РАСЧЕТ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ МАЯТНИКА И ЗАКОНА ДВИЖЕНИЯ ПОЛЗУНА МЕТОДОМ ДАЛАМБЕРА–ЛАГРАНЖА

В. В. Беган

Витебский государственный технологический университет,
Республика Беларусь

Научный руководитель А. В. Локтионов

Для определения малых колебаний маятника (рис. 1) и уравнения движения ползуна (рис. 2) можно применить принцип Даламбера–Лагранжа.

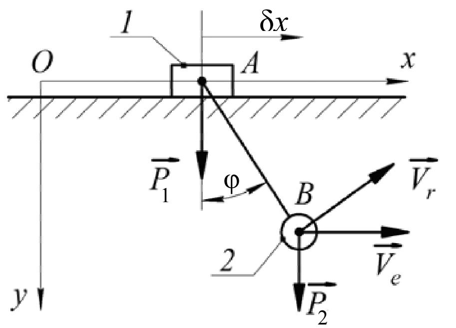

Рис. 1. Расчетная схема движения эллиптического маятника

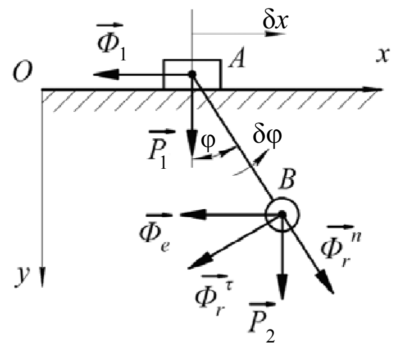

Рис. 2. Расчетная схема движения ползуна эллиптического маятника

К действующим силам $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_2$ присоединим силы инерции ползуна A в поступательном движении и маятника B – в сложном движении.

Значение силы инерции ползуна A:

$$\Phi_1 = m_1 a_1 = \frac{P_1}{g}\ddot{x}.$$

Сила инерции маятника B:

$$\vec{\Phi}_B = -m_2 \vec{a}_B = -\frac{P_2}{g}\left(\vec{a}_e + \vec{a}_r^{\tau} + \vec{a}_r^{n} + \vec{a}_K\right).$$

Тогда значение переносной силы инерции:

$$\Phi_e = \frac{P_2}{g} a_e = \frac{P_2}{g}\ddot{x}.$$

Касательная составляющая силы инерции в относительном движении:

$$\Phi_r^\tau = m_2 a_r^\tau = \frac{P_2}{g} l\ddot{\varphi}.$$

Нормальная составляющая силы инерции маятника B в относительном движении:

$$\Phi_r^n = m_2 a_r^n = \frac{P_2}{g} l^2 \dot{\varphi}^2.$$

Ускорение Кориолиса равно нулю.

Независимыми координатами, определяющими положение данной системы, являются перемещение x ползуна A и угол поворота φ. Зададим два возможных перемещения δx и $\delta\varphi$, направленных в сторону возрастания координат x и φ.

Составим дифференциальное уравнение движения системы, соответствующее приращению координаты x, при этом $\delta x \neq 0$, $\delta\varphi = 0$.

Получим общее уравнение динамики:

$$\left(-\Phi_1 - \Phi_e - \Phi_r^\tau \cos\varphi + \Phi_r^n \sin\varphi\right)\delta x = 0.$$

Так как $\delta x \neq 0$, приравниваем нулю выражение, стоящее в скобках. Подставив значения сил инерции, получим:

$$-\frac{P_1 + P_2}{g}\ddot{x} - \frac{P_2}{l}\ddot{\varphi}\cos\varphi + \frac{P_2}{g} l\dot{\varphi}^2 \sin\varphi = 0. \quad (1)$$

Составим дифференциальное уравнение движения системы, соответствующее приращению координаты φ, при этом $\delta x \neq 0$, $\delta\varphi = 0$. Тогда общее уравнение динамики примет вид

$$-\left(\Phi_e l\cos\varphi + \Phi_r^\tau l + P_2 l \sin\kappa\right)\delta\varphi = 0.$$

Полагая в этом выражении $\delta x \neq 0$ и подставляя значения сил инерции, приравняем нулю выражение, стоящее в скобках:

$$\frac{P_2}{g} l\ddot{x}\cos\varphi - \frac{P_2}{l} l^2\ddot{\varphi} + P_2 l \sin\varphi = 0. \quad (2)$$

Считая колебания малыми, полагаем, что $\cos\varphi \approx 1$; $\sin\varphi \approx \varphi$. Пренебрегая величинами второго порядка малости, уравнения (1) и (2) приведем к виду

$$\frac{P_1 + P_2}{g}\ddot{x} + \frac{P_2}{l}\ddot{\varphi} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{P_2}{g} l\ddot{x} + \frac{P_2}{g} l^2\ddot{\varphi} + P_2\varphi = 0.$$

Используя дифференциальные уравнения малых колебаний системы с двумя степенями свободы применительно к эллиптическому маятнику, получим:

$$k^2 = \frac{(P_1 + P_2)g}{P_1 l}. \tag{4}$$

Представим систему уравнений (3) в виде

$$\ddot{x} = -\frac{P_2 l}{P_1 + P_2}\ddot{\varphi}; \tag{5}$$

$$\ddot{x} + l\ddot{\varphi} + g\varphi = 0. \tag{6}$$

Подставив значение $\ddot{x}$ в уравнение (6), получим:

$$\frac{P_1 l}{P_1 + P_2}\ddot{\varphi} + g\varphi = 0,$$

или

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0, \tag{7}$$

где $k^2 = \dfrac{(P_1 + P_2)g}{P_1 l}$.

Полученное значение k^2 соответствует значению (4), полученному с помощью уравнения частот.

Представим общее решение дифференциального уравнения (7) в виде

$$\varphi = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \tag{8}$$

Уравнение, определяющее угловую скорость, имеет вид

$$\dot{\varphi} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt. \tag{9}$$

Начальные условия: при $t_0 = 0,\ \varphi_0 = 0;\ \dot{\varphi}_0 = \omega_0$. Подставляя начальные условия в уравнения (8) и (9), найдем значения коэффициентов C_1 и C_2. Получим:

$$C_1 = 0, C_2 = \frac{\omega_0}{k} = \omega_0\sqrt{\frac{P_1 l}{(P_1 + P_2)g}}.$$

Уравнение малых колебаний маятника будет иметь вид

$$\varphi = \frac{\omega_0}{k}\sin kt, \tag{10}$$

или

$$\varphi = \omega_0\sqrt{\frac{P_1 l}{(P_1 + P_2)g}}\sin\sqrt{\frac{(P_1 + P_2)g}{P_1 l}}t. \tag{11}$$

Продифференцировав дважды уравнение (11), имеем:

$$\ddot{\varphi} = -\omega_0 k \sin kt.$$

Тогда уравнение (5) примет вид

$$\ddot{x} = \frac{P_2 l \omega_0}{P_1 + P_2} k \sin kt.$$

Проинтегрировав дважды это уравнение, определим уравнение движения ползуна:

$$x = x_0 + \frac{P_2 l \omega_0}{P_1 + P_2} (t - \sqrt{\frac{P_1 l}{(P_1 + P_2) g}} \sin \sqrt{\frac{(P_1 + P_2) g}{P_1 l}} t. \qquad (12)$$