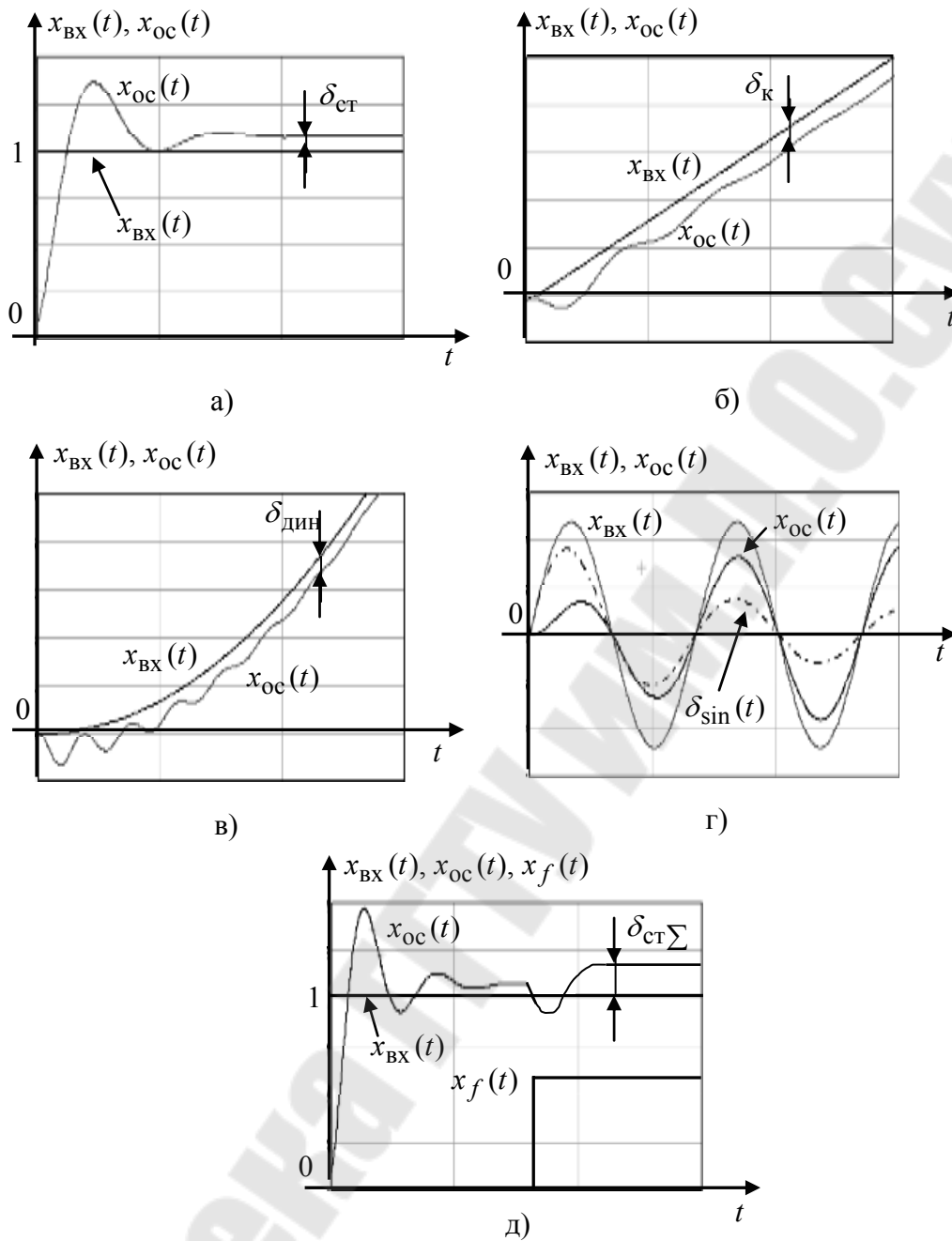


Рис.84. Определение статической (а), кинетической (б), динамической (в), синусной (г) и суммарной статической (д) от сигналов управления и возмущения.

$$L_s^{0,0} = 20 \cdot \lg A_s = 20 \cdot \lg \frac{X_{\text{BX.m}} + [\delta_f]}{[\delta_{\text{sin}}]}; \quad (70)$$

$$L_s^{0,20} = L_s^{1,20} = 20 \cdot \lg A_s = 20 \cdot \lg \frac{X_{\text{BX.m}} \cdot \left(1 + \frac{[\Delta \dot{x}_f]}{\dot{x}_{\text{BX.m}}}\right)}{[\delta_{\text{sin}}]}; \quad (71)$$

$$L_s^{0,40} = L_s^{1,40} = 20 \cdot \lg A_s = 20 \cdot \lg \frac{X_{\text{вх.м}} \cdot \left(1 + \frac{[\Delta \dot{x}_f]}{\ddot{x}_{\text{вх.м}} \cdot T_1}\right)}{[\delta_{\text{син}}]}; \quad (72)$$

$$L_s^{2,40} = 20 \cdot \lg A_s = 20 \cdot \lg \frac{X_{\text{вх.м}}}{[\delta_{\text{син}}]}, \quad (73)$$

где $X_{\text{вх.м}}$, $\dot{X}_{\text{вх.м}}$, $\ddot{X}_{\text{вх.м}}$ – максимальные значения входного сигнала, его скорости и ускорения при скачке, линейном и гармоническом задании;

$[\delta_{\text{ст}}]$, $[\delta_{\text{к}}]$, $[\delta_{\text{син}}]$ – допустимые общие статическая, кинетическая и синусная ошибки;

$[\delta_{\text{ф}}]$, $[\Delta \dot{x}_f]$ – допустимые статическая и кинетическая ошибки по возмущению;

$\omega = \frac{1}{T_1}$ – первая частота излома ЛАЧХ САУ.

На логарифмической плоскости эти величины отмечаются ординатами, так называемых, контрольных точек:

1. Контрольная точка статической точности $L_{\text{ст}}$ строится по (68) на любой частоте, но под начальным участком ЛАЧХ с наклоном 0 дБ/дек;

2. Контрольная точка кинетической точности $L_{\text{к}}$ строится по (69) на частоте $\omega = 1 \text{ с}^{-1}$ (0 дек);

3. Контрольная точка синусной точности $L_{\text{син}}$ строится по (70) – (73) на частоте эквивалентного входного гармонического сигнала

$$\omega = \Omega = \frac{\ddot{x}_{\text{вх.м}}}{\dot{x}_{\text{вх.м}}}.$$

Выбор формулы для расчета $L_{\text{син}}$ ведется в зависимости от того под какой участок ЛАЧХ (с каким наклоном) попадает Ω и каков астатизм системы. В обозначении $L^{a,b}$ первый индекс означает порядок астатизма по управлению, второй – наклон участка ЛАЧХ, для которого справедливо это соотношение.

Таким образом, точность САУ определяется величинами ошибок при типовых входных $x_{\text{вх}}$ или возмущающих x_f воздействиях. Эти ошибки определяются в установившемся режиме. Имеет ли САУ

ту или иную ошибку зависит от того, какова степень астатизма системы по управлению и по возмущению.

Степень астатизма определяется степенью интеграла передаточной функции САУ в разомкнутом состоянии $W(p)$

$$W(p) = \frac{Q(p)}{N(p) \cdot p^\nu},$$

где ν – степень астатизма;

$Q(p)$ – многочлен числителя передаточной функции $W(p)$;

$N(p)$ – многочлен знаменателя передаточной функции $W(p)$;

Если $\nu = 0$, то это статическая САУ, имеющая статическую ошибку $\delta_{ст} = const$ и бесконечно большие кинетическую $\delta_k = \infty$ и динамическую $\delta_{дин} = \infty$. Статические САУ не способны правильно обрабатывать входные сигналы с линейным нарастанием $x_{вх} = v \cdot t$ и с постоянным ускорением $x_{вх} = a \cdot t^2$. Начальный участок ЛАЧХ статической САУ имеет наклон 0 дБ/дек.

Любая астатическая САУ ($\nu \geq 0$) статической ошибки не имеет. Начальный участок ЛАЧХ с астатизмом первого порядка $\nu = 1$ имеет наклон -20 дБ/дек. Такая САУ обладает конечной кинетической ошибкой $\delta_k = const$ и бесконечно большой динамической ошибкой $\delta_{дин} = \infty$.

Если астатизм САУ $\nu = 2$, то $\delta_{ст} = 0$, $\delta_k = 0$, $\delta_{дин} = const$, а начальный участок ЛАЧХ имеет наклон -40 дБ/дек.

На рис.85 приведены примеры точных и недостаточно точных САУ.

Если ЛАЧХ разомкнутой САУ проходит выше контрольной точки, по крайней мере, на 3 дБ, то ее точность будет не хуже заданной $[\delta]$.

По рис.85.б. видно, что САУ не достаточно точно обрабатывает гармонический входной сигнал на частоте $\omega = \Omega$ (система имеет недопустимо большую синусную ошибку δ_{sin}), а в САУ (рис.85.в) присутствует недопустимо большая кинетическая ошибка δ_k .

Если проводится синтез САУ, то в техническом задании на проектирование указываются допустимые ошибки $[\delta]$, на основании которых можно по формулам (68) - (73) определить контрольные точки

и проверить синтезированную САУ на точность. Если контрольные точки лежат ниже отрезков ЛАЧХ синтезируемой САУ, то САУ синтезирована согласно техническому заданию, если же выше, то требуется коррекция САУ, то есть необходимо выяснить за счет чего поднять отрезки ЛАЧХ и на сколько, чтобы при этом САУ не потеряла устойчивость.

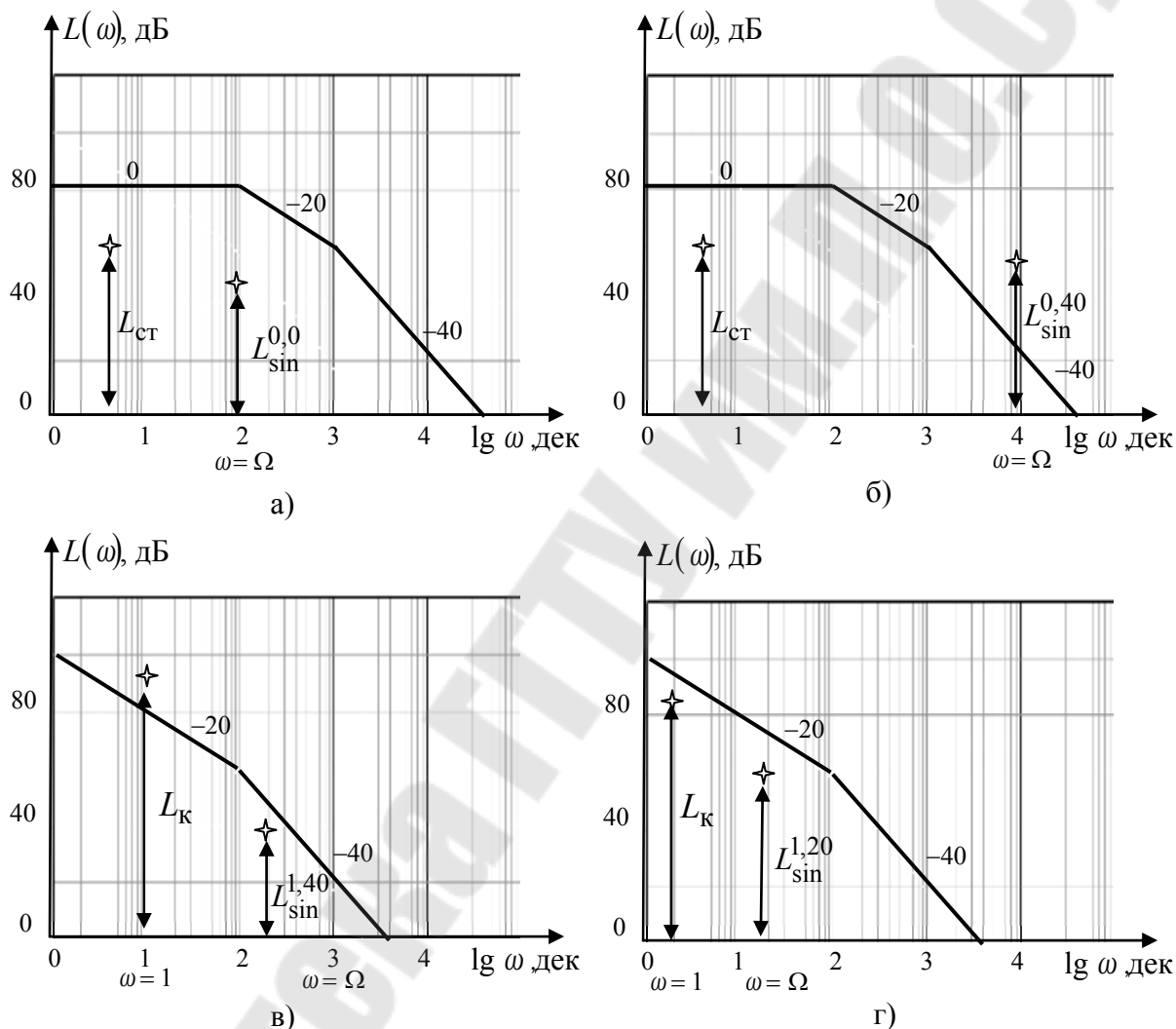


Рис.85. Примеры точных (а) и (г) и недостаточно точных (б) и (в) САУ.

При анализе САУ, наоборот, зная контрольные точки, L_{ct} , L_{sin} , L_k (они должны лежать на ЛАЧХ), определяют допустимые ошибки $[\delta]$ по следующим формулам

$$\delta_{ct} = \frac{x_{вх.m} + \Delta\delta_f}{10^{\frac{L_{ct}}{20}}}; \quad [\delta_k] = \frac{\dot{x}_{вх.m} + [\Delta\dot{x}_f]}{10^{\frac{L_k}{20}}}$$

$$[\delta_{sin}] = \frac{x_{\text{вх.}m} \cdot \left(1 + \frac{\Delta \dot{x}_f}{\dot{x}_{\text{вх.}m}}\right)}{10^{\frac{L_{sin}^{0,20}}{20}}}; [\delta_{sin}] = \frac{x_{\text{вх.}m} \cdot \left(1 + \frac{[\Delta \dot{x}_M]}{\dot{x}_{\text{вх.}m} \cdot T_1}\right)}{10^{\frac{L_{sin}^{1,40}}{20}}}.$$

2.3. БЫСТРОДЕЙСТВИЕ И ДИНАМИЧНОСТЬ САУ

САУ считается достаточно быстродействующей, если время переходного процесса $t_{\text{пер}}$ в ней не больше допустимого

$$t_{\text{пер}} \leq [t_{\text{пер}}].$$

На переходной характеристике $h(t)$ (рис.86.а) быстродействие определяется временем первого перехода $\tau_{\text{пп}}$, достижения максимума τ_{max} и достижения установившегося значения $\tau_{\text{пер}}$ (как правило, требуется, чтобы выходная величина попала в 2 ÷ 5 % зону от своего установившегося значения).

На логарифмической плоскости (рис.86.б) быстродействие определяется частотой среза $\omega_{\text{ср}}$, так как от нее непосредственно зависят указанные временные показатели быстродействия, причем, обратно пропорционально

$$\tau_{\text{пп}} \approx (0.5 \div 0.7) \cdot \pi \cdot \omega_{\text{ср}}^{-1};$$

$$\tau_{\text{max}} \approx \pi \cdot \omega_{\text{ср}}^{-1};$$

$$\tau_{\text{пер}} \approx (2 \div 4) \cdot \pi \cdot \omega_{\text{ср}}^{-1}.$$

Чем меньше временные показатели τ (или больше частота среза $\omega_{\text{ср}}$), тем быстрее действует САУ.

Динамичность САУ определяется показателями формы переходной характеристики (рис.83.а), а именно:

1. Перерегулирование $\sigma\% = \frac{X_{\text{вых макс}} - X_{\text{вых уст}}}{X_{\text{вых уст}}} \cdot 100\%$;

2. Период колебаний $T_{\text{кол}} \approx 2\pi \cdot \omega_{\text{ср}}^{-1}$;

3. Число колебаний N .

Чем меньше показатели формы $h(t)$ по сравнению с допустимыми, тем динамичнее система.

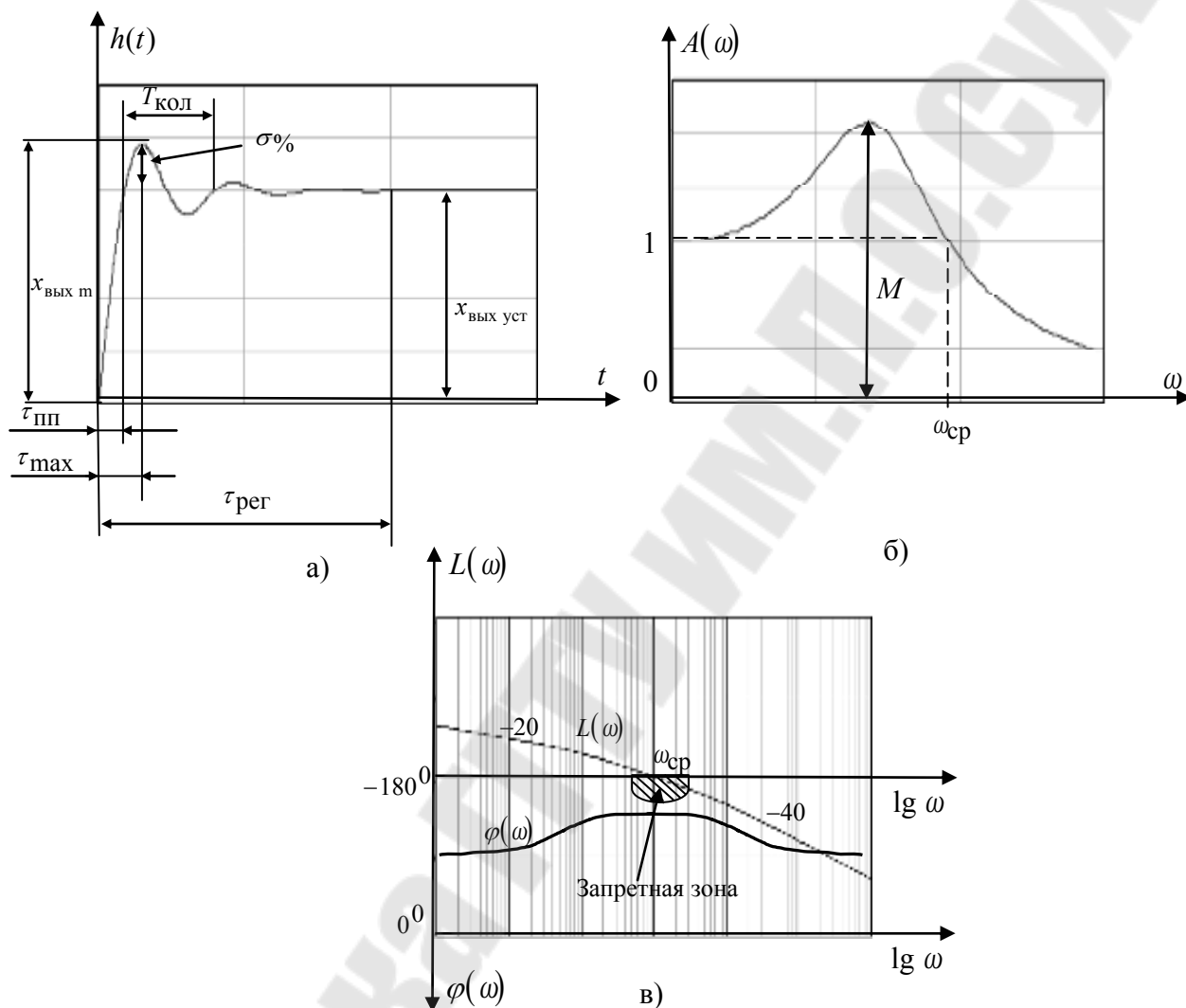


Рис.86. Определение быстродействия и динамичности по переходной (а), амплитудно-частотной для замкнутой САУ (б), логарифмическим для разомкнутой (в) характеристикам САУ

Склонность САУ к колебаниям определяется еще одним показателем динамичности, называемым колебательностью M . Показатель колебательности M – это максимальное значение ординаты амплитудно-частотной характеристики замкнутой САУ $A(\omega)$ при начальной ординате равной единице (рис.86.б). Считается, что в хорошо демпфированных системах колебательность не должна превосходить зна-

чения $M = 1.1 \div 1.5$. Например, в САУ синтезированной на технический оптимум $M = 1.05$.

