УДК 539.12

МЕТОДИКА ВЫЧИСЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОСЛАБЫХ ХАРАКТЕРИСТИК МЕЗОНОВ В ПУАНКАРЕ-ИНВАРИАНТНОЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

В.В. Андреев[1], В.Ю. Гавриш[2], А.Ф. Крутов[3]

[1]*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины*
[2]*Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого*
[3]*Самарский университет*

METHOD OF CALCULATION OF ELECTROWEAK CHARACTERISTICS OF MESONS IN THE POINCARÉ INVARIANT QUANTUM MECHANICS

V.V. Andreev[1], V.Yu. Haurysh[2], A.F. Krutov[3]

[1]*F. Scorina Gomel State University*
[2]*P.O. Sukhoi Gomel State Technical University*
[3]*Samara University*

На основе точечной формы пуанкаре-инвариантной квантовой механики в работе представлена методика вычисления форм факторов и констант распадов мезонов, как релятивистских связанных систем кварков. В качестве примера разработанной методики получено интегральное представление константы радиационного распада векторного мезона $V \to P\gamma$.

Ключевые слова*: кварк, пуанкаре-инвариантная квантовая механика, формфактор, константа распада.*

On the basis of the point form of Poincaré-invariant quantum mechanics, a method for calculating the formsfactors and the decay constants of mesons, as relativistic coupled quark systems, is presented. As an example of the developed technique, an integral representation of the radiative decay constant of a vector meson $V \to P\gamma$ is obtained.

Keywords: *quark, Poincaré-invariant quantum mechanics, form factor, decay constant.*

Введение

Атомы, ядра и адроны, как известно, представляют собой составные системы. В этой связи возникает необходимость как в моделях для описания связанных систем, так и в методиках вычисления характеристик с учетом их внутренней структуры. В нерелятивистской динамике составных систем существуют апробированные методы, основанные на применении модельных и феноменологических потенциалов взаимодействия. Точность современных экспериментальных данных требует учета релятивистских эффектов для составных систем в широкой области: от адронов до атомов. Эта необходимость продиктована, в частности, существованием адронов, содержащие легкие u, d и s-кварки. Такие связанные системы являются релятивистскими и вычисление релятивистских электрослабых поправок является важной задачей. Поэтому необходимость релятивистского описания связанных состояний не вызывает сомнений.

Следует отметить, что количественное описание релятивистских систем является нетривиальной задачей, которую вряд ли можно полностью решить в ближайшей перспективе [1]. Попытка применения методов теории поля вызывает существенные трудности при решении данной проблемы, в том числе и для адронов. Так, например, известно, что пертурбативная квантовая хромодинамика (КХД) не может быть применена для легких адронов, поскольку при шкале с нескольких ГэВ пертурбативные методы неприменимы. КХД-мотивированные модели, тем не менее, могут дать полезную информацию о динамике в этих энергетических масштабах [2], [3].

Метод описания релятивистских составных систем базируется на использовании группы Пуанкаре и ее представлений. Этот подход называют теорией прямого взаимодействия [4], [5], релятивистской гамильтоновой динамикой (РГД) [6]–[9] или пуанкаре-инвариантной квантовой механикой (ПИКМ) [1], [2], [10]. В дальнейшем будем придерживаться последнего названия, которое наиболее точно отражает тот факт, что ПИКМ занимает промежуточное положение между локальной квантовой теорией поля и нерелятивистской квантовой механикой. На простейшем уровне ПИКМ является квантовой механикой с базовой симметрией относительно преобразований Пуанкаре. Хотя инвариантную квантовую механику Пуанкаре можно рассматривать как феноменологию, не зависящую от КХД, она также может быть связана с КХД [11]. Далее в данной работе для описания мезона, как связанной системы, используем ПИКМ.

Отметим, что существует большое количество подходов и моделей для релятивистских связанных систем (см., например, [12]–[18].

Цель работы состоит в детализации методики расчета характеристик мезонов с учетом их кварковой структуры в рамках различных форм ПИКМ и поэтому анализ на преимуществ и недостатков различных подходов в данной работе не приводится (более подробную информацию можно найти, в частности, в работах [11], [19]).

Вычисление формфакторов (3.6) для матричных элементов (3.3) с учетом внутренней структуры адронов является нетривиальной задачей и в разных моделях решается различными способами.

Параметризация матричного элемента (3.3) включает формфакторы и 4-импульсы частиц. Поэтому возникает вопрос, какие из компонент 4-импульсов необходимо использовать для вычисления формфакторов. Так, в рамках моделей на основе динамики на световом фронте [20]–[25] предлагается для расчета токов, использовать только те компоненты 4-векторов, которые не содержат взаимодействия (“+”-компоненты). Если в случае пространственноподобного квадрата переданного импульса Q^2, обращение в ноль “–”-компонент тока (содержащих взаимодействие), можно достичь путем выбора специальной системы отсчета, то для времениподобного Q^2 это сделать не удается. Поэтому при вычислении формфакторов с $Q^2>0$ используют формфакторы, рассчитанные с $Q^2<0$ [25]. Важно отметить, что попытка решить задачу вычисления формфакторов в динамике на световом фронте в системах, отличных от специально выбранной, приводит к результатам, существенно отличающимся от экспериментальных значений [26].

Оригинальная методика вычисления формфакторов в рамках мгновенной формы ПИКМ, основанная на обобщении метода параметризации матричных элементов локальных операторов [27], предложена в работах [28]–[31]. На первом этапе (с использованием базиса приводимого представления группы Пуанкаре) находятся формфакторы для системы без взаимодействия. На втором этапе полученные формфакторы используют для расчетов наблюдаемых формфакторов с помощью интегральных представлений. При этом формфакторы, характеризующие матричный элемент (3.3), трактуются как обобщенные функции.

В рамках точечной формы ПИКМ наивная схема вычислений, основанная только на использовании равенства 4-скоростей для систем с взаимодействием и без него, приводит к результатам, значительно отличающимся от наблюдаемых на эксперименте [32]–[34]. Поэтому авторами работ [35]–[38] предложена модификация точечной формы ПИКМ, названная дираковской точечной формой динамики (DPF). В данной модификации ПИКМ вводится дополнительный единичный вектор $\hat{\mathbf{u}}$, направление которого фиксируется путем требования равенства 4-импульсов связанной и свободных систем в пределе слабой связи [36], [37].

Как следует из краткого описания методов вычисления, задача получения наблюдаемых с учетом внутренней структуры систем даже в рамках ПИКМ требует дальнейших исследований.

1 Основы ПИКМ

Для того чтобы теория (модель), описывающая элементарные частицы, удовлетворяла требованию пуанкаре-инвариантности, пространство состояний релятивистской частицы должно преобразоваться по некоторому представлению группы Пуанкаре (группа П). Если частица не имеет структуры, т. е. не содержит подсистем, то в пространстве состояний таких частиц действует неприводимое представление группы П (см., например [39]).

Поэтому для описания частиц необходимо найти различные неприводимые представления группы П. Для этого вводят ортогональный базис, состоящий из собственных векторов максимального набора коммутирующих наблюдаемых. Собственные значения полного набора операторов, составленных из генераторов P^{μ} и $M^{\mu\nu}$ $(\mu,\nu=0,1,2,3)$ группы П удовлетворяют коммутационным соотношениям:

$$\left[P^{\mu},P^{\nu}\right]=0\,, \tag{1.1}$$

$$\left[M^{\mu\nu},P^{\rho}\right]=-i\left(g^{\mu\rho}P^{\nu}-g^{\nu\rho}P^{\mu}\right), \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned}&\left[M^{\mu\nu},M^{\rho\sigma}\right]=\\&=-i\left(g^{\mu\rho}M^{\nu\sigma}+g^{\nu\sigma}M^{\mu\rho}-g^{\mu\sigma}M^{\nu\rho}-g^{\nu\rho}M^{\mu\sigma}\right).\end{aligned} \tag{1.3}$$

Генераторы трансляций P^{μ} задают компоненты оператора 4-импульса, а $M^{\mu\nu}$ – компоненты оператора 4-мерного углового момента. Для невзаимодействующих частиц набора коммутирующих генераторов имеют простой физический смысл: $J_i=-1/2\varepsilon_{ijk}M^{jk}$ – компоненты полного углового момента; $K_i=M_{i0}$ – генераторы лоренцевских бустов; $P^0\equiv H$ и P_i – операторы полной энергии и полного 3-импульса соответственно.

Если системы отсчета связаны преобразованием Пуанкаре (a,Λ), то векторы состояния связаны унитарным преобразованием

$$\left|\Psi'\right\rangle=U\left(a,\Lambda\right)\left|\Psi\right\rangle. \tag{1.4}$$

Одним из часто используемых является так называемый канонический набор операторов. В дополнение к операторам Казимира

$$P^{\mu}P_{\mu}, \quad (1.5)$$

$$W^{\mu}W_{\mu},\; W^{\mu} = -\frac{1}{2}\,\varepsilon_{\rho\tau\nu\mu}M^{\rho\tau}P^{\nu} \quad (1.6)$$

в полный набор входят операторы, составляющие пространственную часть 4-импульса P и имеющие соответственно собственные значения $\mathbf{p}^{i}$. Собственные значения операторов (1.5), (1.6) имеют физический смысл квадрата массы m^2 и величины $m^2 s(s+1)$, где $s = 0, 1/2, 1, \ldots$ – спиновое квантовое число.

Система координат в этом базисе фиксируется введением пространственно-подобных векторов $e^{j}_{\mu}(p)\,(j=1,2,3)$ со следующими свойствами

$$\left(e^{j}(p)p\right)=0,\; \left(e^{i}(p)e^{j}(p)\right)=\delta_{i,j},$$

$$\sum_{j=1}^{3} e^{i}_{\mu}(p)e^{j}_{\nu}(p) = g^{\mu\nu} + \frac{p^{\mu}p^{\nu}}{m_p^2}.$$

С помощью базиса $e^{j}_{\mu}(p)$ и оператора Паули-Любанского W^{μ} определим операторы проекций спина для релятивистской массивной частицы

$$S_i(p) = \frac{e^{\mu}_{i}(p)W_{\mu}}{m}. \quad (1.7)$$

Оператор $\mathbf{S}$ удовлетворяет стандартным коммутационным соотношениям оператора спина

$$\left[\, S_i, S_j \,\right] = i\,\varepsilon_{ijk}\, S_k,$$

а собственные значения оператора $\mathbf{S}^2$ равны $s(s+1)$.

