

УДК 537.2:620.3

ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКАЯ ИНДУКЦИЯ НА ИЗОЛИРОВАННОЙ ПРОВОДЯЩЕЙ СФЕРЕ ОТ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ИСТОЧНИКОВ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Д. В. КОМНАТНЫЙ

*Учреждение образования «Гомельский государственный
технический университет имени П. О. Сухого»,
Республика Беларусь*

Ключевые слова: наносистемы, микросистемы, электростатическая индукция, изолированная сфера, заряженная прямая нить, заряженная круговая нить, метод отражений, теоремы сложения.

Введение

При разработке процессов высоковольтных электротехнологий, конструировании нано и микросистем возникает необходимость анализа электростатической индукции на проводящих объектах сферической формы [1]–[4]. В указанных работах рассмотрена электростатическая индукция на заземленной сфере, потенциал которой численно равен нулю, в присутствии точечного электрического заряда или диполя. Однако решение этой задачи приведено в очень большом числе литературных источников, в том числе в учебных пособиях по различным дисциплинам [5]–[8]. С другой стороны, по результатам [9] можно заключить, что для практических приложений востребовано рассмотрение электростатической индукции на изолированной проводящей сфере. В нано- и микросистемах часто встречаются более сложные источники электростатического поля в виде заряженной прямой либо круговой нити. Задача об электростатической индукции на изолированной проводящей сфере в присутствии указанных источников электростатического поля практически не представлена в научных и научно-технических публикациях.

Целью настоящей работы является получение расчетных соотношений для потенциала и поверхностной плотности электрического заряда, индуцированных на изолированной проводящей сфере элементарными источниками электростатического поля в виде заряженной прямой нити и заряженной круговой нити.

Постановка задачи

В бесконечном пространстве R^3 с диэлектрической проницаемостью среды ϵ_0 размещена изолированная проводящая сфера. С центром сферы связана система координат $Oxyz$. На некотором расстоянии от сферы размещен элементарный источник электростатического поля (рис. 1). Линейная плотность электрического заряда источника предполагается постоянной. Размеры источника и расстояние от него до сферы таковы, что электрическое изображение источника в сфере целиком размещается внутри сферы, а центр сферы не совпадает с изображением источника. По электростатической индукции сфера приобретает постоянный, заранее неизвестный потенциал. Также на сфере появляются индуцированные электрические заряды, при этом суммарный заряд сферы равен нулю. Требуется найти потенциал сферы и поверхностную плотность индуцированных электрических зарядов на ней.