Колебательность M связана напрямую с устойчивостью САУ. Чем меньше запасы устойчивости САУ по фазе (Ψ_0) и амплитуде (L_0), тем больше склонность системы к колебаниям и больше M .

Чтобы САУ оставалась устойчивой при заданном в техническом задании на проектирование показателе колебательности $[M]$, необходимо, чтобы ЛФЧХ $\varphi(\omega)$ разомкнутой САУ не заходила в так называемую запретную зону (рис.86.в). При этом для определения захода или (не захода) фазовой характеристики $\varphi(\omega)$ не обязательно строить ЛФЧХ полностью. Достаточно определить выполняется ли неравенство

$$180 - |\varphi_{\max}| \geq \gamma_{\max},$$

где $\gamma_{\max} = \arccos \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{M}$ – наибольшая глубина запретной зоны;

φ_{\max} – ЛФЧХ на частоте, соответствующей максимальной глубине запретной зоны γ_{\max} (рис.87).

Пример построения запретной зоны на логарифмической плоскости по заданному показателю колебательности M приведен на рис.87.

Показатели быстродействия и динамичности можно определять по формулам связи, полученным эмпирически

$$\begin{cases} M = 0.025 \cdot \sigma_{\%} + 1; \\ \omega_{\text{ср}} \cdot t_{\text{пер}} = 5.0 + 0.18 \cdot \sigma_{\%} - 0.002 \cdot (\sigma_{\%})^2; \\ M = \frac{1}{\sin \Psi_0}. \end{cases} \quad (74)$$

Пример 15. Для показателя колебательности $M = 1,5$ построить запретную зону.

Определим основные параметры запретной зоны по формулам

$$L_M = 20 \cdot \lg \frac{M}{M-1} = 20 \cdot \lg \frac{1,5}{1,5-1} = 9.54 \text{ дБ}$$

$$L_m = 20 \cdot \lg \frac{M}{M+1} = 20 \cdot \lg \frac{1.5}{1.5+1} = -4.44 \text{ дБ}$$

$$L_{\text{центр}} = 0,5 \cdot (L_M - |L_m|) = 0,5 \cdot (9.54 - |4.44|) = 2.55 \text{ дБ}$$

$$L_{\text{макс}} = 0,5 \cdot (L_M + |L_m|) = 0,5 \cdot (9.54 + |4.44|) = 7 \text{ дБ}$$

$$\gamma_{\text{макс}} = \arccos \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{M} = \arccos \frac{\sqrt{1,5^2 - 1}}{1,5} = 41.8^\circ$$

Недостающие точки границы запретной зоны можно определить из следующей пропорции

$$\frac{\gamma_i}{L_i} = \frac{\gamma_{\text{макс}}}{L_{\text{макс}}} \Rightarrow \gamma_i = 5.97 \cdot L_i, \text{ град.}$$

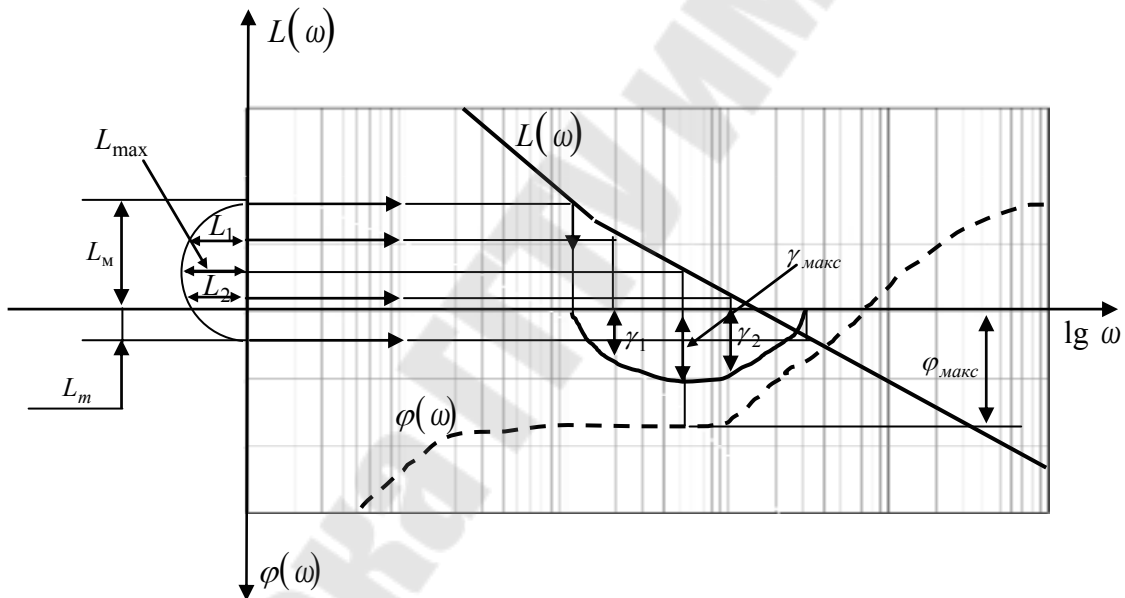


Рис.87. Построение запретной зоны на логарифмической плоскости по показателю колебательности M

Пример 16. Определить показатели качества следящей САУ типа «угол-угол», заданной в виде структурной схемы рис.88, а именно: устойчивость (L_0, Ψ_0); точность ($\delta_{\text{ст}}, \delta_{\text{к}}, \delta_{\text{sin}}$); быстродействие ($\tau_{\text{пер}}$); динамичность ($\sigma_{\%}, M$).

При этом входные сигналы САУ будут $\alpha_{\text{вх1}} = 10 \cdot 1(t)$, град, $\alpha_{\text{вх2}} = 20 \cdot t$, град, $\alpha_{\text{вх3}} = 4 \cdot \sin(5 \cdot t)$, град. САУ работает на холостом ходу (без нагрузки).

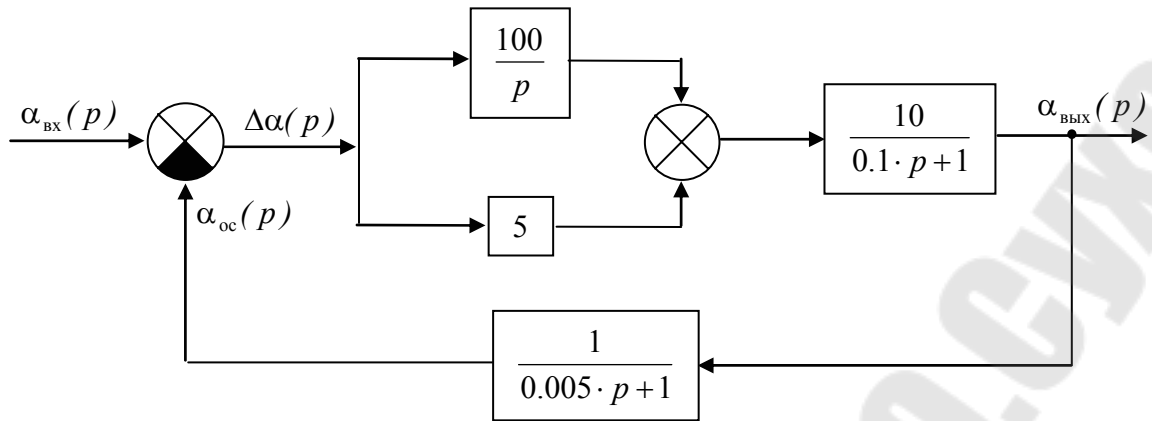


Рис.88. Структурная схема следящей САУ к примеру 16

По структурной схеме (рис.84) получим передаточную функцию разомкнутой САУ $W(p)$

$$W(p) = \left(5 + \frac{100}{p}\right) \cdot \frac{10}{0.1 \cdot p + 1} \cdot \frac{1}{0.005 \cdot p + 1} = \frac{1000 \cdot (0.05 \cdot p + 1)}{p \cdot (0.1 \cdot p + 1) \cdot (0.005 \cdot p + 1)}$$

На логарифмической плоскости построим ЛАЧХ $L(\omega)$ ЛФЧХ $\varphi(\omega)$ (рис.89). Для этого предварительно рассчитаем:

$$20 \cdot \lg K = 20 \cdot \lg 1000 = 60 \text{ дБ}; \lg \omega_1 = \lg\left(\frac{1}{0.1}\right) = 1 \text{ дек};$$

$$\lg \omega_2 = \lg\left(\frac{1}{0.05}\right) = 1.3 \text{ дек}; \lg \omega_3 = \lg\left(\frac{1}{0.005}\right) = 2.3 \text{ дек}.$$

1. По ЛАФЧХ определяем что исследуемая САУ устойчива и ее запасы устойчивости составляют: $\Psi_0 = 38^\circ$ и $L_0 = \infty$.

2. Для определения точности САУ на ЛАЧХ найдем координаты контрольных точек L_k и L_{\sin} : $L_k = 60$ дБ; $L_{\sin}^{1,20} = 45$ дБ для $\lg \Omega = \lg 5 = 0.7$ дек.

Значит, ошибки САУ будут следующими

$$\delta_k = \frac{\dot{\alpha}_{\text{вх}} + \Delta \dot{\alpha}_f}{10^{\frac{L_k}{20}}} = \frac{20 + 0}{10^{\frac{60}{20}}} = 20 \cdot 10^{-3} = 0.02 \text{ град};$$

$$\delta_{\sin} = \frac{\alpha_{\text{BX m}} \cdot \left(1 + \frac{\Delta \dot{\alpha}_f}{\dot{\alpha}_{\text{BX m}}}\right)}{10^{\frac{L_{\sin}^{1,20}}{20}}} = \frac{4 \cdot \left(1 + \frac{0}{20}\right)}{10^{\frac{45}{20}}} = 0.022 \text{ град.}$$

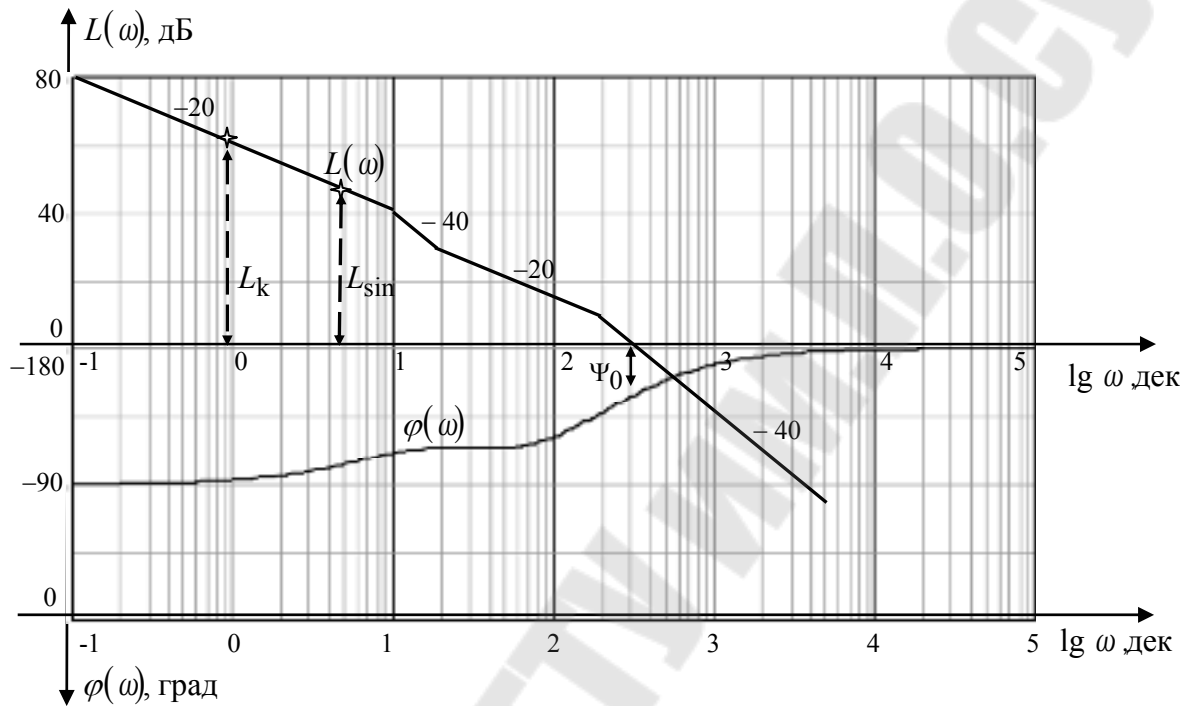


Рис.89. Совмещенные ЛАЧХ и ЛФЧХ следящей САУ к примеру 15

Определение статической точности для этой САУ не требуется, т.к. она обладает астатизмом первого порядка (начальный наклон ЛАЧХ составляет $-20 \frac{\text{дБ}}{\text{дек}}$ ($\delta_{\text{ст}} = 0$)).

3. Показатели быстродействия и динамичности определим по формулам связи (74)

$$M = \frac{1}{\sin \Psi_0} = \frac{1}{\sin(38^\circ)} = 1,62;$$

$$\sigma_{\%} = \frac{M-1}{0.025} = \frac{1.62-1}{0.025} = 24.8\%;$$

$$\begin{aligned} \omega_{\text{ср}} \cdot t_{\text{пер}} &= 5.0 + 0.18 \cdot \sigma_{\%} - 0.002 \cdot (\sigma_{\%})^2 = \\ &= 5 + 0.18 \cdot 24.8 - 0.002 \cdot 24.8^2 = 8.2. \end{aligned}$$

По ЛАЧХ определим частоту среза системы $\lg(\omega_{\text{ср}}) = 2.5$ дек и $\omega_{\text{ср}} = 316 \text{ с}^{-1}$, откуда время переходного процесса составит ориентировочно $t_{\text{пер}} = \frac{8.2}{316} = 0.026 \text{ с}$.

3. СТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ САУ

Статический расчёт САУ осуществляют для установившегося режима после переходных процессов от типовых входных и возмущающих сигналов:

1. $X_{\text{вх}}(t) = X_{\text{вх } m} \cdot 1(t)$ – «скачок»;
2. $X_{\text{вх}}(t) = \dot{X}_{\text{вх } m} \cdot t$ – «постоянная скорость»;
3. $X_{\text{вх}}(t) = \ddot{X}_{\text{вх } m} \cdot t^2$ – «постоянное ускорение»;
4. $X_{\text{вх}}(t) = X_{\text{вх } m} \cdot \sin t$ – «качка».

В результате статического расчёта получают недостающие коэффициенты передачи элементов или их статические характеристики, а главное определяют общую статическую характеристику САУ в замкнутом состоянии, либо по выходной величине $x_{\text{вых}}$, либо по отклонению (ошибке) Δx в зависимости как от сигналов управления $x_{\text{вх}}$, так и возмущения f соответственно.

По статической характеристике оценивают и сравнивают с заданными по техническому заданию на проектирование следующие показатели качества в статическом режиме:

$$D = \frac{X_{\text{вых max}}}{X_{\text{вых min}}} \left| \begin{array}{l} X_{\text{вх}} - \text{var} \\ f - \text{var} \end{array} \right. \text{ – диапазон регулирования;}$$

$$\Delta_{\text{лин}} = [X_{\text{вых}}(X_{\text{вх}}) - k \cdot X_{\text{вх}}] \left| \begin{array}{l} f - \text{var} \end{array} \right. \text{ – линейность регулирования;}$$

$$\sigma_{\text{уст}} = [X_{\text{вых}}^{\text{ид}}(t) - X_{\text{вых}}(t)] \left| \begin{array}{l} t - \text{var} \end{array} \right. \text{ – ошибка в установившемся}$$

режиме.

Есть и специфические статические показатели, например, автономность регулирования для многосвязных систем, флуктуационные ошибки для систем при случайных воздействиях и т.д.

Поскольку основной для САУ электромеханического типа является установившаяся ошибка, ей далее и уделим наибольшее внимание, но сначала уточним понятие ошибки САУ.

Ошибка управления δ представляет собой разность (несоответствие!) между идеальными (желаемыми) $x_{\text{ВЫХ}}^{\text{ид.}}$ и реальными выходными $x_{\text{ВЫХ}}$ координатами.

$$\begin{aligned} \delta(t) &= x_{\text{ВЫХ}}^{\text{ид.}}(t) - x_{\text{ВЫХ}}(t) = x_{\text{ВЫХ}}^{\text{ид.}}(t) - [x_{\text{ВЫХ};\text{СВ}}(t) + x_{\text{ВЫХ};\text{ВЫН}}(t)] = \\ &= x_{\text{ВЫХ}}^{\text{ид.}}(t) - \left[x_{\text{ВЫХ};\text{СВ}}(t) + x_{\text{ВЫХ};\text{ВЫН},\text{X}}(t) + \sum_{i=1}^N x_{\text{ВЫХ};\text{ВЫН},f_i}(t) \right] = \\ &= \left[x_{\text{ВЫХ}}^{\text{ид.}}(t) - x_{\text{ВЫХ};\text{ВЫН},\text{X}}(t) \right] - \sum_{i=1}^N x_{\text{ВЫХ};\text{ВЫН},f_i}(t) - x_{\text{ВЫХ};\text{СВ}}(t) = \\ &= \delta_x(t) + \delta_f(t) + \delta_{\text{пер}}(t). \end{aligned}$$

где $\delta_x(t) = x_{\text{ВЫХ}}^{\text{ид.}}(t) - x_{\text{ВЫХ};\text{ВЫН},\text{X}}(t)$ – установившаяся ошибка САУ по управлению (для «скачка» входного сигнала эта ошибка $\delta_x(t) \rightarrow \text{const}$);

$\delta_f(t) = -\sum_{i=1}^N x_{\text{ВЫХ};\text{ВЫН},f_i}(t)$ – установившаяся ошибка САУ по возмущениям (в общем случае возмущений несколько и если это «скачки», то $\delta_f(t) - \text{const}$);

$\delta_{\text{пер}}(t) = -x_{\text{ВЫХ};\text{СВ}}(t)$ – переходная ошибка, вызванная отработкой системы управления коммутации ненулевых начальных условий в течение переходного процесса (для устойчивых САУ $\delta_{(\text{пер})}(t) = 0$ в конце ($t \rightarrow \infty$) переходного процесса) как по управлению, так и по возмущению.