Таким образом, канонический базис определяется шестью операторами

$$P_{\mu}P^{\mu},\, \mathbf{P}^{i},\, \mathbf{S}^2 = W_{\mu}W^{\mu}/m^2,\, S_3 \quad (1.8)$$

с соответствующими собственными значениями

$$m^2,\, \mathbf{p}^{i},\, s(s+1),\, \lambda,$$

где $s = 0, 1/2, 1, 3/2, \ldots;\; \lambda = -s, -s+1, \ldots, s.$

Соответствующие набору (1.8) базисные векторы будем обозначать следующим образом:

$$\left|\mathbf{p}, \lambda, [m,s]\right\rangle \equiv \left|\mathbf{p},\lambda\right\rangle. \quad (1.9)$$

Собственные вектора (1.9) образуют ортогональный базис в гильбертовом пространстве состояний элементарной частицы. Для условия ортогональности

$$\left\langle \mathbf{p},\lambda \middle| \mathbf{p}',\lambda' \right\rangle = \delta\left(\mathbf{p}-\mathbf{p}'\right)\delta_{\lambda,\lambda'}$$

условие полноты принимает соответственно вид

$$\sum_{\lambda=-s}^{s}\int d\mathbf{p}\left|\mathbf{p},\lambda\right\rangle\left\langle \mathbf{p},\lambda\right| = I.$$

Закон преобразования неприводимого представления (НП–базис) для выбранных условий нормировки и полноты задается соотношением

$$U(a,\Lambda)\left|\mathbf{p},\lambda\right\rangle = \sum_{\lambda'=-s}^{s}\left|\mathbf{p}_{\Lambda},\lambda'\right\rangle D^{s}_{\lambda',\lambda}\left(\mathbf{n}_W(\Lambda,\mathbf{p})\right), \quad (1.10)$$

где

$$p_{\Lambda} = \Lambda p,\; p = \left(\omega_m(p) = \sqrt{\mathbf{p}^2+m^2},\mathbf{p}\right),$$

а $D(\mathbf{n}_W)$ – D-функция Вигнера. Эта функция, определяемая посредством вектор-параметра $\mathbf{n}_W$, задает вращение НП–базиса, которое часто называют вигнеровским. Явный вид $\mathbf{n}_W$ для различных преобразований Λ можно найти в работах [40], [41].

Рассмотрим более подробно систему из двух частиц с массами покоя m_1, m_2 и спинами s_1, s_2. Одним из очевидных базисов двухчастичного приводимого представления является базис прямого произведения

$$\left|\mathbf{p}_1,\lambda_1\right\rangle\left|\mathbf{p}_2,\lambda_2\right\rangle = \left|\mathbf{p}_1,\lambda_1,\mathbf{p}_2,\lambda_2\right\rangle, \quad (1.11)$$

удовлетворяющий условию нормировки и полноты:

$$\left\langle \mathbf{p}_1',\lambda_1' \middle| \mathbf{p}_1,\lambda_1\right\rangle\left\langle \mathbf{p}_2',\lambda_2' \middle| \mathbf{p}_2,\lambda_2\right\rangle =$$
$$= \delta(\mathbf{p}_1'-\mathbf{p}_1)\,\delta(\mathbf{p}_2'-\mathbf{p}_2)\,\delta_{\lambda_1',\lambda_1}\delta_{\lambda_2',\lambda_2},$$

$$\sum_{\lambda_1,\lambda_2}\int d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2\left|\mathbf{p}_1,\lambda_1,\mathbf{p}_2,\lambda_2\right\rangle\left\langle \mathbf{p}_1,\lambda_1,\mathbf{p}_2,\lambda_2\right| = I.$$

Для физических приложений важно знать коэффициенты разложения базиса приводимого представления (1.11) по базису неприводимых представлений и наоборот. Эти коэффициенты называют коэффициентами Клебша-Гордана группы П.

НП-базис, описывающий систему невзаимодействующих частиц (как целого), записывается в виде, аналогичном одночастичному НП-базису (1.9):

$$\left|\mathbf{P},[J,M_0],\mu,[m_1,s_1,m_2,s_2],(\alpha)\right\rangle. \quad (1.12)$$

Оператор полного импульса $\mathbf{P}$, квадрата полного собственного момента $\mathbf{J}^2$ и его проекции $\mathbf{J}_3$ вместе с инвариантами $(p_i p_i)$, $\mathbf{s}_i^2 (i=1,2)$ и $M_0 = \sqrt{(p_1+p_2)^2}$ входят в полный набор наблюдаемых двухчастичной системы. Кроме этого, в полный набор входят также 2 оператора, которые снимают вырождение двухчастичной системы (для их обозначения введен совокупный индекс α).

В двухчастичном пространстве определим полный импульс

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \quad (1.13)$$

и импульс относительного движения $\mathbf{k}$:

$$\mathbf{k} = \frac{1}{2}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) + \frac{\mathbf{P}}{M_0}\left(\frac{m_2^2 - m_1^2 - M_0\left[\omega_{m_2}(p_2) - \omega_{m_1}(p_1)\right]}{\omega_{M_0}(P) + M_0}\right). \quad (1.14)$$

В практических приложениях для НП-базиса вместо оператора инвариантной массы свободных частиц M_0 удобно использовать $k = |\mathbf{k}|$, поскольку

$$M_0 = M_0(k) = \omega_{m_1}(k) + \omega_{m_2}(k).$$

В качестве чисел снимающих вырождение системы пуанкаре-инвариантные операторы орбитального ℓ и спинового s моментов. Тогда для НП-базиса можно использовать вектора состояния вида (опуская $[m_1, s_1, m_2, s_2]$):

$$|\mathbf{P}, k, J\mu, \ell, s\rangle, \qquad (1.15)$$

которые удовлетворяет следующим условиям полноты и нормировки

$$\sum_{\mu=-J}^{J}\sum_{\ell=|J-s|}^{J+s}\sum_{s=|s_1-s_2|}^{s_1+s_2}\int d\mathbf{P}\, k^2\, dk |\mathbf{P}, k, J\mu, \ell, s\rangle \times$$

$$\times\langle \mathbf{P}, k, J\mu, \ell, s| = I,$$

$$\langle \mathbf{P}', k', J'\mu', \ell', s'|\mathbf{P}, k, J\mu, \ell, s\rangle =$$

$$= \delta(\mathbf{P}' - \mathbf{P})\frac{\delta(k'-k)}{k^2}\delta_{\ell',\ell}\delta_{s',s}.$$

При использовании схемы с «L–S связью» базисные векторы неприводимого представления выражается через базис приводимого представления посредством:

$$|\mathbf{P}, k, J\mu, \ell, s\rangle =$$

$$= \int d^2\hat{\mathbf{k}}\sqrt{\frac{\omega_{m_1}(p_1)\omega_{m_2}(p_2)M_0}{\omega_{m_1}(k)\omega_{m_2}(k)\omega_{M_0}(P)}} \times$$

$$\times\sum_{\lambda_1\lambda_2}\sum_{\nu_1\nu_2} Y_{\ell m}(\theta_k, \varphi_k)\mathbf{C}\begin{Bmatrix} s_1 & s_2 & s \\ \nu_1, & \nu_2, & \lambda \end{Bmatrix}\times \qquad (1.16)$$

$$\times\mathbf{C}\begin{Bmatrix} \ell & s & J \\ m, & \lambda, & \mu \end{Bmatrix}\times$$

$$\times D^{1/2}_{\lambda_1,\nu_1}(\mathbf{n}_{W_1})D^{1/2}_{\lambda_2,\nu_2}(\mathbf{n}_{W_2})|\mathbf{p}_1, \lambda_1, \mathbf{p}_2, \lambda_2\rangle,$$

где $\mathbf{C}\begin{Bmatrix} s_1 & s_2 & s \\ \nu_1, & \nu_2, & \lambda \end{Bmatrix}$, $\mathbf{C}\begin{Bmatrix} \ell & s & j \\ m, & \lambda, & \mu \end{Bmatrix}$ – коэффициенты Клебша-Гордана группы $SU(2)$, а $Y_{lm}(\theta_k, \varphi_k)$ – сферические функции, определяемые углами вектора $\mathbf{k}$.

Для сокращения записи введем вспомогательную функцию, которая в силу свойств коэффициентов Клебша-Гордана группы $SU(2)$ запишется в виде

$$\Omega\begin{Bmatrix} \ell & s & J \\ \nu_1, & \nu_2, & \mu \end{Bmatrix}(\theta_k, \varphi_k) =$$

$$= \mathbf{C}\begin{Bmatrix} s_1 & s_1 & s \\ \nu_1, & \nu_2, & \lambda \end{Bmatrix}\mathbf{C}\begin{Bmatrix} \ell & s & J \\ m, & \lambda, & \mu \end{Bmatrix}Y_{\ell m}(\theta_k, \varphi_k) =$$

$$= \mathbf{C}\begin{Bmatrix} s_1 & s_2 & s \\ \nu_1, & \nu_2, & \nu_1+\nu_2 \end{Bmatrix}\times \qquad (1.17)$$

$$\times\mathbf{C}\begin{Bmatrix} \ell & s & J \\ \mu-(\nu_1+\nu_2), & \nu_1+\nu_2, & \mu \end{Bmatrix}\times$$

$$\times Y_{\ell\,\mu-(\nu_1+\nu_2)}(\theta_k, \varphi_k).$$

В частных случаях $(s_1 = s_2 = 1/2)$

$$\Omega\begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \nu_1, & \nu_2, & \mu \end{Bmatrix}(\theta_k, \varphi_k) = \delta_{\mu,0}\delta_{\nu_1,-\nu_2}\frac{\nu_1}{\sqrt{2\pi}}, \quad (1.18)$$

$$\Omega\begin{Bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \nu_1, & \nu_2, & \mu \end{Bmatrix}(\theta_k, \varphi_k) = \delta_{\mu,\nu_1+\nu_2}\frac{\sqrt{3+4\nu_1\nu_2}}{4\sqrt{\pi}}.$$

2 Формы ПИКМ

Рассмотрим на примере двухчастичных систем, каким образом вводится взаимодействие в рамках ПИКМ.

Для этого обратимся к набору из 10 генераторов H, P (пространственно-временных трансляций), J (вращений), K (бустов), удовлетворяющих коммутационным соотношениям соответствующих группе Пуанкаре. Если оператор H содержит взаимодействие V, то вследствие соотношения $[P_j, K_k] = i\delta_{j,k}H$ очевидно, что и другие операторы (или их комбинации) должны также содержать взаимодействие. В работе [42] Дирак показал, что нет однозначного разделения генераторов на динамический набор (генераторы, содержащие взаимодействия) и кинематический набор (генераторы, не содержащие взаимодействия) и представил три способа введения взаимодействия с сохранением коммутационных соотношений группы П, которые и определяют мгновенную, точечную формы ПИКМ и динамику на световом фронте.

В мгновенной форме ПИКМ операторы трехмерного импульса системы $\mathbf{P}$ и углового момента J не содержат взаимодействия, а операторы H и K содержат взаимодействие. Данный выбор кинематического набора автоматически обеспечивает мгновенной форме вращательную инвариантность, однако возникают проблемы при переходах от одной системы отсчета к другой, так как оператор буста содержит взаимодействие.

В динамике на световом фронте в кинематический набор входят операторы $P^+ = P^0 + P^3$, $P_{1,2}$, K^3, J^3, $E_{1,2} = \{K_1 + J_2, K_2 - J_1\}$, а в динамический – $P^- = P^0 - P^3$, $J_{1,2}$. Данная форма динамики наиболее часто используется в физических приложениях, связанных с исследованием характеристик составных релятивистских систем (см., например, [43]–[46]). Однако вследствие того, что оператор углового момента зависит от взаимодействия, имеются определенные трудности с сохранением вращательной инвариантности [20], которые устраняют дополнительными требованиями [9].

Также следует отметить, что ряд операторов дискретных симметрий (пространственной четности) также содержат взаимодействие. Однако «простая» структура вакуума (отсутствие диаграмм, описывающих рождение пар из вакуума) является общепризнанным преимуществом данной формы динамики.

