

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Автоматизированный электропривод»

В. С. Захаренко

МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЭЛЕКТРОПРИВОДЕ

КУРС ЛЕКЦИЙ

**для студентов специальности 1-53 01 05
«Автоматизированные электроприводы»
дневной и заочной формы обучения**

Гомель 2010

УДК 62-83-52:004.94(075.8)
ББК 31.291я73
3-38

*Рекомендовано научно-методическим советом
факультета автоматизированных и информационных систем
ГГТУ им. П. О. Сухого
(протокол № 10 от 28.06.2010 г.)*

Рецензент: канд. физ.мат. наук, доц. каф. «Информационные технологии»
ГГТУ им. П. О. Сухого *Е. Г. Стародубцев*

Захаренко, В. С.
3-38 Моделирование в электроприводе : курс лекций для студентов специальности 1-53 01 05 «Автоматизированные электроприводы» днев. и заоч. форм обучения / В. С. Захаренко. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2010. – 83 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: <http://lib.gstu.local>. – Загл. с титул. экрана.

Изложен теоретический курс дисциплины «Моделирование в электроприводе». Рассмотрены методы численного решения систем дифференциальных уравнений, модели элементов и систем автоматического управления электроприводами.

Для студентов специальности 1-53 01 05 «Автоматизированные электроприводы» дневной и заочной форм обучения.

УДК 62-83-52:004.94(075.8)
ББК 31.291я73

© Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого», 2010

Введение

Цель курса – ознакомиться и научиться применять методы математического моделирования для исследования электроприводов.

Моделирование – процесс изучения свойств объекта путем изучения свойств другого, более удобного для исследования объекта, находящегося в некоторой степени подобия с первым объектом.

Модель – объект, более удобный для изучения, свойства которого в определенной степени соответствуют свойствам реального объекта.

Физическая модель – физический макет моделируемого объекта.

Математическая модель – система уравнений, описывающих взаимосвязь характеристик и параметров объекта и отражающая физические процессы, происходящие в объекте.

В зависимости от того, какого типа модель используется, моделирование может быть физическим или математическим.

Характеристики объекта (например, сопротивление резистора) представляются в математических моделях в виде коэффициентов. Параметры – в виде переменных. Параметры делятся на входные воздействия и внутренние. Входные воздействия характеризуют воздействие на объект извне и подразделяются на управляющие воздействия (те, которые можно тем или иным способом искусственно изменять) и возмущения (искусственно изменять которые нельзя). Внутренние параметры определяются физическими процессами, происходящими в объекте, и зависят от входных воздействий и друг от друга между собой.

В данной дисциплине будет рассматриваться исследование динамических свойств систем автоматического управления электроприводами и их элементов с помощью математического моделирования. Т.о. под моделированием в дальнейшем будем понимать расчет динамических характеристик, т.е. зависимостей параметров от времени, с помощью средств математического моделирования. Под моделью будем понимать математическую модель в одной из двух форм представления – система уравнений или структурная схема.

Большинство систем автоматического управления электроприводами описываются смешанными нелинейными системами дифференциальных и алгебраических уравнений высокого порядка. В связи с этим при синтезе систем автоматического управления прибегают к целому ряду упрощений:

1. Пренебрежение некоторыми физическими явлениями.
2. Линеаризация.
3. Понижение расчетного порядка.

В связи с этим, после завершения синтеза системы автоматического управления необходимо проверить соответствие полученных динамических характеристик требованиям при, как можно меньшем количестве упрощений.

1. Математическое моделирование

Математическое моделирование осуществляется на цифровых и аналоговых вычислительных машинах. На аналоговых вычислительных машинах дифференциальные уравнения представляются с помощью операционных усилителей и RC-цепочек, а реле, устройства дискретной автоматики – в натуральном виде. Достоинствами аналоговых вычислительных машин являются:

1. Быстродействие.
2. Наглядность влияния параметров на процессы.

Недостатки:

1. Ограничение на порядок решаемой системы.
2. Низкая точность.
3. Долгая подготовка.

На цифровых вычислительных машинах моделирование осуществляется путем численного решения дифференциальных уравнений. При этом временной интервал разбивается на N равных отрезков, длина которых Δt называется шагом расчета. Т.о. значение времени на i -ом шаге расчета равно $t_i = \Delta t \cdot i$. Обозначим значения входного воздействия и внутренней переменной модели в момент времени t_i соответственно $x_i = x(t_i)$ и $y_i = y(t_i)$.

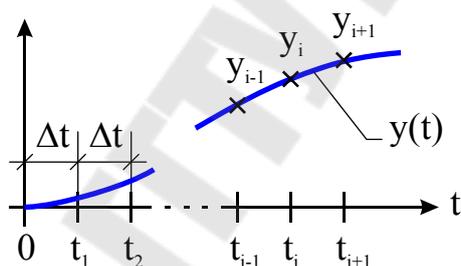


Рис. 1.1.

Для системы из M уравнений необходимо работать с вектором переменных

$$Y_i = (y_1, y_2, \dots, y_j, \dots, y_M)_i.$$

Численное решение дифференциальных уравнений заключается в расчете значений переменных на текущем шаге Y_i по значениям переменных модели на других шагах расчета. Фактически производится численное интегрирование функций, соответствующих правым частям дифференциальных уравнений, записанных в форме Коши.

$$\frac{dy_j}{dt} = f_j(t, X, Y);$$
$$y_j(t) = \int_0^t f_j(t, X, Y) \cdot dt.$$

Моделирование на цифровых вычислительных машинах осуществляется в соответствии с одним из двух принципов:

1. По системе уравнений.
2. Структурное моделирование (моделирование по структурной схеме).

При моделировании по системе уравнений на основании системы составляется подпрограмма расчета производных переменных. На основании выбранного численного метода решения дифференциальных уравнений составляется подпрограмма расчета значений переменных на текущем шаге Y_i . Данная подпрограмма вызывает подпрограмму расчета производных. В программе реализуется цикл по шагам расчета, внутри которого рассчитываются значения переменных на текущем шаге путем вызова подпрограммы реализации численного метода и выводится результат расчета.

