СЕКЦИЯ IX
ФИЗИЧЕСКИЕ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

ПРИМЕНЕНИЕ КРИТЕРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ К УСТАНОВЛЕНИЮ АПРИОРНОЙ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЯ

Т. Ж. Агзамов

Джизакский государственный педагогический институт, Узбекистан

Х. Х. Жабборов

Джизакский политехнический институт, Узбекистан

Пусть R – класс всех ограниченных, неотрицательных действительных функций $u(t,x)$, определенных для $0 \le t \le T$, так, что $\lim\limits_{n\to 0}\varphi(t+n) \le \varphi(t)$ для $0 \le t \le T$. Если $\varphi(t)$ – любая действительная функция, определенная для $0 < t \le T$, то определим $\overline{\varphi}'(t) = \lim\limits_{n\to +0}\frac{1}{n}(\varphi(t)-\varphi(t-n))$. Наконец, мы будем говорить, что функция $\psi(\varphi,t)$, определенная и непрерывная для $0 \le t \le T$, $0 \le \varphi < +\infty$, принадлежит классу Γ, если функция $\varphi(t) \equiv 0$ является единственной функцией из класса R, удовлетворяющей условиям:

$$\overline{\varphi}'(t) \le \psi(\varphi,t), \quad 0 < t \le T;$$

$$\varphi(0) = 0.$$

Прежде чем утверждать результат, сформулируем гипотезу (Г): предположим, что для всех $(x,t) \in \overline{U_T}$, всех u, v, u_x с

$$u > v, |u|, |v|, |u_x| \le M;$$

$$F(x,t,u,u_x) - F(x,t,v,v_x) \le \psi(u-v,t);$$

$$\left|A_{ij}(x,t,u,u_x) - A_{ij}(x,t,v,v_x)\right| \le \psi(u-v,t),\ i,j=\overline{1,n},$$

где для любых K, $M > 0$, функция $K\psi(\phi,t) \in \Gamma$, также предположим, что F и A_{ij} являются непрерывными по u_x, v_x, и эта непрерывность равномерна для $x \in \overline{G}$ и для t, u, и u_x, v_x из компактного множества ς. Предположим также, что A_{ij} равномерно ограничено для $x \in \overline{G}$ и для t, u и u_x, v_x из компактного множества.

Теорема I. Пусть u и v функции из $C^{2,1}(U_T)$, удовлетворяющие неравенствам:

$$u_t - \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x,t,u,u_x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \le F(x,t,u,u_x);$$

$$v_t - \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x,t,v,v_x)\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \geq F(x,t,v,v_x),$$

такие, что $u(x,0) \leq v(x,0)$ для $x \in G$ и для каждого $t \in (0,T]$, в каждой точке $x \in \partial G$ будем иметь или $u(x,t) \leq v(x,t)$, или $u_\xi(x,t) \leq v_\xi(x,t)$, где $\xi = \xi(x,t)$ – заданное внешнее поле. Кроме того, предположим, что имеет место гипотеза (Г), что u и v ограничены в U_T и что, наконец, либо u, либо v имеет первую и вторую производные по x, которые ограничены в U_T. Тогда $u(x,t) \leq v(x,t)$ в $\overline{U}_T = \overline{G} \times (0,T]$.

Доказательство. Запишем $W(x,t) = u(x,t) - v(x,t)$, тогда

$$W_t(x,t) \leq \sum_{i,j=1}^{n}\left[A_{ij}(x,t,u,u_x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - A_{ij}(x,t,v,v_x)\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + F(x,t,u,u_x) - F(x,t,v,v_x)\right].$$

Предположим для определенности, что v имеет ограниченные производные, тогда можем переписать неравенство

$$W_t \leq L_u[W] + \sum_{i,j=1}^{n}\left[A_{ij}(x,t,u,u_x) - A_{ij}(x,t,v,v_x) + F(x,t,u,u_x) - F(x,t,v,v_x)\right] \leq L_u[W] +$$

$$+K'\sum_{i,j=1}^{n}\left\{\left|A_{ij}(x,t,u,u_x) - A_{ij}(x,t,v,v_x)\right| + \left|A_{ij}(x,t,u,u_x) - \mathrm{A}_{ij}(x,t,v,v_x)\right|\right\} +$$

$$+F(x,t,u,u_x) - F(x,t,u,v_x) + F(x,t,u,v_x) - F(x,t,v,v_x), \tag{1}$$

где $L_u[W] = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x,t,u,u_x)\frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_j}$.