Описание в точечной форме приводит к тому, что операторы $\hat{M}^{\mu\nu}$ являются такими же как и для невзаимодействующих частиц, т. е. операторы буста K_i и углового момента J не содержат взаимодействий, а члены с взаимодействием содержатся только в операторе 4-импульса P. Точечная форма стала использоваться в приложениях ПИКМ относительно недавно [36], [47]–[49]. В отличие от мгновенной формы, оператор буста не содержит взаимодействия, что не создает проблем с лоренц-инвариантностью теории при переходах от одной системы к другой.

2.1 Описание связанной двухчастичной системы в ПИКМ

Построение релятивистской квантовомеханической модели связанной системы в ПИКМ начинают с построения модели для системы невзаимодействующих частиц, а затем вводят взаимодействие V таким образом, чтобы выполнялось требование пуанкаре-инвариантности, реализуемое в виде алгебры Пуанкаре на множестве динамических наблюдаемых системы. На этой основе в работе [6] впервые был дан способ построения пуанкаре-ковариантной модели в случае взаимодействующих частиц.

Рассмотрим, как строится динамическая картина взаимодействия в мгновенной форме ПИКМ для системы двух невзаимодействующих частиц с массами m_1 и m_2, проекциями спинов λ_1 и λ_2 и соответственно с 4-импульсами

$$p_1 = \left(\omega_{m_1}(p_1), \mathbf{p}_1\right),\; p_2 = \left(\omega_{m_2}(p_2), \mathbf{p}_2\right).$$

Для описания состояния двух частиц используется базис приводимого представления (1.11). Для описания системы как целого используем НП-базис (1.15), который задается полным коммутирующим набором операторов

$$\mathbf{J}^2, J_3, \mathbf{P}, M_0(k).$$

Добавим к оператору M_0 взаимодействие V таким образом, что новый оператор

$$M_I = M_0 + V$$

также коммутировал с операторами

$$\mathbf{J}^2, J_3, \mathbf{P},$$

входящих в кинематический набор [6,9]. При этом оператор взаимодействия V удовлетворяет следующим условиям:

$$M_I = M_I^{\dagger},\; M_I > 0,$$

$$[\mathbf{P}, V] = [i\nabla_{\mathbf{P}}, V] = [\mathbf{J}_3, V] = 0.$$

Волновые функции Ψ в ПИКМ вычисляются как собственные значения полного коммутирующего набора

$$\mathbf{J}^2, J_3, \mathbf{P}, M_I.$$

Задача на собственные значения для оператора массы связанного состояния Ψ с полным импульсом $\mathbf{Q}$, массой M, спином J и проекцией спина μ может быть записана в виде:

$$M_I \left|\Psi_{\mathbf{Q},J,\mu}\right\rangle = (M_0 + V)\left|\Psi_{\mathbf{Q},J,\mu}\right\rangle = M\left|\Psi_{\mathbf{Q},J,\mu}\right\rangle.$$

Поскольку основная цель работы связана с разработкой пуанкаре-ковариантных моделей описания связанных квантовых систем, основанных на мгновенной и точечной формах ПИКМ, то остановимся на этих формах динамики более подробно.

2.2 Мгновенная форма ПИКМ

Вследствие того, что операторы, входящие в кинематический набор для системы с взаимодействием и без него, совпадают, то волновая функция связанной системы в мгновенной форме динамики может быть представлена в виде [9]

$$\left\langle \mathbf{P}, k, J\mu', \ell, s \middle| \Psi_{\mathbf{Q},J,\mu} \right\rangle = \delta(\mathbf{Q} - \mathbf{P})\delta_{\mu,\mu'}\Phi_{\ell s}^J(k).$$

Волновая функция $\Phi_{\ell s}^J(k)$ нормирована условием

$$\sum_{\ell,s} \int dk\, k^2 \left|\Phi_{\ell s}^J(k)\right|^2 = 1,$$

которое следует из условия полноты (1.15).

Используя (1.16), находим, что вектор состояния двухчастичной связанной системы определяется как прямое произведение векторов состояний свободных частиц с волновой функцией $\Phi_{\ell s}^J(k)$:

$$\begin{gathered}\left|\mathbf{Q} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2, J\mu, M\right\rangle = \\ = \int d\mathbf{k} \sqrt{\frac{\omega_{m_1}(p_1)\omega_{m_2}(p_2)M_0}{\omega_{m_1}(k)\omega_{m_2}(k)\omega_{M_0}(P)}} \times \\ \times \sum_{\lambda_1\lambda_2}\sum_{\nu_1\nu_2} \Omega\begin{Bmatrix} \ell & s & J \\ \nu_1, & \nu_2, & \mu \end{Bmatrix}(\theta_k, \varphi_k)\Phi_{\ell s}^J(k) \times \\ \times D_{\lambda_1,\nu_1}^{1/2}\left(\mathbf{n}_{W_1}\right) D_{\lambda_2,\nu_2}^{1/2}\left(\mathbf{n}_{W_2}\right)\left|\mathbf{p}_1, \lambda_1, \mathbf{p}_2, \lambda_2\right\rangle. \end{gathered} \tag{2.1}$$

2.3 Точечная форма ПИКМ

Точечная форма ПИКМ характерна тем, что оператор 4-скорости системы свободных частиц

$$\upsilon_P = \frac{p_1 + p_2}{M_0} = \left\{\frac{\omega_{M_0}(P)}{M_0}, \upsilon_P = \frac{\mathbf{P}}{M_0}\right\} \tag{2.2}$$

и оператор 4-скорости связанной системы

$$V_Q = \frac{Q}{M} = \left\{\frac{\omega_M(Q)}{M}, \mathbf{V}_Q = \frac{\mathbf{Q}}{M}\right\} \tag{2.3}$$

совпадают (см. [9], [38], [42], [50], [51]). Волновая функция двухчастичной связанной системы в точечной форме динамики $\tilde{\Phi}_{\ell s}^J(k)$, по аналогии с мгновенной формой (см. (2)), может быть представлена в виде [9], [51]

$$\begin{gathered}\left\langle \upsilon_{\mathbf{P}}, k, J\mu, \ell, s \middle| \Psi_{\mathbf{Q},J,\mu} \right\rangle = \\ = M_0^{-3/2}\delta\left(\upsilon_P - \mathbf{V}_Q\right)\tilde{\Phi}_{\ell s}^J(k), \end{gathered} \tag{2.4}$$

где базис $\left|\upsilon_{\mathbf{p}}, k, J\mu, \ell, s\right\rangle$ связан с вектором состояния (1.15) простым соотношением

$$\left|\upsilon_P, k, J\mu, \ell, s\right\rangle = M_0^{3/2}\left|\mathbf{P}, k, J\mu, \ell, s\right\rangle. \quad (2.5)$$

Вектор состояния двухчастичной связанной системы в точечной форме определяется аналогично (2.1) с учетом соотношения $\mathbf{Q} = M\upsilon_P$. Отметим, что в системе покоя связанной системы волновые функции в мгновенной и точечной формах ПИКМ совпадают.

3 Постановка проблемы

При изучении реакций с участием адронов h, таких как распады

$$h_i \to h_f + X,\ \ h_i \to \ell_1 + \ell_2, \quad (3.1)$$

упругое рассеяние лептонов на адронах

$$\ell^+ + h_i \to \ell^{+'} + h_f \quad (3.2)$$

и др. в S-матричных элементах этих процессов имеется адронная часть S^h, которая может записана в виде

$$I^h(x) = \left\langle \mathbf{Q}', M', J'\mu' \right| S^h(x) \left| \mathbf{Q}, M, J\mu \right\rangle. \quad (3.3)$$

Здесь вектор $\left|\mathbf{Q}, M, J\mu\right\rangle$ определяет состояние адрона спина J с проекцией μ, массы M и импульса $\mathbf{Q}$.

Отметим, что в адронную часть входит как сильное взаимодействие (индекс *strong*), так и элементы электрослабого взаимодействия (токи и др.), которые мы обозначим $j^{EW}(x)$. Тогда в представлении взаимодействия S-матрица имеет вид [52]:

$$S^h(x) = T\left[j^{EW}(x)\exp\left\{ i\int V^{strong}(t)dt \right\} \right] \quad (3.4)$$

с полным гамильтонианом взаимодействия $H^h_{tot}(x) = H^h_0(x) + V^h(x)$. Символ T означает, что операторы, входящие в гамильтониан взаимодействия упорядочены по времени. Отметим, что сильное взаимодействие учитывается точно, а электрослабое взаимодействие берется в некотором порядке теории возмущений (в зависимости от вида $H^{EW}_{int}(x)$). Трансляционная инвариантность приводит к тому, что

$$I^h(x) = \exp\left(i\widehat{Q}x\right) I^h(0) \exp\left(-i\widehat{Q}x\right), \quad (3.5)$$

что дает возможность провести последующие расчеты для оператора $I^h(0)$.

Матричный элемент (3.3) при $x = 0$ параметризуют с помощью различных феноменологических формфакторов, которые определяют из экспериментов:

$$I^h(0) = \sum_{i=1}^{n} F_i\left(q^2\right) g^{J'\mu'}_{J\mu}\left(i, \mathbf{Q}', M', \mathbf{Q}, M\right). \quad (3.6)$$

Здесь $F_i\left(q^2\right)$ – формфакторы, зависящие от переданного импульса $q = Q' - Q$; а g – функции, зависящие от 4-импульсов и спиновых переменных состояний. Количество слагаемых определяется значениями квантовых чисел J, J', а также выполнением дополнительных требований, из которых следует выделить закон сохранения тока, законы сохранения различных четностей и др.

Для демонстрации методики, развиваемой в работе, достаточно рассмотреть вариант (3.6) с одним форм фактором, т. е.

$$I^h(0) = F\left(q^2\right) g\left(\mathbf{Q}', M', \mathbf{Q}, M\right), \quad (3.7)$$

поскольку соотношения для каждого формфактора $F_i\left(q^2\right)$ можно найти путем выбора поляризационных состояний и построения базиса в пространстве Минковского.

4 Методика вычисления характеристик мезонов в пуанкаре-ковариантной модели, основанной на точечной форме ПИКМ

Ниже приведем оригинальную схему вычисления характеристик мезонов, как двухчастичных кварковых систем, в рамках точечной формы динамики ПИКМ.

Отличительной чертой является использование в матричном элементе (3.3) состояний в представлении Гейзенберга, где сильные взаимодействия учтены точно [52] и факт совпадения 4-скоростей для систем с взаимодействием и без него (см. (2.2) и (2.3)). Важным элементом данной методики является уравнение Липманна-Швингера для векторов состояний.

В предлагаемой схеме вычислений матричного элемента (3.3) можно выделить следующие этапы.

На первом этапе, из соотношения (3.7) получим, что

$$\begin{aligned} F\left(q^2\right) = {} & \langle \mathbf{Q}', M', J'\mu' | S^h(0) g^{-1} \times \\ & \times \left(\widehat{\mathbf{Q}}', \widehat{M}'_I, \widehat{\mathbf{Q}}, \widehat{M}_I \right) \left| \mathbf{Q}, M, J\mu \right\rangle, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где импульсы и массы мезонов заменены на операторы, так как состояния $\left|\mathbf{Q}, M, J\mu\right\rangle$ являются собственными для операторов $\widehat{\mathbf{Q}}$ и $\widehat{M}$ по определению. При этом из требований релятивистской инвариантности S-матрица коммутирует с генераторами группы П, действующего в гильбертовом пространстве векторов физических состояний $\left|\mathbf{Q}, M, J\mu\right\rangle$.