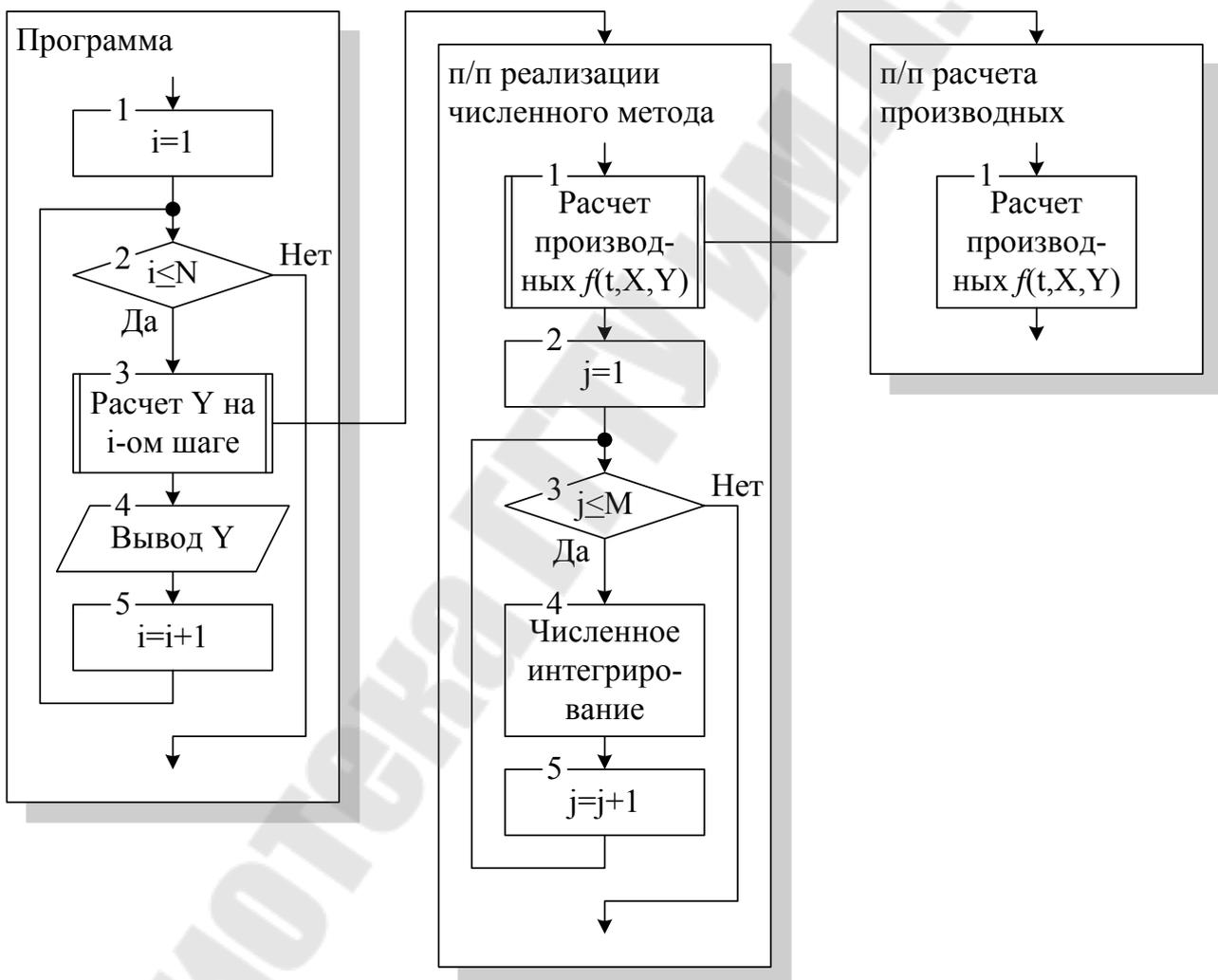


Рис. 1.2. Структура программы при моделировании по системе дифференциальных уравнений.

При структурном моделировании для всех типов звеньев, входящих в состав модели, на основании выбранного численного метода и уравнения, описывающего звено, составляются подпрограммы для определения значения выходного сигнала звена. По структурной схеме модели составляется

подпрограмма расчета значений переменных на текущем шаге Y_i . Эта подпрограмма в порядке следования сигналов в модели вызывает подпрограммы звеньев. Сама программа выполняется аналогично моделированию по системе уравнений.

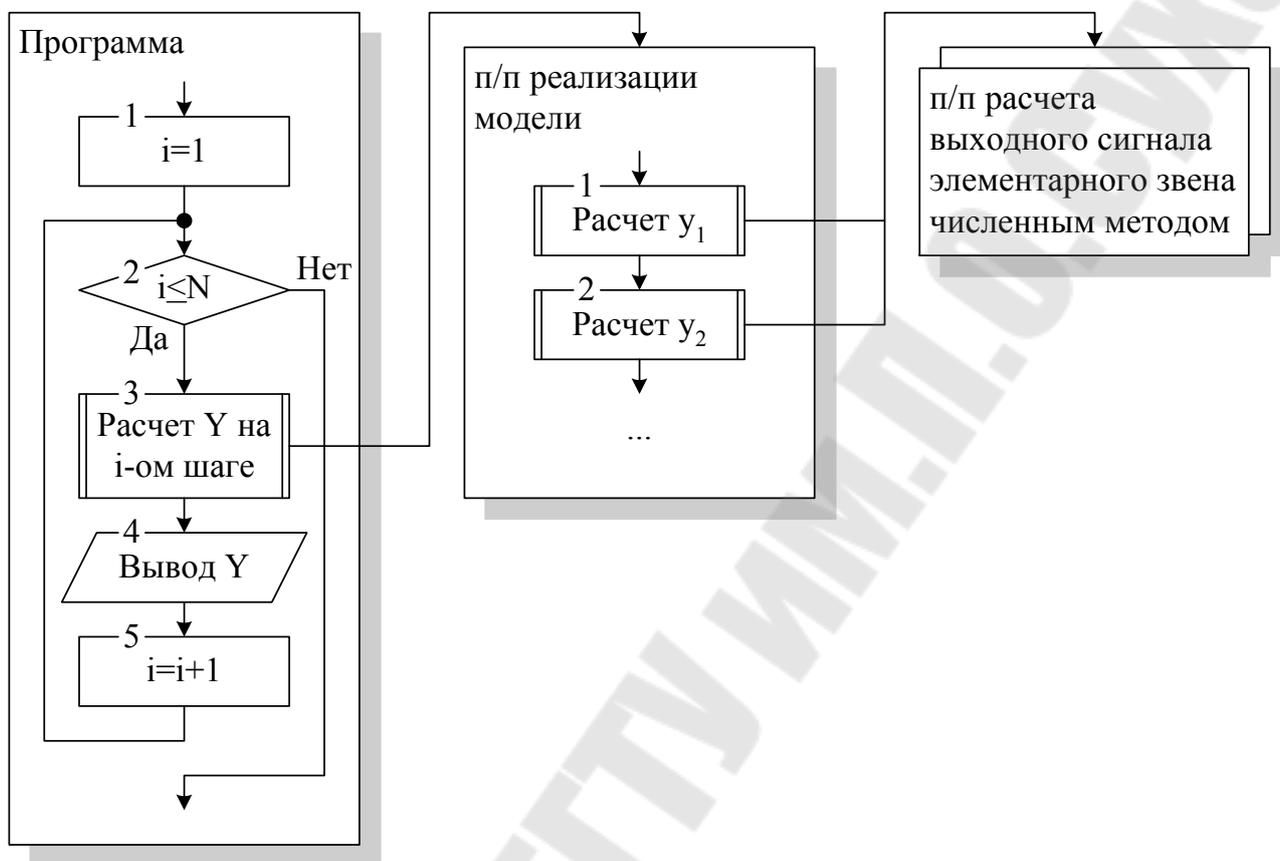


Рис. 1.3. Структура программы при структурном моделировании.