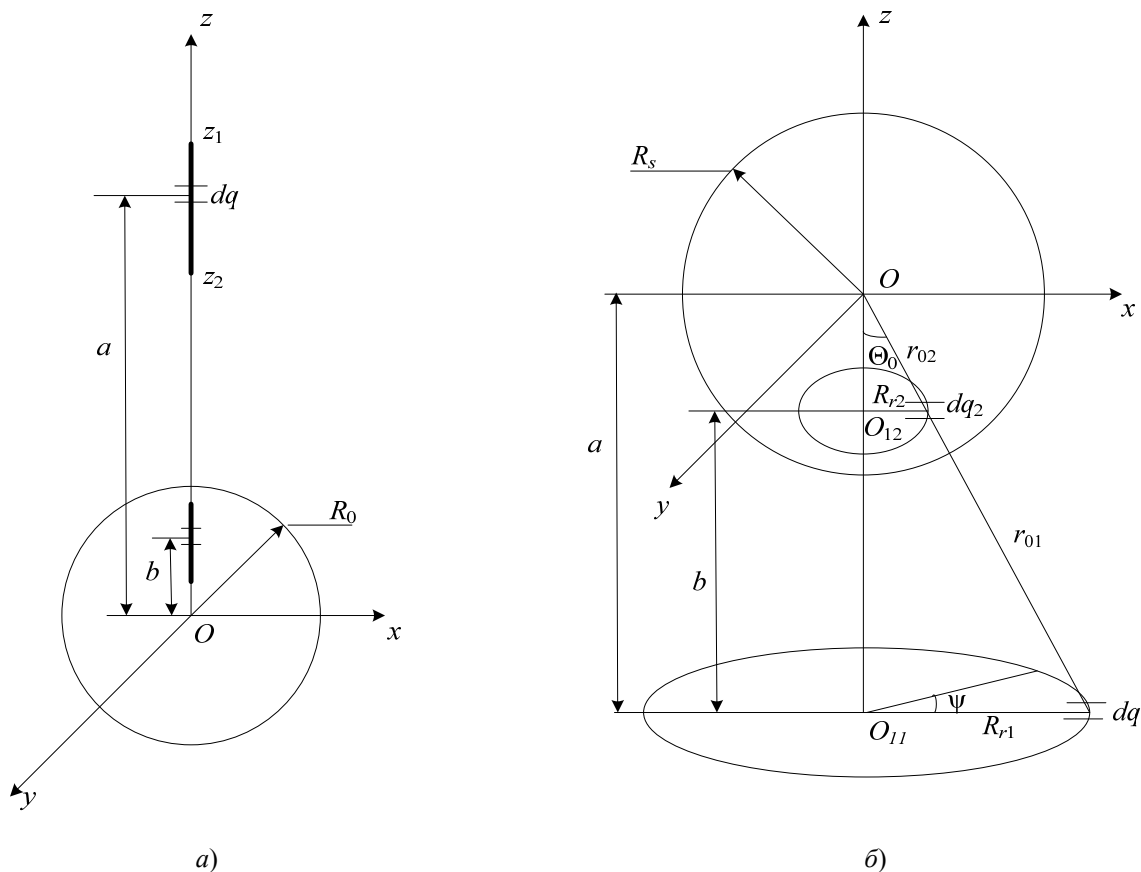


Рис. 1. Изолированная проводящая сфера в присутствии элементарного источника электростатического поля: a – прямой нити; b – круговой нити

Вывод расчетных соотношений для случая прямой нити. Для расчета потенциала электростатического поля, созданного в пространстве источником электрического поля и индуцированным на сфере электрическим зарядом, наиболее просто применить метод электрических изображений в сфере [6], [7]. Поэтому в настоящей статье для достижения поставленной цели применяется этот метод с необходимыми дополнениями, позволяющими получить расчетные соотношения для индуцированного потенциала и поверхностной плотности электрического заряда на сфере в наиболее оптимальной сферической системе координат.

В случае прямой заряженной нити, линейная плотность электрического заряда которой τ , для каждого элементарного заряда $dq = \tau da$ вводятся электрическое отражение $-dq \frac{R_0}{a}$ на расстоянии $b = \frac{R_0^2}{a}$ от центра сферы O и заряд $dq \frac{R_0}{a}$ в центре сферы O [7].

Тогда потенциал, созданный элементарным зарядом нити и его электрическими изображениями в произвольной точке пространства, имеет вид:

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\tau da}{r_1} - \frac{\tau R_0 da}{ar_2} + \frac{\tau R_0 da}{ar_0} \right], \quad (1)$$

где φ – потенциал, В; ϵ_0 – электрическая постоянная, Ф/м; R_0 – радиус сферы, м; a – расстояние от элементарного заряда до центра сферы, м; r_1 – расстояние от заряда dq , м; r_2 – расстояние от электрического изображения заряда dq , м; r_0 – расстояние от заряда в центре сферы, м.

Для расчета электростатической индукции на сфере расстояния r_1 и r_2 необходимо переразложить в сферической системе координат, связанной с декартовой $Oxyz$ и центром сферы. Для этого используются представления, указанные в [10]. Они основаны на теоремах сложения для двух сферических систем координат, центры которых лежат на общей вертикальной оси и сдвинуты по этой оси на некоторое расстояние [11]. Результат преобразования (1) имеет вид:

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau r^n}{a^{n+1}} P_n(\cos \Theta) da - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau R_0^{2n+1}}{a^{n+1} r^{n+1}} P_n(\cos \Theta) da + \frac{\tau R_0}{ar} da \right], \quad (2)$$

где n – счетная переменная; r – радиальная сферическая координата, м; P_n – полином Лежандра порядка n ; Θ – угловая сферическая координата, рад.

Расстояние a изменяется в пределах координат концов заряженной нити z_1 и z_2 . Поэтому для вычисления потенциала, созданного всей нитью, ее электрическим изображением и зарядом в центре сферы, выражение (2) следует проинтегрировать от z_1 до z_2 :

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \int_{z_1}^{z_2} \left(\frac{da}{a^{n+1}} \right) \tau r^n P_n(\cos \Theta) - \sum_{n=1}^{\infty} \int_{z_1}^{z_2} \left(\frac{da}{a^{n+1}} \right) \frac{\tau R_0^{2n+1}}{r^{n+1}} P_n(\cos \Theta) + \frac{\tau R_0}{r} \int_{z_1}^{z_2} \left(\frac{da}{a} \right) \right]. \quad (3)$$

Вводятся обозначения:

$$a_n = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{z_1}^{z_2} \left(\frac{da}{a^{n+1}} \right), \quad a_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{z_2}{z_1}, \quad a_n = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{z_1^n} - \frac{1}{z_2^n} \right) \text{ при } n \geq 1.$$

Тогда (3) записывается в форме

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n \tau r^n P_n(\cos \Theta) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\tau R_0^{2n+1}}{r^{n+1}} P_n(\cos \Theta) + a_0 \frac{\tau R_0}{r} \right]. \quad (4)$$

Если в (4) положить $r = R_0$, то на поверхности сферы потенциал будет

$$\varphi \Big|_{r=R_0} = \tau a_0 = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{z_2}{z_1}. \quad (5)$$

Очевидно потенциал сферы – величина постоянная, таким образом, решение (4) соответствует одному из граничных условий задачи.

