S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 15, стр. 29–34 (2018) УДК 512.542
DOI 10.17377/semi.2018.15.004 MSC 20D40

ФАКТОРИЗАЦИИ ПРОСТЫХ НЕАБЕЛЕВЫХ ГРУПП ПОДГРУППАМИ НЕЧЕТНЫХ ИНДЕКСОВ

В.Н. ТЮТЯНОВ, Т.В. ТИХОНЕНКО

Abstract. Finite simple non-abelian groups factorized by subgroups of odd indixes were found in the paper.

Keywords: finite group, simple non-abelian group, factorized group, subgroups of odd indixes.

1. Введение

Строение конечной факторизуемой группы существенно зависит от строения сомножителей и способа их вложения в группу. Л.С. Казарин [1] установил, что конечная группа, факторизуемая двумя разрешимыми подгруппами нечетных индексов является разрешимой. В работе [2] показано, что если конечная неразрешимая группа G представима в виде произведения двух разрешимых подгрупп, индексы которых взаимно просты с 3, тогда простые неабелевы композиционные факторы группы G изоморфны $PSL_2(7)$.

Целью настоящей работы является нахождение конечных простых неабелевых групп, представимых в виде произведения двух подгрупп нечетных индексов. Доказан следующий результат.

Теорема 1. *Пусть $G = AB$ – простая неабелева группа, где A и B – собственные подгруппы группы G. Если $(|G : A|, 2) = (|G : B|, 2) = 1$, то $G \cong A_7$.*

Замечание. *Пусть N – любая простая неабелева группа, $r, t \notin \pi(N)$ и $r \neq t$. Рассмотрим группу $G = \langle x\rangle \times N \times \langle y\rangle$, где $\langle x\rangle \cong Z_r$, $\langle y\rangle \cong Z_t$. Тогда $G = AB$, где $A = \langle x\rangle \times N$, $B = N \times \langle y\rangle$ и $|G : A| = t$, $|G : B| = r$ – нечетные числа. Группа G содержит простой неабелев композиционный фактор, изоморфный*

Tyutyanov, V.N., Tihonenko, T.V., Factorizations of simple non-abelian groups by subgroups of odd indixes.

Поступила 21 июля 2017 г., опубликована 18 января 2018 г.

N. Это показывает, что композиционным фактором в непростой группе, удовлетворяющей условию теоремы, может быть любая простая неабелева группа.

2. Введение

Рассматриваются только конечные группы. Используемая терминология и обозначения в основном стандартны, их можно найти в [3-5]. Через n_2 будем обозначать наибольшую степень числа 2, делящую натуральное число n, (a, b) — наибольший делитель натуральных чисел a и b.

Нам потребуются следующие леммы.

Лемма 1 ([3], следствие 5). *Пусть G — A_n или S_n $(n \geq 5)$ и $G = AB$, где A и B — максимальные подгруппы в G не содержащие A_n. Тогда или*

(i) $A = (S_{n-k} \times S_k) \cap G$ для $1 \leq k \leq 5$, а B – k-однородная группа, или

(ii) $n = 6$, $A = PGL_2(5) \cap G$, а $B = (S_3 \wr S_2) \cap G$.

Лемма 2 ([5], XII. 6.2). *Если G — 2-однородная и $|G|$ — четное число, то G — 2-транзитивна.*

Лемма 3 ([5], XII. 6.7). *Пусть G — k-однородная группа степени n. Если $2k \leq n$, то G является $(k-1)$-однородной.*

Лемма 4 ([6], Теорема). *Пусть G — конечная группа, $soc(G) \cong A_n$, $n \geq 5$. Подгруппа H является максимальной подгруппой нечетного индекса в G тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) $G \geq S_n$, H — подгруппа вида $(S_m \times S_{n-m}) \cap G$, где $1 \leq m < n/2$ и $\psi(n) \geq \psi(m)$;

(2) $G \leq S_n$, H — подгруппа вида $(S_m \wr S_t) \cap G$, где $n = mt$, $t > 1$ и $m = 2^\omega \geq 2$, за исключением случая, когда $H \cong (S_2 \wr S_4) \cap A_8 \cong 2^3 : S_4 < 2^3 : PSL_3(2) < A_8 \cong G$;

(3) $G \cong A_7$ и $H \cong PSL_2(7)$;

(4) $G \leq Aut(A_6)$, G не содержится в S_6 и $H \in Syl_2(G)$;

(5) $G \cong A_8$ и $H \cong 2^3 : PSL_3(2)$.