Рассчитаем установившиеся ошибки в САУ по управляющему $x_{\text{ВХ}}$ и возмущающему f воздействиям. Для этого рассмотрим типовую структурную схему одноконтурной САУ с одним сигналом возмущения (рис.72) и, используя правила структурных преобразований, представим ее в виде (рис.90)

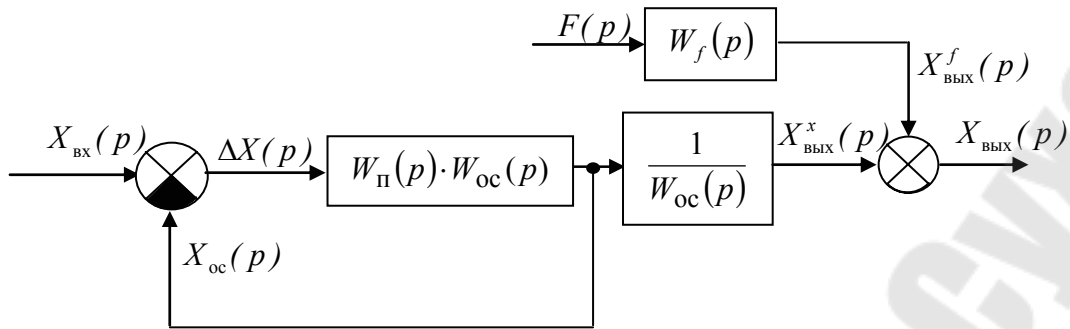


Рис.90. Преобразованная типовая структурная схема одноконтурной САУ

Рассмотрим САУ при $F(p) = 0$, когда $X_{\text{вых}}^x(p) = X_{\text{вых}}^{\text{ид.}}(p) = X_{\text{вых}}(p)$, т.е. $\delta_x = 0$, значит в такой САУ

$$X_{\text{вых}}^{\text{ид.}}(p) = X_{\text{вх}}(p) \cdot \frac{1}{W_{\text{ос}}(p)}.$$

Следовательно, в общем случае

$$\begin{aligned} \delta_x(p) &= X_{\text{вых}}^{\text{ид.}}(p) - X_{\text{вых}}^x(p) = \\ &= X_{\text{вх}}(p) \cdot \frac{1}{W_{\text{ос}}(p)} - X_{\text{вх}}(p) \cdot \frac{W(p)}{1 + W(p)} \cdot \frac{1}{W_{\text{ос}}(p)}. \end{aligned} \quad (75)$$

По (75) получим передаточную функцию системы по ошибке при обработке управления $X_{\text{вх}}(p)$

$$\Phi_{\delta_x}(p) = \frac{\delta_x(p)}{X_{\text{вх}}(p)} = \frac{1}{W_{\text{ос}}(p)} \cdot \frac{1}{1 + W(p)} = \frac{1}{W_{\text{ос}}(p)} \cdot \Phi_{\Delta x}(p). \quad (76)$$

где $W(p) = W_{\text{п}}(p) \cdot W_{\text{ос}}(p)$ – передаточная функция разомкнутой САУ по управлению.

По (76) видно, что ошибка δ_x равна отклонению Δx только в системе с единичной обратной связью, когда $x_{\text{вх}}$ и $x_{\text{вых}}$ имеют одну и ту же физическую природу (или в относительных величинах).

По рис.90 определим передаточную функцию системы по ошибке при обработке возмущения

$$\Phi_{\delta_f}(p) = \frac{\delta_f(p)}{F(p)} = \frac{X_{\text{ВЫХ}}(p)}{F(p)} = \frac{W_f(p)}{1+W(p)} = W_f(p) \cdot \Phi_{\Delta x}(p).$$

Ошибка по возмущению обычно отрицательна, так как часто при увеличении возмущающего воздействия f регулируемая переменная $x_{\text{ВЫХ}}$ уменьшается.

Итак, в данном случае суммарная статическая ошибка

$$\begin{aligned} \delta(p) &= \Phi_{\delta_x}(p) \cdot X_{\text{ВХ}}(p) + \Phi_{\delta_f}(p) \cdot F(p) = \\ &= \frac{1}{W_{\text{ос}}(p) \cdot [1+W(p)]} \cdot X_{\text{ВХ}}(p) \pm \frac{W_f(p)}{1+W(p)} \cdot F(p). \end{aligned}$$

Установившуюся ошибку во времени можно определить, используя теорему операционного исчисления о конечных значениях

$$\begin{aligned} \delta(t) &= \lim_{p \rightarrow 0} [p \cdot \delta(p)] = \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} [\Phi_{\delta_x}(p) \cdot p \cdot X_{\text{ВХ}}(p) \pm \Phi_{\delta_f}(p) \cdot p \cdot F(p)]. \end{aligned} \quad (77)$$

Установившееся значение выходного сигнала во времени $x_{\text{ВЫХ}}(t)$ можно определить так

$$x_{\text{ВЫХ}}(t) = \lim_{p \rightarrow 0} [\Phi_x(p) \cdot p \cdot X_{\text{ВХ}}(p) \pm \Phi_f(p) \cdot p \cdot F(p)], \quad (78)$$

где $\Phi_x(p), \Phi_f(p)$ – передаточные функции замкнутой САУ по управлению и по возмущению.

Выражение (78) также определяет и статическую характеристику $x_{\text{ВЫХ}}(x_{\text{ВХ}})$ для замкнутой САУ.

Пример 17. Определить статическую характеристику одноконтурной САУ электропривода постоянного тока, структурная схема которой представлена на рис.91.

Для упрощения поиска пределов по (78) рассмотрим «усеченную структурную схему» при $p = 0$, которая представлена на рис.92.

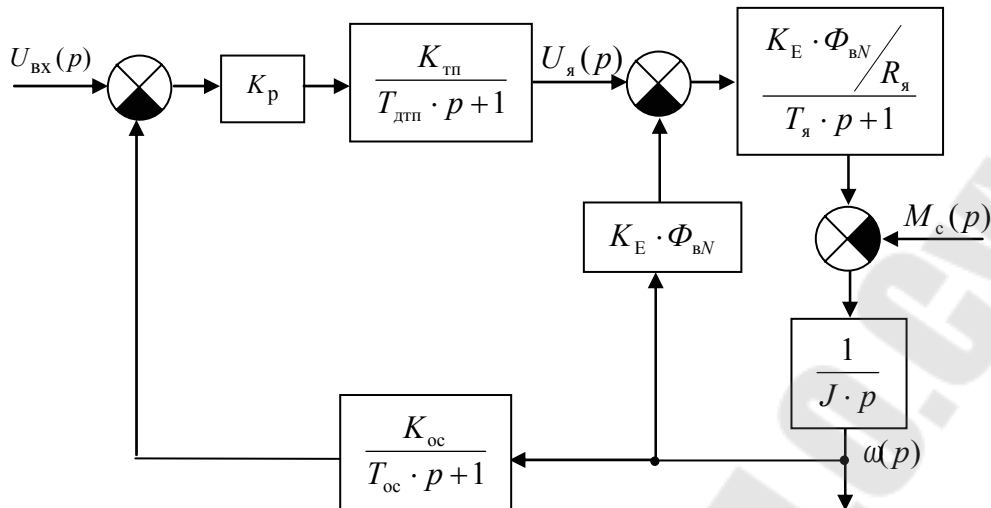


Рис.91. Структурная схема одноконтурной САУ постоянного тока

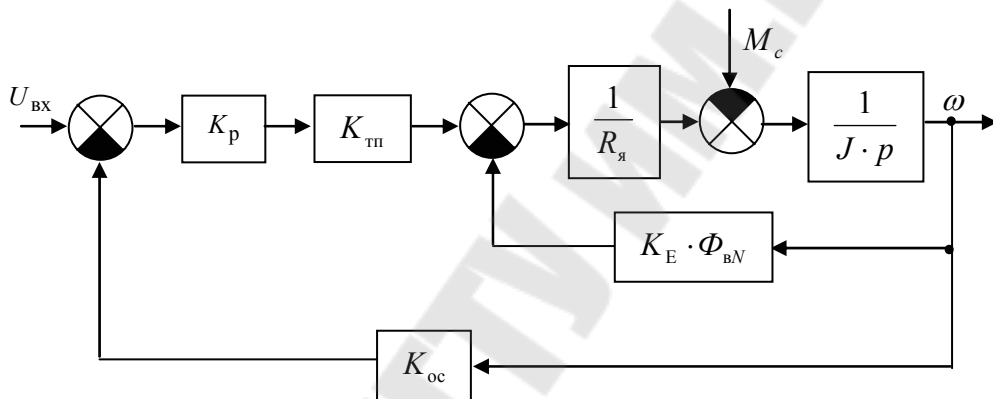


Рис.92. Структурная схема одноконтурной САУ постоянного тока для анализа статического режима

На структурных схемах (рис.91-рис.92) обозначено:

K_p – коэффициент передачи регулятора, о.е.;

$K_{тп}$ – коэффициент передачи тиристорного преобразователя, о.е.;

$K_E \cdot \Phi_{вN}$ – произведение конструктивной постоянной ДПТ на номинальный поток возбуждения машины, В·с;

J – момент инерции электропривода, кг·м²;

K_{oc} – коэффициент передачи обратной связи по скорости, В·с.

В интегрирующих и дифференцирующих динамических звеньях

с

$$W(p) = \frac{1}{p^v} \quad (v = \pm 1, \pm 2 \text{ и т.д.})$$

подстановки $p = 0$ не делаются сразу. Это обстоятельство учтется потом при отыскании предела.

Воспользуемся формулой (78) и получим по структурной схеме (рис.92) типовые передаточные функции по управлению и возмущению.

1. Передаточная функция САУ по управлению

$$\Phi_x(p) = \frac{\omega(p)}{U_{\text{вх}}(p)} \Big|_{\substack{M_c=0 \\ p=0}} = \frac{K_p \cdot K_{\text{тп}}}{K_E \cdot \Phi_{\text{вН}} + K_p \cdot K_{\text{тп}} \cdot K_{\text{ос}}}; \quad (79)$$

2. Передаточная функция САУ по возмущению

$$\Phi_f(p) = \frac{\omega(p)}{M_c(p)} \Big|_{\substack{U_{\text{вх}}=0 \\ p=0}} = - \frac{R_{\text{я}}}{K_E \cdot \Phi_{\text{вН}} \cdot (K_E \cdot \Phi_{\text{вН}} + K_p \cdot K_{\text{тп}} \cdot K_{\text{ос}})}. \quad (80)$$

Знак «-» в (80) показывает, что при увеличении нагрузки на валу электродвигателя M_c скорость вращения ω будет уменьшаться.

Подставляя (79) и (80) в (78), найдем для скачков входных сигналов $\frac{u_{\text{вх}}}{p}$, $\frac{M_c}{p}$, $\frac{\omega}{p}$ статическую характеристику САУ

$$\omega = \frac{K_p \cdot K_{\text{тп}}}{K_E \cdot \Phi_{\text{вН}} + K_p \cdot K_{\text{тп}} \cdot K_{\text{ос}}} \cdot u_{\text{вх}} - \frac{R_{\text{я}}}{K_E \cdot \Phi_{\text{вН}} \cdot (K_E \cdot \Phi_{\text{вН}} + K_p \cdot K_{\text{тп}} \cdot K_{\text{ос}})} \cdot M_c. \quad (81)$$

Представим полученную статическую характеристику САУ АЭП (81) в виде

$$\omega = \frac{K_{\text{п}}}{1 + K} \cdot u_{\text{вх}} - \frac{K_f}{1 + K} \cdot M_c \quad (82)$$

где $K_{п} = \frac{K_p \cdot K_{тп}}{K_E \cdot \Phi_{вN}}$ – коэффициент передачи прямого канала САУ АЭП

по управлению;

$K_f = \frac{R_я}{(K_E \cdot \Phi_{вN})^2}$ – коэффициент передачи САУ АЭП по каналу

возмущения;

$K = \frac{K_p \cdot K_{тп} \cdot K_{ос}}{K_E \cdot \Phi_{вN}}$ – коэффициент передачи разомкнутой САУ

АЭП.

По выражению (82) можно построить статические характеристики САУ АЭП. Они представлены на рис.93. в «качественном» виде.

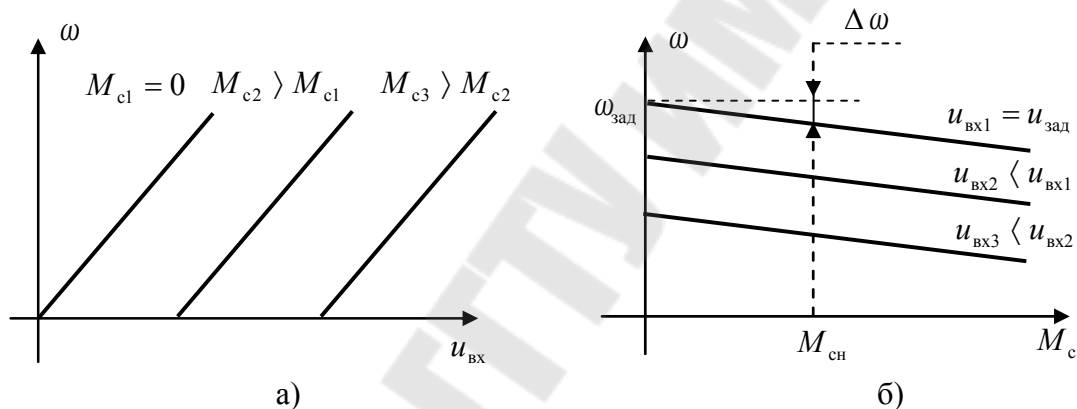


Рис.93. Статические характеристики САУ АЭП при изменении входного сигнала (регулирующие) (а) и сигнала возмущения (механические) (б)

На рис.93 обозначено:

$\Delta\omega$ – отклонение скорости вращения от заданного значения $\omega_{зад}$ из-за изменения нагрузки на валу электродвигателя.

4. СИНТЕЗ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

4.1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ ЭТАПЫ СИНТЕЗА САУ

Под синтезом САУ понимается направленный расчет, имеющий конечной целью отыскание рациональной структуры системы и установление оптимальных величин параметров ее отдельных динамических звеньев, обеспечивающих заданные показатели качества регулирования.

С другой стороны, синтез – это инженерная задача, сводящаяся к такому построению системы автоматического управления, при котором обеспечивается выполнение технических требований к ней. Таким образом, инженер, проектирующий САУ из возможных решений должен выбрать те, которые являются оптимальными с точки зрения технического задания на проектирование, при этом САУ должна быть проста в обслуживании, надежной и негабаритной.

При синтезе САУ необходимо обеспечить приемлемый характер переходных процессов, а также требуемую точность (астатизм САУ).

Первая задача является сложной инженерной задачей, так как увеличение быстродействия системы приводит к повышению колебательного характера переходных процессов, а как следствие к уменьшению запасов устойчивости САУ. Это, также, ведет к использованию более дорогой элементной базы, позволяющей протекать в САУ сигналам с большими значениями амплитуд. Использование сглаживающих фильтров, устраняющих всплески сигналов, приводит к уменьшению быстродействия и, соответственно, к повышению длительности переходных процессов, а также к усложнению системы. Поэтому разработчики САУ пытаются найти оптимальное соотношение между быстродействием и колебательным характером протекающих процессов, находясь при этом в рамках технического задания.

Вторая задача по сравнению с первой является более простой, поскольку обеспечение требуемой точности может достигаться за счет изменения коэффициента передачи разомкнутого контура или за счет увеличения порядка астатизма, или за счет введения в алгоритм управления компенсирующих связей по задающему или возмущающему воздействиям.

В систему автоматического управления обычно входят: объект регулирования и два типа устройств управления.

К первому типу устройств управления обычно относят усилительное устройство, усилитель мощности и измерительное устройство (датчики в обратной связи), которые практически невозможно изменять в процессе синтеза систем управления.

Ко второму типу относят корректирующее устройство или регулятор в виде электронного усилителя, т.е. устройства, которое легко можно изменять в процессе синтеза.

В результате этого всю САУ можно разделить на две части:

1. Объект регулирования, исполнительное устройство, усилитель мощности и измерительное устройство – это так называемая **неизменяемая часть системы**;

2. Корректирующее устройство – это **изменяемая часть системы**. Далее, корректирующее устройство САУ будем называть регулятором. Стоит отметить также, что часто регулятор совмещается с устройством сравнения и представляет собой единый электронный блок (рис.94).

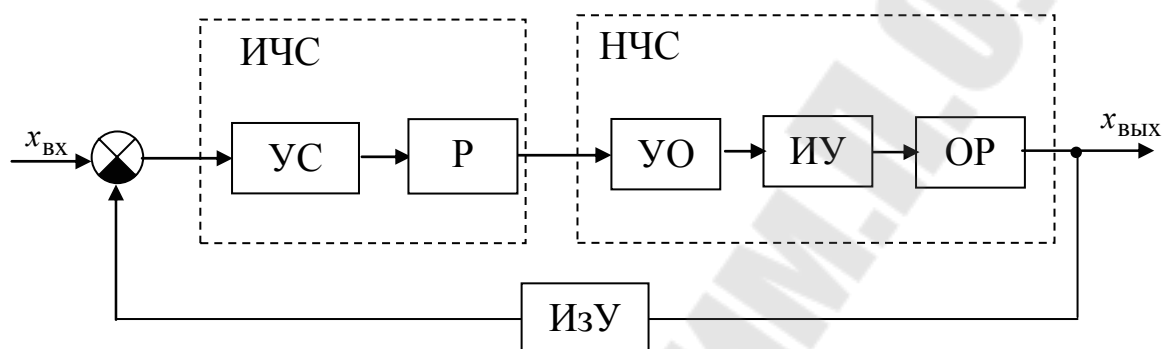


Рис.94. Блок-схема САУ, с точки зрения проведения ее синтеза

На рис.94 обозначено: ИЧС – изменяемая часть системы; НЧС – неизменяемая часть системы; УС – устройство сравнения; Р – регулятор; УО – усилительное устройство; ИУ – исполнительное устройство; ОР – объект регулирования; ИзУ – измерительное устройство.

Устройства управления неизменяемой части САУ, как правило, указаны в техническом задании и при проектировании необходимо учитывать их технические параметры. К ним предъявляются требования по стоимости, надежности действия, весу и габаритным размерам, дополнительным техническим условиям (режим вибрации, температура окружающей среды, влияние агрессивных сред, требования пожарной безопасности, взрывобезопасности и т.д.).

