РАСЧЕТ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ РАСПЛАВЛЕННОГО МЕТАЛЛА ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ПОЛОЖЕНИЯХ ЕМКОСТИ

А. С. Рябцев

Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого», Республика Беларусь

Научный руководитель А. М. Селютин

Данная задача возникает при расчете и конструировании приводов для металлургического оборудования при реализации опрокидывающего момента литейных ковшей, поворотных плавильных электропечей, роторных печей барабанного типа и т. д.

В практике применяется графоаналитический метод определения траектории движения центра тяжести расплава при различных положениях емкости. Объем жидкости условно разбивается на ряд отдельных сегментов и используется метод последовательных приближений: задаемся уровнем расплава и вычисляем его объем в ковше. Далее, если он окажется больше фактического, понижаем уровень и повторяем расчет объема, и так далее до тех пор, пока не получим совпадения объемов.

Очевидно, этот метод может дать только приближенный результат при вычислении координат центра тяжести жидкости. Естественно, из-за большого объема и громоздкости вычислений приходится использовать крупный шаг вычислений при углах поворота емкости 10–15°. Этот недостаток привел к необходимости разработки математической модели расчета для любых малых угловых шагов, приспособленной для машинной реализации.

Рассмотрим геометрическую модель емкости. В вертикальном положении форма имеет призматическую форму и заполнена жидкостью. В общем случае очерк основания не имеет значения. При сливании заполняющего форму жидкого вещества уровень поверхности будет оставаться горизонтальным. В принятой графической модели призма остается неподвижной, а уровень жидкости будет занимать положения 0, 1, 2, 3, … , K, …, N, т. е. изображаться пучком прямых, проходящих через точку А (рис. 1).

Представленная на рис. 1 модель показывает, что при разных углах наклона емкости α при сливе жидкости расчет ее центра тяжести распадается на два алгоритма: зеркало поверхности находится в пределах вертикальной стенки ковша (положение 0, 1, 2, 3, …, K) или выходит на его днище (положение K, …, N). В первом случае в плоском сечении ковша уровень образуется как сумма площадей треугольника $\mathrm{A}S_iY_i$ и прямоугольника S_iY_iKN. Во втором случае образуется только треугольник.

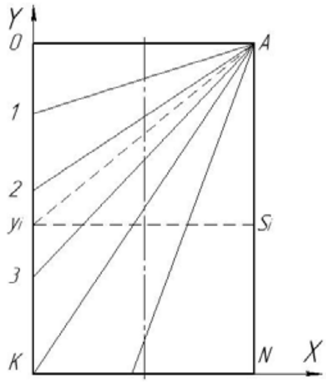

Рис. 1

Определим координаты центра тяжести произвольного треугольника. Известными величинами являются X и Y – диаметр ковша и высота его заполнения, а также угол его поворота α (см. рис. 2), изменяющийся от 0 до 90°. Рассматриваемый треугольник – прямоугольный. Из курса аналитической геометрии известно:

$$X_{\text{ц.т}} = 1/3(Xa + Xb + Xc); \quad Y_{\text{ц.т}} = 1/3(Ya + Yb + Yc);$$

В нашем случае $Xb = 0$; $Xa = Xc$, тогда $X_{\text{ц.т}} = 2/3X$.

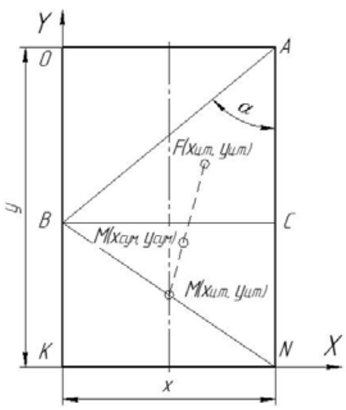

Рис. 2

Совершенно очевидно, что при положениях зеркала от 0 до K величина $X_{\text{ц.т}}$ будет оставаться неизменной, т. е. $X_{0,1,2,\ldots k} = \text{const} = 2/3X$.

Аналогично определяется $Y_{\text{ц.т}}$. В нашем случае $Yb = Yc$ и $Yb = Ya = AC$, где $AC = X\text{tg}\alpha$, т. е. $Yb = Ya - X\text{tg}\alpha$.

Окончательно получим:

$Y_{\text{ц.т}} = 1/3(Ya + 2Yb) = 1/3(Ya + 2(Ya - X\text{tg}\alpha)) = Ya - 2/3X\text{tg}\alpha.$ Рассмотрим второй случай, когда зеркало жидкости выходит на основание ковша (положение K, …, N):

$$X_{\text{ц.т}} = 1/3(X_a + X_k + X_N); \text{ но } X_k = 0, \text{ а } X_N = X_a = X,$$

тогда $X_{\text{ц.т}} = 2/3X$.