3. Доказательство теоремы

1. G — простая группа лиевского типа.

Очевидно, что если группа G обладает факторизацией из формулировки теоремы, то она обладает факторизацией максимальными подгруппами нечетных индексов. Поэтому для групп лиевского типа будем рассматривать максимальные факторизации, приведенные в работе [3].

Отметим, что если G — группа лиевского типа над полем характеристики 2, которая удовлетворяет условию теоремы, то A и B будут параболическими подгруппами. Однако группа лиевского типа не допускает факторизации параболическими подгруппами. Поэтому всюду далее будем считать, что группы лиевского типа определены над полем нечетной характеристики.

Рассмотрим все случаи.

(1) G — исключительная группа лиевского типа.

Максимальные факторизации исключительных групп лиевского типа приведены в таблице 5 [3].

(a) $G \cong G_2(q)$, $q = 3^c$. В этом случае $G = AB$, где $A \in \{SL_3(q), SL_3(q)^{\cdot}2\}$, $B \in \{SU_3(q), SU_3(q)^{\cdot}2\}$. Имеют место равенства: $|G : SL_3(q)^{\cdot}2| = \frac{q^3+1}{2} = \frac{q+1}{2}(q^2 - q + 1)$ и $|G : SU_3(q)^{\cdot}2| = \frac{q^3-1}{2} = \frac{q-1}{2}(q^2 + q + 1)$. Так как $\frac{q+1}{2}$ – нечетное число, то $\frac{q+1}{2} = 2m + 1$. Отсюда следует, что $\frac{q-1}{2} = 2m$ – четное число. Противоречие с условием теоремы.

(b) $G \cong G_2(q)$, $q = 3^{2c+1}$. В этом случае $G = (SL_3(q)^{\cdot}2) \cdot^2 G_2(q) = (SL_3(q)) \cdot^2 G_2(q)$. При этом $|G :^2 G_2(q)| = q^3(q^3 - 1)(q + 1)$ – четное число. Таким образом, группа G не удовлетворяет условию теоремы.

(2) $G \cong U_n(q)$, $n \geq 3$.

Факторизации групп $U_n(q)$ приведены в таблицах 1, 3 [3].

Если n – нечетное число, то из таблицы 3 [3] следует, что $G \in \{U_3(3), U_3(5)\}$. Пусть $G \cong U_3(3)$. Так как $U_3(3) = L_2(7)P_1$ и $|G : L_2(7)| = 36$, то G не удовлетворяет условию теоремы. Если $G \cong U_3(5)$, то так как $U_3(5) = A_7P_1$ и $|G : A_7| = 50$, то G не удовлетворяет условию теоремы.

Пусть $n = 2m$. Из таблицы 1 [3] следует, что один из сомножителей всегда изоморфен N_1, причем $|U_{2m}(q) : N_1| = q^{2m-1}(q^{2m} - 1)/(q + 1)$. Так как $q^{2m} - 1$ делится на $q^2 - 1 = (q-1)(q+1)$, то $(q^{2m}-1)/(q+1)$ кратно $q-1$. Следовательно, $|U_{2m}(q) : N_1|$ – четное число, что противоречит условию теоремы. Из таблицы 3 [3] следует, что $U_4(3) = L_3(4)P_1 = L_3(4)PSp_4(3)$. Однако $|U_4(3) : L_3(4)| = 162$. Следовательно, унитарные группы не удовлетворяют условиям теоремы.

(3) $G \cong PSL_n(q)$, $n \geq 2$.