1.1. Классификация математических моделей

Математические модели могут быть представлены в одной из следующих форм:

1. В канонической форме математические модели являются смешанной системой дифференциальных и алгебраических уравнений, полученных непосредственным применением основных законов электромеханики.
2. В неявной форме дифференциальные уравнения отделены от алгебраических путем подстановки алгебраических в дифференциальные. Алгебраические уравнения в данном случае служат для получения промежуточных переменных модели.
3. В форме Коши дифференциальные уравнения отделены от алгебраических и разрешены относительно производных. Т.е. левая часть уравнения содержит только производную сигнала, для которого записано уравнение, а правая часть уравнения не содержит производной этого сигнала.

По наличию нелинейностей модели делятся на:

1. Линейные – модели, у которых все коэффициенты являются константами, отсутствуют произведения переменных и функции \sin , \cos , sign , и др.

2. Кусочно-линейные – имеющие в своем составе звено или несколько, с кусочно-линейной характеристикой.
3. Нелинейные – имеющие в своем составе гладкие (произведение переменных, функции \sin , \cos и др.) и негладкие нелинейности.

По стационарности модели делятся на 2 вида:

1. Стационарные модели – те, у которых коэффициенты не зависят от значения переменных и времени.
2. Нестационарные – имеющие хотя бы один параметр, зависящий от значения какой-либо переменной или времени (исключая нелинейные статические характеристики, т.е. зависимость коэффициента передачи звена от величины его входной переменной).

По жесткости модели делятся на нежесткие и жесткие. Пусть динамический процесс описывается функцией вида

$$a_1 \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + a_2 \cdot e^{-\frac{t}{T_2}} + \dots + a_N \cdot e^{-\frac{t}{T_N}} = \sum_{i=1}^N a_i \cdot e^{-\frac{t}{T_i}}.$$

Тогда введем понятие коэффициента жесткости, который будет равен отношению максимальной и минимальной постоянных времени экспонент

$$K_{\text{ж}} = \frac{T_{\text{MAX}}}{T_{\text{MIN}}}.$$

Жесткие модели имеют коэффициент жесткости $K_{\text{ж}} \gg 1$.

По жестко-колебательности модели делятся на нежестко-колебательные и жестко-колебательные. Пусть динамический процесс описывается функцией вида

$$a_1 \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} \cdot \sin(\omega_1 \cdot t + \varphi_1) + a_2 \cdot e^{-\frac{t}{T_2}} \cdot \sin(\omega_2 \cdot t + \varphi_2) + \dots + \\ + a_N \cdot e^{-\frac{t}{T_N}} \cdot \sin(\omega_N \cdot t + \varphi_N) = \sum_{i=1}^N a_i \cdot e^{-\frac{t}{T_i}} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T_{K_i}} \cdot t + \varphi_i\right).$$

Тогда введем понятие коэффициента жестко-колебательности, который будет равен максимальному отношению постоянной времени затухания к периоду колебаний

$$K_{\text{жк}} = \max\left(\frac{T}{T_K}\right).$$

Жестко-колебательные модели имеют коэффициент жестко-колебательности $K_{\text{жк}} > 1$.

1.2. Классификация методов численного решения систем дифференциальных уравнений

Численные методы решения систем дифференциальных уравнений основаны на вычислении значений переменных математической модели $Y = \{y_j\}$, $j=1,2,\dots,M$ на шаге расчета i по значениям Y на других шагах расчета по алгоритму, имеющему в общем случае вид

$$Y_i = f(Y_{i-q}, \dots, Y_{i-1}, \dots, Y_{i-1+s}).$$

По количеству шагов методы делятся на:

1. Одношаговые. $q = 0$, $0 \leq s \leq 1$. Т.е. используются значения переменных модели на предыдущем и текущем шагах расчета.
2. Многошаговые. $q \geq 1$ и (или) $s > 1$. Используются значения переменных на шагах расчета более ранних, чем предыдущий и (или) более поздних, чем текущий. Многошаговые методы делятся на:
 - 2.1. Явные. $s = 0$. Т.е. нет предварительного “прогноза”.
 - 2.2. Неявные. $s > 0$. Есть предварительный “прогноз” значений Y с помощью какого-либо одношагового метода.

Важным показателем численных методов является порядок точности. Численный метод имеет порядок точности p если значение ошибки расчета $\delta = Y_{\text{ДЕЙСТВ.}} - Y_{\text{РАСЧ.}}$ пропорционально величине Δt^{p+1} .

Также методы характеризуются количеством стадий m , которое равно количеству выполнения вычислений правых частей дифференциальных уравнений (производных).

1.3. Методы численного решения систем дифференциальных уравнений

Метод Эйлера

Основан на разложении искомой функции в ряд Тейлора

$$y(t + \Delta t) - y(t) = \Delta y = \frac{y'(t)}{1!} \cdot \Delta t + \frac{y''(t)}{2!} \cdot \Delta t^2 + \frac{y'''(t)}{3!} \cdot \Delta t^3 + \dots$$

При этом члены ряда второго порядка и выше отбрасываются. Тогда

$$\begin{aligned} y(t + \Delta t) - y(t) &= y'(t) \cdot \Delta t; \\ y(t + \Delta t) &= y(t) + y'(t) \cdot \Delta t. \end{aligned}$$

Отсюда расчетное соотношение метода

$$Y_i = Y_{i-1} + \Delta t \cdot f_{i-1}, \quad (1.1)$$

где $f_{i-1} = f(t_{i-1}, X(t_{i-1}), Y_{i-1})$.

Данный метод одношаговый. Порядок точности $p = 1$. Количество стадий $m = 1$.

Усовершенствованный метод Эйлера

$$\begin{aligned}
 Y_i^{(1)} &= Y_{i-1} + \Delta t \cdot f_{i-1}, \\
 Y_i^{(2)} &= Y_{i-1} + \frac{\Delta t}{2} \cdot (f_{i-1} + f_i^{(1)}),
 \end{aligned}
 \tag{1.2}$$

где $f_i^{(1)} = f(t_i, X(t_i), Y_i^{(1)})$.

Здесь и далее верхний индекс будет обозначать номер итерации, причем (v) – текущая итерация, $(v-1)$ – предыдущая.