Поэтому общая задача синтеза САУ в связи с тем, что ее силовая часть и датчик обычно выбираются по тем или иным критериям из стандартных, сводится по существу к синтезу регуляторов или корректирующих устройств, обеспечивающих заданные статические и динамические показатели качества управления!!!

Основные этапы синтеза автоматического регулирования следующие:

1. Изучение технических условий и динамических свойств объекта регулирования;
 2. Выбор критерия оптимизации условий качества и точности процессов регулирования;
 3. Определение структурной схемы системы и технических средств реализации неизменяемой части системы;
 4. Определение желаемой логарифмической характеристики разомкнутой синтезируемой системы;
 5. Синтез регулятора;
 6. Выбор средств технической реализации корректирующих и усилительных устройств;
 7. Проверка характеристик качества и точности синтезированной системы расчетным путем или с помощью моделирования на ЭВМ с применением прикладных компьютерных программ.
 8. Изготовление макета системы автоматического регулирования и экспериментальное определение ее динамических характеристик.
 9. Уточнение параметров корректирующих и усилительных устройств по данным макетной отработки системы регулирования
- Существующие инженерные методы синтеза САУ ограничиваются решением задачи обеспечения требуемого качества переходного процесса, так как обеспечение требуемой точности может быть достигнуто на основании существующих критериев точности.

4.2. ОСНОВНЫЕ ТИПЫ РЕГУЛЯТОРОВ САУ

Для решения задачи синтеза САУ различают и используют три основных вида регуляторов: последовательные с передаточной функцией $W_{p1}(p)$, в виде местной обратной связи с передаточной функцией $W_{p2}(p)$ и параллельные с передаточной функцией $W_{p3}(p)$.

Структурные схемы с использованием трех основных типов регуляторов представлены на рис.95.

Способ синтеза с помощью последовательных регуляторов (рис.95.а) прост в расчетах и легко технически реализуется. Поэтому он нашел самое широкое применение особенно при синтезе САУ без модуляции сигналов. Эти типы регуляторов далее и будем использовать при синтезе САУ.

Регулятор САУ в местной обратной связи (рис.95.б) существенно ослабляет влияние нелинейности характеристик динамических звеньев.

Синтез САУ с помощью параллельного регулятора (рис.95.в) эффективен, когда есть необходимость высокочастотного шунтирования инерционных динамических звеньев, но такой регулятор достаточно сложен в настройке.

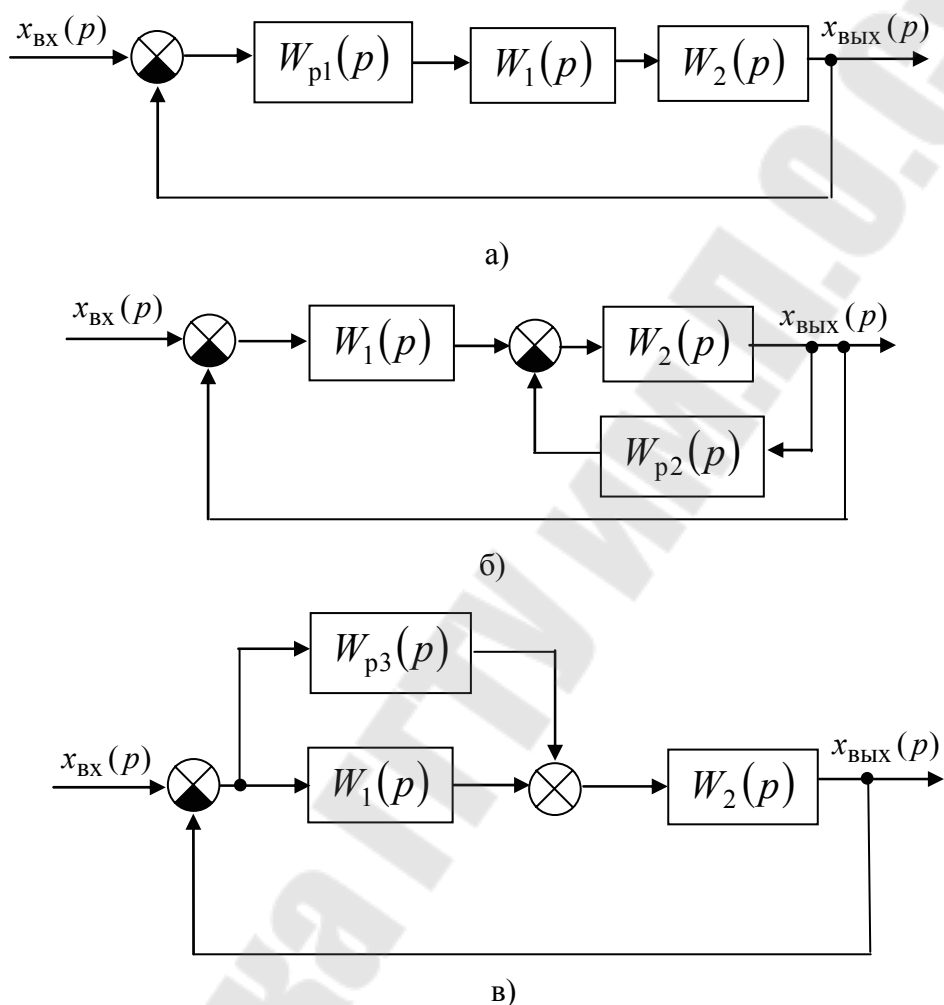


Рис.95. Структурные схемы САУ с последовательным регулятором (а), в виде местной обратной связи (б), с параллельным регулятором (в)

На рис.95 обозначено:

$W_1(p), W_2(p)$ – передаточные функции неизменяемой части САУ;
 $W_{p1}(p), W_{p2}(p), W_{p3}(p)$ – передаточные функции регуляторов САУ.

Независимо от использования типа регулятора передаточная функция разомкнутой системы должна быть одной и той же

$$W(p) = W_1(p) \cdot W_{p1}(p) \cdot W_2(p) = W_1(p) \cdot \frac{W_2(p)}{1 + W_2(p) \cdot W_{p2}(p)} = \\ = W_2(p) \cdot [W_1(p) + W_{p3}(p)].$$

4.3. МЕТОДЫ СИНТЕЗА САУ

Как уже отмечалось выше, целью синтеза САУ является определение и обеспечение показателей качества управления в динамике (динамическая ошибка $\delta_{\text{дин}}$, быстродействие $t_{\text{рег}}$, динамичность $\sigma\%$ и колебательность M), т.е. в процессе отработки САУ заданного управляющего или возникшего возмущающего воздействий (в переходных процессах). Поскольку обычно спроектированная САУ сразу не удовлетворяет заданным показателям качества, то динамический расчет САУ совмещают с синтезом регулятора, который позволяет этих показателей достичь.

В целом последовательность динамического расчета будет следующей:

1. Определяют показатели качества спроектированной САУ и сравнивают их с требуемыми;
2. По расхождению полученных и требуемых показателей качества синтезируют регулятор или корректирующий контур;
3. Вновь рассчитывают показатели качества управления или переходной процесс для проверки правильности синтеза.

Методов динамического расчета САУ существует достаточно много. Последовательно рассмотрим два основных метода синтеза САУ, наиболее часто используемых в практике проектирования, основанные на анализе логарифмических частотных характеристик систем управления – метод желаемых логарифмических частотных характеристик (ЖЛЧХ) и на анализе передаточных функций САУ – метод желаемых передаточных функций (ЖПФ).

4.3.1. РАСЧЕТ ДИНАМИКИ САУ С ПОМОЩЬЮ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

В этом методе используются частотные показатели качества:

1. Допустимые установившиеся ошибки ($\delta_{\text{ст}}$, $\delta_{\text{к}}$, δ_{sin} , δ_{f});
2. Показатель колебательности M ;
3. Частота среза $\omega_{\text{ср}}$.

Если в техническом задании на проектирование заданы временные показатели ($t_{\text{рег}}$, $\sigma\%$, $\delta_{\text{дин}}$, $\delta_{\text{уст}}$) или частотные, но другие, например (L_0 , Ψ_0), то надо перейти по формулам связи (74) к указанным показателям качества.

Рассмотрим общий порядок синтеза регулятора САУ методом ЖЛЧХ:

1. Строится ЛАЧХ нескорректированной системы управления в разомкнутом состоянии $L_{\text{неск}}(\omega)$;

2. Строятся контрольные точки требуемой точности ($L_{\text{ст}}$, $L_{\text{к}}$, $L_{\text{син}}$) и точка требуемой частоты среза $[\omega_{\text{ср}}]$. Если $L_{\text{неск}}(\omega)$, не перекрывает эти точки, то сразу переходят к пункту 4, а если перекрывает, то исполняют пункт 3;

3. Строится ЛФЧХ нескорректированной САУ в разомкнутом состоянии $\Psi_{\text{неск}}(\omega)$ и запретная зона по показателю колебательности M (см. пример 15). Если $\Psi_{\text{неск}}(\omega)$ заходит в зону, то переходят к пункту 4 (к непосредственному синтезу регулятора САУ или корректирующего контура), если не заходит, то расчет прекращают, так как регулятор не требуется, т.е. имеющиеся показатели качества САУ удовлетворяют требуемым.

4. Строится желаемая ЛАЧХ $L_{\text{жел}}(\omega)$, отвечающая заданным показателям качества:

4.1. Среднечастотная часть проводится через точку с заданной $\omega_{\text{ср}}$ и под наклоном -20 дБ/дек так, чтобы она перекрывала частотный диапазон, охватываемый запретной зоной, т.е. среднечастотная область ЖЛЧХ должна находиться между частотами ω_2 и ω_3 определяемые по следующим формулам

$$\omega_2 \leq \omega_{\text{ср}} \cdot \frac{M-1}{M}, \quad \omega_3 \geq \omega_{\text{ср}} \cdot \frac{M+1}{M}.$$

4.2. Низкочастотную часть проводят выше контрольных точек ($L_{\text{ст}}$, $L_{\text{к}}$, $L_{\text{син}}$) и параллельно нескорректированной ЛАЧХ $L_{\text{неск}}(\omega)$, если в ней уже учтен требуемый порядок астатизма САУ;

4.3. Высокочастотную часть проводят параллельно нескорректированной ЛАЧХ $L_{\text{неск}}(\omega)$;

4.4. Сопрягают все части прямыми с наклонами, кратными 20 дБ/дек.

5. ЛАЧХ регулятора (последовательного корректирующего контура) $L_{\text{рег}}(\omega)$ находят путем вычитания из ЖЛАЧХ $L_{\text{жел}}(\omega)$ нескорректированной ЛАЧХ $L_{\text{неск}}(\omega)$

$$L_{\text{рег}}(\omega) = L_{\text{жел}}(\omega) - L_{\text{неск}}(\omega); \quad (83)$$

6. По виду ЛАЧХ регулятора $L_{\text{рег}}(\omega)$ сначала определяют передаточную функцию регулятора $W_{\text{рег}}(p)$, затем подбирают нужный пассивный или активный корректирующий контур и синтезируют по его электрической схеме параметры: сначала коэффициенты передачи и постоянные времени K_i, T_i , затем электрические параметры R, C .

7. Учитывая, что полученный регулятор включается последовательно, то есть в прямой канал, а не в обратную связь, строятся ЛАЧХ и ЛФЧХ скорректированной разомкнутой САУ и определяется эффективность (правильность) коррекции по получившимся показателям качества.

Пример 18: Синтезировать регулятор одноконтурной электромеханической САУ углом поворота исполнительного электродвигателя, имеющей передаточную функцию в разомкнутом состоянии

$$W(p) = \frac{100}{p \cdot (0.1p + 1) \cdot (0.01p + 1)}, \quad (84)$$

если максимальные скорость и ускорение поворота входного вала соответственно равны

$$\omega_{\text{вх},m} = 20 \text{ град/с}, \quad \varepsilon_{\text{вх},m} = 10 \text{ град/с}^2.$$

При этом следует обеспечить следующие показатели качества:

$$[\delta_{\kappa}] = 2', \quad [\omega_{\text{ср}}] = 320 \text{с}^{-1}, \quad [M] = 1.4.$$

Необходимо учесть также, что скоростная моментная ошибка

$$\Delta\omega_M = 10 \text{ град/с}.$$

Синтез регулятора заданной САУ проведем по алгоритму, представленному в разделе 4.3.1.

1. По передаточной функции САУ в разомкнутом состоянии (84) построим $L_{\text{неск}}(\omega)$. Для этого найдем

$$20 \cdot \lg K = 20 \cdot \lg 100 = 40 \text{ дБ},$$

$$\lg \frac{1}{0.1} = 1 \text{ дек}, \quad \lg \frac{1}{0.01} = 2 \text{ дек},$$

ЛАЧХ нескорректированной системы приведена на рис.96.

2. Проверим нескорректированную САУ на устойчивость, точность и быстродействие.

Рассчитав и построив потребную точку среза

$$\lg[\omega_{\text{ср}}] = \lg[320] \approx 2.5 \text{ дек},$$

сразу определим, что быстродействие не обеспечено и САУ требует коррекции. Поэтому проверку на устойчивость проводить не будем, так как она обеспечится ЖЛАХ $L_{\text{жел}}(\omega)$, а координаты контрольных точек точности рассчитаем, поскольку они потребуются далее.

В данной системе управления статическая точность обеспечена, т.е. $\delta_{\text{ст}} = 0$, так как по $W(p)$ (84) видно, что имеется астатизм по управлению первого порядка (наличие интегрирующего звена).

Контрольную точку кинетической точности $L_{\text{к}}$ рассчитаем по формуле (69)

$$L_{\text{к}} = 20 \cdot \lg \frac{\omega_{\text{вых } m} + \Delta\omega_M}{[\delta_{\text{к}}]} \approx 20 \cdot \lg \frac{20 \cdot 60 + 10 \cdot 60}{2} = 59 \text{ дБ}.$$

Рассчитаем параметры эквивалентного синусоидального сигнала для расчета контрольной точки синусной точности

$$\alpha_{\text{вх}, m} = \frac{\omega_{\text{вх}, m}^2}{\varepsilon_{\text{вх}, m}} = \frac{20^2}{10} = 40 \text{ град},$$

$$\Omega_{\text{эКВ}} = \frac{\varepsilon_{\text{вх}, m}}{\omega_{\text{вх}, m}} = \frac{10}{20} = 0.5 \text{ с}^{-1}.$$

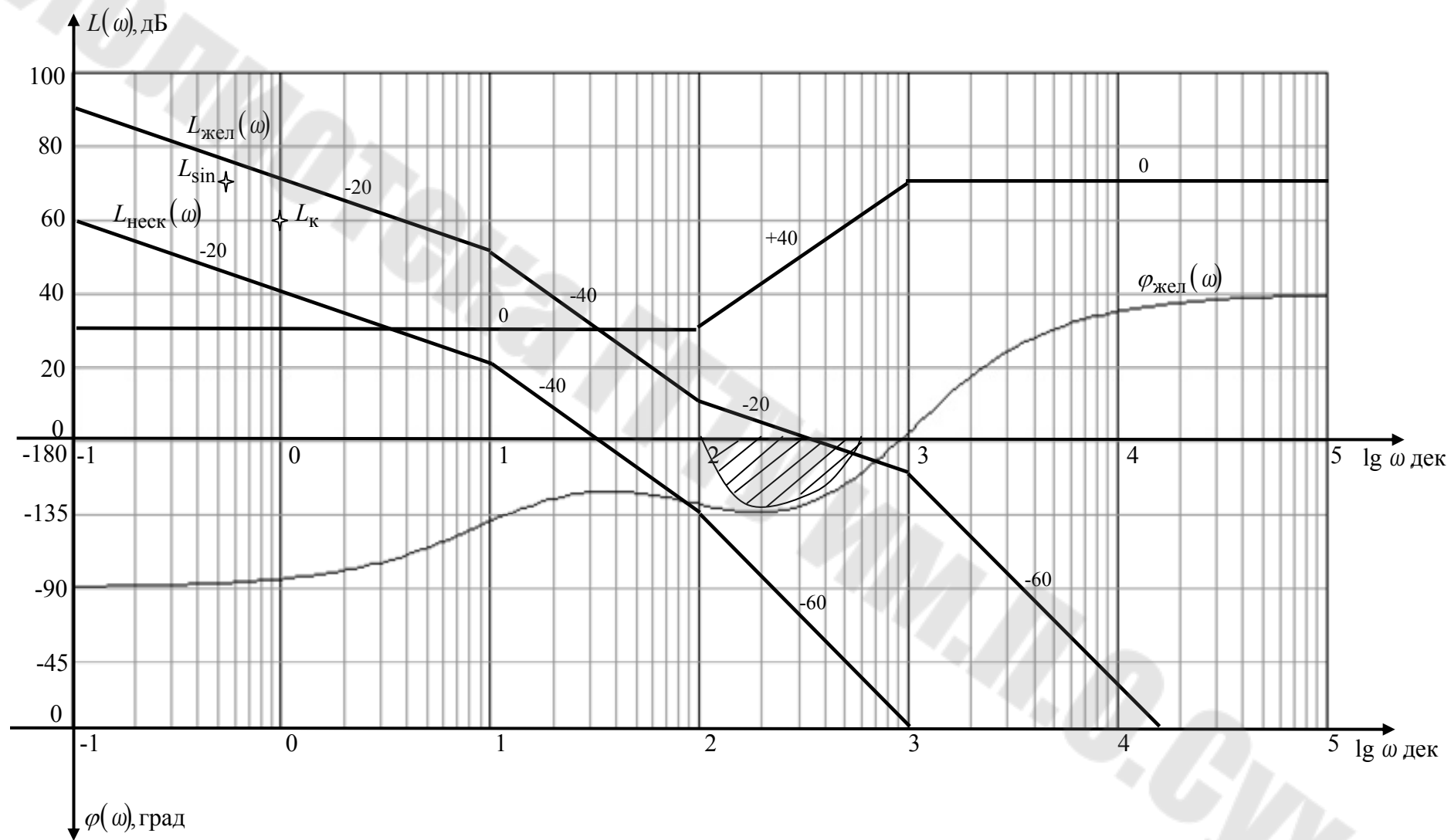


Рис. 96 Логарифмические частотные характеристики ЭГСАУ для синтеза регулятора методом ЖЛАЧХ

Таким образом, эквивалентный синусоидальный входной сигнал примет вид

$$\alpha_{\text{вх}}(t) = \alpha_{\text{вх},m} \cdot \sin \Omega_{\text{ЭКВ}} \cdot t = 40 \cdot \sin(0.5 \cdot t).$$

Контрольная точка синусной точности будет находиться на частоте

$$\lg \Omega_{\text{ЭКВ}} = \lg 0,5 = -0.3 \text{ дек},$$

а ордината контрольной точки, учитывая то, что она лежит под отрезком ЛАЧХ с наклоном -20 дБ/дек определяется по формуле

$$L_{\text{sin}}^{1,20} = 20 \cdot \lg \frac{\alpha_{\text{вх},m} \left(1 + \frac{\Delta \omega_M}{\omega_{\text{вх},m}}\right)}{[\delta]} = 20 \lg \frac{40 \cdot 60 \left(1 + \frac{10}{20}\right)}{2} = 71 \text{ дБ}.$$

3. Построим ЖЛАХ $L_{\text{жел}}(\omega)$. Для этого найдем границы средне-частотной части ЖЛАЧХ по формулам

$$\omega_2 \leq \omega_{\text{ср}} \cdot \frac{M-1}{M} = 320 \cdot \frac{1.4-1}{1.4} = 91.42 \text{ с}^{-1}, \lg \omega_2 = 1.96 \text{ дек} \approx 2 \text{ дек},$$

$$\omega_3 \leq \omega_{\text{ср}} \cdot \frac{M+1}{M} = 320 \cdot \frac{1.4+1}{1.4} = 548.6 \text{ с}^{-1}, \lg \omega_3 = 2.74 \text{ дек} \approx 3 \text{ дек}.$$

Желаемая логарифмическая частотная характеристика САУ $L_{\text{жел}}(\omega)$ представлена на рис.96.