Из таблицы 1 [2] следует, что группа $PSL_(q)$ допускает факторизацию

$$PSL_n(q) = (^\wedge GL_a(q^b).b) \cdot B,$$

где $B \in \{P_1, P_{n-1}\}$, $n = ab$, b – простое число. Так как $|PSL_n(q) : P_1| = |PSL_n(q) : P_{n-1}| = \frac{q^n-1}{q-1}$, то при $n = 2k$ имеем, что $|PSL_n(q) : P_1| = |PSL_n(q) : P_{n-1}| = \frac{q^k-1}{q-1}(q^k + 1)$ – четное число, что невозможно. Следовательно, n является нечетным числом. Для $a = 1$ n – нечетное простое число и $|PSL_n(q) :^\wedge GL_1(q^n).n| = q^{\frac{n(n-1)}{2}}(q^{n-1} - 1)(q^{n-2} - 1)\dots(q - 1)/n$ – четное число, что невозможно. Значит $a \geq 3$, а поскольку n нечетно, то $b \geq 3$. Так как $|PSL_n(q)| = \frac{1}{(n,q-1)}q^{\frac{n(n-1)}{2}}(q^n - 1)(q^{n-1} - 1)\dots(q^2 - 1)$, то $|PSL_n(q)|_2 = ((q^n - 1)(q^{n-1} - 1)\dots(q^2-1))_2$. Далее, $|GL_a(q^b).b| = q^{\frac{ab(a-1)}{2}}(q^{ba}-1)(q^{b(a-1)}-1)\dots(q^{b\cdot 2}-1)(q^b - 1)\cdot b = q^{\frac{n(a-1)}{2}}(q^n-1)(q^{n-b}-1)(q^{n-2b}-1)\dots(q^{n-(n-2b)}-1)(q^{n-(n-b)}-1).b$. Следовательно, $|GL_a(q^b).b|_2 = ((q^n-1)(q^{n-b}-1)(q^{n-2b}-1)\dots(q^{n-(n-2b)}-1)(q^{n-(n-b)} - 1))_2$. Поскольку $b \geq 3$ и $a \geq 3$, то

$$|PSL_n(q)|_2/|GL_a(q^b).b|_2 = 2^t \geq 2.$$

Отсюда следует, что $|PSL_n(q) :^\wedge GL_a(q^b).b)|$ четное число, что невозможно.

Из таблицы 1 [3] следует, что $PSL_n(q) = PSp_n(q)B$, где $B \in \{P_1, P_{n-1}\}$, $n \geq 4$ и $n = 2k$. В этом случае $|PSL_n(q) : P_1| = |PSL_n(q) : P_{n-1}| = \frac{q^n-1}{q-1} = \frac{q^k-1}{q-1}(q + 1)$ – четное число, что невозможно.

Из таблицы 3 [3] следует, что $PSL_2(q) = P_1A_5$ для $q = 11, 19, 29, 59$ и $PSL_2(q) = P_1S_4$ для $q = 7, 23$. Во всех случаях $|PSL_2(q) : P_1| = q + 1$ – четное число, что невозможно.

(4) $G \cong PSp_{2m}(q)$, $m \geq 2$.

Факторизации групп $PSp_{2m}(q)$ приведены в таблицах 1, 3 [3]. Из таблицы 1 [3] следует, что $PSp_{2m}(q) = (PSp_{2a}(q^b).b)P_1$, где $ab = m$, b – простое число. Поскольку $|PSp_{2m}(q) : P_1| = \frac{q^{2m}-1}{q-1} = \frac{q^m-1}{q-1}(q^m + 1)$ – четное число, то этот случай невозможен.

Из таблицы 3 [3] следует, что $PSp_4(3) = (2^4_{\cdot}A_5)B$, где $B \in \{P_1, P_2\}$ и

$$PSp_6(3) = PSL_2(13)P_1.$$

Во всех факторизациях параболические подгруппы имеют четный индекс, что невозможно.

(5) $G \cong \Omega_{2l+1}(q)$, $l \geq 3$.

Факторизации групп $\Omega_{2l+1}(q)$ приведены в таблицах 1-3 [3]. Из таблицы 1 [3] следует, что $\Omega_{2l+1}(q) = N_1^- P_l$. Так как $|\Omega_{2l+1}(q) : P_l| = \prod\limits_{i=1}^{l}(q^i + 1)$ — четное число, то G не удовлетворяет условиям теоремы. Из таблицы 2 [3] имеем, что $\Omega_7(q) = G_2(q)P_1 = G_2(q)N_1^{\varepsilon}$, где $\varepsilon = \pm$. В этом случае

$$|\Omega_7(q) : G_2(q)| = \frac{q^3(q^4 - 1)}{2} = \frac{q^3(q^2 - 1)(q^2 + 1)}{2}$$

является четным числом и G не удовлетворяет условию теоремы. Для групп $\Omega_{13}(3^l)$ и $\Omega_{25}(3^l)$ имеются соответственно факторизации

$$\Omega_{13}(3^l) = (PSp_6(3^l)^{\cdot}a)N_1^-,$$

где $a \leq 2$, и $\Omega_{25}(3^l) = F_4(3^l)N_1^-$. Так как $|\Omega_{13}(3^l) : PSp_6(3^l)|$ и $|\Omega_{25}(3^l) : F_4(3^l)|$ являются четными числами, то приходим к противоречию.