Метод одношаговый, $p = 2$, $m = 2$.

Метод Рунге-Кутты

$$\begin{aligned}
 Y_{i-0,5}^{(1)} &= Y_{i-1} + \frac{\Delta t}{2} \cdot f_{i-1}, \\
 Y_{i-0,5}^{(2)} &= Y_{i-1} + \frac{\Delta t}{2} \cdot f_{i-0,5}^{(1)}, \\
 Y_i^{(1)} &= Y_{i-1} + \Delta t \cdot f_{i-0,5}^{(2)}, \\
 Y_i^{(2)} &= Y_{i-1} + \frac{\Delta t}{6} \cdot (f_{i-1} + 2 \cdot f_{i-0,5}^{(1)} + 2 \cdot f_{i-0,5}^{(2)} + f_i^{(1)}),
 \end{aligned}
 \tag{1.3}$$

где

$$f_{i-0,5}^{(1)} = f\left(t_i - \frac{\Delta t}{2}, X\left(t_i - \frac{\Delta t}{2}\right), Y_{i-0,5}^{(1)}\right), \quad f_{i-0,5}^{(2)} = f\left(t_i - \frac{\Delta t}{2}, X\left(t_i - \frac{\Delta t}{2}\right), Y_{i-0,5}^{(2)}\right).$$

Метод одношаговый, $p = 4$, $m = 4$.

Неявный метод Эйлера

$$Y_i^{(v)} = Y_{i-1} + \Delta t \cdot f_i^{(v-1)}.
 \tag{1.4}$$

Метод одношаговый, $p = 1$, $m \geq 2$.

Метод Адамса-Бэшифорта

$$Y_i = Y_{i-1} + \frac{\Delta t}{2} \cdot (3 \cdot f_{i-1} - f_{i-2}).
 \tag{1.5}$$

Многошаговый, явный, $p = 2$, $m = 1$.

Метод Адамса-Мултона

$$\begin{aligned}
 Y_i^{(1)} &= Y_{i-1} + \frac{\Delta t}{24} \cdot (55 \cdot f_{i-1} - 59 \cdot f_{i-2} + 37 \cdot f_{i-3} - 9 \cdot f_{i-4}), \\
 Y_i^{(2)} &= Y_{i-1} + \frac{\Delta t}{24} \cdot (9 \cdot f_i^{(1)} + 19 \cdot f_{i-1} - 5 \cdot f_{i-2} + f_{i-3}),
 \end{aligned}
 \tag{1.6}$$

Многошаговый, явный, $p = 4$, $m = 2$.

Метод Хэмминга

$$\begin{aligned} Y_i^{(1)} &= Y_{i-4} + \frac{4}{3} \cdot \Delta t \cdot (2 \cdot f_{i-1} - f_{i-2} + 2 \cdot f_{i-3}), \\ Y_i^{(2)} &= Y_i^{(1)} + \frac{112}{121} \cdot (Y_{i-1} - Y_{i-1}^{(1)}), \\ Y_i^{(v)} &= \frac{1}{8} \cdot (9 \cdot Y_{i-1} - Y_{i-3}) + \frac{3}{8} \cdot \Delta t \cdot (f_i^{(v-1)} + 2 \cdot f_{i-1} - f_{i-2}). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Многошаговый, явный, $m \geq 3$.

Метод Башарина

$$Y_i^{(v)} = Y_{i-1} + \Delta t \cdot f\left(t_i - \frac{\Delta t}{2}, X\left(t_i - \frac{\Delta t}{2}, \frac{Y_{i-1} + Y_i^{(v-1)}}{2}\right)\right). \quad (1.8)$$

Одношаговый, $p = 2$, $m \geq 2$.

1.4. Пример моделирования простейшей системы

Рассмотрим пример программы для простейшей системы, представленной на рис. 1.4.

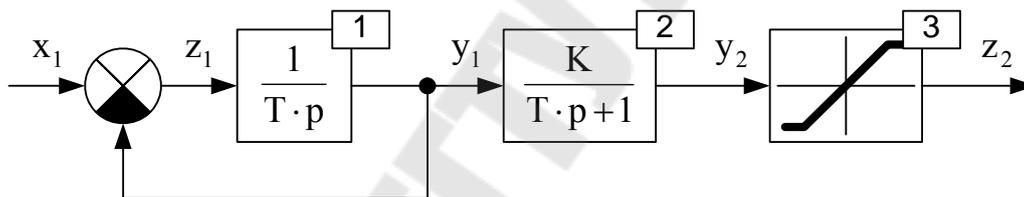


Рис. 1.4. Система для примера программы.

Обозначим переменные: x_1 – входное воздействие, z_1 – выходной сигнал вычитателя, y_1 – сигнал на выходе интегратора, y_2 – выходная переменная апериодического звена, z_2 – сигнал на выходе звена с ограничением. В программе переменные будут храниться в соответствующих элементах массивов с соответствующим названием.

Составим систему уравнений

$$\begin{cases} z_1 = x_1 - y_1, \\ y_1 = \frac{1}{T_1 \cdot p} \cdot z_1, \\ y_2 = \frac{K_2}{T_2 \cdot p + 1} \cdot y_1, \\ z_2 = \begin{cases} K_3 \cdot y_2 & \text{при } -y_{03} < K_3 \cdot y_2 < y_{03}, \\ y_{03} & \text{при } K_3 \cdot y_2 > y_{03}, \\ -y_{03} & \text{при } K_3 \cdot y_2 < -y_{03}, \end{cases} \end{cases}$$

где: T_1 – постоянная времени интегратора;
 K_2, T_2 – коэффициент передачи и постоянная времени апериодического звена;
 K_3, y_{03} – коэффициент передачи и уровень ограничения нелинейного звена.

Приведем уравнения для динамических звеньев к форме Коши

$$\begin{aligned} p \cdot y_1 &= \frac{1}{T_1} \cdot z_1; \\ \frac{dy_1}{dt} &= \frac{1}{T_1} \cdot z_1; \\ (T_2 \cdot p + 1) \cdot y_2 &= K_2 \cdot y_1; \\ T_2 \cdot p \cdot y_2 + y_2 &= K_2 \cdot y_1; \\ T_2 \cdot p \cdot y_2 &= K_2 \cdot y_1 - y_2; \\ \frac{dy_2}{dt} &= \frac{K_2 \cdot y_1 - y_2}{T_2}. \end{aligned}$$

Получим

$$\begin{cases} z_1 = x_1 - y_1, \\ \frac{dy_1}{dt} = \frac{z_1}{T_1}, \\ \frac{dy_2}{dt} = \frac{K_2 \cdot y_1 - y_2}{T_2}, \\ z_2 = \begin{cases} K_3 \cdot y_2 & \text{при } -y_{03} < K_3 \cdot y_2 < y_{03}, \\ y_{03} & \text{при } K_3 \cdot y_2 > y_{03}, \\ -y_{03} & \text{при } K_3 \cdot y_2 < -y_{03}. \end{cases} \end{cases}$$

По полученной системе уравнений составим подпрограмму расчета правых частей дифференциальных уравнений и значений переменных, для которых имеются алгебраические уравнения.