Рассмотрим функцию $\varphi(t) = \max(\operatorname{Sup}_{x\in\overline{G}} w(\mathrm{x},\mathrm{t}),0)$. Очевидно, $\varphi(0) = 0$; если мы покажем, что φ удовлетворяет неравенству

$$\overline{\varphi}'(t) \leq k\psi_M(\varphi(t),t), \tag{2}$$

где $k \in M > 0$, а также, что $\varphi \in R$, то это нам дает возможность, что $\varphi \equiv 0$ и, следовательно, теорема будет доказана.

Предположим, что G ограничена. Тогда $\varphi \in R$, так как φ фактически непрерывна в $[0,T]$. Для любого $t > 0$, если $\varphi(t) = 0$, то имеет место для любых $k, M > 0$, так как фактически $\overline{\varphi}'(t) \leq 0$. Если $\varphi(t) > 0$, то существует $x_0 \in \overline{G}$ такое, что $w(x_0,t) = \varphi(t)$. Так как $w(x_0,t-h) \leq \varphi(t-h)$ для $h > 0$, видно, что

$$\overline{\varphi}'(t) \leq \lim_{h\to+C}\frac{w(x_0,t) - w(x_0,t-h)}{h} = \frac{\partial w}{\partial t}(x_0,t).$$

Если нам удается показать это в точке (x_0,t), то должны иметь:

а) $w_x = 0$, т. е. $u_x = v_x$;

б) $L_u[w] \leq 0$,

тогда из (1) будет следовать (2), если μ выбрать так, что

$$\underset{U_T}{Sup}|U| \leq \mu, \quad \underset{U_T}{Sup}|U_x| \leq \mu, \quad \underset{U_T}{Sup}|V_x| \leq \mu,$$

а $k = n^2 k' + 1$. Но, если x_0 – внутренняя точка $\overline{G}$, то а) и б) следует из принципа максимума, так как x_0 является максимальной точкой для w, а L_u – является эллиптическим в окрестности x_0. Если $x_0 \in \partial G$, то, так как $w(x_0, t) = \varphi(t) > 0$, мы должны иметь $w_\xi(x_0, t) \leq 0$. С другой стороны, x_0 – максимальная точка для w в $\overline{G}$; $w_x(x_0, t_0)$ является вектором, направленным по направлению внешней нормали к $\partial\overline{G}$ в x_0. Таким образом, $w_x(x_0, t_0) = 0$, иначе мы должны были иметь $w_\xi(x_0, t) > 0$, так как ξ является внешним направленным. Если $L_u[w] > 0$ в (x_0, t_0) то $L_u[w] > 0$ в окрестности x_0 в $\overline{G}$, следовательно, по распространению принципа максимума на эллиптический оператор было бы $w_x(x_0, t) \neq 0$. Таким образом, б) также следует.

В случае неограниченной G для $\varepsilon > 0$, аппроксимируем:

$$w_\varepsilon(x, t) = w(x, t) - \varepsilon r(x); \ \varphi_\varepsilon(t) = \max(\underset{x \in \overline{G}}{\operatorname{Sup}} w_\varepsilon(x, t), 0).$$

В силу гипотезы (Г) в конечном итоге получим неравенство

$$\varphi(t_2) - \varphi(t_1) \leq N(t_2 - t_1),$$

в качестве N можно взять:

$$k Sup \psi_\mu(\varphi(t), t) \to k\psi_\mu(\varphi(t_2), t_2),$$

когда t_1 стремится к t_2 снизу. Отсюда получим (2).

В случае $v_{x_i x_j} = 0$, $i, j = \overline{0, n}$ мы можем отбросить все гипотезы (Г), относящиеся к A_{ij}, за исключением равномерной ограниченности.

Чтобы увидеть, что теорема действительно использована к применению критерия устойчивости к установлению априорной оценки решения, можно рассматривать решение уравнения

$$\frac{du}{dt} = f(t, u)$$

как решение уравнения

$$u_t - \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x, t, u, u_x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = F(x, t, u, u_x)$$

с $F(x, t, u, u_x) \equiv f(t, u)$.

Литература

1. Олейник, О. А. Квазилинейные параболические уравнения второго порядка со многими независимыми переменными / О. А. Олейник, С. Н. Кружков // Успехи мат. наук. – 1961. – Т. 16, вып. 5. – С. 115–155.
2. Ладыженская, О. А. Обзор результатов по разрешимости краевых задач для эллиптических и параболических квазилинейных уравнений второго порядка, имеющих неограниченные особенности / О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева // Успехи мат. наук. – 1986. – Т. 41, вып. 5. – С. 59–83.