Из таблицы 3 [3] следует, что $\Omega_7(3) = G_2(3)Sp_6(3) = G_2(3)S_9 = S_9N_1^+ = S_9P_3 = Sp_6(2)N_1^+ = Sp_6(2)P_3 = (2^6_{\cdot}A_7)P_3$. Так как индексы подгрупп $G_2(3)$, S_9, N_1^+, P_3 в $\Omega_7(3)$ являются нечетными числами [4], то группа $\Omega_7(3)$ не имеет факторизаций подгруппами, удовлетворяющими условию теоремы.

(6) $G \cong P\Omega_{2m}^+(q)$, $m \geq 5$.

Факторизации групп $P\Omega_{2m}^+(q)$ приведены в таблицах 1, 2, 4 [3]. Из таблицы 1 [3] следует, что группа $P\Omega_{2m}^+(q)$ допускает следующие факторизации.

(a) $P\Omega_{2m}^+(q) = N_1B$, где $B \in \{P_m, P_{m-1}\}$. Так как

$$|P\Omega_{2m}^+(q) : P_m| = |P\Omega_{2m}^+(q) : P_{m-1}| = (q^{m-1} + 1)(q^{m-2} + 1)\dots(q + 1)$$

является четным числом, то данный случай невозможен.

(b) $P\Omega_{2m}^+(q) = N_1(\hat{}GU_m(q).2$, где $m = 2t$ – четное число. Так как $|P\Omega_{2m}^+(q) : N_1| = \frac{1}{2}q^{m-1}(q^m-1) = \frac{1}{2}q^{m-1}(q^t-1)(q^t+1)$ является четным числом, то данный случай невозможен.

(c) $P\Omega_{2m}^+(q) = N_1(PSp_2(q) \bigotimes PSp_m(q))$, где $m = 2t$ – четное число. Противоречие получается так же как в случае (b),

(d) $P\Omega_{2m}^+(q) = N_2^- B$, где $B \in \{P_m, P_{m-1}\}$. Данный случай рассматривается как (a).

(e) $P\Omega_{2m}^+(q) = P_1(\hat{}GU_m(q).2)$, где $m = 2t$ – четное число. В этом случае $|P\Omega_{2m}^+(q) : P_1| = (q^{m-1} + 1)(q^m - 1)/(q - 1)$ – четное число, что невозможно.

Из таблицы 2 [3] следует, что $P\Omega_{16}^+(q) = (\Omega_9(q).a)N_1$, где $a \leq 2$. Данный случай рассматривается как (b).

В таблице 4 [3] приведены факторизации группы $P\Omega_8^+(q)$. В каждой такой факторизации в качестве одного из сомножителей встречается группа $\Omega_7(q)$,

P_1, P_2, P_3. Так как $|P\Omega_8^+(q):\Omega_7(q)| = \frac{q^3(q^4-1)}{2}$ и $|P\Omega_8^+(q):P_i| = \frac{(q^3+1)((q^4-1)}{q-1}$ – четные числа, то приходим к противоречию.

В таблице 4 [3] указаны факторизации группы $P\Omega_8^+(3)$.

$$P\Omega_8^+(3) = \Omega_8^+(2)\Omega_7(3) = \Omega_8^+(2)B,$$

где $B \in \{P_1, P_3, P_4\}$. Противоречие получается как в предыдущем пункте.

(7) $G \cong P\Omega_{2m}^-(q)$, $m \geq 4$.