Использование полного набора векторов двухчастичных состояний, образующих базис неприводимого представления группы П для свободных частиц $\left|\upsilon_{\mathbf{p}}, k, \ell, s\right\rangle$ и соотношения (2.4), (2.5) позволяют в точечной форме ПИКМ привести (4.1) к виду

$$\begin{aligned} F\left(q^2\right) = {} & \sum_{\ell', s'} \sum_{\ell, s} \int d\upsilon_{P'}\, d\upsilon_P k'^2 k^2 dk'\, dk \times \\ & \times \left\langle \mathbf{Q}', M', J'\mu' \right| \upsilon_{P'}, k', \ell', s' \rangle \end{aligned}$$

$$\langle \upsilon_{P'}, k', \ell', s' | S^h(0) g^{-1}\left(\widehat{\mathbf{Q}}', \widehat{M}', \widehat{\mathbf{Q}}, \widehat{M}\right)$$
$$\left|\upsilon_P, k, \ell, s\right\rangle\left\langle \upsilon_P, k, \ell, s\right| \mathbf{Q}, M, J\mu\rangle =$$
$$= \sum_{\ell', s'}\sum_{\ell, s}\int k'^2\ k^2\ dk'\ dk \Phi^J_{\ell s}(k)\Phi^{*J'}_{\ell' s'}(k') \times \quad (4.2)$$
$$\times\langle \mathbf{P}', k', \ell', s' | S^h(0) g^{-1}\times$$
$$\times\left(\widehat{\mathbf{Q}}', \widehat{M}'_I, \widehat{\mathbf{Q}}, \widehat{M}_I\right)\left|\mathbf{P}, k, \ell, s\right\rangle,$$

где $\mathbf{P} = M_0\mathbf{V}_Q$ и $\mathbf{P}' = M'_0\ \mathbf{V}_{Q'}$.

На втором этапе используем некоторые соотношения из теории рассеяния в квантовой теории поля. В представлении взаимодействия соотношение (3.4) при $x = 0$ представимо в виде [52]:

$$S^h(0) = T\left[j^{EW}(0)\exp\left\{i\int V^{strong}(t)dt\right\}\right] =$$
$$= U^{strong}(\infty, 0)U^{\dagger strong}(t, 0)j^{EW}(0)\times \quad (4.3)$$
$$\times U^{strong}(t, 0)U^{strong}(0, -\infty) =$$
$$= U^{strong}(\infty, 0)J^{EW}(0)U^{strong}(0, -\infty),$$

где унитарный оператор U обладает следующими свойствами:

$$U(t_2, t_1) = U(t_2, t_0)U(t_0, t_1),\ U^\dagger(t_2, t_1) = U(t_1, t_2). \quad (4.4)$$

В теории рассеяния начальные и конечные состояния $\left|\mathbf{P}, k, \ell, s\right\rangle$ без взаимодействия трактуются как состояния при $t = -\infty$ и $t = \infty$ соответственно и являются собственными векторами свободного гамильтониана $H_0(M_0)$ (см. (1.12)), т. е.

$$\widehat{H}_0^{strong}\left|\mathbf{P}, k, \ell, s\right\rangle = E_0\left|\mathbf{P}, k, \ell, s\right\rangle. \quad (4.5)$$

С помощью $U(t_2, t_1)$ введем *in* и *out* состояния для $t = 0$ (векторы состояния в представлении Гейзенберга)

$$\left|\mathbf{P}, k, J\mu\right\rangle_{in} = U(0, -\infty)\left|\mathbf{P}, k, J\mu\right\rangle, \quad (4.6)$$
$$\left|\mathbf{P}, k, J\mu\right\rangle_{out} = U^\dagger(\infty, 0)\left|\mathbf{P}, k, J\mu\right\rangle. \quad (4.7)$$

Вследствие того, что оператор $U^{strong}(t_2, t_1)$ удовлетворяет интегральному уравнению (смотри, например [52], [53])

$$U^{strong}(t_2, t_1) = I - i\int_{t_1}^{t_2} dt' U^{strong}(t', t_0)V^{strong}(t'), \quad (4.8)$$

то *in* и *out* состояния удовлетворяют уравнению Липманна-Швингера, точное решение которого может быть записано в виде:

$$\left|\mathbf{P}, k, J\mu\right\rangle_{in} =$$
$$= \left(I + \lim_{\varepsilon \to +0}\frac{1}{E_0 - H^{strong}_{tot} + i\varepsilon}V^{strong}\right)\left|\mathbf{P}, k, J\mu\right\rangle,$$
$$\left|\mathbf{P}, k, J\mu\right\rangle_{out} =$$
$$= \left(I + \lim_{\varepsilon \to +0}\frac{1}{E_0 - H^{strong}_{tot} - i\varepsilon}V^{strong}\right)\left|\mathbf{P}, k, J\mu\right\rangle. \quad (4.9)$$

С помощью (4.9) можно показать, что полный гамильтониан $H^{strong}_{tot} = H_0^{strong} + V^{strong}$ имеет тот же спектр, что и свободный гамильтониан H_0 (см. (4.5)), т. е.

$$H^{strong}_{tot}\left|\mathbf{P}, k, J\mu\right\rangle_{in,out} = E_0\left|\mathbf{P}, k, J\mu\right\rangle_{in,out}. \quad (4.10)$$

Здесь предполагается, что оператор $S^h(0)$ может быть выражен через операторы частиц, составляющих систему (в нашем случае кварков):

$$S^h(0) \approx S^{quark}(0).$$

Поскольку в полный набор для состояния с взаимодействием $\left|\mathbf{Q}, M, J\mu\right\rangle$ входят также операторы $\mathbf{Q}$ и M_I, то из (4.10) следует, что

$$M_I\left|\mathbf{P}, k, J\mu\right\rangle_{in,out} = M_0\left|\mathbf{P}, k, J\mu\right\rangle_{in,out}, \quad (4.11)$$
$$\widehat{\mathbf{Q}}\left|\mathbf{P}, k, J\mu\right\rangle_{in,out} = \mathbf{P}\left|\mathbf{P}, k, J\mu\right\rangle_{in,out}. \quad (4.12)$$

Используя соотношения (4.3), (4.6), (4.7) и (4.11), (4.12) запишем (4.2) в виде

$$F(q^2) = \sum_{\ell', s'}\sum_{\ell, s}\int k'^2\ k^2\ dk'\ dk\times$$
$$\times\Phi^J_{\ell s}(k)\Phi^{*J'}_{\ell' s'}(k')g^{-1}\left(\mathbf{P}', M'_0(k'), \mathbf{P}, M_0(k)\right)_{out}\times \quad (4.13)$$
$$\times\langle \mathbf{P}', k', \ell', s' | J^{EW}(0)\left|\mathbf{P}, k, \ell, s\right\rangle_{in}.$$

Переходя от *in* и *out* к состояниям при $t = \pm\infty$ (обратный переход) получим

$$F(q^2) = \sum_{\ell', s'}\sum_{\ell, s}\int k'^2\ k^2\ dk'\ dk\times$$
$$\times\Phi^J_{\ell s}(k)\Phi^{*J'}_{\ell' s'}(k')\times g^{-1}\left(\mathbf{P}', M'_0(k'), \mathbf{P}, M_0(k)\right)\times \quad (4.14)$$
$$\times\langle \mathbf{P}', k', \ell', s' | S^h(0)\left|\mathbf{P}, k, \ell, s\right\rangle,$$

где $S^h(0)$ задается соотношением (3.4).

Заметим, что поскольку слагаемые, которые возникают в потенциале межкваркового взаимодействия в результате обмена глюонов между кварками, входящих в начальный или конечный мезон, уже учтены введением функции $\Phi^J_{\ell s}(k)$, то в операторе V^{strong} остаются только слагаемые, которые соответствуют обмену глюонами между кварками, входящими в начальные и конечные мезоны. Такими слагаемыми (КХД-поправки) можно пренебречь в многих случаях.

Посредством разложения Клебша-Гордана (1.16) оператор (4.14) преобразуется к соотношению:

$$F(q^2) = \sum_{\lambda_1, \lambda_2}\sum_{\nu_1, \nu_2}\sum_{\lambda'_1\lambda'_2}\sum_{\nu'_1, \nu'_2}\sum_{\ell', s'}\sum_{\ell, s}\int d\mathbf{k}'\ d\mathbf{k}$$
$$\sqrt{\frac{\omega_{m_q}(p_1)\omega_{m_Q}(p_2)M_0}{\omega_{m_q}(k)\omega_{m_Q}(k)\omega_{M_0}(P)}}\times$$
$$\times\sqrt{\frac{\omega_{m'_q}(p'_q)\omega_{m'_Q}(p'_2)M'_0}{\omega_{m'_q}(k')\omega_{m'_Q}(k')\omega_{M'_0}(P')}}\times$$
$$\times\Omega\begin{Bmatrix}\ell & s & J\\ \nu_1, & \nu_2, & \mu\end{Bmatrix}(\theta_k, \varphi_k)\Omega^*\begin{Bmatrix}\ell' & s' & J'\\ \nu'_1, & \nu'_2, & \mu'\end{Bmatrix}\times$$

$$
\begin{aligned}
&\times\left(\theta_{k'},\varphi_{k'}\right)\times\Phi^{*J'}_{\ell' s'}\left(k'\right)\Phi^{J}_{\ell s}\left(k\right)\times\\
&\times g^{-1}\left(\mathbf{V}_{P'},M_0',\mathbf{V}_P,M_0\right)\times\\
&\times\langle\mathbf{p}_2',\lambda_2',\mathbf{p}_1',\lambda_1'|S^h\left(0\right)\left|\mathbf{p}_1,\lambda_1,\mathbf{p}_2,\lambda_2\right\rangle\times \qquad (4.15)\\
&\times D^{*1/2}_{\lambda_1',\nu_1'}\left(\mathbf{n}_{W_1}'\right)D^{*1/2}_{\lambda_2',\nu_2'}\left(\mathbf{n}_{W_2}'\right)D^{1/2}_{\lambda_1,\nu_1}\left(\mathbf{n}_{W_1}\right)D^{1/2}_{\lambda_2,\nu_2}\left(\mathbf{n}_{W_2}\right).
\end{aligned}
$$

Здесь m_q и m_Q – массы первого и второго кварков соответственно, а функция g^{-1} переписана в терминах $\mathbf{V}_P,\mathbf{V}_{P'}$. Таким образом, вычисление адронной части сводится к нахождению матричного элемента для частиц (кварков), составляющих адрон.

Следующий этап состоит в вычислении матричного элемента

$$\langle\mathbf{p}_2',\lambda_2',\mathbf{p}_1',\lambda_1'|S^h\left(0\right)\left|\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\lambda_1,\lambda_2\right\rangle$$

в переменных $\mathbf{V}_P,\mathbf{V}_{P'}$ и $\mathbf{k},\mathbf{k}'$ с последующим интегрированием.