Program Example;

Type

DArray = **array** [1..10] **of** double;

Для того чтобы, была возможность передавать в подпрограммы массивы в качестве параметров необходимо объявить тип DArray.

Var

Y, Yp, Z, {Переменные модели}
 lK, lT, ly0, xm: DArray; {Параметры звеньев и входных воздействий}
 tk, dt, t: double; {Интервал и шаг расчета, текущее время}

i, {Счетчик – номер шага расчета}
N: integer; {Количество шагов расчета}
f: text; {Файл вывода}
filename: **string**; {Имя файла}

Таблица 1.1.

Назначение глобальных переменных программы.

Имя переменной	Назначение
Y, Yp	Значения переменных модели, для которых записаны дифференциальные уравнения на текущем и предыдущем шагах расчета соответственно (Y_i и Y_{i-1}).
Z	Значения переменных модели, для которых записаны алгебраические уравнения.
IK, IT, ly0	Параметры звеньев: коэффициенты передачи, постоянные времени, уровни ограничения.
xm	Амплитуда входных воздействий.
tk, dt	Интервал и шаг расчета.
t	Текущее время (соответствующее текущему шагу расчета).
i	Счетчик – номер шага расчета.
N	Количество шагов расчета.
f	Текстовый файл для ввода исходных данных и вывода результатов расчета.
filename	Имя файла.

{Расчет значений входных воздействий}

```

Procedure cX(t: double; var x: DArray);
begin
  if t >= 0 then x[1] := xm[1]
  else x[1] := 0;
end;

```

{Расчет значений правых частей дифференциальных уравнений и расчет переменных по алгебраическим уравнениям}

```

Procedure cF(Y: DArray; t: double; var Z, F: DArray);
var
  x: DArray; {Значения входных воздействий}
begin
  cX(t, x);
  Z[1] := x[1] - Y[1]; {Вычитатель}
  F[1] := Z[1]/lT[1]; {Интегратор}
  F[2] := (lK[2]*Y[1] - Y[2])/lT[2]; {Апериодическое звено}
  Z[2] := lK[3]*Y[2]; {Звено с ограничением}
  if Z[2] > ly0[3] then Z[2] := ly0[3]
  else if Z[2] < -ly0[3] then Z[2] := -ly0[3];
end;

```

{Подпрограмма реализации метода Эйлера – расчет переменных модели на текущем шаге}

```

Procedure cY(Yp: DArray; t, dt: double; var Y, Z: DArray);
var
  F: DArray; {Производные (значения правых частей уравнений)}
  j: integer; {Счетчик – номер уравнения}

```

```

begin
  cF(Yp, t-dt, Z, F); {Расчет производных}
  for j := 1 to 2 do {Расчет значений на текущем шаге}
    Y[j] := Yp[j] + dt*F[j];
  end;

  {Подпрограмма ввода исходных данных}
  Procedure pIn;
begin
  write( 'Введите имя файла ввода ');
  readln(filename);
  assign(f, filename);
  reset(f);
  write( 'Введите имя файла вывода ');
  readln(f, filename);
  write( 'Введите величину скачка X1 ');
  readln(f, xm[1]);
  write( 'Введите постоянную времени интегратора T1 ');
  readln(f, lT[1]);
  write( 'Введите коэффициент передачи апериодического звена K2 ');
  readln(f, lK[2]);
  write( 'Введите постоянную времени апериодического звена T2 ');
  readln(f, lT[2]);
  write( 'Введите коэффициент передачи звена с ограничением K3 ');
  readln(f, lK[3]);
  write( 'Введите уровень ограничения y03 ');
  readln(f, ly0[3]);
  write( 'Введите интервал расчета ');
  readln(f, tk);
  write( 'Введите шаг расчета ');
  readln(f, dt);
  close(f);
end;

Begin
  pIn; {Ввод исходных данных}
  assign(f, filename); {Открытие файла вывода}
  rewrite(f);
  fillchar(Y, sizeof(Y), 0); {Задание нулевых начальных условий}
  fillchar(Yp, sizeof(Yp), 0);
  fillchar(Z, sizeof(Z), 0);
  t := 0;

  writeln(f, t:13:5, Y[1]:13:5, Y[2]:13:5, Z[2]:13:5);
  N := round(tk/dt); {Определение количества шагов расчета}
  for i := 1 to N do {Цикл по шагам расчета}
  begin
    t := dt*i; {Определение текущего времени}
    cY(Yp, t, dt, Y, Z); {Расчет значений переменных на текущем шаге}
    {Вывод рассчитанных значений}
    writeln(f, t:13:5, Y[1]:13:5, Y[2]:13:5, Z[2]:13:5);
    Yp := Y; {Перенос значений на шаг назад}
  end;
  close(f); {Закрытие файла вывода}
End.

```

При использовании метода Башарина меняется только подпрограмма реализации численного метода.

```

{Подпрограмма реализации метода Башарина - расчет переменных модели
на текущем шаге}

```

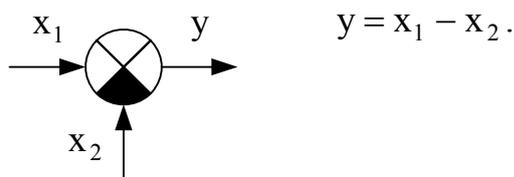
```

Procedure cY(Yp: DArray; t, dt: double; var Y, Z: DArray);
var
  F: DArray;           {Производные (значения правых частей уравнений)}
  j,                   {Счетчик - номер уравнения}
  k: integer;          {Счетчик - номер итерации}
begin
  cF(Yp, t-dt, Z, F); {Расчет производных}
  for j := 1 to 2 do {Расчет значений на текущем шаге для 1-ой итерации}
    Y[j] := Yp[j] + dt*F[j];
  for k := 2 to 5 do {Цикл по итерациям}
    begin
      for j := 1 to 2 do {Подготовка промежуточных значений}
        Y[j] := (Yp[j] + Y[j])/2;
      cF(Y, t-dt/2, Z, F); {Расчет производных}
      for j := 1 to 2 do {Расчет значений на текущем шаге для k-ой итерации}
        Y[j] := Yp[j] + dt*F[j];
      end;
    end;
end;

```

При структурном моделировании вначале на основе выбранного метода численного решения дифференциальных уравнений составляем подпрограммы-функции для всех типов звеньев, входящих в состав модели.

1. Вычитатель.