Аналогично:

$$Y_{\text{ц.т}} = 1/3(Y_a + Y_k + Y_N),\ \text{но}\ Y_k = Y_N = 0,\ \text{а}\ Ya = Y,$$

тогда $Y_{\text{ц.т}} = 1/3Y$.

Полученные зависимости приводят к выводу о том, что при достижении зеркалом жидкого металла положения точки K центр тяжести при дальнейшем наклоне будет двигаться по прямой, параллельной основанию емкости.

Определение центра тяжести прямоугольника не вызывает сложностей, так как он находится на пересечении его диагоналей, т. е. на половине высоты прямоугольника (рис. 2):

$$X_{\text{ц.т.прям}} = 1/2X;\ Y_{\text{ц.т.прям}} = 1/2Y_b,\ \text{но}\ Y_b = Y - X\text{tg}\alpha,$$

тогда $Y_{\text{ц.т.прям}} = 1/2(Y - X\text{tg})$.

Определим координаты центра тяжести суммарной фигуры при произвольном значении угла наклона емкости. Для этого в соответствии с правилами аналитической геометрии в каждом положении емкости необходимо знать величину λ:

$$\lambda = S_{\text{треуг}} / S_{\text{прямоуг}},$$

где $S_{\text{треуг}}$ – площадь треугольника; $S_{\text{прямоуг}}$ – площадь прямоугольника;

$$S_{\text{треуг}} = 1/2bx\ \text{(рис. 2), но}\ b = x\text{tg}\alpha;$$

$$S_{\text{треуг}} = 1/2x^2\text{tg}\alpha;$$

$$S_{\text{прямоуг}} = x(y - b) = xy - x^2\text{tg}\alpha,\ \text{но}\ x^2\text{tg}\alpha = 2S_{\text{треуг}},$$

т. е. $S_{\text{прямоуг}} = (xy - b) = xy - 2S_{\text{треуг}}$.

Следовательно,

$$\lambda = 1/2x^2\text{tg}\alpha/(xy - x^2\text{tg}\alpha),$$

или

$$\lambda = \frac{x}{2}\frac{\text{tg}\alpha}{y - x\text{tg}\alpha}.$$

Зная λ, можно определить положение центра тяжести суммарной фигуры при любом наклоне:

$$X_0 = \frac{x_{\text{ц.т}}^{\text{прямоуг}} + \lambda x_{\text{ц.т}}^{\text{треуг}}}{1+\lambda};\quad Y_0 = \frac{y_{\text{ц.т}}^{\text{прямоуг}} + \lambda y_{\text{ц.т}}^{\text{треуг}}}{1+\lambda}.$$

Подставив значения, имеем:

$$X_0 = \frac{\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\frac{\mathrm{tg}\alpha}{y - x\mathrm{tg}\alpha}\frac{2}{3}x}{1 + \frac{x}{2}\frac{\mathrm{tg}\alpha}{y - x\mathrm{tg}\alpha}}; \quad Y_0 = \frac{\frac{y - x\mathrm{tg}\alpha}{2} + \left(\frac{x}{2}\frac{\mathrm{tg}\alpha}{y - x\mathrm{tg}\alpha}\right)\left(y - \frac{2}{3}x\mathrm{tg}\alpha\right)}{1 + \frac{x}{2}\frac{\mathrm{tg}\alpha}{y - x\mathrm{tg}\alpha}},$$

или

$$X_0 = \frac{\frac{x}{2} + \frac{bx}{3c}}{1 + \frac{b}{2c}}; \quad Y_0 = \frac{\frac{c}{2} + \frac{b}{2c}\left(y - \frac{2}{3}b\right)}{1 + \frac{b}{2c}},$$

где $b = x\mathrm{tg}\alpha$; $c = y - x\mathrm{tg}\alpha$.

Предложенный метод определения центра тяжести расплавленного металла при различных положениях ковша применим не только для призматической формы, но и для цилиндрических, которыми чаще всего и являются большинство сосудов, используемых в промышленности.

При рассмотрении сечения цилиндра плоскостью, параллельной образующей и проходящей через диаметр основания, получаем графическую модель, аналогичную рассмотренной выше. При сечении цилиндра плоскостями, параллельными первой плоскости, получаем сечения, подобные первому сечению, но уменьшающиеся по мере удаления от диаметра. Однако линии, на которых находятся центры тяжести этих сечений, эквидистантны плоскости основания емкости.

Кстати, из рис. 2 следует, что, зная положение центров тяжести треугольника и прямоугольника и соединив эти точки, получаем прямую, на которой и находится искомый центр тяжести суммарной фигуры. При этом прямая, соединяющая центры тяжести треугольника и прямоугольника центром тяжести суммарной фигуры, делится в отношении, обратно пропорциональном площадям этих фигур. Это отношение нами было обозначено через λ.

Алгоритмизация данного метода позволяет эффективно получать результат расчета с высокой точностью.