При этом во всех моделях предполагается, что оператор $S^h\left(0\right)$ может быть выражен через операторы частиц составляющих систему (в нашем случае кварков):

$$S^h\left(0\right)\approx S^{quark}\left(0\right)=S^{h_1}\left(0\right)+S^{h_2}\left(0\right).$$

Дополнительной возможностью для вычисления (4.15) является использование релятивистского импульсного приближения:

$$
\begin{aligned}
&\langle\mathbf{p}_2',\lambda_2',\mathbf{p}_1',\lambda_1'|S^h\left(0\right)\left|\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\lambda_1,\lambda_2\right\rangle=\\
&=\langle\mathbf{p}_1',\lambda_1'|S^{h_1}\left(0\right)\left|\mathbf{p}_1,\lambda_1\right\rangle\left\langle\mathbf{p}_2',\lambda_2'\right|\left.\mathbf{p}_2,\lambda_2\right\rangle+ \qquad (4.16)\\
&+\langle\mathbf{p}_2',\lambda_2'|S^{h_2}\left(0\right)\left|\mathbf{p}_2,\lambda_2\right\rangle\left\langle\mathbf{p}_1',\lambda_1'\right|\left.\mathbf{p}_1,\lambda_1\right\rangle
\end{aligned}
$$

Используя преобразования «бустов» импульсов $\mathbf{Q},\mathbf{Q}'$ для векторов состояний с приближеним (4.16) и соотношением (1.17), перепишем выражение (4.15) так:

$$
\begin{aligned}
&F(q^2)=\sum_{\lambda_1,\lambda_2}\sum_{\nu_1,\nu_2}\sum_{\lambda_1'\lambda_2'}\sum_{\nu_1',\nu_2'}\sum_{\ell',s'}\sum_{\ell,s}\int d\mathbf{k}'\,d\mathbf{k}\times\\
&\times\Omega\begin{Bmatrix}\ell & s & J\\ \nu_1, & \nu_2, & \mu\end{Bmatrix}\left(\theta_k,\varphi_k\right)\Omega^*\begin{Bmatrix}\ell' & s' & J'\\ \nu_1', & \nu_2', & \mu'\end{Bmatrix}\times\\
&\times\left(\theta_{k'},\varphi_{k'}\right)g^{-1}\left(\mathbf{V}_{P'},M_0',\mathbf{V}_P,M_0\right)\times\\
&\times\sqrt{\frac{1}{V_0}\frac{1}{V_0'}}\Phi^{*J'}_{\ell's'}\left(k'\right)\Phi^{J}_{\ell,s}\left(k\right)\left[\sqrt{\frac{\omega_{m_q}\left(p_1\right)}{\omega_{m_q}\left(k\right)}\frac{\omega_{m_q'}\left(p_1'\right)}{\omega_{m_q'}\left(k'\right)}}\times\right.\\
&\times\langle\mathbf{p}_1',\lambda_1'|S^{h_1}\left(0\right)\left|\mathbf{p}_1,\lambda_1\right\rangle\times\\
&\times\langle-\mathbf{k}',\nu_2'|U^{\dagger}\left(\mathbf{u}_{\mathbf{Q}'}\right)U\left(\mathbf{u}_{\mathbf{Q}}\right)\left|-\mathbf{k},\nu_2\right\rangle\times\\
&\times D^{*1/2}_{\lambda_1,\nu_1}\left(\mathbf{n}_{W_1}'\right)D^{1/2}_{\lambda_1,\nu_1}\left(\mathbf{n}_{W_1}\right)+\sqrt{\frac{\omega_{m_Q}\left(p_2\right)}{\omega_{m_Q}\left(k\right)}\frac{\omega_{m_Q'}\left(p_2'\right)}{\omega_{m_Q'}\left(k'\right)}}\times \qquad (4.17)\\
&\langle\mathbf{p}_2',\lambda_2'|S^{h_2}\left(0\right)\left|\mathbf{p}_2,\lambda_2\right\rangle\langle\mathbf{k}',\nu_1'|U^{\dagger}\left(\mathbf{u}_{\mathbf{Q}'}\right)\\
&\left.U\left(\mathbf{u}_{\mathbf{Q}}\right)\left|\mathbf{k},\nu_1\right\rangle\times D^{*1/2}_{\lambda_2',\nu_2'}\left(\mathbf{n}_{W_2}'\right)D^{1/2}_{\lambda_2,\nu_2}\left(\mathbf{n}_{W_2}\right)\right],
\end{aligned}
$$

где

$$V_0=\frac{\omega_{M_0}\left(P\right)}{M_0},\ V_0'=\frac{\omega_{M_0'}\left(P'\right)}{M_0'}. \qquad (4.18)$$

Поскольку кварки являются фермионами спина $1/2$, то

$$
\begin{aligned}
&\langle\mathbf{p}_i',\lambda_i'|S^{h_i}\left(0\right)\left|\mathbf{p}_i,\lambda_i\right\rangle=\\
&=\frac{1}{\left(2\pi\right)^3}\frac{1}{\sqrt{4\omega_{m_q}\left(p_i\right)\omega_{m_q'}\left(p_i'\right)}}\times \qquad (4.19)\\
&\times\overline{w}_{\lambda_i'}(\mathbf{p}_i',m_q')\Gamma^{h_i}w_{\lambda_i}(\mathbf{p}_i,m_q),
\end{aligned}
$$

где конструкция из биспиноров Дирака может быть записана в одном из вариантов в фигурных скобках:

$$
\begin{aligned}
&\overline{w}_{\lambda_i'}(\mathbf{p}_i',m_q')\Gamma^{h_i}w_{\lambda_i}(\mathbf{p}_i,m_q)=\\
&=\begin{cases}\overline{u}_{\lambda_i'}(\mathbf{p}_i',m_q')\Gamma^{h_i}u_{\lambda_i}(\mathbf{p}_i,m_q)\\ \overline{\upsilon}_{\lambda_i}(\mathbf{p}_i,m_q)\Gamma^{h_i}\upsilon_{\lambda_i'}(\mathbf{p}_i',m_q')\end{cases} \qquad (4.20)
\end{aligned}
$$

или

$$
\begin{aligned}
&\overline{w}_{\lambda_i'}(\mathbf{p}_i',m_q')\Gamma^{h_i}w_{\lambda_i}(\mathbf{p}_i,m_q)=\\
&=\begin{cases}\overline{\upsilon}_{\lambda_i'}(\mathbf{p}_i',m_q')\Gamma^{h_i}u_{\lambda_i}(\mathbf{p}_i,m_q),\\ \overline{u}_{\lambda_i}(\mathbf{p}_i,m_q)\Gamma^{h_i}\upsilon_{\lambda_i'}(\mathbf{p}_i',m_q').\end{cases} \qquad (4.21)
\end{aligned}
$$

Явный вид матрицы Γ^{h_i} определяется оператором $S^h\left(0\right)$.

Рассмотрим случай, когда в фермионных конструкциях реализуется вариант (4.20), который справедлив для случая электромагнитного взаимодействия кварка и антикварка в мезоне. Используя трансформационные свойства биспиноров для определенности считая вектор состояния с индексом q частицей, а с индексом Q античастицей, перепишем (4.17) в виде:

$$
\begin{aligned}
&F(q^2)=\sum_{\nu_1,\nu_2}\sum_{\nu_1',\nu_2'}\sum_{\ell',s'}\sum_{\ell,s}\frac{1}{2\left(2\pi\right)^3}\times\int d\mathbf{k}'\,d\mathbf{k}\times\\
&\times\Omega\begin{Bmatrix}\ell & s & J\\ \nu_1, & \nu_2, & \mu\end{Bmatrix}\left(\theta_k,\varphi_k\right)\times\\
&\times\Omega^*\begin{Bmatrix}\ell' & s' & J'\\ \nu_1', & \nu_2', & \mu'\end{Bmatrix}\left(\theta_{k'},\varphi_{k'}\right)\times\\
&\times g^{-1}\left(\mathbf{V}_{P'},M_0',\mathbf{V}_P,M_0\right)\times\\
&\times\sqrt{\frac{1}{V_0}\frac{1}{V_0'}}\Phi^{*J'}_{\ell's'}\left(k'\right)\Phi^{J}_{\ell,s}\left(k\right)\times\\
&\times\left[\sqrt{\frac{1}{\omega_{m_q}\left(k\right)\omega_{m_q'}\left(k'\right)}}\,\overline{u}_{\nu_1'}(\mathbf{k}',m_q')\times\right.\\
&\times B^{-1}\left(\mathbf{u}_{\mathbf{Q}'}\right)\Gamma^{h_1}B\left(\mathbf{u}_{\mathbf{Q}}\right)u_{\nu_1}(\mathbf{k},m_q)\times\\
&\times\langle-\mathbf{k}',\nu_2'|U^{\dagger}\left(\mathbf{u}_{\mathbf{Q}'}\right)U\left(\mathbf{u}_{\mathbf{Q}}\right)\left|-\mathbf{k},\nu_2\right\rangle+ \qquad (4.22)\\
&+\sqrt{\frac{1}{\omega_{m_Q}\left(k\right)\omega_{m_Q'}\left(k'\right)}}\,\overline{\upsilon}_{\nu_2}(-\mathbf{k},m_Q)B^{-1}\times\\
&\times\left(\mathbf{u}_{\mathbf{Q}}\right)\Gamma^{h_2}B\left(\mathbf{u}_{\mathbf{Q}'}\right)\upsilon_{\nu_2'}(-\mathbf{k}',m_Q')\times
\end{aligned}
$$

$$\times\langle \mathbf{k}',\nu_1'|U^{\dagger}\left(\mathbf{u}_{\mathbf{Q}'}\right)U\left(\mathbf{u}_{\mathbf{Q}}\right)|\mathbf{k},\nu_1\rangle\Bigg].$$

В представлении Дирака-Паули для γ-матриц, оператор $B\left(\mathbf{u}_{\mathbf{p}}\right)$ имеет вид

$$B\left(\mathbf{u}_{\mathbf{p}}\right)=\frac{I-\left(\mathbf{u}_{\mathbf{p}}\gamma\right)\gamma_0}{\sqrt{1-\mathbf{u}_{\mathbf{p}}^{\,2}}} \tag{4.23}$$

и обладает следующими свойствами:

$$B^{-1}\left(\mathbf{u}_{\mathbf{p}}\right)=B\left(-\mathbf{u}_{\mathbf{p}}\right), \tag{4.24}$$

$$B\left(\mathbf{u}_{\mathbf{p}}\right)B\left(\mathbf{u}_{\mathbf{p}}\right)=B\left(\upsilon_{\mathbf{p}}\right)=\hat{V}_p\gamma_0 \tag{4.25}$$

с $\upsilon_p=\mathbf{p}/\omega_m\left(p\right)$. Также очевидно, что

$$\begin{gathered}\hat{V}_p\,B\left(\mathbf{u}_{\mathbf{p}}\right)=B\left(-\mathbf{u}_{\mathbf{p}}\right)\hat{V}_p\,,\\ B\left(\mathbf{u}_{\mathbf{p}}\right)\gamma_5=\gamma_5B\left(\mathbf{u}_{\mathbf{p}}\right).\end{gathered} \tag{4.26}$$

Действие оператора буста (4.23) на биспинор определяется соотношением:

$$\begin{gathered}B\left(\mathbf{u}_{\mathbf{Q}}\right)u_{\lambda}\left(\mathbf{k},m\right)=u_{\sigma}\left(\mathbf{p},m\right)D^{1/2}_{\sigma,\lambda}\left(\mathbf{n}_W\left(\mathbf{k},\mathbf{Q}\right)\right),\\ B\left(\mathbf{u}_{\mathbf{Q}}\right)\upsilon_{\lambda}\left(\mathbf{k},m\right)=\upsilon_{\sigma}\left(\mathbf{p},m\right)D^{*1/2}_{\sigma,\lambda}\left(\mathbf{n}_W\left(\mathbf{k},\mathbf{Q}\right)\right),\\ \begin{pmatrix}\omega_m\left(p\right)\\ \mathbf{p}\end{pmatrix}=L(\mathbf{u}_{\mathbf{Q}})\begin{pmatrix}\omega_m\left(k\right)\\ \mathbf{k}\end{pmatrix}.\end{gathered} \tag{4.27}$$