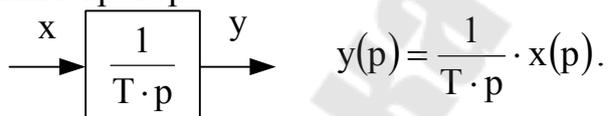


```

Function Sub(X1, X2: double): double;
begin
  Sub := X1 - X2;
end;

```

2. Интегратор.



Составим расчетное выражение. Для этого запишем уравнение в нормальной форме Коши

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{T} \cdot x.$$

Применив метод Эйлера, получим

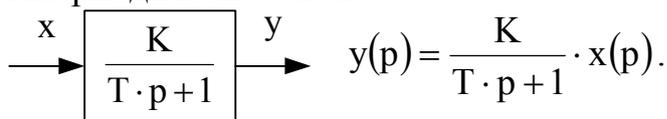
$$y_i = y_{i-1} + \Delta t \cdot f_{i-1} = y_{i-1} + \Delta t \cdot \frac{1}{T} \cdot x.$$

```

Function Int(X, Yp, T, dt: double): double;
begin
  Int := Yp + dt*X/T;
end;

```

3. Аperiodическое звено



Составим расчетное выражение. Для этого запишем уравнение в нормальной форме Коши

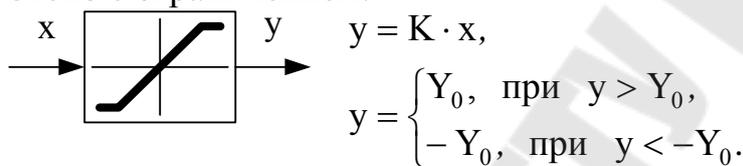
$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{T} \cdot (K \cdot x - y).$$

Применив метод Эйлера, получим

$$y_i = y_{i-1} + \Delta t \cdot f_{i-1} = y_{i-1} + \Delta t \cdot \frac{1}{T} \cdot (K \cdot x - y_{i-1}).$$

```
Function Ap(X, Yp, K, T, dt: double): double;
begin
  Ap := Yp + dt*(K*X-Yp)/T;
end;
```

4. Звено с ограничением.



```
Function Lim(X, K, y0: double): double;
var
  y: double;
begin
  y := K*X;
  if y > y0 then y := y0
  else if y < -y0 then y := -y0;
  Lim := y;
end;
```

Теперь по структурной схеме составим подпрограмму расчета значений переменных модели на текущем шаге.

```
Procedure cY(Yp: DArray; t, dt: double;
  var Y: DArray);
var
  x: DArray;
begin
  cX(t, x);
  Y[1] := Sub(x[1], Y[2]);
  Y[2] := Int(Y[1], Yp[2], lT[1], dt);
  Y[3] := Ap(Y[2], Yp[3], lK[2], lT[2], dt);
  Y[4] := Lim(Y[3], lK[3], ly0[3]);
end;
```

{Расчет входных воздействий}
{Вычитатель}
{Интегратор}
{Аperiodическое звено}
{Звено с ограничением}

В отличие от моделирования по системе уравнений, в разделе описания переменных будет отсутствовать переменная Z. Подпрограммы расчета входных воздействий и ввода исходных данных такие же. В основном теле программы отличаться будет только вывод результатов.

```
writeln(f, t:13:5, Y[2]:13:5, Y[3]:13:5, Y[4]:13:5);
```

1.5. Численное дифференцирование

Возникают случаи, когда производная какой-либо переменной присутствует в правой части дифференциального уравнения. Тогда можно поступить следующим образом:

1. Если для этой переменной есть дифференциальное уравнение, то можно подставить выражение для ее производной. Например

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy_1}{dt} = x_1 - y_1 - \frac{dy_4}{dt}, \\ \dots \\ \frac{dy_4}{dt} = y_3 - y_4, \\ \dots \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy_1}{dt} = x_1 - y_1 - (y_3 - y_4), \\ \dots \\ \frac{dy_4}{dt} = y_3 - y_4, \\ \dots \end{array} \right.$$

2. Если возможно, выражение для переменной дифференцируется аналитически и подставляется в уравнение.
3. Если два вышеуказанных приема применить невозможно или неудобно, то применяют численное дифференцирование. Заменяем производную приближенно отношением

$$\frac{dy}{dt} \approx \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y_{i-1} - y_{i-2}}{\Delta t}.$$

1.6. Рекомендации по выбору численных методов

Основные факторы, влияющие на выбор методов:

1. Особенности метода и модели.
2. Точность решения дифференциальных уравнений.
3. Численная устойчивость.
4. Затраты машинного времени.

1. Особенности метода и модели.

При наличии негладких нелинейностей в модели метод Рунге-Кутты неприменим (sign, гистерезис и др.). Он дает хороший результат для моделей с гладкими нелинейностями (перемножение переменных, sin, cos и др.).

Для анализа нелинейных и нестационарных моделей целесообразно применять одношаговые методы.

При структурном моделировании нелинейность и нестационарность модели ограничений по использованию методов не накладывают.

2. Точность.

Точность определяется двумя составляющими: погрешность округления и погрешность аппроксимации.

Для современных языков программирования, имеющих достаточно большую разрядность погрешностью округления можно пренебречь. Эта погрешность связана с тем, что вещественное число, отражающее значение переменной модели в какой-то момент времени, должно иметь бесконечное количество значащих цифр и округляется до количества разрядов, которое предусмотрено в программе для переменной. Эта погрешность накапливается и, следовательно, обратно пропорциональна шагу расчета. Для ее уменьшения необходимо увеличивать шаг расчета, что приводит к увеличению погрешности аппроксимации и может привести к потере численной устойчивости.

Погрешность аппроксимации обусловлена сутью численных методов решения систем дифференциальных уравнений из-за замены бесконечно малых величин dy и dt на конечные разности Δy и Δt . Погрешность аппроксимации пропорциональна Δt^{p+1} . Аналитически определить погрешность методов невозможно. Для приблизительной оценки погрешности применяют приближенную формулу Колатца

$$\delta \approx \frac{y_{\Delta t} - y_{2\Delta t}}{2^p - 1},$$

где: $y_{\Delta t}$ – значение переменной, рассчитанной при шаге Δt ;
 $y_{2\Delta t}$ – значение рассчитанное при удвоенном значении шага расчета.

В большинстве случаев для анализа динамики электроприводов нерационально применять методы высокого порядка точности, т.к. при составлении моделей используется ряд допущений. Потери точности от допущений и линеаризации превышают в ряде случаев погрешность методов на порядок. Наиболее целесообразно, если нет ограничений по другим критериям, применять методы 2-го порядка точности.