4. Графическим вычитанием характеристик в соответствии с (84) построим ЛАЧХ регулятора $L_{\text{рег}}(\omega)$ (рис.96) и синтезируем его электрическую схему.

По виду $L_{\text{рег}}(\omega)$ определяем, что регулятор представляет собой двойное форсирующее звено с замедлением и имеет передаточную функцию

$$W_{\text{рег}}(p) = \frac{K \cdot (T_1 + p)^2}{(T_2 \cdot p + 1)^2},$$

параметры которой определим по $L_{\text{рег}}(\omega)$ и получим

$$L(0) = 20 \cdot \lg K = 30 \text{ дБ} \Rightarrow K = 10^{\frac{30}{20}} = 31.62 \text{ дБ},$$

$$\lg \frac{1}{T_1} = 2 \Rightarrow T_1 = 0.01 \text{ с},$$

$$\lg \frac{1}{T_2} = 3 \Rightarrow T_2 = 0.001 \text{ с}.$$

Вариантов электронных схем такого регулятора достаточно много, но мы остановимся на схеме, реализованной на операционных усилителях. Она приведена на рис.97.

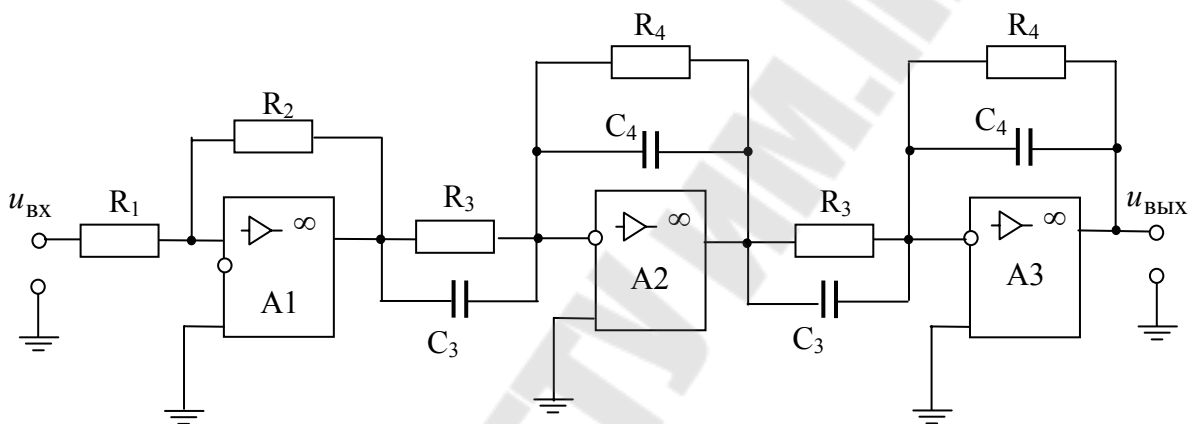


Рис.97. Электрическая схема регулятора синтезируемой САУ

Рассчитаем электрические параметры схемы регулятора (рис.97)

Примем $\frac{R_2}{R_1} = K$, $R_4 = R_3$, $\frac{R_4}{R_3} = 1$, $R_3 \cdot C_3 = T_1$, $R_4 \cdot C_4 = T_2$.

Пусть $R_1 = 10 \text{ кОм}$,

$$R_2 = K \cdot R_1 = 31,62 \cdot 10 = 316,2 \text{ кОм} \approx 300 \text{ кОм} \Rightarrow K = 30$$

$$R_4 = R_4 = 1 \text{ МОм}, \quad C_3 = \frac{T_1}{R_3} = \frac{0,01}{10^6} = 0.01 \text{ мкФ},$$

$$C_4 = \frac{T_2}{R_4} = \frac{0,001}{10^6} = 0.001 \text{ мкФ}.$$

5. Проверим правильность синтеза регулятора. Для принятых номинальных элементов схемы регулятора САУ в разомкнутом состоянии будет иметь

$$\begin{aligned}
 W(p) &= \frac{100}{p \cdot (0.1 \cdot p + 1) \cdot (0.01 \cdot p + 1)} \cdot \frac{30 \cdot (0.01 \cdot p + 1)^2}{(0.001 \cdot p + 1)^2} = \\
 &= \frac{3000 \cdot (0.01 \cdot p + 1)}{p \cdot (0.1 \cdot p + 1) \cdot (0.001 \cdot p + 1)^2}. \quad (85)
 \end{aligned}$$

Построенная по (85) ЛАЧХ, практически «ляжет» на расчетную ЖЛАХ, т.к. $20 \cdot \lg 31.6 = 29.99$ дБ, а $20 \cdot \lg 30 = 29.54$ дБ, т.е. реальная ЖЛАЧХ пройдет на 0.45 дБ ниже, чем расчетная, а это очень маленькая величина, которой можно пренебречь.

Рассчитаем параметры запретной зоны по формулам примера 14 и построим ее (рис.96)

$$\begin{aligned}
 L_M &= 20 \cdot \lg \frac{M}{M-1} = 20 \cdot \lg \frac{1.4}{1.4-1} = 11 \text{ дБ}, \\
 L_{\text{центр}} &= 0,5 \cdot (L_M - |L_m|), \\
 L_m &= 20 \cdot \lg \frac{M}{M+1} = 20 \cdot \lg \frac{1.4}{1.4+1} = -5 \text{ дБ} \\
 L_0 &= \frac{L_M + L_m}{2} = \frac{11 - 5}{2} = 3 \text{ дБ}, \\
 \gamma_{\text{max}} &= \arccos \sqrt{1 - \frac{1}{M^2}} = \arccos \sqrt{1 - \frac{1}{1.4^2}} = 45^\circ 30', \\
 L_{\text{max}} &= 0,5 \cdot (L_M - |L_m|) = 0,5 \cdot (10.88 + 4.68) = 7.78 \text{ дБ}.
 \end{aligned}$$

ЛФЧХ скорректированной САУ не входит в запретную зону, поэтому можно сделать вывод о правильной настройке регулятора. Синтез произведен верно!

4.3.2. РАСЧЕТ ДИНАМИКИ САУ МЕТОДОМ ЖЕЛАЕМЫХ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ

Частотный метод синтеза регуляторов с помощью ЖЛАХ достаточно универсален, но не очень удобен для многоконтурных систем, особенно систем подчиненного регулирования (многоконтурная САУ с концентрическим расположением контуров регулирования). Здесь целесообразнее использовать метод последовательной оптимизации, так называемый синтез регуляторов по желаемым критериям с

помощью желаемых передаточных функций. При этом реализуется желаемый вид передаточной функции САУ в замкнутом состоянии $\Phi_{\text{жел}}(p)$, обеспечивающий требуемый вид переходной характеристики, отвечающий заданным показателям качества.

Эта идея так называемого модального управления распространена в САУ электроприводом на подчиненное управление, где обеспечивается желаемый вид передаточных функций (или желаемое расположение корней характеристического уравнения) каждого контура последовательно, начиная с внутреннего.

4.3.2.1. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ САУ И ЕГО НОРМИРОВАНИЕ

Пусть передаточная функция замкнутой САУ по управлению имеет вид

$$\Phi_x(p) = \frac{b_0 \cdot p^m + b_1 \cdot p^{m-1} + \dots + b_n}{p^v \cdot [a_0 \cdot p^n + a_1 \cdot p^{n-1} + \dots + a_n]} = \frac{B_n(p)}{p^v \cdot A_n(p)}. \quad (85)$$

Поскольку переходной процесс (переходная функция) для единичного скачка входного сигнала определяется по выражению

$$x_{\text{вых}}(t) = L^{-1} \cdot \left[p \cdot \Phi_x(p) \cdot \frac{x_{\text{вх}}}{p} \right] = x_{\text{вх}} \cdot \Phi_x(p),$$

и для его определения необходимо знать корни многочлена знаменателя $A_n(p)$, то алгебраическое уравнение

$$A_n(p) = 0$$

называют, как общепринято, характеристическим. При этом под « p » понимают не оператор дифференцирования « $\frac{d}{dt}$ », как в выражениях для передаточных функций, а алгебраическую комплексную переменную $p = \alpha \pm j\omega$.

Для удобства расчета переходного процесса на ЭВМ, а также других задач, например, для синтеза регулятора методом типовых ха-

рактических уравнений следует сначала передаточную функцию $\Phi_x(p)$, а затем и характеристическое уравнение нормировать, то есть сделать безразмерными и с коэффициентами, не сильно отличающимися по величине друг от друга.

Прделаем эту процедуру, а для этого сначала выделим коэффициент передачи САУ K_{Π} в (85)

$$\begin{aligned}\Phi_x(p) &= \frac{b_m \cdot \left(\frac{b_0}{b_m} \cdot p^m + \frac{b_1}{b_m} \cdot p^{m-1} + \dots + 1 \right)}{p^v \cdot \left(\frac{a_0}{a_n} \cdot p^n + \frac{a_1}{a_n} \cdot p^{n-1} + \dots + 1 \right)} = \\ &= \frac{K_{\Pi} \cdot (B_0 \cdot p^m + B_1 \cdot p^{m-1} + \dots + 1)}{p^v (A_0 \cdot p^n + A_1 \cdot p^{n-1} + \dots + 1)},\end{aligned}$$

и введем относительную передаточную функцию, в которой не учитываются интегрирующие (дифференцирующие) динамические звенья

$$\Phi_x^0(p) = \frac{p^v \cdot \Phi_x(p)}{K_{\Pi}} = \frac{a_n}{b_m} \cdot \Phi_x(p) \cdot p^v.$$

А теперь, обозначив $A_0^n \cdot p = \lambda$, получим нормированное характеристическое уравнение в виде

$$\begin{aligned}A_0 \cdot p^n + A_1 \cdot p^{n-1} + \dots + 1 &= \left(A_0^n \cdot p \right)^n + \frac{A_1}{A_0^{n-1}} \left(A_0^n \cdot p \right)^{n-1} + \dots + 1 = \\ &= \lambda^n + A_1' \cdot \lambda^{n-1} + A_2' \cdot \lambda^{n-2} + \dots + A_{n-1}' \cdot \lambda + 1 = 0,\end{aligned}$$

или в стандартной форме записи

$$\alpha_0 \cdot \lambda^n + \alpha_1 \cdot \lambda^{n-1} + \dots + 1 = 0. \quad (86)$$

где $A_0^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{A_0} = K_{\text{норм}}$ – коэффициент нормирования, имеющий смысл обобщенной постоянной времени, определяющей быстродействие САУ или смысл среднегеометрического корня по И.А. Вышнеградскому;

λ – новая независимая переменная;

$$\alpha_0 = \alpha_n = 1, \quad \alpha_1 = A'_1 = \frac{A_1}{K_{\text{норм}}^{n-1}}, \quad \alpha_2 = A'_2 = \frac{A_2}{K_{\text{норм}}^{n-2}}, \quad \alpha_3 = A'_3 = \frac{A_3}{K_{\text{норм}}^{n-3}} \text{ и}$$

т.д. – относительные коэффициенты нормированного характеристического уравнения.

Таким образом, динамические свойства САУ зависят от вида передаточной функции замкнутой САУ $\Phi_x(p)$, а точнее от ее знаменателя, который нулю представляет собой характеристическое уравнение САУ.

Структура САУ с обратными связями по внутренним переменным САУ (ток, перемещение, скорость и т.д.) позволяет задать $K_{\text{норм}}$, а также привести коэффициенты при переменной « λ » в характеристическом уравнении (86) к желаемым значениям, и тем самым обеспечить заранее заданные, определенные техническим заданием на проектирование показатели качества САУ.

Пример 19: Нормировать передаточную функцию и характеристическое уравнение замкнутой САУ, если

$$\begin{aligned} \Phi_x(p) &= \frac{\omega(p)}{U_{\text{зад}}(p)} = \\ &= \frac{2 \cdot 10^3 \cdot p^4 + 5 \cdot 10^4 \cdot p^3 + 10^5 \cdot p^2 + 10^5 \cdot p + 4 \cdot 10^8}{4 \cdot p^5 + 100 \cdot p^4 + 2 \cdot 10^4 \cdot p^3 + 8 \cdot 10^4 \cdot p^2 + 5 \cdot 10^5 \cdot p + 10^7}, \frac{\text{рад}}{\text{в} \cdot \text{с}} \end{aligned}$$

Найдем коэффициент передачи замкнутой САУ

$$K_{\text{п}} = \frac{b_m}{a_n} = \frac{4 \cdot 10^8}{10^7} = 40 \frac{\text{рад}}{\text{в} \cdot \text{с}}.$$

Значит нормированная передаточная функция

$$\Phi_x^0(p) = \frac{\Phi_x(p)}{K_{\Pi}} =$$

$$= \frac{0.5 \cdot 10^{-5} \cdot p^4 + 1.25 \cdot 10^{-4} \cdot p^3 + 2.5 \cdot 10^{-4} \cdot p^2 + 2.5 \cdot 10^{-4} \cdot p + 1}{4 \cdot 10^{-7} \cdot p^5 + 10^{-5} \cdot p^4 + 2 \cdot 10^{-3} \cdot p^3 + 8 \cdot 10^{-3} \cdot p^2 + 5 \cdot 10^{-2} \cdot p + 1}, \text{ о.е.}$$

Найдем коэффициент нормирования

$$K_{\text{норм}} = \sqrt[5]{4 \cdot 10^{-7}} = 5,253 \cdot 10^{-2}, \text{ с}$$

Значит коэффициенты нормированного характеристического уравнения будут

$$\alpha_0 = \alpha_5 = 1, \text{ о.е.};$$

$$\alpha_1 = A'_1 = \frac{10^{-5}}{(5,253 \cdot 10^{-2})^4} = 1.32, \text{ о.е.};$$

$$\alpha_2 = A'_2 = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{(5,253 \cdot 10^{-2})^3} = 13.8, \text{ о.е.};$$

$$\alpha_3 = A'_3 = \frac{8 \cdot 10^{-3}}{(5,253 \cdot 10^{-2})^2} = 2.9, \text{ о.е.};$$

$$\alpha_4 = A'_4 = \frac{5 \cdot 10^{-2}}{(5,253 \cdot 10^{-2})^1} = 0.95, \text{ о.е.}$$

Таким образом, нормированное характеристическое уравнение примет вид

$$\lambda^5 + 1.32 \cdot \lambda^4 + 13.8 \cdot \lambda^3 + 2.9 \cdot \lambda^2 + 0.952 \cdot \lambda + 1 = 0.$$

4.3.2.2. СТАНДАРТНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КОРНЕЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В настоящее время разработано несколько вариантов желаемых распределений корней характеристического уравнения, которые дают возможность получить требуемое качество переходного процесса в САУ. Рассмотрим наиболее часто используемые из них.

Распределение корней по Ньютону

Здесь, в характеристическом уравнении, предлагается иметь отрицательные вещественные корни кратные « n », то есть, если характеристическое уравнение

$$\varepsilon_0 \cdot \lambda^n + \alpha_1 \cdot \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_n = (\lambda + 1)^n = 0. \quad (87)$$

Для нормированного характеристического уравнения при $\alpha_0 = 1$ и $\alpha_n = 1$ его корни будут

$$\lambda_{1,2,3,\dots} = -1.$$

Это уравнение на комплексной плоскости дает распределение корней, представленное на рис.98

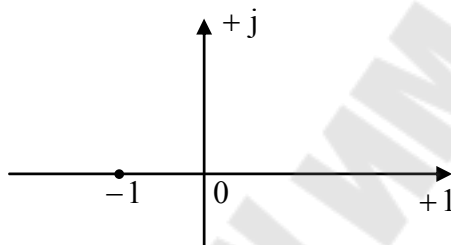


Рис.98. Распределение корней характеристического уравнения по Ньютону

В таком случае коэффициенты характеристического уравнения (87) при разложении по биному Ньютона можно представить данными таблицы 2.

Таблица 2
Коэффициенты характеристического уравнения для распределения по Ньютону

Порядок уравнения	Коэффициенты								
	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8
1	1	1	-	-	-	-	-	-	-
2	1	2	1	-	-	-	-	-	-
3	1	3	3	1	-	-	-	-	-
4	1	4	6	4	1	-	-	-	-
5	1	5	10	10	5	1	-	-	-
6	1	6	15	20	15	6	1	-	-
7	1	7	21	35	35	21	7	1	-
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

Например, согласно таблице 2, характеристическое уравнение третьего порядка можно записать в виде

$$\alpha_0 \cdot \lambda^3 + \alpha_1 \cdot \lambda^2 + \alpha_2 \cdot \lambda^1 + \alpha_3 = \lambda^3 + 3 \cdot \lambda^2 + 3 \cdot \lambda^1 + 1 = 0,$$

и так для любого порядка уравнения.

Переходные процессы в САУ будут при этом аperiodическими, без колебательных составляющих (рис.99). Такая САУ не будет иметь перерегулирования, т.е. $\sigma_{\%} = 0$, значит показатель колебательности $M = 1$.

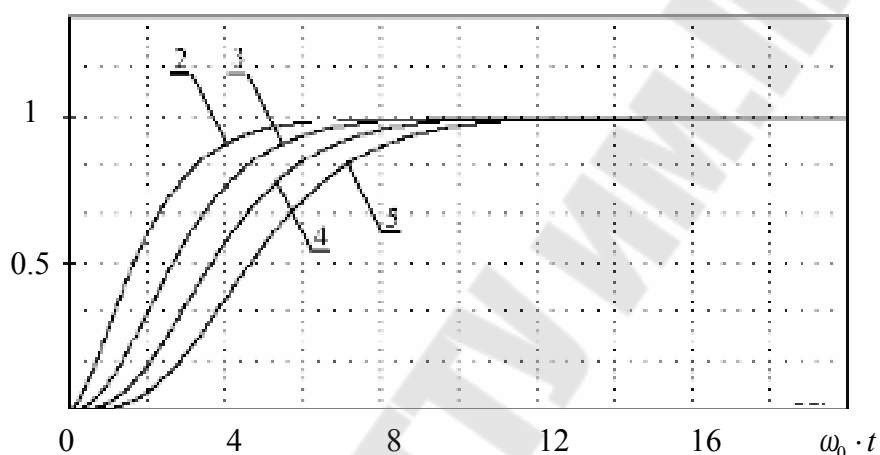


Рис.99. Переходные характеристики по Ньютонову распределению корней для различных порядков уравнения

На рис.99 $\omega_0 = \frac{1}{T_0} = \sqrt{\frac{a_n}{a_0}}$ — обобщенная частота, определяющая быстродействие САУ (86).