Для упрощения расчетов во второй части соотношения (4.22) выполним замену $\mathbf{k}'\to-\mathbf{k}'$ и $\mathbf{k}\to-\mathbf{k}$. В итоге имеем

$$\begin{gathered}F(q^2)=\sum_{\nu_1,\nu_2}\sum_{\nu_1',\nu_2'}\sum_{\ell',s'}\sum_{\ell,s}\frac{1}{2\left(2\pi\right)^3}\int d\mathbf{k}'\,d\mathbf{k}\times\\ \times\Omega\begin{Bmatrix}\ell & s & J\\ \nu_1, & \nu_2, & \mu\end{Bmatrix}\left(\theta_k,\varphi_k\right)\times\\ \times\Omega^*\begin{Bmatrix}\ell' & s' & J'\\ \nu_1', & \nu_2', & \mu'\end{Bmatrix}\left(\theta_{k'},\varphi_{k'}\right)\times\\ \times g^{-1}\left(\mathbf{V}_{P'},M_0',\mathbf{V}_P,M_0\right)\sqrt{\frac{1}{V_0}\frac{1}{V_0'}}\Phi^{*J'}_{\ell's'}\left(k'\right)\Phi^{J}_{\ell,s}\left(k\right)\times\\ \times\left[\sqrt{\frac{1}{\omega_{m_q}\left(k\right)\omega_{m_q'}\left(k'\right)}}\bar{u}_{\nu_1'}(\mathbf{k}',m_q')B^{-1}\left(\mathbf{u}_{\mathbf{Q}'}\right)\times\right.\\ \times\Gamma^{h_1}B\left(\mathbf{u}_{\mathbf{Q}}\right)u_{\nu_1}\left(\mathbf{k},m_q\right)\times\\ \times\langle-\mathbf{k}',\nu_2'|U^{\dagger}\left(\mathbf{u}_{\mathbf{Q}'}\right)U\left(\mathbf{u}_{\mathbf{Q}}\right)|-\mathbf{k},\nu_2\rangle+\\ +\left(-1\right)^{\ell+\ell'}\sqrt{\frac{1}{\omega_{m_Q}\left(k\right)\omega_{m_Q'}\left(k'\right)}}\bar{\upsilon}_{\nu_2}(\mathbf{k},m_Q)B^{-1}\left(\mathbf{u}_{\mathbf{Q}}\right)\times\\ \times\Gamma^{h_2}B\left(\mathbf{u}_{\mathbf{Q}'}\right)\upsilon_{\nu_2'}\left(\mathbf{k}',m_Q'\right)\times\\ \left.\times\langle-\mathbf{k}',\nu_1'|U^{\dagger}\left(\mathbf{u}_{\mathbf{Q}'}\right)U\left(\mathbf{u}_{\mathbf{Q}}\right)|-\mathbf{k},\nu_1\rangle\right].\end{gathered} \tag{4.28}$$

Существенного упрощения расчетов можно достичь, если провести вычисления в системе отсчета, где

$$\mathbf{V}_{\mathbf{Q}}+\mathbf{V}_{\mathbf{Q}'}=0, \tag{4.29}$$

которая представляет собой обобщение широко используемой системы Брейта [52]. В этой системе отсчета автоматически выполняется равенство $\mathbf{u}_{\mathbf{Q}}=-\mathbf{u}_{\mathbf{Q}'}$ и

$$B\left(\mathbf{u}_{\mathbf{Q}'}\right)=B\left(-\mathbf{u}_{\mathbf{Q}}\right). \tag{4.30}$$

Пространственную систему координат выберем так, чтобы вектор $\mathbf{V}_{\mathbf{Q}}$ был направлен вдоль оси Z, т. е.

$$V_Q=\left\{V_0,0,0,\left|\mathbf{V}_{\mathbf{Q}}\right|\right\},\ V_{Q'}=\left\{V_0,0,0,-\left|\mathbf{V}_{\mathbf{Q}}\right|\right\}. \tag{4.31}$$

Тогда (4.28) примет вид

$$\begin{gathered}F(q^2)=\sum_{\nu_1,\nu_2}\sum_{\nu_1',\nu_2'}\sum_{\ell',s'}\sum_{\ell,s}\frac{1}{2\left(2\pi\right)^3}\int d\mathbf{k}'\,d\mathbf{k}\times\\ \times\Omega\begin{Bmatrix}\ell & s & J\\ \nu_1, & \nu_2, & \mu\end{Bmatrix}\left(\theta_k,\varphi_k\right)\Omega^*\begin{Bmatrix}\ell' & s' & J'\\ \nu_1', & \nu_2', & \mu'\end{Bmatrix}\times\\ \times\left(\theta_{k'},\varphi_{k'}\right)g^{-1}\left(\mathbf{V}_{P'},M_0',\mathbf{V}_P,M_0\right)\times\\ \times\sqrt{\frac{1}{V_0}\frac{1}{V_0'}}\Phi^{*J'}_{\ell's'}\left(k'\right)\Phi^{J}_{\ell,s}\left(k\right)\times\\ \times\left[\sqrt{\frac{1}{\omega_{m_q}\left(k\right)\omega_{m_q'}\left(k'\right)}}\bar{u}_{\nu_1'}(\mathbf{k}',m_q')\times\right.\\ \times B\left(\mathbf{u}_{\mathbf{Q}}\right)\Gamma^{h_1}B\left(\mathbf{u}_{\mathbf{Q}}\right)u_{\nu_1}\left(\mathbf{k},m_q\right)\times\\ \times\langle-\mathbf{k}',\nu_2'|U\left(\upsilon_{\mathbf{Q}}\right)|-\mathbf{k},\nu_2\rangle+\\ +\left(-1\right)^{\ell+\ell'}\sqrt{\frac{1}{\omega_{m_Q}\left(k\right)\omega_{m_Q'}\left(k'\right)}}\bar{\upsilon}_{\nu_2}(\mathbf{k},m_Q)\times\\ \times B\left(-\mathbf{u}_{\mathbf{Q}}\right)\Gamma^{h_2}B\left(-\mathbf{u}_{\mathbf{Q}}\right)\upsilon_{\nu_2'}\left(\mathbf{k}',m_Q'\right)\times\\ \left.\times\langle-\mathbf{k}',\nu_1'|U\left(\upsilon_{\mathbf{Q}}\right)|-\mathbf{k},\nu_1\rangle\right].\end{gathered} \tag{4.32}$$

Используя закон преобразования состояний (1.10) получим

$$\begin{gathered}F(q^2)=\sum_{\nu_1,\nu_2}\sum_{\nu_1',\nu_2'}\sum_{\ell',s'}\sum_{\ell,s}\int d\mathbf{k}'\,d\mathbf{k}\times\\ \times\Omega\begin{Bmatrix}\ell & s & J\\ \nu_1, & \nu_2, & \mu\end{Bmatrix}\left(\theta_k,\varphi_k\right)\Omega^*\begin{Bmatrix}\ell' & s' & J'\\ \nu_1', & \nu_2', & \mu'\end{Bmatrix}\times\\ \times\left(\theta_{k'},\varphi_{k'}\right)\frac{1}{2\left(2\pi\right)^3}\sqrt{\frac{1}{V_0}\frac{1}{V_0'}}\Phi^{*J'}_{\ell's'}\left(k'\right)\Phi^{J}_{\ell,s}\left(k\right)\times\\ \times\left[\sqrt{\frac{1}{\omega_{m_q}\left(k\right)\omega_{m_q'}\left(k'\right)}}\bar{u}_{\nu_1'}(\mathbf{k}',m_q')\times\right.\\ \times B\left(\mathbf{u}_{\mathbf{Q}}\right)\Gamma^{h_1}B\left(\mathbf{u}_{\mathbf{Q}}\right)u_{\nu_1}\left(\mathbf{k},m_q\right)\times \qquad (4.33)\\ \times\sqrt{\frac{\omega_{m_Q}\left(k'\right)}{\omega_{m_Q}\left(k\right)}}\delta\left(\mathbf{k}_2-\mathbf{k}'\right)D^{1/2}_{\nu_2'\nu_2}\left(\mathbf{n}_{W_2}\left(\mathbf{k},\upsilon_{\mathbf{Q}}\right)\right)+\\ +\left(-1\right)^{\ell+\ell'}\sqrt{\frac{1}{\omega_{m_Q}\left(k\right)\omega_{m_Q'}\left(k'\right)}}\bar{\upsilon}_{\nu_2}(\mathbf{k},m_Q)\times\\ \times B\left(-\mathbf{u}_{\mathbf{Q}}\right)\Gamma^{h_2}B\left(-\mathbf{u}_{\mathbf{Q}}\right)\upsilon_{\nu_2'}\left(\mathbf{k}',m_Q'\right)\times\end{gathered}$$

$$\times\sqrt{\frac{\omega_{m_q}\left(k'\right)}{\omega_{m_q}\left(k\right)}}\delta\left(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}'\right)D^{1/2}_{\nu_1'\nu_1}\left(\mathbf{n}_{W_1}\left(\mathbf{k},\upsilon_{\mathbf{Q}}\right)\right)\Bigg].$$

В соотношении (4.33) вектор-параметр вигнеровского вращения имеет вид

$$\mathbf{n}_{W_{1,2}}\left(\mathbf{k},\upsilon_{\mathbf{Q}}\right)=-\frac{\left[\mathbf{u}_{k_{1,2}}\ \upsilon_{\mathbf{Q}}\right]}{1-\left(\mathbf{u}_{k_{1,2}}\ \upsilon_{\mathbf{Q}}\right)},\tag{4.34}$$

$$\mathbf{u}_{k_{1,2}}=\frac{\mathbf{k}}{\omega_{m_{q,Q}}\left(k\right)+m_{q,Q}},\tag{4.35}$$

а 4-импульс k_2 в системе Брейта задается равенствами:

$$k_{1,2}=\begin{pmatrix}\omega_{m_{q,Q}}\left(k_{1,2}\right)\\ \mathbf{k}_{1,2}\end{pmatrix}=L_{-\upsilon_Q}\begin{pmatrix}\omega_{m_{q,Q}}\left(k\right)\\ \mathbf{k}\end{pmatrix}\tag{4.36}$$

с

$$\mathbf{k}_{1,2}=\mathbf{k}-$$
$$-\upsilon_Q\left[\left(\varpi_{12}+1\right)\omega_{m_{q,Q}}\left(k\right)-\sqrt{\varpi_{12}^2-1}k\cos\theta_k\right],\tag{4.37}$$

$$\omega_{m_{q,Q}}\left(k_{1,2}\right)=\varpi_{12}\ \omega_{m_{q,Q}}\left(k\right)-\sqrt{\varpi_{12}^2-1}k\cos\theta_k,\tag{4.38}$$

где

$$\varpi_{12}=\varpi_{12}(k',k)=\frac{M_0'^2\left(k'\right)+M_0^2\left(k\right)+q^2}{2\,M_0\left(k\right)M_0'\left(k'\right)}.\tag{4.39}$$

а $M_0\left(k\right)$ и $M_0'\left(k'\right)$ – инвариантные массы системы без сильного взаимодействия в начальном и конечном состоянии. Углы θ_k,φ_k являются сферическими углами вектора относительного движения $\mathbf{k}$ в системе отсчета (4.31).