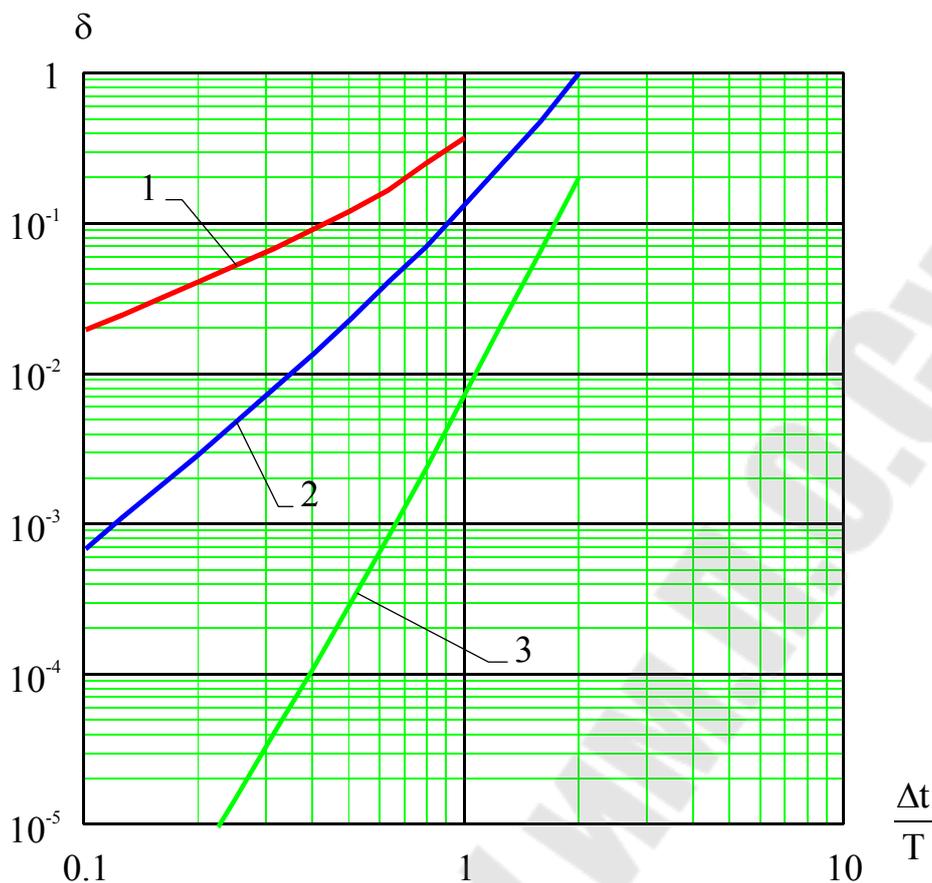


Рис. 1.5. Погрешность для тестовой модели из одного апериодического звена. 1 – метод Эйлера, 2 – усовершенствованный метод Эйлера, 3 – метод Рунге-Кутты.

3. Численная устойчивость.

Для сравнения методов по численной устойчивости рассматривают тестовый пример. Дано дифференциальное уравнение и начальное условие

$$\frac{dy}{dt} = c \cdot y, \quad y(0) = y_0.$$

Решение этого уравнения

$$y(t) = y_0 \cdot e^{ct}.$$

Точное решение устойчиво при $c < 0$, т.е.

$$y(t) = y_0 \cdot e^{-at}, \quad a = -c, \quad a > 0.$$

Рассмотрим приближенные решения тестового уравнения различными численными методами.

Метод Эйлера

$$y_i = y_{i-1} - \Delta t \cdot a \cdot y_{i-1} = y_{i-1} \cdot (1 - a \cdot \Delta t).$$

Данное выражение представляет собой геометрическую прогрессию. Отсюда следует, что $y \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$ в случае, когда $|1 - a \cdot \Delta t| < 1$. Но при $(1 - a \cdot \Delta t) < 0$ значения y шаг от шага будут менять знак. Тогда

$$1 > 1 - a \cdot \Delta t > 0;$$

$$0 < a \cdot \Delta t < 1.$$

Поскольку всегда выполняется условие $a \cdot \Delta t > 0$, то остается $a \cdot \Delta t < 1$. Величина a равна обратной постоянной времени $a = 1/T$. Тогда условие для численной устойчивости метода Эйлера будет

$$\Delta t < T.$$

Зададим начальное условие $y(0) = 1$ и рассмотрим приближенное решение при различном соотношении Δt и T . Для $\frac{\Delta t}{T} = a \cdot \Delta t = 2$:

- на 1-ом шаге расчета $y_1 = y_0 \cdot (1 - a \cdot \Delta t) = 1 \cdot (1 - 2) = -1$.
- на 2-ом шаге расчета $y_2 = y_1 \cdot (1 - a \cdot \Delta t) = -1 \cdot (1 - 2) = 1$ и т.д.

Для $\frac{\Delta t}{T} = a \cdot \Delta t = 1,5$:

- на 1-ом шаге расчета $y_1 = y_0 \cdot (1 - a \cdot \Delta t) = 1 \cdot (1 - 1,5) = -0,5$.
- на 2-ом шаге расчета $y_2 = y_1 \cdot (1 - a \cdot \Delta t) = -0,5 \cdot (1 - 1,5) = 0,25$ и т.д.

Для $\frac{\Delta t}{T} = a \cdot \Delta t = 1$:

- на 1-ом шаге расчета $y_1 = y_0 \cdot (1 - a \cdot \Delta t) = 1 \cdot (1 - 1) = 0$.
- на 2-ом шаге расчета $y_2 = y_1 \cdot (1 - a \cdot \Delta t) = 0 \cdot (1 - 1) = 0$ и т.д.

Для $\frac{\Delta t}{T} = a \cdot \Delta t = 0,5$:

- на 1-ом шаге расчета $y_1 = y_0 \cdot (1 - a \cdot \Delta t) = 1 \cdot (1 - 0,5) = 0,5$.
- на 2-ом шаге расчета $y_2 = y_1 \cdot (1 - a \cdot \Delta t) = 0,5 \cdot (1 - 0,5) = 0,25$ и т.д.

Таблица 1.2.

Решения тестового уравнения при различном значении шага расчета.