При такой настройке реакция САУ на входные воздействия является относительно медленной. Достичь более высокого быстродействия позволяет распределение корней по Баттерворту.

Распределение корней по Баттерворту

При такой настройке в корнях характеристического уравнения появляется мнимая составляющая, которая приводит к возникновению перерегулирования и колебательности, причем с увеличением порядка САУ, колебательность будет расти.

Настройка замкнутой САУ на желаемое распределение корней по Баттерворту, позволяет достичь относительного компромисса между быстродействием и колебательностью переходных процессов.

Именно это расположение корней получило наибольшее распространение при синтезе САУ электроприводов станков и в дальнейшем его и будем использовать!!!

Согласно распределению корней по Баттерворту в ненормированном характеристическом уравнении, корни должны иметь вид

$$\lambda_i = e^{j \frac{\pi \cdot n-1+2i}{2n}},$$

где n – порядок уравнения;
 i – номер корня.

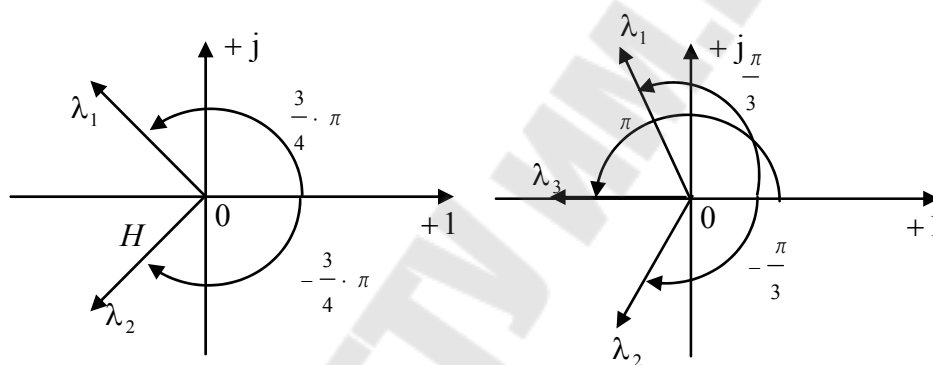


Рис.100 Распределение корней по Баттерворту для уравнения 2-го порядка (а) и 3-го порядка (б).

Коэффициенты для различных порядков характеристического уравнения представлены в таблице 3.

Таким распределением корней обеспечиваются динамические показатели качества САУ, представленные в таблице 4, из которой видно, что переходные процессы будут колебательными, но протекать заметно быстрее (рис.101).

Кроме указанных распределений корней используются в практических целях также, распределения по Чебышеву, Бесселю и др.

Например, распределение корней по Бесселю, при высоких порядках уравнения САУ позволяет обеспечить высокое быстродействие системы, и низкую колебательность, а распределение по Чебышеву, из-за резкого спада амплитудно-частотной характеристики САУ после частоты среза обуславливает широкое применение при синтезе регуляторов САУ со свойствами фильтров низких частот.

Таблица 3

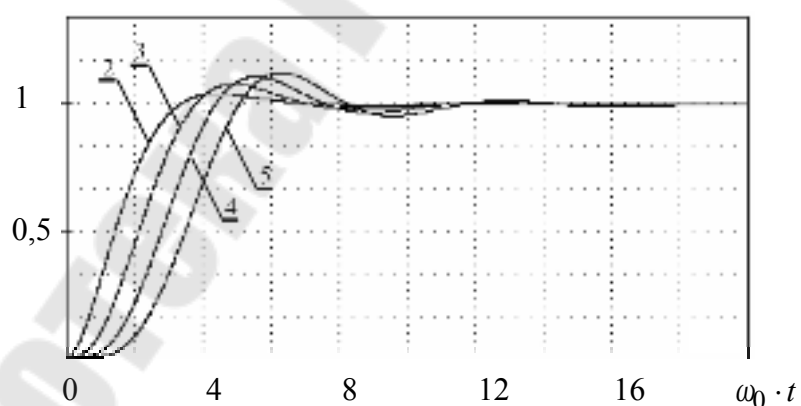
Коэффициенты характеристического уравнения для распределения по Баттерворту

Порядок ур-ния	Коэффициенты								
	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8
1	1	1	-	-	-	-	-	-	-
2	1	1.4	1	-	-	-	-	-	-
3	1	2	2	1	-	-	-	-	-
4	1	2.6	3.4	2,6	1	-	-	-	-
5	1	3.24	5.24	5.24	3.24	1	-	-	-
6	1	3.86	7.46	9.13	7.46	3.86	1	-	-
7	1	4.5	10.1	14.6	14.6	10.1	4.5	1	-
8	1	5.18	13.14	21.24	25.69	21.24	13.14	5.18	1

Таблица 4

Показатели качества САУ для распределения по Баттерворту

n	$\sigma_{\%}$	$\omega_0 \cdot t_p$
1	0	8.4
2	4,3	8.4
3	8	16.5
45	11	16.5
5	13	20

Рис.101. Переходные характеристики по распределению Баттерворта для различных n

Пример 20. По одному из критериев оптимизации (технический оптимум) по Баттерворту желаемая передаточная функция разомкнутого контура должна иметь вид

$$W(p) = \frac{1}{2 \cdot T_{\mu} \cdot p (T_{\mu} \cdot p + 1)},$$

а замкнутого

$$\Phi(p) = \frac{1}{2 \cdot T_{\mu} \cdot p (T_{\mu} \cdot p + 1) + 1} \cdot \frac{K_{oc}}{1}.$$

где T_{μ} – малая некомпенсированная постоянная времени контура регулирования;

K_{oc} – коэффициент передачи канала обратной связи.

Приравняв знаменатель $\Phi(p)$ к нулю, имеем характеристическое уравнение

$$H(p) = T_{\mu}^2 \cdot p^2 + 2 \cdot T_{\mu} \cdot p + 1 = 0. \quad (88)$$

Если нормировать (88), то $\lambda = \sqrt{2} \cdot T_{\mu} \cdot p$, и тогда уравнение уже примет вид

$$\lambda^2 + \sqrt{2} \cdot \lambda + 1 = 0$$

где $T_0 = \sqrt{2} \cdot T_{\mu}$ – обобщенная постоянная времени,

$\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = \sqrt{2}$, $\alpha_2 = 1$ – коэффициенты нормированного характеристического уравнения соответствуют распределению корней по Баттерворту (таблица 3).

4.3.2.3. Критерии оптимизации регуляторов в САУ подчиненного регулирования

Для получения желаемых переходных характеристик САУ нужно синтезировать регулятор таким образом, чтобы обеспечить желаемые передаточные функции разомкнутого контура $W(p)$ и замкнутого контура $\Phi(p)$.

Далее будем рассматривать методы аналитического синтеза регуляторов САУ для распределения корней характеристического уравнения по Баттерворту.

Синтез регуляторов в системах подчиненного регулирования ведется последовательно – от «внутреннего» контура к «внешним» в соответствии с подчинением. Смысл подчинения заключается в том, что внутренний контур должен иметь регулятор, обеспечивающий ему большее быстродействие, чем у внешнего контура. Так что в целом процесс регулирования можно рассматривать (условно!) последовательно: сначала обрабатывает свое задание самый внутренний контур, затем следующий и так до самого внешнего.

Регуляторы можно синтезировать, полностью компенсируя большие инерционности (постоянные времени) объекта регулирования, то есть, делая передаточную функцию разомкнутого контура равной $W(p) = K$. Это идеальный вариант. Переходный процесс в таком контуре регулирования при $x_{вх} = 1(t)$ будет скачкообразным, но при этом снижается помехозащищенность контура (помехи не «фильтруются»), ухудшаются энергетические показатели САУ, усложняется реализация схемы регулятора.

Поэтому используют синтез по следующим видам оптимизации, обеспечивающим компенсации больших постоянных времени и оставление малых постоянных времени в контуре регулирования.

Итак, оптимизированный регулятор должен, реализуя расположение корней по Батерворту:

1. Скомпенсировать большие постоянные времени контура регулирования и оставить малые;
2. Обеспечить требуемый порядок астатизма контура регулирования (для $\delta_{ст} = 0$ - первый, для $\delta_{к} = 0$ - второй);
3. Для достижения требуемых величин перерегулирования $\sigma\%$ и быстродействия $t_{рег}$ получить желаемое расположение корней характеристического уравнения.

Технический (модульный) оптимум (ТО)

Этот оптимум ориентирован на синтез такого регулятора, что желаемая передаточная функция замкнутого контура имеет вид, когда

$$\Phi_{жел}(p) = \frac{x_{вых}(p)}{x_{вх}(p)} = \frac{1}{K_{ос} \cdot (2 \cdot T^2_{\mu} p^2 + 2 \cdot T_{\mu} p + 1)} =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot T_{\mu} \cdot p (T_{\mu} \cdot p + 1) + 1}, \quad (89)$$

для разомкнутого контура

$$W_{\text{жел}}(p) = \frac{1}{2 \cdot T_{\mu} \cdot p \cdot (T_{\mu} \cdot p + 1)},$$

где T_{μ} – малая постоянная времени, которая должна остаться после синтеза регулятора, оптимального по ТО;

$K_{\text{ос}}$ - коэффициент передачи обратной связи.

Из (89) видно, что характеристическое уравнение соответствует расположению корней по Баттерворту (см. пример 20). Определение требуемой передаточной функции регулятора $W_p(p)$ (это и есть синтез!!!) проведем не в «лоб» по уравнению

$$W_p(p) = \frac{\Phi_{\text{жел}}(p)}{\Phi_{\text{неск}}(p)},$$

а по известным правилам структурных преобразований (рис.102).

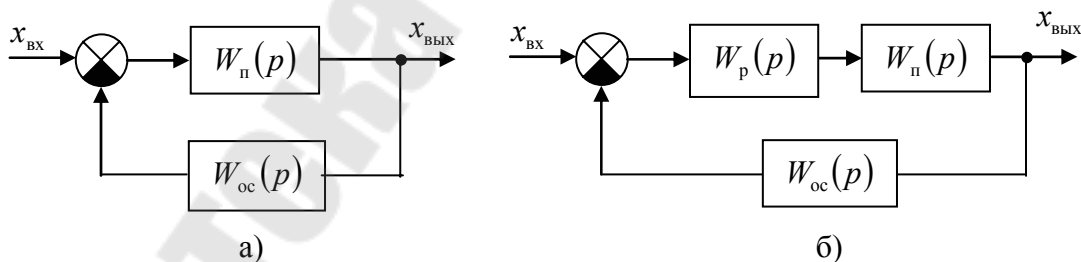


Рис.102. Контур регулирования нескорректированный (а), желаемый (б)

Для контура регулирования (рис.102.а) можно записать

$$\Phi_{\text{неск}}(p) = \frac{W_{\text{п}}(p)}{1 + W_{\text{п}}(p) \cdot W_{\text{ос}}(p)},$$

а для контура регулирования (рис.102.б)

$$\Phi_{\text{жел}}(p) = \frac{W_p(p) \cdot W_{\text{п}}(p)}{1 + W_p(p) \cdot W_{\text{п}}(p) \cdot W_{\text{ос}}(p)}$$

Выразим из $\Phi_{\text{жел}}(p)$ передаточную функцию регулятора $W_p(p)$

$$W_p(p) = \frac{\Phi_{\text{жел}}(p)}{W_{\text{п}}(p) - \Phi_{\text{жел}}(p) \cdot W_{\text{п}}(p) \cdot W_{\text{ос}}(p)} \quad (90)$$

Приемлимый вариант регулятора по (90), достаточно просто реализуемый технически и удобный в настройке, получается лишь в случае безинерционной обратной связи $W_{\text{ос}}(p) = K_{\text{ос}}$ и достаточно простой передаточной функции прямого канала $W_{\text{п}}(p)$.

Действительно, при этом из (90) получим

$$\begin{aligned} W_p(p) &= \frac{\frac{1}{K_{\text{ос}}}}{2 \cdot T_{\mu} \cdot p \cdot (T_{\mu} \cdot p + 1) + 1} = \\ &= \frac{1}{2 \cdot T_{\mu} \cdot p \cdot (T_{\mu} \cdot p + 1) + 1} \cdot \frac{1}{W_{\text{п}}(p) - W_{\text{п}}(p) \cdot \frac{K_{\text{ос}}}{2 \cdot T_{\mu} \cdot p \cdot (T_{\mu} \cdot p + 1) + 1}} = \\ &= \frac{\frac{1}{K_{\text{ос}}}}{2 \cdot T_{\mu} \cdot p \cdot (T_{\mu} \cdot p + 1)} \cdot \frac{1}{W_{\text{п}}(p)} \end{aligned} \quad (91)$$

Такому контуру с передаточной функцией (89) соответствует переходная характеристика (рис.103), для $x_{\text{вх}}(p) = \frac{1}{p}$ (скачок)

$$x_{\text{вых}}(t) = L^{-1} \cdot \left[p \cdot \Phi_{\text{жел}}(p) \cdot \frac{1}{p} \right] = 1 + \sqrt{2} \cdot e^{\frac{-t}{2 \cdot T_{\mu}}} \cdot \sin \left(\frac{t}{2 \cdot T_{\mu}} - 131^{\circ} \right)$$

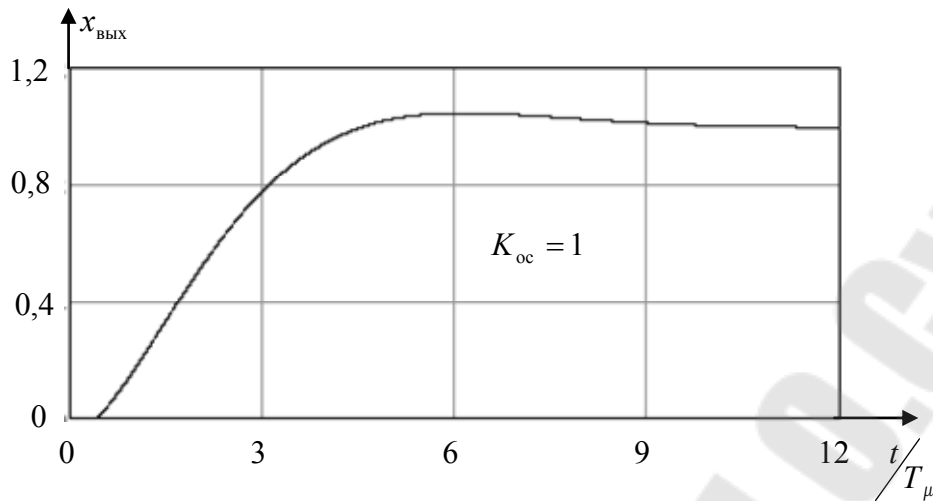


Рис.103. Переходной процесс в контуре регулирования синтезированном на ТО

В контуре, синтезированном на технический оптимум, динамические показатели следующие: время первого перехода $t_{\text{пп}} = 4,7 \cdot T_{\mu}$; время регулирования $t_{\text{рег}} = 8,4 \cdot T_{\mu}$; перерегуливание $\sigma_{\%} = 4,3$; запас устойчивости по фазе $\Psi_0 = 63^{\circ}$.

Логарифмические амплитудно-частотная (ЛАЧХ) и фазо-частотная (ЛФЧХ) характеристики приведены на рис.104.

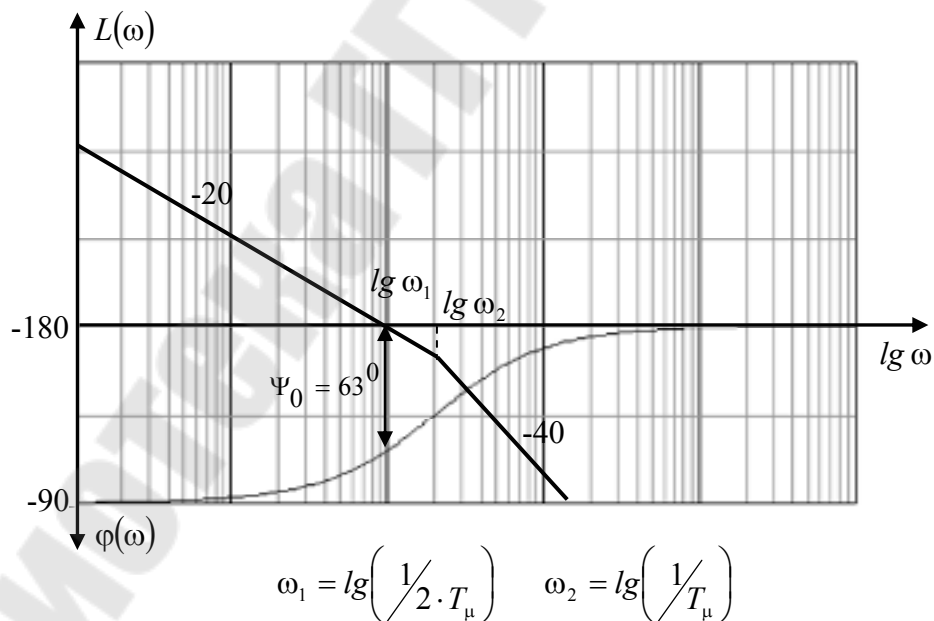


Рис.104. ЛАЧХ и ЛФЧХ разомкнутого контура регулирования синтезированного на ТО

Пример 21. Рассмотрим различные варианты синтеза регулятора со стандартными видами передаточных функций прямого канала $W_{\text{п}}(p)$ и канала обратной связи $W_{\text{oc}}(p)$.

Рассмотрим преобразованную структурную схему контура регулирования, представленную на рис.105.

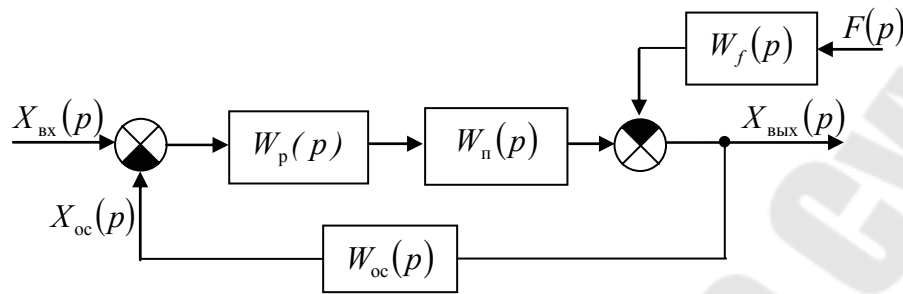


Рис.105. Структурная схема контура регулирования для синтеза регулятора на ТО

Примем входной сигнал возмущающего воздействия $F(p) = 0$ и рассмотрим синтез регулятора с различными стандартными видами передаточных функций прямого канала $W_п(p)$, при этом канал обратной связи будем считать безинерционным с передаточной функцией $W_ос(p) = K_ос$.