Из таблицы 1 [3] следует, что $P\Omega_{2m}^-(q) = P_1(\hat{\ }GU_m(q)) = N_1(\hat{\ }GU_m(q))$, где m – нечетное число. Имеем: $|P\Omega_{2m}^-(q)| = \frac{1}{(4,q^m+1)}q^{m(m-1)}\ (q^m+1)\prod\limits_{i=1}^{m-1}(q^{2i}-1)$ $= \frac{1}{(4,q^m+1)}q^{m(m-1)}(q^m+1)(q^{m-1}-1)(q^{m-1}+1)q^{m-2}-1)(q^{m-2}+1)\dots(q-1)(q+1)$ и $|GU_m(q)| = q^{\frac{m(m-1)}{2}}(q^m+1)(q^{m-1}\dots(q^2-1)(q+1)$. Тогда $|P\Omega_{2m}^-(q):GU_m(q)| = \frac{1}{(4,q^m+1)}q^{\frac{m(m-1)}{2}}(q^{m-1}+1)(q^{m-2}-1)\dots(q-1)$ является четным числом, поскольку $m \geq 4$. Следовательно, $|P\Omega_{2m}^-(q) :\hat{\ } GU_m(q)|$ – четное число, что невозможно.

2. $G \cong A_n$, $n \geq 5$, $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$.

Если $n = 5$, то $G \cong PSL_2(5)$, при $n = 6$ группа $G \cong PSL_2(9)$. Оба эти случая были рассмотрены в пункте 1. Если $n = 7$, то $A_7 = PSL_2(7)A_6$ удовлетворяет условию теоремы. Если $n = 8$, то так как A_8 изоморфна $SL_4(2)$, то лиевская группа характеристики 2 факторизуется двумя параболическими подгруппами, что невозможно. Пусть $n = 9$. Группа A_9 содержит в точности один класс сопряженных максимальных подгрупп нечетного индекса, изоморфных A_8 [4]. Поэтому A_9 не допускает нужной факторизации. Таким образом, $n \geq 10$.

Так как $n \geq 10$, то выполняется пункт (i) леммы 1. Пусть сначала $k = 1$. В этом случае $A \cong (S_{n-1} \times S_1) \cap A_n = A_{n-1}$ стабилизатор токи на Ω. Так как $|A_n : A_{n-1}| = n$, то n – нечетное число. Подгруппа B является 1-однородной, а значит транзитивной на Ω. Из леммы 4 следует, что $B \cong (S_m \times S_t) \cap A_n$, где $n = mt$, $t > 1$ и $m = 2^\omega \geq 2$. Противоречие с тем, что n является нечетным числом.

Пусть $k = 2$. В этом случае B – 2-однородная. По лемме 2 B является 2-транзитивной, а значит примитивной на Ω. С другой стороны, из леммы 4 следует, что B импримитивна на Ω. Противоречие.

Пусть $k \geq 3$. Так как $2k \leq 10$, то по лемме 3 B – 2-однородная, а значит 2-транзитивна на Ω. Как и выше получаем противоречие.

3. G – спорадическая группа.

Полный перечень факторизаций простых спорадических групп приведен в таблицах 1, 2 [7]. Простое вычисление индексов сомножителей показывает, что по крайней мере один из них является четным числом. Последнее противоречит условию теоремы.

References

[1] L.S. Kazarin, *Factorizations of finite groups by solvable subgroups*, Ukrainian Math. J., **34**:7–8 (1991), 947–950. MR1148849

[2] V.N. Tyutyanov, *The product of two solvable subgroups of* $3'$ *indixes*, Problems of physics, mathematics and technics, **4** (2012), 70–73. Zbl 1299.20035

[3] M.W. Liebeck, C.E. Praeger, J. Saxl, *The factorizations of the finite simple groups and their automorphism groups*, Mem. Amer. Math. Soc., **86**:432 (1990), 1–151. MR1016353

[4] J.H. Conway, R.T. Curtis, S.P. Norton, R.A. Parker, R.A. Wilson, *Atlas of finite groups*, Oxford: Clarendon Press, 1985. MR0827219

[5] B. Huppert, N. Blackburn, *Finite Groups III*, Springer Verlag. Berlin Heidelberg New York, 1982. MR0662826

[6] N. V. Maslova, *Classification of maximal subgroups of an odd index in finite groups with an alternating socle*, Trudy Inst. Mat. Mekh., **16** (2010), 182–184.

[7] M. Giuduci, *Factorisations of sporadic simple groups* , J. Algebra, **304** (2006), 311–323.

Valentin Nikolaevich Tyutyanov
Gomel Branch of International University «MITSO»,
pr. Oktyabrya, 46-a,
246746, Gomel, Belarus
E-mail address: tyutyanov@front.ru

Tatyana Vladimirovna Tihonenko
Sukhoi State Technical University of Gomel,
pr. Oktyabrya, 48,
246746, Gomel, Belarus
E-mail address: tanyatihonenko@rambler.ru