

Введя в рассмотрение матрицы X – вектор валового (общего) производства, Y – вектор конечного потребления и A – матрицу прямых затрат, систему (3) можно переписать в матричном виде:

$$X = AX + Y, \quad (4)$$

$$\text{где } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Уравнение межотраслевого баланса (4) легко преобразовать к виду $(E - A)X = Y$ и решить средствами матричной алгебры. Окончательно имеем:

$$X = (E - A)^{-1} \cdot Y. \quad (5)$$

По формуле (5) мы можем определить вектор валового производства X при известных постоянных значениях прямых затрат A и определенном необходимом векторе конечного потребления Y [1].

Из прикладного характера задачи вытекает неотрицательность элементов матрицы A и векторов X и Y . Неотрицательная матрица A называется продуктивной, если существует такой положительный вектор X , для которого выполнено неравенство $X > AX$. В этом случае и модель Леонтьева называется продуктивной.

Приведем некоторые из существующих критериев продуктивности матрицы A :

1. Матрица A с неотрицательными элементами продуктивна, если сумма всех элементов в любом ее столбце (строке) не превосходит единицы, причем хотя бы для одного столбца (строки) эта сумма строго меньше единицы.

2. Матрица A продуктивна тогда и только тогда, когда матрица $(E - A)^{-1}$ существует и ее элементы неотрицательны [1].

В настоящее время матричные модели, используемые в экономике, хорошо изучены и имеют широкое практическое применение. Однако на практике часто приходится принимать решения в условиях неполной и не совсем точной информации. Для этих целей была разработана теория нечетких множеств, с успехом применяемая сегодня в различных сферах науки и техники, в том числе и в экономике.

Введем некоторые понятия и определения, относящиеся к теории нечетких чисел.

Треугольным нечетким числом A называется тройка $\langle a, b, c \rangle$ ($a \leq b \leq c$) действительных чисел, через которые его функция принадлежности $\mu_A(x)$ определяется следующим образом [2]:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & \text{если } x \in [a; b], \\ \frac{x-c}{b-c}, & \text{если } x \in [b; c], \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

На рис. 1 изображено нечеткое треугольное число $A = \langle 1, 5, 7 \rangle$, которое лингвистически можно интерпретировать как «около 5» или «приблизительно 5».

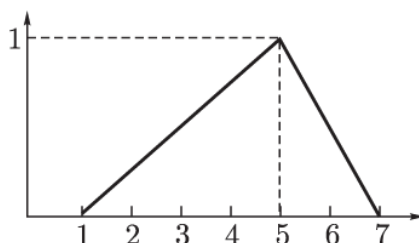


Рис. 1

Второе число b тройки $\langle a, b, c \rangle$ называют *модой*, или четким значением нечеткого треугольного числа. Числа a и c характеризуют степень «размытости» числа.

В общем случае при определении нечеткого треугольного числа не обязательно использовать линейные функции. Часто в различных приложениях используются две функции, из которых одна монотонно возрастает на интервале $[a; b]$, а другая монотонно убывает на интервале $[b; c]$.

Наибольшее распространение получили числа $(L-R)$ -типа, определяемые тройкой (a, α, β) , где a – мода числа, α и β – левый и правый коэффициенты нечеткости ($\alpha, \beta > 0$). Например, число, изображенное на рис. 1, будет записано следующим образом: $(5, 4, 2)$.

Пусть (a, α, β) , (b, γ, δ) – нечеткие числа. Следуя [2], определим арифметические операции следующим образом:

$$- \text{сложение: } (a, \alpha, \beta) + (b, \gamma, \delta) = (a + b, \alpha + \gamma, \beta + \delta); \quad (6)$$

$$- \text{вычитание: } (a, \alpha, \beta) - (b, \gamma, \delta) = (a - b, \alpha + \delta, \beta + \gamma); \quad (7)$$

$$- \text{умножение } (a, b > 0): (a, \alpha, \beta) \cdot (b, \gamma, \delta) = (ab, a\gamma + b\alpha, a\delta + b\beta); \quad (8)$$

$$- \text{умножение } (a < 0, b < 0): (a, \alpha, \beta) \cdot (b, \gamma, \delta) = (ab, -b\alpha - a\delta, -b\beta - a\gamma); \quad (9)$$

$$- \text{деление } (a, b > 0): (a, \alpha, \beta) / (b, \gamma, \delta) = (a/b, b\alpha + a\delta, b\beta + a\gamma). \quad (10)$$

Рассмотрим применение теории нечетких чисел на примере модели Леонтьева.

Пример. Для двухотраслевой экономической системы задана нечеткая матрица коэффициентов прямых материальных затрат $A = \begin{pmatrix} (0,3; 0,03; 0,05) & (0,2; 0,04; 0,05) \\ (0,5; 0,05; 0,03) & (0,2; 0,04; 0,05) \end{pmatrix}$

и нечеткий вектор конечной продукции $B = \begin{pmatrix} (200; 20; 20) \\ (300; 25; 25) \end{pmatrix}$. Найдем величину валовой

продукции каждой из отраслей. Эти величины также будут являться нечеткими числами, для вычисления которых мы используем формулу (5), а также (6)–(10).

Матрица A является продуктивной согласно первому критерию. Построим матрицу $E - A = \begin{pmatrix} (0,7; 0,05; 0,03) & (-0,2; 0,05; 0,04) \\ (-0,5; 0,03; 0,05) & (0,8; 0,05; 0,04) \end{pmatrix}$. Тогда матрица $(E - A)^{-1}$ примет вид:

$$(E - A)^{-1} = \frac{1}{(0,46; 0,106; 0,082)} \begin{pmatrix} (0,8; 0,05; 0,04) & (0,2; 0,04; 0,05) \\ (0,5; 0,05; 0,03) & (0,7; 0,05; 0,03) \end{pmatrix},$$

откуда, согласно (5), $X = (E - A)^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} (478,26; 37,82; 43,56) \\ (673,91; 49,57; 52,41) \end{pmatrix}$. Таким образом, для обеспечения заданного нечеткого объема конечной продукции первая и вторая отрасли должны произвести продукцию в объеме равном, соответственно, (478,26; 37,82; 43,56) и (673,91; 49,57; 52,41) условным единицам. Межотраслевые поставки и чистую продукцию каждой отрасли можно найти по формулам, соответственно, (2) и (1).

Л и т е р а т у р а

1. Модели межотраслевого баланса и макроэкономической динамики. – Режим доступа: http://www.apmath.spbu.ru/ru/staff/kuzyutin.d/files/EMM_ch7_Макroeconomic_Dynamics.pdf, свободный. – Загл. с экрана.
2. Кобышева, Л. К. Основы теории нечетких множеств : учеб. пособие / Л. К. Кобышева, Д. М. Назаров. – СПб. : Питер, 2011. – 192 с.