После интегрирования получаем выражение

$$F(q^2)=\sum_{\nu_1,\nu_2}\sum_{\nu_1',\nu_2'}\sum_{\ell',s'}\sum_{\ell,s}\int d\mathbf{k}\ \Omega\begin{Bmatrix}\ell & s & J\\ \nu_1, & \nu_2, & \mu\end{Bmatrix}\times$$
$$\times\left(\theta_k,\varphi_k\right)g^{-1}\left(\mathbf{V}_{P'},M_0',\mathbf{V}_P,M_0\right)\times$$
$$\times\frac{1}{\left(2\pi\right)^3}\sqrt{\frac{1}{V_0}\frac{1}{V_0'}}\Phi^J_{\ell,s}\left(k\right)\sqrt{\frac{1}{4\omega_{m_q}\left(k\right)\omega_{m_Q}\left(k\right)}}\times$$
$$\times\Bigg[\sqrt{\frac{\omega_{m_Q}\left(k_2\right)}{\omega_{m_q'}\left(k_2\right)}}\bar{u}_{\nu_1'}(\mathbf{k}_2,m_q')B\left(\mathbf{u}_{\mathbf{Q}}\right)\Gamma^{h_1}B\left(\mathbf{u}_{\mathbf{Q}}\right)\times$$
$$\times u_{\nu_1}(\mathbf{k},m_q)\Omega^*\begin{Bmatrix}\ell' & s' & J'\\ \nu_1', & \nu_2', & \mu'\end{Bmatrix}\left(\theta_{k_2},\varphi_{k_2}\right)\times$$
$$\times\Phi^{*J'}_{\ell',s'}\left(k_2\right)D^{1/2}_{\nu_2'\nu_2}\left(\mathbf{n}_{W_2}\left(\mathbf{k},\upsilon_{\mathbf{Q}}\right)\right)+$$
$$+\left(-1\right)^{\ell+\ell'}\sqrt{\frac{\omega_{m_q}\left(k_1\right)}{\omega_{m_Q'}\left(k_1\right)}}\bar{\upsilon}_{\nu_2}(\mathbf{k},m_Q)B\left(-\mathbf{u}_{\mathbf{Q}}\right)\times\tag{4.40}$$
$$\times\Gamma^{h_2}B\left(-\mathbf{u}_{\mathbf{Q}}\right)\upsilon_{\nu_2'}(\mathbf{k}_1,m_Q')\Omega^*\begin{Bmatrix}\ell' & s' & J'\\ \nu_1', & \nu_2', & \mu'\end{Bmatrix}\times$$
$$\times\left(\theta_{k_1},\varphi_{k_1}\right)\Phi^{*J'}_{\ell',s'}\left(k_1\right)D^{1/2}_{\nu_1'\nu_1}\left(\mathbf{n}_{W_1}\left(\mathbf{k},\upsilon_{\mathbf{Q}}\right)\right)\Bigg].$$

Дальнейшие упрощения возможны после конкретизации процесса взаимодействия между кварками.

5 Радиационные распады мезонов в точечной форме ПИКМ

Рассмотрим применение методики, представленной в работе, для радиационных распадов $V\to P\gamma$, которые широко используются для исследования структуры адронов.

Существует достаточно большое количество подходов для модельного описания радиационных переходов мезонов. Так в работах [24], [54] используют релятивистские составные кварковые модели, основанные на light-front форме ПИКМ и квазипотенциальном подходе.

Параметризацию матричного элемента для перехода векторного мезона V с вектором поляризации $\varepsilon_\nu(\lambda)$ в псевдоскалярный мезон P посредством испускания виртуального гамма-кванта γ^*

$$\left\langle\mathbf{Q}',M_P\left|\hat{J}^\alpha\left(0\right)\right|\mathbf{Q},1\lambda,M_V\right\rangle=$$
$$=i\frac{g_{VP\gamma^*}\left(q^2\right)}{\left(2\pi\right)^3}\frac{\varepsilon^{\alpha\nu\rho\sigma}\varepsilon_\nu(\lambda)Q_\rho Q_\sigma'}{\sqrt{4\omega_{M_V}\left(Q\right)\omega_{M_P}\left(Q'\right)}}\tag{5.1}$$

перепишем в терминах 4-скоростей V_Q и $V_{Q'}'$. Далее, умножая полученное выражение на $K^{*\alpha}(\lambda)=-i\varepsilon^{\alpha\nu\rho\sigma}\varepsilon^*_\nu(\lambda)V_\rho V_\sigma'$ получим, что

$$g_{VP\gamma^*}\left(q^2\right)=(2\pi)^3\sqrt{4V_0V_0'}\times$$
$$\times\langle\mathbf{Q}',M_P|\frac{\left(K^*(\lambda)J\left(0\right)\right)}{\sqrt{M_PM_V}\left(K\left(\lambda\right)K^*\left(\lambda\right)\right)}|\mathbf{Q},1\mu,M_V\rangle.\tag{5.2}$$

Константа радиационного распада определяется формулой $g_{VP\gamma}=g_{VP\gamma^*}\left(0\right)$. Сравнивая соотношения (5.2) и (4.1), приходим к тому, что

$$g^{-1}\left(\widehat{\mathbf{Q}}',\widehat{M}_I',\widehat{\mathbf{Q}},\widehat{M}_I\right)=$$
$$=(2\pi)^3\frac{\sqrt{4V_0V_0'}K^*_\alpha(\lambda)}{\sqrt{M_PM_V}\left(K\left(\lambda\right)K^*\left(\lambda\right)\right)},\tag{5.3}$$

$$S^h\left(0\right)=J^\alpha(0).\tag{5.4}$$

Процесс распада $V\to P\gamma^*$ обусловлен электромагнитным взаимодействием кварков q с электрическими зарядами e_q и поэтому ток $\hat{J}^\alpha(0)$ запишется в виде:

$$\hat{J}^\alpha(0)=\sum_{q=u,d,\ldots}e_q\psi_q\gamma^\alpha\psi_q.\tag{5.5}$$

Для распада $V\to P\gamma^*$ в обобщенной системе Брейта (4.29) имеем:

$$J'=\ell'=s'=\ell=0,\ J=s=1,$$

$$\Gamma^{h_{1,2}} = \gamma^{\alpha},\ \Phi^{J}_{\ell,s}(k) = \Phi_V(k),$$
$$m_q = m'_q,\ m_Q = m'_Q,$$
$$K(\lambda) = \frac{\sqrt{\omega^2-1}}{\sqrt{2}}\{0,0,-i\lambda,1,0\},\ \omega = (V_Q V_{Q'}). \quad (5.6)$$

Используя соотношения (1.18),(4.40) и то, что в точечной форме ПИКМ $\omega = \varpi_{12}$, для величины $g_{VP\gamma^*}(q^2)$ из (5.2) находим, что

$$g_{VP\gamma^*}(q^2) = \frac{1}{4\pi}\sum_{\nu_1,\nu_2}\sum_{\nu'_1,\nu'_2}\int d\mathbf{k}\sqrt{\frac{3+4\nu_1(\lambda-\nu_1)}{4}}\nu'_1 \times$$
$$\times\frac{1}{\sqrt{M_0(k)}}\Phi_V(k)\sqrt{\frac{1}{\omega_{m_q}(k)\omega_{m_Q}(k)}}\times$$
$$\times\left[e_q\sqrt{\frac{\omega_{m_Q}(k_2)}{\omega_{m_q}(k_2)}}\bar{u}_{\nu'_1}(\mathbf{k}_2,m_q)B(\upsilon_{\mathbf{Q}})\times\right.$$
$$\times(\lambda\gamma_1 - i\gamma_2)u_{\nu_1}(\mathbf{k},m_q)\frac{1}{\sqrt{M'_0(k_2)}}\times$$
$$\times\frac{1}{\sqrt{\varpi^2_{12}(k_2,k)-1}}\Phi_P(k_2)D^{1/2}_{-\nu'_1\lambda-\nu_1}\left(\mathbf{n}_{W_2}(\mathbf{k},\upsilon_{\mathbf{Q}})\right)+$$
$$+e_{\bar{Q}}\sqrt{\frac{\omega_{m_q}(k_1)}{\omega_{m_Q}(k_1)}}\bar{\upsilon}_{\lambda-\nu_1}(\mathbf{k},m_Q)B(-\upsilon_{\mathbf{Q}})\times \quad (5.7)$$
$$\times(\lambda\gamma_1 - i\gamma_2)\upsilon_{-\nu'_1}(\mathbf{k}_1,m_Q)\times$$
$$\times\frac{1}{\sqrt{M'_0(k_1)}}\frac{1}{\sqrt{\varpi^2_{12}(k_1,k)-1}}\times$$
$$\left.\times\Phi_P(k_1)D^{1/2}_{\nu'_1\nu_1}\left(\mathbf{n}_{W_1}(\mathbf{k},\upsilon_{\mathbf{Q}})\right)\right].$$

Дальнейшие вычисления $g_{VP\gamma}$ связаны расчетами токовых конструкций биспиноров Дирака и предельным переходом $q^2 \to 0$ в соотношении (5.7). После ряда преобразований и интегрирования по угловым переменным импульса $\mathbf{k}$ находим относительно простое интегральное представление для константы радиационного распада $V \to P\gamma$:

$$g_{VP\gamma} = \frac{1}{2}\int dk k^2\Phi_V(k)\Phi_P(k)\times$$
$$\times\left(e_q f(k,m_q,m_Q) - e_{\bar{Q}} f(k,m_Q,m_q)\right), \quad (5.8)$$

где

$$f(k,m_q,m_Q) =$$
$$= -\frac{1}{3\omega_{m_q}(k)}\left(\frac{m_q+m_Q}{M_0(k)} + 1 + \frac{m_q}{\omega_{m_q}(k)}\right). \quad (5.9)$$

Заключение

В работе представлена методика расчета формфакторов и констант распадов мезонов с учетом их кварковой структуры в рамках точечной формы ПИКМ. В данном подходе подинтегральные выражения для наблюдаемых не зависят от масс мезонов, в отличие от подходов, разработанных в [32], [55], [56]. В то же время аналогичное свойство наблюдается методах, разработанных в динамике на световом фронте [20]–[24] и в мгновенной форме ПИКМ [1]. В частности, отметим, что интегральное представление константы f_P лептонного распада $(q\bar{Q}) \to \ell + \nu_\ell$ для псевдоскалярного мезона $P(q\bar{Q})$ (см. [3], [11], [57]) совпадает с выражениями аналогичной константы в работах [24], [30]. Отличие в методиках расчета возникает при вычислении зависимости форм факторов от переданного импульса q^2.

Разработанная методика практически без изменений может быть применена к мгновенной форме ПИКМ (см. (2.1)).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Krutov*, *A.* Instant form of Poincare-invariant quantum mechanics and description of the structure of composite systems / A. Krutov, V. Troitsky // Physics of Particles and Nuclei. – 2009. – Vol. 40, № 2. – P. 136–161.

2. *Mini review of Poincaré invariant quantum theory*/ W. N. Polyzou [et al.] // Few Body Syst. – 2011. – Vol. 49. – P. 129–147.

3. *Andreev*, *V.V.* QCD coupling constant below 1 GeV in the Poincare-covariant model / V.V. Andreev // Physics of Particles and Nuclei Letters. – 2011. – Vol. 8, № 4. – P. 347–355.