Безинерционный прямой канал $W_п(p) = K_п$

Согласно (91) передаточная функция регулятора примет вид

$$W_p(p) = \frac{1}{\frac{K_п \cdot K_ос}{2 \cdot T_\mu \cdot p \cdot (T_\mu \cdot p + 1)}} = \frac{K_p}{p \cdot (T_\mu \cdot p + 1)} \quad (92)$$

Полученная передаточная функция (92) представляет собой интегрирующий регулятор с замедлением. Малую постоянную времени контура регулирования задают по неравенству

$$T_\mu \leq \frac{\lfloor t_{пер} \rfloor}{8,4}, \quad (93)$$

где $\lfloor t_{пер} \rfloor$ – заданное время регулирования (быстродействие) контура.

По (92) видно, что коэффициент передачи регулятора K_p является величиной обратной произведению коэффициента передачи прямого канала и обратной связи помноженной на две малых постоянных времени T_μ . Кроме того, видно, что регулятором введено в САУ интегрирующее звено, что гарантирует отсутствие статической ошибки по управлению $\delta_x = 0$, также введено апериодическое звено с малой

постоянной времени T_μ , для обеспечения минимально необходимой инерционности контура регулирования в соответствии с (93).

Апериодический малоинерционный прямой канал с передаточной функцией

$$W_\Pi(p) = \frac{K_\Pi}{T_\Pi \cdot p + 1},$$

где $T_\Pi \leq \frac{\lfloor t_{\text{пер}} \rfloor}{8,4}$ – постоянная времени прямого канала.

В этом случае, согласно (91) имеем

$$W_p(p) = \frac{1}{W_\Pi(p)} \cdot \frac{1}{2 \cdot T_\mu \cdot p (T_\mu \cdot p + 1)} \cdot K_{\text{ос}} \quad (94)$$

Положим $T_\mu = T_\Pi$ и тогда передаточная функция регулятора примет вид

$$W_p(p) = \frac{1}{K_\Pi \cdot K_{\text{ос}} \cdot 2 \cdot T_\mu \cdot p} = \frac{K_p}{p} \quad (95)$$

По (95) видно, что K_p является обратной величиной произведения « $K_\Pi \cdot K_{\text{ос}} \cdot 2 \cdot T_\mu$ » и вновь ввиду отсутствия интеграла в контуре регулирования, регулятор его вносит.

Апериодический инерционный прямой канал, с большой постоянной времени T_Π

Постоянная времени прямого канала тогда будет соответствовать неравенству

$$T_\Pi \geq \frac{\lfloor t_{\text{пер}} \rfloor}{8,4}.$$

Тогда по (91) получается пропорционально-интегрирующий (ПИ) регулятор с запаздыванием

$$W_p(p) = \frac{(1 + T_{\pi} \cdot p)}{2 \cdot T_{\mu} \cdot p \cdot (T_{\mu} \cdot p + 1)} \cdot \frac{K_{\pi} \cdot K_{oc}}{K_{oc}}, \quad (96)$$

где $T_{\mu} \leq \frac{\lfloor t_{\text{пер}} \rfloor}{8,4}$ – введенная в регулятор, малая постоянная времени.

По (96) видно, что по-прежнему, K_p является обратной величиной произведения « $K_{\pi} \cdot K_{oc} \cdot 2 \cdot T_{\mu}$ », но дополнительно в регуляторе появляется форсирующее звено для компенсации большой инерционности прямого канала, при этом интеграл в регуляторе по-прежнему присутствует.

Апериодический прямой канал второго порядка с одной малой и одной большой постоянными времени

Передаточная функция прямого канала имеет вид

$$W_{\pi}(p) = \frac{K_{\pi}}{(T_1 p + 1) \cdot (T_2 p + 1)},$$

где $T_1 \leq \frac{\lfloor t_{\text{пер}} \rfloor}{8,4} \leq T_2$ – постоянные времени прямого канала

По (91) определим передаточную функцию регулятора, при этом примем, что $T_1 = T_{\mu}$

$$W_p(p) = \frac{(1 + T_1 \cdot p) \cdot (1 + T_2 \cdot p)}{2 \cdot T_{\mu} \cdot p \cdot (T_{\mu} \cdot p + 1)} \cdot \frac{K_{\pi} \cdot K_{oc}}{K_{oc}} = \frac{(1 + T_2 \cdot p)}{2 \cdot T_{\mu} \cdot p}. \quad (97)$$

По (97) видно, что в регуляторе произошла компенсация большой постоянной времени T_2 , а быстродействие контура регулирования определяется малой постоянной времени T_1 и ее компенсация требуется.

Апериодический прямой канал второго порядка с двумя большими постоянными времени

Постоянные времени прямого канала определяются неравенствами

$$T_1 \geq \frac{\lfloor t_{\text{пер}} \rfloor}{8,4} \text{ и } T_2 \geq \frac{\lfloor t_{\text{пер}} \rfloor}{8,4}.$$

Тогда по (91) получается пропорционально интегрирующее-дифференцирующий (ПИД) регулятор с замедлением

$$W_p(p) = \frac{(T_1 \cdot p + 1) \cdot (T_2 \cdot p + 1)}{2 \cdot T_\mu \cdot p \cdot (T_\mu \cdot p + 1)} \cdot \frac{K_p \cdot K_{oc}}{K_p \cdot K_{oc}} \quad (98)$$

где $T_\mu \leq \frac{\lfloor t_{\text{пер}} \rfloor}{8,4}$ – малая постоянная времени контура регулирования.

Регулятором (98) были скомпенсированы большие постоянные времени T_1 и T_2 , при этом для того, чтобы контур регулирования не был безинерционным в регулятор введена малая инерционность T_μ , определяемая необходимым быстродействием САУ.

Апериодический прямой малоинерционный канал с интегрирующим звеном

Передаточная функция прямого канала

$$W_n(p) = \frac{K_p}{p \cdot (1 + T_1 p)},$$

где $T_1 \leq \frac{\lfloor t_{\text{пер}} \rfloor}{8,4}$ – малая постоянная времени прямого канала.

Так как, T_1 – это малая постоянная времени, то можно принять $T_\mu = T_1$ и тогда, согласно (91) в контур требуется ввести пропорциональный регулятор с передаточной функцией

$$W_p(p) = \frac{p \cdot (1 + T_1 \cdot p)}{2 \cdot T_\mu \cdot p \cdot (T_\mu \cdot p + 1)} \cdot \frac{K_p \cdot K_{oc}}{K_p \cdot K_{oc}} = \frac{1}{2 \cdot K_p \cdot T_\mu \cdot K_{oc}}$$

Обобщая рассмотренные примеры, можно определить **алгоритм синтеза регулятора на технический оптимум**. Итак:

1. Обратная связь должна быть безинерционной $W_{oc}(p) = K_{oc}$;

2. Коэффициент передачи регулятора K_p должен быть равным обратной величине произведения коэффициента передачи звеньев прямого канала и канала обратной связи помноженного на две малых постоянных времени контура T_μ ;

3. Если в прямом канале имеется интегрирующее звено, то в регуляторе его не создают и наоборот;

4. Если в прямом канале имеется апериодическое звено с малой T_μ , то в регуляторе его не создают и наоборот;

5. Если в прямом канале имеются апериодические и форсирующие звенья с большими постоянными времени, то в регуляторе создают соответствующие апериодические и форсирующие звенья для их компенсации.

В тех случаях, когда структурная схема САУ имеет сложный характер, то можно использовать те же приемы для получения приближенной желаемой передаточной функции. Точность приближения оценивается расчетом переходной характеристики САУ с квазиоптимальным регулятором.

Рассмотрим одноконтурную структурную схему контура регулирования, имеющую большие и малые инерционности в прямом канале, а также малые некомпенсируемые инерционности в канале обратной связи (рис.106)

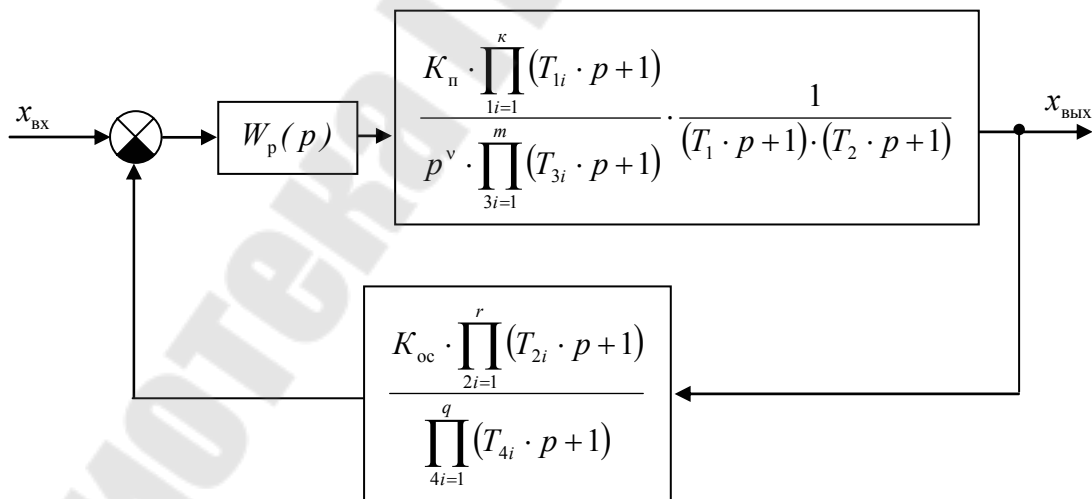


Рис.106. Обобщенная структурная схема контура регулирования для синтеза квазиоптимального регулятора на ТО

На структурной схеме (рис.106) обозначено:

T_1, T_2 – большие постоянные времени;

T_{1i}, \dots, T_{4i} – малые некомпенсируемые постоянные времени;

Для такого контура регулирования, квазиоптимальный, по сравнению с (90), на технический оптимум регулятор будет иметь передаточную функцию, полученную упомянутыми приемами, в следующем виде

$$W_p(p) = \frac{(T_1 \cdot p + 1) \cdot (T_2 \cdot p + 1)}{K_{\Pi} \cdot K_{\text{ос}} \cdot 2 \cdot T_{\mu \text{ сум}} \cdot p^{(1-\nu)}},$$

где $T_{\mu \text{ сум}} = \sum_{3i=1}^m T_{3i} + \sum_{4i=1}^q T_{4i}$ – суммарная малая эквивалентная постоянная времени.

В «Справочнике по проектированию АЭП и СУТП. –М: Энергоиздат, 1982, - 416 с.» приводятся более точные соотношения для эквивалентной малой постоянной времени

$$T_{\mu \text{ сум}} = 0,5 \cdot \left(T_0 + \sum_{2i=1}^r T_{2i} - \sum_{4i=1}^q T_{4i} \right). \quad (99)$$

Постоянная времени T_0 определяется по выражению

$$T_0 = \frac{\sum_{3i=1}^m T_{3i} + \sum_{4i=1}^q T_{4i} - \sum_{1i=1}^k T_{1i} - \sum_{2i=1}^r T_{2i} + \sqrt{\left(\sum_{3i=1}^m T_{3i} + \sum_{4i=1}^q T_{4i} + \sum_{1i=1}^k T_{1i} + \sum_{2i=1}^r T_{2i} \right)^2 + \sum_{4i=1}^q T_{4i}^2 - \sum_{2i=1}^r T_{2i}^2}}{2}$$

При этом коэффициент передачи регулятора K_p рекомендуется рассчитывать по следующей формуле

$$K_p = \frac{1}{K_{\Pi} \cdot K_{\text{ос}} \cdot T_0}.$$

При данной оптимизации контура регулирования (рис.106) передаточная функция рассматриваемого замкнутого контура будет иметь вид

$$\Phi_x(p) = \frac{1}{K_{oc}} \cdot \frac{1}{2 \cdot T_{\mu\Sigma} \cdot p \cdot \left[\frac{T_0}{2 \cdot T_{\mu\text{сум}}} \cdot \frac{\prod (T_{3i} \cdot p + 1) \cdot (T_{4i} \cdot p + 1)}{\prod (T_{1i} \cdot p + 1) \cdot (T_{2i} \cdot p + 1)} \right] + 1} \times$$

$$\times \frac{\prod (T_{4i} \cdot p + 1)}{\prod (T_{2i} \cdot p + 1)} \approx \frac{1}{2 \cdot T_{\mu\text{сум}} \cdot p \cdot (T_{\mu\text{сум}} \cdot p + 1)} \approx \frac{1}{2 \cdot T_{\mu\text{сум}} \cdot p + 1} \cdot \frac{1}{K_{oc}}. \quad (100)$$

Первое точное выражение в (100) используется для расчета переходного процесса в данном контуре, с целью проверки результата оптимизации, а последнее, приближенное, для учета данного оптимизированного контура при оптимизации следующих в САУ подчиненного регулирования.

Симметричный оптимум (СО)

Синтез регулятора на технический оптимум сделал САУ астатической по управлению, но будет ли она астатической по возмущению, зависит от вида передаточной функции $W_f(p)$ канала возмущения.

Определим установившуюся ошибку от скачка сигнала возмущения $f(t) = f_0 \cdot 1(t)$

$$\delta_{x_f} = \lim_{p \rightarrow 0} [p \cdot \Phi_f(p) \cdot F(p)], \quad (101)$$

где $F(p) = \frac{F_0}{p}$ – операторное изображение от входного сигнала возмущения $f(t)$.

Определим $\Phi_f(p)$ по нормированной структурной схеме одно-контурной САУ (рис.72)

$$\Phi_f(p) = -\frac{W_f(p)}{1 + W(p)},$$

где $W(p) = W_{\Pi}(p) \cdot W_{oc}(p)$ – передаточная функция разомкнутой САУ по управляющему воздействию;
 $W_f(p)$ – передаточная функция канала возмущения.

Для САУ синтезированной на технический оптимум

$$W(p) = \frac{1}{2 \cdot T_{\mu} \cdot p \cdot (T_{\mu} \cdot p + 1)},$$

поэтому

$$\Phi_f(p) = - \frac{W_f(p)}{1 + \frac{1}{2 \cdot T_{\mu} \cdot p \cdot (T_{\mu} \cdot p + 1)}} = - \frac{2 \cdot T_{\mu} \cdot p \cdot (T_{\mu} \cdot p + 1) \cdot W_f(p)}{2 \cdot T_{\mu} \cdot p \cdot (T_{\mu} \cdot p + 1) + 1}.$$

Знак «минус» в $\Phi_f(p)$ показывает, что истинное значение выходного сигнала САУ будет меньше требуемого по заданию в результате действия возмущения.

Тогда ошибка по возмущению по (101)

$$\delta_{x_f} = - \lim_{p \rightarrow 0} \left[\frac{2 \cdot T_{\mu} \cdot p \cdot (T_{\mu} \cdot p + 1)}{2 \cdot T_{\mu} \cdot p \cdot (T_{\mu} \cdot p + 1) + 1} \cdot F_0 \cdot W_f(p) \right]. \quad (102)$$

Анализируя выражение (102), можно сделать вывод, что если передаточная функция по возмущающему воздействию $W_f(p)$ представляет собой безинерционные, форсирующие или дифференцирующие звенья, то такая САУ обладает астатизмом по возмущению и синтеза на технический оптимум достаточно. Если же

$$W_f(p) = \frac{A(p)}{p^{\mu} \cdot B(p)},$$

где $A(p), B(p)$ – операторные многочлены передаточной функции $W_f(p)$;

p^{μ} – интегрирующее звено μ – того порядка,

то астатизм по возмущению отсутствует и синтеза регулятора на технический оптимум недостаточно. В этом случае используют синтез регулятора на симметричный оптимум. Такой синтез позволяет получить астатизм по возмущению, не потерять астатизм по управлению, хотя и несколько ухудшить переходной процесс по управлению.

Название этот оптимум получил по виду ЛАЧХ для разомкнутого контура после синтеза регулятора (рис.107).

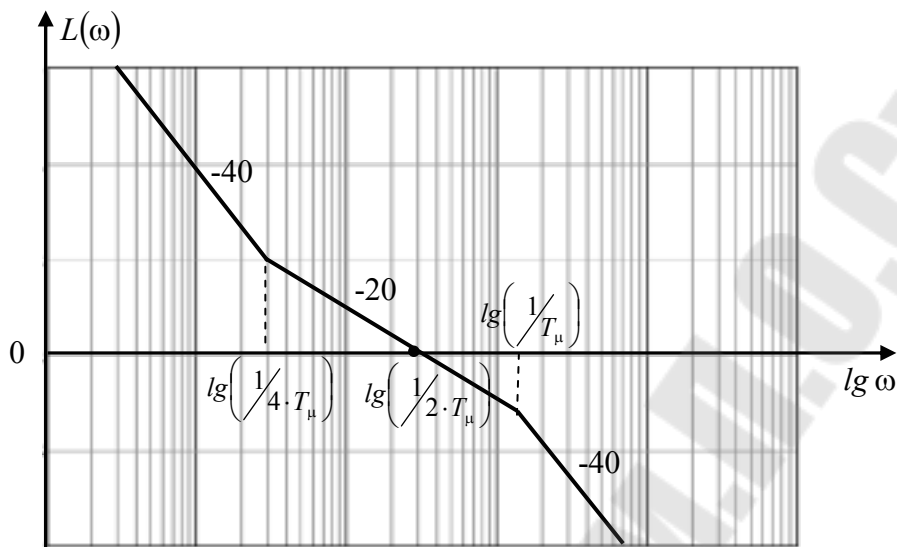


Рис.107. ЛАЧХ разомкнутого контура регулирования синтезированного на СО

Симметричный оптимум требует те же желаемые передаточные функции прямого канала регулирования $W_{\Pi}(p)$ и разомкнутого контура регулирования $W(p)$, что и для технического оптимума но умноженные на выражение

$$W_{\text{доп}}(p) = \frac{4 \cdot T_{\mu} \cdot p + 1}{4 \cdot T_{\mu} \cdot p},$$

то есть для разомкнутого контура будем иметь

$$W(p) = \frac{4 \cdot T_{\mu} \cdot p + 1}{4 \cdot T_{\mu} \cdot p} \cdot \frac{1}{2 \cdot T_{\mu} \cdot p (T_{\mu} \cdot p + 1)}. \quad (103)$$

Схемно это реализуется за счет дополнительного последовательного подключения ПИ-регулятора с передаточной функцией

$$W_{\text{доп}}(p) = \frac{4 \cdot T_{\mu} \cdot p + 1}{4 \cdot T_{\mu} \cdot p}.$$

Итак, при оптимизации на симметричный оптимум, желаемая передаточная функция прямого канала будет

$$W_{\Pi}(p) = \frac{1/K_{oc}}{2 \cdot T_{\mu} \cdot p \cdot (T_{\mu} \cdot p + 1)} \cdot \frac{4 \cdot T_{\mu} \cdot p + 1}{4 \cdot T_{\mu} \cdot p},$$

где T_{μ} – эквивалентная малая постоянная времени всего контура.