Поверхностная плотность заряда на поверхности сферы вычисляется по формуле

$$\sigma = -\epsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=R_0}, \quad (6)$$

где σ – поверхностная плотность электрического заряда сферы, Кл/м².

Подстановка (4) в (6) после преобразований дает:

$$\sigma = -\epsilon_0 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \tau a_n R_0^{n-1} (2n+1) P_n(\cos \Theta) - \frac{\tau}{R_0} a_0 \right). \quad (7)$$

Полный заряд сферы q определяется по формуле

$$q = \int_S \sigma dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sigma R_0^2 \sin \Theta d\Theta d\psi. \quad (8)$$

Подстановка (7) в (8) и интегрирование с учетом известных свойств полиномов Лежандра [5] позволяет убедиться, что полный заряд сферы численно равен нулю. Таким образом, выражение (7) соответствует граничному условию задачи. Следовательно, соотношения (5) и (7) верно описывают результат электростатической индукции на изолированной проводящей сфере в присутствии заряженной прямой нити.

Вывод расчетных соотношений для заряженной круговой нити. В случае круговой заряженной нити для каждого элементарного заряда нити dq вводится электрическое изображение в сфере dq_2 . Элементарный заряд круговой нити равен

$$dq = \tau R_{r1} d\psi, \quad (9)$$

где R_{r1} – радиус нити, м; ψ – угловая координата, рад.

Заряд электрического изображения элементарного заряда dq равен [7]:

$$dq_2 = -\frac{\tau R_{r1} R_s}{r_{01}} d\psi, \quad (10)$$

где R_s – радиус сферы, м; r_{01} – расстояние от центра сферы до элементарного заряда, м.

Электрическое изображение элементарного заряда лежит на расстоянии $r_{02} = \frac{R_s^2}{r_{01}}$ от центра сферы O [7]. Элементарный заряд полученной в результате электрического изображения круговой нити радиуса R_{r2} имеет выражение $dq_2 = \tau R_{r2} d\psi$, поскольку угловая координата ψ для обеих нитей равна (рис. 1, б). Тогда из (10) следует, что для линейной плотности заряда нити-изображения τ_2 справедлива формула

$$\tau_2 R_{r2} = -\tau \frac{R_{r1} R_s}{r_{01}}. \quad (11)$$

В центре сферы размещается точечный заряд, численно равный полному электрическому заряду нити-изображения [7], умноженному на -1 . Потенциал этого заряда с учетом (10) вычисляется по формуле

$$\varphi_0 = \frac{\tau R_{r1} R_s}{4\pi \varepsilon_0 r_{01} r} \int_0^{2\pi} d\psi = \frac{\tau R_{r1} R_s}{2\varepsilon_0 r_{01} r}. \quad (12)$$

Для расчета электростатической индукции на сфере необходимо потенциалы исходной нити и нити-изображения в сфере переразложить в сферической системе координат, связанной с декартовой $Oxyz$ и центром сферы. Для этого в [10] приведены соотношения, основанные на соответствующих теоремах сложения, которые содержатся в [11]. С учетом (11) эти соотношения имеют вид:

$$\varphi_{к1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau R_{r1}}{2\varepsilon_0} \frac{(-1)^n}{r_{01}^{n+1}} P_n(\cos \Theta_0) r^n P_n(\cos \Theta); \quad (13)$$

$$\varphi_{к2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-\tau R_{r1} R_s^{2n+1}}{2\varepsilon_0} \frac{(-1)^n}{r_{01}^{n+1}} P_n(\cos \Theta_0) \frac{1}{r^{n+1}} P_n(\cos \Theta). \quad (14)$$

Из геометрических соображений (рис. 1, б) следует, что $\cos \Theta_0 = \frac{a}{r_{01}}$. Тогда соотношения (13) и (14) приобретают вид:

$$\varphi_{к1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau R_{r1}}{2\varepsilon_0} \frac{(-1)^n}{r_{01}^{n+1}} P_n\left(\frac{a}{r_{01}}\right) r^n P_n(\cos \Theta); \quad (15)$$

$$\varphi_{к2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-\tau R_{r1} R_s^{2n+1}}{2\varepsilon_0} \frac{(-1)^n}{r_{01}^{n+1}} P_n\left(\frac{a}{r_{01}}\right) \frac{1}{r^{n+1}} P_n(\cos \Theta). \quad (16)$$

Потенциал на поверхности сферы вычисляется путем суммирования потенциалов источников поля (12), (15), (16) и подстановки в эти формулы $r = R_s$.