4. *Coester*, *F.* Relativistic quantum mechanics of particles with direct interactions / F. Coester, W.N. Polyzou // Phys. Rev. – 1982. – Vol. D26. – P. 1348–1367.

5. *Polyzou*, *W.N.* Relativistic two-body models / W.N. Polyzou // Annals of Physics. – 1989. – Vol. 193, №2. – P. 367–418.

6. *Bakamjian*, *B.* Relativistic Particle Dynamics. II / B. Bakamjian, L.H. Thomas // Phys. Rev. – Dec 1953. – Vol. 92, № 5. – P. 1300–1310.

7. *Bakamjian*, *B.* Relativistic Particle Dynamics / B. Bakamjian // Phys. Rev. – 1961. – Vol. 121, № 6. – P. 1849–1851.

8. *Соколов*, *С.Н.* Релятивистское сложение прямых вазимодействий в точечной форме динамики / С.Н. Соколов // ТМФ. – 1978. – Т. 36, № 2. – С. 193–207.

9. *Keister*, *B.D.* Relativistic Hamiltonian dynamics in nuclear and particle physics / B.D. Keister, W.N. Polyzou // Adv. Nucl. Phys. – 1991. – Vol. 20. – P. 225–479.

10. *First Order Relativistic Three-Body Scattering* / T. Lin, C. Elster, W.N. Polyzou, W. Glockle // Phys. Rev. – 2007. – Vol. C76. – P. 014010.

11. *Андреев*, *В. В.* Электрослабые характеристики квантовых систем в пуанкаре-ковариантных моделях / В. В. Андреев. – Lap Lambert Academic Publishing, 2017. – 320 с.

12. *Bete, H.A.* A relativistic equation for bound-state problems / H.A. Bete, E.E. Salpeter // Phys. Rev. – 1951. – Vol. 84, № 2. – P. 1232–1242.

13. *Salpeter, E.E.* Mass-corrections to the fine structure of Hydrogen-like atoms / E.E. Salpeter // Phys. Rev. – 1952. – Vol. 87, № 2. – P. 328–343.

14. *Логунов, А.А.* Вероятностное описание рассеяния при высоких энергиях и гладкий квазипотенциал / А.А. Логунов, О.А. Хрусталев // ЭЧАЯ. – 1970. – Т. 1, № 1. – С. 71–90.

15. *Кадышевский, В.Г.* Трехмерная формулировка релятивистской проблемы двух тел / В.Г. Кадышевский, Р.М. Мир-Касимов, Н.Б. Скачков // ЭЧАЯ. – 1972. – Т. 2, № 3. – С. 635–690.

16. *Spectrum of Charmed Quark-Antiquark Bound States* / E. Eichten [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 1975. – Vol. 34. – P. 369–372.

17. *Dorokhov, A.E.* Spin effects in instanton model / A.E. Dorokhov // Czech. J. Phys. – 2002. – Vol. 52. – P. C79–C89.

18. *Meson form-factors and the quark-based linear sigma model* / M.D. Scadron, F. Kleefeld, G. Rupp, E. van Beveren // Fizika. – 2004. – Vol. B13. – P. 43–56.

19. *Андреев, В.В.* Пуанкаре-ковариантные модели двухчастичных систем с квантовополевыми потенциалами / В.В. Андреев. – Гомель: УО «Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины», 2008. – 294 с.

20. *Hard constituent quarks and electroweak properties of pseudoscalar mesons* / F. Cardarelli [et al.] // Phys. Lett. – 1994. – Vol. B332. – P. 1–7.

21. *Chung, P.L.* Charge form-factors of quark model pions / P.L. Chung, F. Coester, W.N. Polyzou // Phys. Lett. – 1988. – Vol. B205. – P. 545–548.

22. *Coester, F.* Charge form factors of quark-model pions / F. Coester, W.N. Polyzou // Phys. Rev. – 2005. – Vol. C71. – P. 028202.

23. *Schlumpf, F.* Charge form-factors of pseudoscalar mesons / F. Schlumpf // Phys. Rev. – 1994. – Vol. D50. – P. 6895–6898.

24. *Jaus, W.* Relativistic constituent quark model of electroweak properties of light mesons / W. Jaus // Phys. Rev. – 1991. – Vol. D44. – P. 2851–2859.

25. *Jaus, W.* Semileptonic decays of B and D mesons in the light front formalism / W. Jaus // Phys. Rev. – 1990. – Vol. D41. – P. 3394.

26. *Simula, S.* Comparison among Hamiltonian light-front formalisms at q+ =0 and q+ not = 0: Space-like elastic form factors of pseudoscalar and vector mesons / S. Simula // Phys. Rev. – 2002. – Vol. C66. – P. 035201.

27. *Чешков, А.А.* Инвариантная параметризация локальных операторов / А.А. Чешков, Ю.М. Широков // ЖЭТФ. – 1963. – Т. 44, № 6. – С. 1982–1992.

28. *Krutov, A. F.* Relativistic instant–form approach to the structure of two–body composite systems / A.F. Krutov, V.E. Troitsky // Phys. Rev. C. – 2002. – P. 045501.

29. *Krutov, A.F.* Relativistic properties of spin and pion electromagnetic structure / A.F. Krutov, V.E. Troitsky // J. High Energy Physics. – 1999. – Vol. 10. – P. 028.

30. *Крутов, А.Ф.* Электрослабые свойства легких мезонов в релятивистской модели составных кварков / А.Ф. Крутов // ЯФ. – 1997. – Т.60, №8. – С. 1442–1450.

31. *Крутов, А.Ф.* Построение формфакторов составных систем с помощью обобщенной теоремы Вигнера-Эккарта для группы Пуанкаре / А.Ф. Крутов, В.Е. Троицкий // Теоретическая и математическая физика. – 2005. – Т.143, № 2. – С. 258–277.

32. *Desplanques, B.* Form factors in the 'point form' of relativistic quantum mechanics: Single and two-particle currents / B. Desplanques, L. Theussl // Eur. Phys. J. – 2004. – Vol. A21. – P. 93.

33. *Desplanques, B.* Effective boost and 'point-form' approach / B. Desplanques, L. Theussl, S. Noguera // Phys. Rev. – 2002. – Vol. C65. – P. 038202.

34. *Comparison of different boost transformations for the calculation of form factors in relativistic quantum mechanics* / L. Theussl, A. Amghar, B. Desplanques, S. Noguera // Few Body Syst. Suppl. – 2003. – Vol. 14. – P. 393.

35. *Amghar, A.* The form factor of the pion in 'point-form' of relativistic dynamics revisited / A. Amghar, B. Desplanques, L. Theussl // Phys. Lett. – 2003. – Vol. B574. – P. 201–209.

36. *Desplanques, B.* Dirac's inspired point form and hadron form factors / B. Desplanques // Nucl. Phys. – 2005. – Vol. A755. – P. 303–306.

37. *Desplanques, B.* Nucleon and pion form factors in different forms of relativistic quantum mechanics / B. Desplanques // Int. J. Mod. Phys. – 2005. – Vol. A20. – P. 1601–1606.

38. *Desplanques, B.* Relativistic quantum mechanics: A Dirac's point-form inspired approach / B. Desplanques // Nucl. Phys. – 2005. – Vol. A748. – P. 139–167.

39. *Менский, М.Б.* Метод индуцированных представлений. Пространство-время и концепция частиц / М.Б. Менский под ред. Г. ред. физ.-мат. лит-ры. – Наука, 1976. – 145 с.

40. *Новожилов, Ю.В.* Введение в теорию элементарных частиц / Ю.В. Новожилов. – М.: Наука, 1972. – 472 с.

41. *Федоров, Ф.И.* Группа Лоренца / Ф.И. Федоров. – М.: Наука, 1979. – 384 с.

42. *Dirac, P.A.M.* Forms of relativistic dynamics / P.A.M. Dirac // Rev. of Modern Phys. – 1949. – Vol. 21. – P. 392–399.

43. *Pauli, H.-C.* On the effective Hamiltonian for QCD: An overview and status report / H.-C. Pauli // Nucl. Phys. Proc. Suppl. – 2002. – Vol. 108. – P. 273–280.

44. *Берестецкий, В.Б.* Динамика светового фронта и нуклоны из релятивистских кварков /

В.Б. Берестецкий, М.В. Терентьев // Ядерная физика. – 1977. – Т. 24, № 5. – С. 1044–1057.

45. *Кондратюк*, *Л.А.* Задача рассеяния для релятивистских систем с фиксированным числом частиц в динамике на световом фронте / Л.А. Кондратюк, М.В. Терентьев // Ядерная физика. – 1980. – Т. 31, № 4. – С. 1087–1106.

46. *Терентьев*, *М.В.* О структуре волновых функций мезонов как связанных состояний релятивистских кварков / М.В. Терентьев // Ядерная физика. – 1976. – Т. 25, № 1. – С. 207–213.

47. *Allen*, *T.W.* Pion charge form factor in point form relativistic dynamics / T.W. Allen, W.H. Klink // Phys. Rev. – 1998. – Vol. C58. – P. 3670–3673.

48. *Андреев*, *В.В.* Описание лептонных распадов в рамках пуанкаре-ковариантной кварковой модели / В.В. Андреев // Весцi НАН Беларуси. Сер. фiз.-мат. навук. – 2000. – № 2. – С. 93–98.

49. *Klink*, *W.H.* Point form electrodynamics and the construction of conserved current operators Electronic resource / W.H. Klink. – 2000. – Mode of access: http://arxiv.org/pdf/nucl-th/0012033. – Date of access: 14.01.2008.

50. *Keister*, *B.D.* Heavy quark symmetry and Dirac's point form dynamics / B.D. Keister // Phys. Rev. – 1992. – Vol. D46. – P. 3188–3194.

51. *Klink*, *W.H.* Constructing Point Form Mass Operators from Interaction Lagrangians / W.H. Klink // Nucl. Phys. – 2003. – Vol. A716. – P. 123–135.

52. *Биленький*, *С. М.* Введение в диаграммы Фейнмана и физику электрослабого взаимодействия / С.М. Биленький. – М.: Энергоатомиздат, 1990. – 327 с.

53. *Lucha*, *W.* Relativistic treatment of fermion anti-fermion bound states / W. Lucha, H. Rupprecht, F.F. Schoberl // Phys. Rev. – 1991. – Vol. D44. – P. 242–249.

54. *Ebert*, *D.* Radiative M1 decays of heavy light mesons in the relativistic quark model / D. Ebert, R. Faustov, V. Galkin // Phys. Lett. – 2002. – Vol. B537. – P. 241–248.

55. *Hwang*, *D.-S.* Decay constants of B, B* and D, D* mesons in relativistic mock meson model / D.-S. Hwang, G.-H. Kim // Phys. Rev. – 1997. – Vol. D55. – P. 6944–6951.

56. *Negash*, *H.* Radiative decay widths of ground and excited states of vector charmonium and bottomonium / H. Negash, S. Bhatnagar // Adv. High Energy Phys. – 2017. – Vol. 2017. – P. 7306825.

57. *Андреев*, *В.В*. Электромагнитные формфакторы мезонов / В.В. Андреев, А.Ф. Крутов // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 1 (6). – С. 7–19.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского Республиканского Фонда Фундаментальных Исследований (*г. Минск*, *Беларусь*) *и Самарского университета* (*г. Самара*, *Россия*).

Поступила в редакцию 28.08.17.