Для замкнутого контура это дает при безинерционной обратной связи следующую передаточную функцию

$$\Phi_{x_{\text{вх}}}(p) = \frac{4 \cdot T_{\mu} \cdot p + 1 / K_{oc}}{8 \cdot T_{\mu}^2 \cdot p^2 \cdot (T_{\mu} \cdot p + 1) + 4 \cdot T_{\mu} \cdot p + 1}, \quad (104)$$

что при $T_{oc} = 1$ и $K_{oc} = 1$ соответствует переходной характеристике, представленной на рис.108.

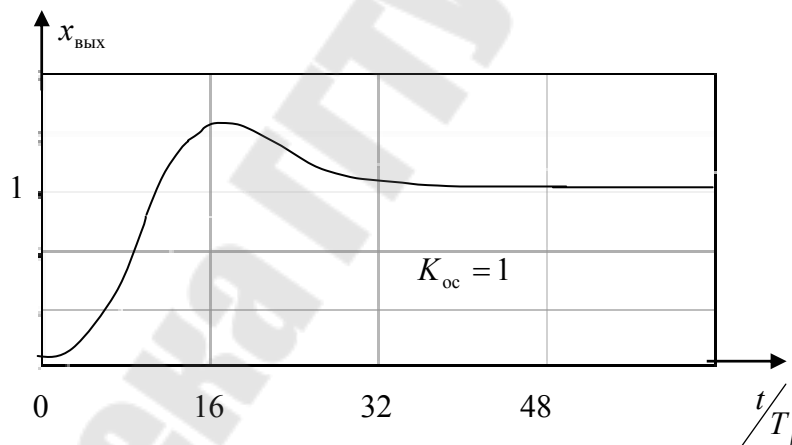


Рис.108. Переходной процесс в контуре регулирования синтезированном на СО

По знаменателю (104) можно убедиться, что он представляет собой характеристическое уравнение третьего порядка, соответствующее распределению корней по Баттерворту (табл.3)

$$8 \cdot T_{\mu}^2 \cdot p^2 \cdot (T_{\mu} \cdot p + 1) + 4 \cdot T_{\mu} \cdot p + 1 \Big|_{2 \cdot T_{\mu} \cdot p = \lambda} = \lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda + 1$$

В контуре, синтезированном на симметричный оптимум динамические показатели следующие: время регулирования $t_{\text{рег}} = 33 \cdot T_{\mu}$; перерегулирование $\sigma_{\%} = 43,4$; запас устойчивости по фазе $\Psi_0 = 37^{\circ}$.

Определим, какова будет при такой оптимизации реакция на возмущение, если $W_f(p) = \frac{A(p)}{p \cdot B(p)} = \frac{K_f}{p}$.

$$\text{Так как } \Phi_f(p) = \frac{8 \cdot T_{\mu}^2 \cdot p^2 \cdot (T_{\mu} \cdot p + 1)}{8 \cdot T_{\mu}^2 \cdot p^2 \cdot (T_{\mu} \cdot p + 1) + 4 \cdot T_{\mu} \cdot p + 1} \cdot \frac{K_f}{p},$$

то астатизм контура регулирования появился, так как $\lim_{p \rightarrow 0} [\Phi_f(p)] = 0$.

Улучшенный симметричный оптимум (УСО)

По (103) видно, что симметричный оптимум из-за наличия интегрирующего звена второго порядка сделал кинетическую ошибку по управлению в контуре регулирования нулевой ($\delta_k = 0$), но существенно ухудшил другие показатели качества управления, например, быстродействие упало в 4 раза, перерегулирование увеличилось в 10 раз. Этого можно избежать, включив дополнительно к СО-оптимизации перед сумматором (измерителем рассогласования) фильтр с передаточной функцией $W_{\phi}(p) = \frac{1}{4 \cdot T_{\mu} \cdot p + 1}$.

Такой синтез носит название улучшенной симметричной оптимизации. Она дает: время регулирования $t_p = 16,5 \cdot T_{\mu}$ и перерегулирование $\delta = 8,1\%$. Структурная схема контура, регулятор которого синтезирован на УСО, представлена на рис.109.

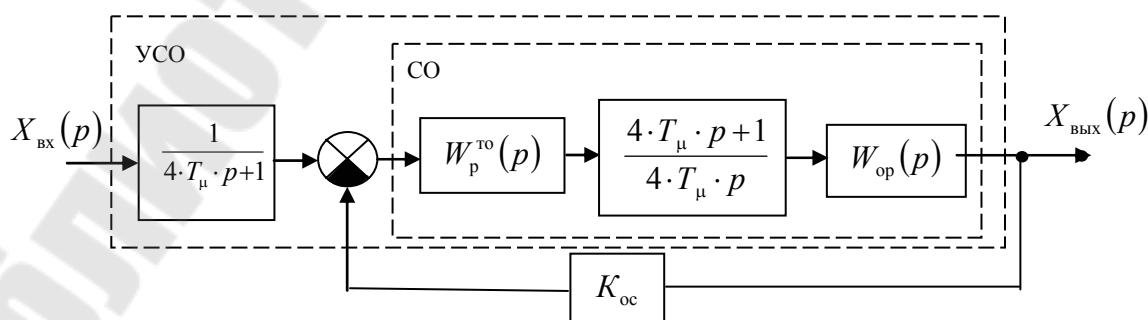


Рис.109. Структурная схема контура регулирования САУ с регулятором синтезированным на УСО

Пример 22. По структурной схеме САУ, представленной на рис.110 рассчитать параметры регулятора синтезированного на технический оптимум, если $K_1 = K_2 = 1$, $K_3 = 10$, $K_{oc} = 0.5$, $T_1 = 0.1$ с, $T_2 = 0.001$ с. Синтезированный регулятор САУ должен обеспечить быстродействие $[t_{пер}] \leq 0.5$ с.

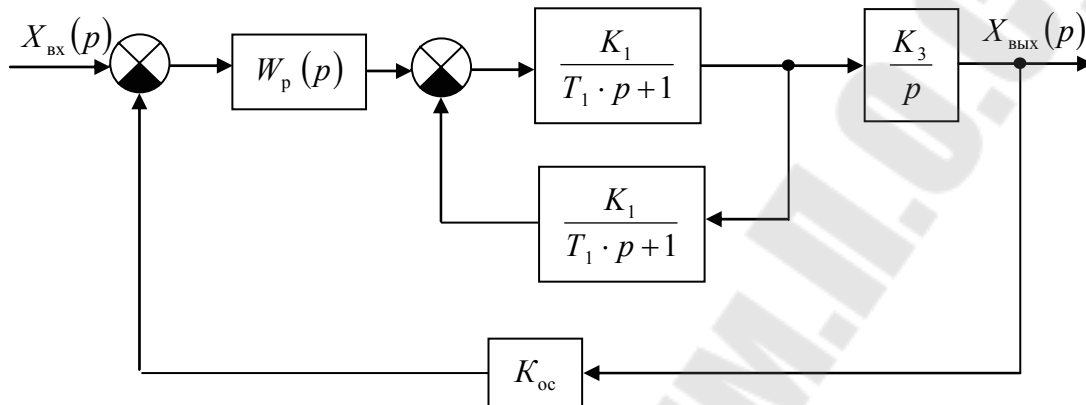


Рис.110. Структурная схема САУ к примеру 22

Определим передаточную функцию внутреннего контура САУ по (23)

$$\begin{aligned}
 W_1(p) &= \frac{\frac{K_1}{T_1 \cdot p + 1}}{1 + \frac{K_1}{T_1 \cdot p + 1} \cdot \frac{K_2}{T_2 \cdot p + 1}} = \frac{\frac{K_1}{1 + K_1 \cdot K_2} \cdot (T_2 \cdot p + 1)}{\frac{T_1 \cdot T_2}{1 + K_1 \cdot K_2} \cdot p^2 + \frac{T_1 + T_2}{1 + K_1 \cdot K_2} \cdot p + 1} = \\
 &= \frac{0.5 \cdot (0.001 \cdot p + 1)}{0.5 \cdot 10^{-4} \cdot p^2 + 0.0505 \cdot p + 1}. \quad (105)
 \end{aligned}$$

Знаменатель передаточной функции (105) представляет собой апериодическое звено второго порядка, у которого коэффициент затухания

$$\xi = \frac{0.0505}{2 \cdot \sqrt{0.5 \cdot 10^{-4}}} = 3.57 > 1.$$

Используя (47), разложим знаменатель (105) на простые множители и получим

$$W_1(p) = \frac{0.5 \cdot (0.001 \cdot p + 1)}{(0.0495 \cdot p + 1) \cdot (0.00101 \cdot p + 1)} \approx \frac{0.5}{(0.0495 \cdot p + 1)} = \frac{K}{T \cdot p + 1}, \quad (106)$$

где $K = 0.5$, $T = 0.0495$ с.

Согласно заданию, малая постоянная времени главного контура регулирования САУ T_μ , регулятор которой синтезирован на ТО, должна быть

$$T_\mu \leq \frac{\lfloor t_{\text{пер}} \rfloor}{8.4} = \frac{0.5}{8.4} = 0.059 \text{ с.}$$

Так как $T_\mu \leq T$, примем $T_\mu = 0.0495$ с и согласно алгоритму синтеза регулятора на технический оптимум запишем

$$W_p(p) = K_p = \frac{1}{K \cdot K_3 \cdot K_{\text{oc}} \cdot 2 \cdot T_\mu} = \frac{1}{0.5 \cdot 10 \cdot 0.5 \cdot 2 \cdot 0.0495} = 4.04 \text{ о.е.}$$

Рассчитанный регулятор САУ обеспечит переходной процесс, представленный на рис.103.

Пример 23. Для САУ примера 22 синтезировать регулятор на симметричный и улучшенный симметричный оптимум.

Структурная схема (пример 22) с синтезированным ТО-регулятором имеет вид, представленный на рис.111.

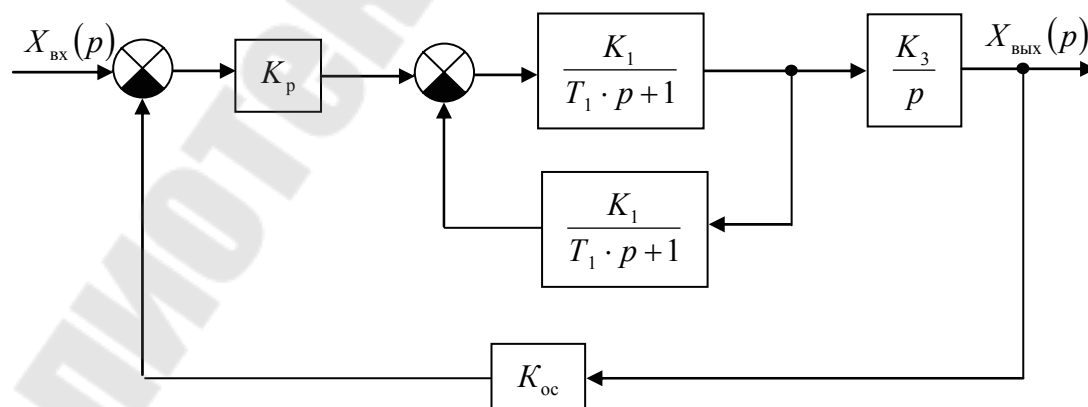


Рис.111. Структурная схема САУ к примеру 23

В случае оптимизации на симметричный оптимум структурная схема САУ станет такой (рис.112)

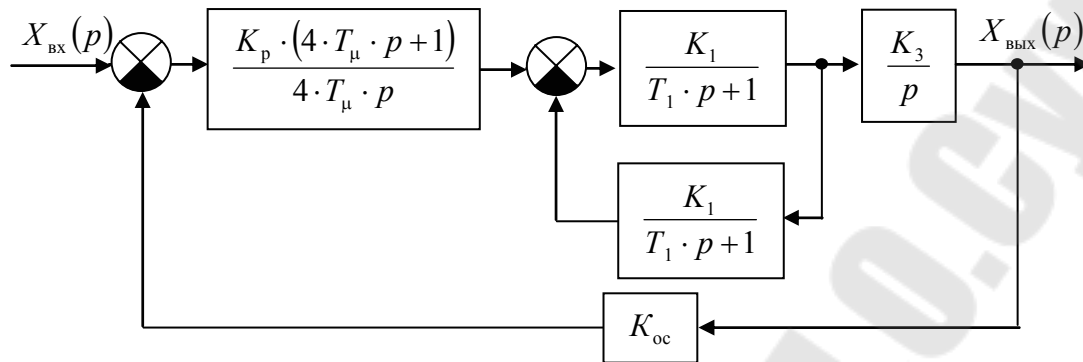


Рис.112. Структурная схема САУ к примеру 23, в которой регулятор синтезирован на СО

Согласно рис.112 передаточная функция СО-регулятора будет

$$W_p^{\text{со}}(p) = \frac{K_p \cdot (4 \cdot T_\mu \cdot p + 1)}{4 \cdot T_\mu \cdot p} = \frac{4 \cdot 0.4 \cdot (0.198 \cdot p + 1)}{0.198 \cdot p} = \frac{20.4 \cdot (0.198 \cdot p + 1)}{p}$$

Для улучшенного симметричного оптимума структурная схема (рис.112) будет иметь вид, представленный на рис.113.

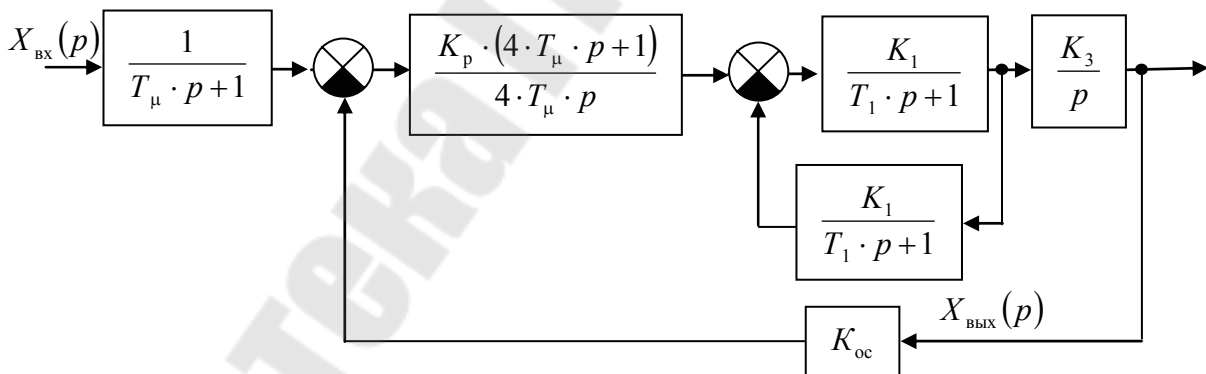


Рис.113. Структурная схема САУ к примеру 23, в которой регулятор синтезирован на УСО

На рис.113 $W_\phi(p) = \frac{1}{T_\mu \cdot p + 1} = \frac{1}{0.0495 \cdot p + 1}$ – передаточная

функция фильтра, обеспечивающего улучшенное качество переходного процесса по сравнению СО-оптимизацией.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В учебном пособии рассмотрены большинство основных разделов теории автоматического управления для линейных САУ электроприводов, применяющихся в современном машиностроении.

В каждом разделе теоретического курса, приведены конкретные практические примеры, для лучшего понимания излагаемого вопроса.

Предложенные в компактной форме лекции могут служить основой для более глубокого изучения студентами теории автоматического управления.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	3
В.1. Основные понятия и определения.....	4
В.2. Классификация систем автоматического управления.....	6
В.2.1. Классификация САУ по принципу построения.....	6
В.2.2. Классификация САУ по числу контуров регулирования.....	13
В.2.3. Классификация САУ по характеру параметров.....	15
В.2.4. Классификация САУ по характеру управляющего воздействия.....	19
В.2.5. Классификация САУ по типу выходного сигнала.....	21
1. Основные методы анализа и синтеза САУ.....	23
1.1. Условно-графическое представление САУ.....	23
1.2. Основы операторно-частотного метода анализа и синтеза САУ.....	27
1.2.1. Передаточные функции элементов управления САУ.....	28
1.2.2. Операторная математическая модель электродвигателя постоянного тока независимого возбуждения.....	32
1.2.3. Структурные схемы электродвигателя постоянного тока независимого возбуждения.....	36
1.3. Структурный анализ САУ.....	39
1.4. Метод динамических звеньев.....	45
1.4.1. Характеристики динамических звеньев САУ.....	46
1.4.2. Типовые линейные динамические звенья.....	54
1.4.2.1. Позиционные динамические звенья.....	55
1.4.2.2. Дифференцирующие динамические звенья.....	73
1.4.2.3. Интегрирующие динамические звенья.....	82
1.4.2.4. Особые динамические звенья.....	87
1.4.3. Построение асимптотических ЛАЧХ и шаблонов для ЛФЧХ.....	92
1.5. Виды передаточных функций САУ и их взаимосвязь.....	95
1.6. Статическое и астатическое регулирование САУ.....	98
2. Показатели качества регулирования САУ.....	101
2.1. Устойчивость САУ.....	102
2.2. Точность САУ.....	108
2.3. Быстродействие и динамичность САУ.....	114
3. Статический расчет САУ.....	120

4. Синтез линейных систем автоматического управления.....	126
4.1. Цели и задачи и основные этапы синтеза САУ.....	126
4.2. Основные типы регуляторов САУ.....	129
4.3. Методы синтеза САУ.....	131
4.3.1. Расчет динамики САУ с помощью логарифмических частотных характеристик.....	131
4.3.2. Расчет динамики САУ методом желаемых передаточных функций.....	138
4.3.2.1. Характеристическое уравнение САУ и его нормирование.....	139
4.3.2.2. Стандартные распределения корней характеристического уравнения.....	142
4.3.2.3. Критерии оптимизации регуляторов в САУ подчиненного регулирования.....	147
Заключение.....	166
Содержание.....	167
Литература.....	169

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Иващенко Н.Н. Автоматическое регулирование. М.: Машиностроение, М.1973. – 607 с.
- 2 Бесекерский В.А. Попов Е.П. Теория систем автоматического управления, Санкт-Петербург 2003. 744 с.
- 3 Анхимюк В.Л., Опейко О.Ф. Теория автоматического управления, Мн. 2000. – 351 с.
- 4 Лотош М.М. Основы теории автоматического управления, М.1979. – 256 с.
- 5 Шаталов А.С. Основы автоматического управления. М.: Высшая школа, 1977. – 448 с.
6. Мирошник. И.В. Теория автоматического управления. Линейные системы, Питер 2005. – 333 с.

Луковников Вадим Иванович
Козлов Андрей Владимирович

ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

ПОСОБИЕ

**по одноименному курсу для студентов
специальностей 1-53 01 05 «Автоматизированные
электроприводы» и 1-36 01 03 «Технологическое обо-
рудование машиностроительного производства»
дневной и заочной форм обучения**

Подписано к размещению в электронную библиотеку
ГГТУ им. П. О. Сухого в качестве электронного документа
учебно-методических материалов 30.11.09.

Рег. № 98Е.

E-mail: ic@gstu.gomel.by
<http://www.gstu.gomel.by>