В результате получается

$$\varphi_0 \Big|_{r=R_s} + \varphi_{к1} \Big|_{r=R_s} + \varphi_{к2} \Big|_{r=R_s} = \frac{\tau R_{r1}}{2r_{01}\varepsilon_0}. \quad (17)$$

Потенциал сферы получается постоянным, следовательно, соотношения (12), (15), (16) соответствуют одному из граничных условий задачи.

Поверхностная плотность электрического заряда сферы определяется по формуле (6). После подстановки в нее суммы потенциалов (12), (15), (16) и преобразований получается

$$\sigma = \frac{R_{r1}\tau}{2r_{01}R_s} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau R_{r1} R_s^{n-1}}{r_{01}^{n-1}} (-1)^{n+1} P_n\left(\frac{a}{r_{01}}\right) P_n(\cos \Theta) [(-1)^{n+1} n + (-1)^n (-(n+1))]. \quad (18)$$

Полный заряд сферы определяется по (8). Подстановка (18) в (8) и интегрирование с учетом известных свойств полиномов Лежандра [5] показывает, что полный заряд сферы численно равен нулю. Таким образом, формулы (12), (15), (16), (18) удовлетворяют граничному условию задачи для полного электрического заряда сферы и верно описывают результат электростатической индукции на сфере от заряженной круговой нити.

Заключение

Приведенные в статье результаты позволяют сделать вывод, что расчет электростатической индукции на проводящей изолированной сфере от элементарных источников электростатического поля – прямой заряженной нити, круговой заряженной нити, может быть осуществлен на основе метода электрических изображений в сфере. Для переразложения потенциала исходных источников и их изображений в системе координат, связанной с центром сферы, применяются теоремы сложения [11]. Полученные соотношения для потенциала поверхности сферы и поверхностной плотности электрического заряда сферы удовлетворяют граничным условиям задачи: постоянству потенциала сферы и равенству нулю ее полного электрического заряда [7]. Следовательно, по теореме единственности решения уравнений электростатического поля [7] полученные расчетные соотношения являются верными. Таким образом, поставленная в статье цель может считаться достигнутой. Полученные ре-

зультаты могут применяться для проектирования микро- и наносистем, анализа высокотехнологических процессов, т. е. в наиболее прогрессивных областях техники. Они также являются новыми для физического и математического моделирования электростатической индукции, таким образом, имеют и теоретическое значение.

Литература

1. Xu, Z. Electrostatic interaction in the presence of dielectric interlayers and polarization-induced like-charge attraction / Z. Xu // *Physical Review E*. – 2013. – Vol 87, № 1. – P. 15–22.
2. Yu, D. The effect of shape and roughness on the maximum induction charge for small particles / D. Yu, G. S. P. Castle, U. Adamiak // *Journal of physics 2008 conference. Series 142 / Journal of physics*. – London : Journal of physics, 2008. – P. 1–6.
3. Lot, A. Modeling of electrostatic forces induced by chemical surface functionalization for microrobotic applications / A. Lot [et al.] // *IEEE/RST International Conference on Intelligent Robots and Systems / IEEE/RST*. – Tokyo : IEEE, 2013. – P. 2065–2070.
4. Santos, F. C. The electrostatic field of a point charge and an electrical dipole in the presence of a conducting sphere / F. C. Santos, A. C. Tort // *European journal of physics*. – 2004. – № 25. – P. 859–868.
5. Кошляков, Н. С. Уравнения в частных производных математической физики / Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов. – М. : Высш. шк., 1970. – 712 с.
6. Матвеев, А. Н. Электродинамика / А. Н. Матвеев. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Высш. шк., 1980. – 383 с.
7. Бессонов, Л. А. Теоретические основы электротехники: Электромагнитное поле : учеб. для студентов вузов / Л. А. Бессонов. – М. : Высш. шк., 1978. – 231 с.
8. Слободянюк, А. И. Сборник задач по физике. Очень длинные физические задачи / А. И. Слободянюк. – Минск : БГУ, 2001. – 180 с.
9. Высоковольтные электротехнологии : учеб. пособие по курсу «Основы электротехнологии» / А. О. Аношин [и др.] ; под ред. И. П. Верещагина. – М. : Изд-во МЭИ, 1999. – 204 с.
10. Ерофеев, В. Т. Основы математического моделирования / В. Т. Ерофеев, И. С. Козловская. – Минск : БГУ, 2002. – 195 с.
11. Ерофеев, В. Т. Теоремы сложения / В. Т. Ерофеев. – Минск : Наука и техника, 1989. – 254 с.

Получено 28.02.2019 г.