N шага	$\frac{\Delta t}{T}$			
	2	1,5	1	0,5
0	1	1	1	1
1	-1	-0,5	0	0,25
2	1	0,25	0	0,125
3	-1	-0,125	0	0,0625
4	1	0,0625	0	0,03125

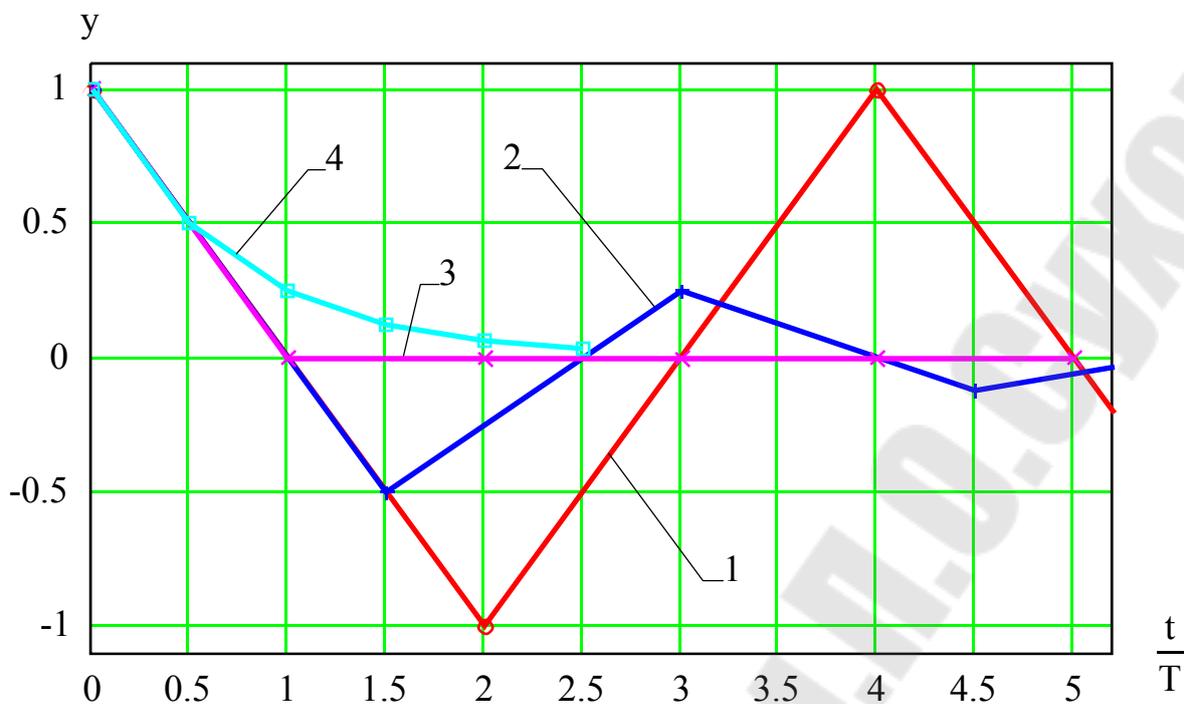


Рис. 1.6. Решение тестового уравнения при различном значении шага расчета.
 $1 - \Delta t/T = 2$; $2 - \Delta t/T = 1,5$; $3 - \Delta t/T = 1$; $4 - \Delta t/T = 0,5$.

Усовершенствованный метод Эйлера

Приняв, что $Y_i^{(1)} \approx Y_i^{(2)} = Y_i$, запишем

$$Y_i = Y_{i-1} + \frac{\Delta t}{2} \cdot (-a \cdot Y_{i-1} - a \cdot Y_i) = Y_{i-1} \cdot \left(1 - \frac{a \cdot \Delta t}{2}\right) - \frac{a \cdot \Delta t}{2} \cdot Y_i;$$

$$Y_i \cdot \left(1 + \frac{a \cdot \Delta t}{2}\right) = Y_{i-1} \cdot \left(1 - \frac{a \cdot \Delta t}{2}\right);$$

$$Y_i = Y_{i-1} \cdot \frac{1 - \frac{a \cdot \Delta t}{2}}{1 + \frac{a \cdot \Delta t}{2}} = Y_{i-1} \cdot \frac{2 - a \cdot \Delta t}{2 + a \cdot \Delta t}.$$

Запишем неравенство

$$1 > \frac{2 - a \cdot \Delta t}{2 + a \cdot \Delta t} > 0;$$

$$2 + a \cdot \Delta t > 2 - a \cdot \Delta t > 0;$$

$$-a \cdot \Delta t < a \cdot \Delta t < 2.$$

Тогда условие численной устойчивости будет следующим

$$a \cdot \Delta t < 2;$$

$$\Delta t < 2 \cdot T.$$

Метод Башарина

Приняв, что $Y_i^{(v)} \approx Y_i^{(v+1)} = Y_i$, получим выражение, аналогичное усовершенствованному методу Эйлера

$$Y_i = Y_{i-1} + \Delta t \cdot \left(\frac{-a \cdot Y_{i-1} - a \cdot Y_i}{2} \right).$$

Т.о. условие численной устойчивости будет таким же

$$\Delta t < 2 \cdot T.$$

Метод Рунге-Кутты

$$Y_{i-0,5}^{(1)} = Y_{i-1} - \frac{\Delta t}{2} \cdot a \cdot Y_{i-1} = Y_{i-1} \cdot \left(1 - \frac{a \cdot \Delta t}{2} \right),$$

$$Y_{i-0,5}^{(2)} = Y_{i-1} - \frac{\Delta t}{2} \cdot a \cdot Y_{i-1} \cdot \left(1 - \frac{a \cdot \Delta t}{2} \right) = Y_{i-1} \cdot \left(1 - \frac{a \cdot \Delta t}{2} + \frac{a^2 \cdot \Delta t^2}{4} \right),$$

$$Y_i^{(1)} = Y_{i-1} - \Delta t \cdot a \cdot Y_{i-1} \cdot \left(1 - \frac{a \cdot \Delta t}{2} + \frac{a^2 \cdot \Delta t^2}{4} \right) = Y_{i-1} \cdot \left(1 - a \cdot \Delta t + \frac{a^2 \cdot \Delta t^2}{2} - \frac{a^3 \cdot \Delta t^3}{4} \right),$$

$$Y_i^{(2)} = Y_{i-1} + \frac{\Delta t}{6} \cdot \begin{pmatrix} -a \cdot Y_{i-1} - 2 \cdot a \cdot Y_{i-1} \cdot \left(1 - \frac{a \cdot \Delta t}{2} \right) - \\ -2 \cdot a \cdot Y_{i-1} \cdot \left(1 - \frac{a \cdot \Delta t}{2} + \frac{a^2 \cdot \Delta t^2}{4} \right) - \\ -a \cdot Y_{i-1} \cdot \left(1 - a \cdot \Delta t + \frac{a^2 \cdot \Delta t^2}{2} - \frac{a^3 \cdot \Delta t^3}{4} \right) \end{pmatrix}.$$

$$Y_i = Y_{i-1} + Y_{i-1} \cdot \frac{\Delta t}{6} \cdot \begin{pmatrix} -a - 2 \cdot a + a^2 \cdot \Delta t - 2 \cdot a + a^2 \cdot \Delta t - \frac{a^3 \cdot \Delta t^2}{2} - a + a^2 \cdot \Delta t - \\ -\frac{a^3 \cdot \Delta t^2}{2} + \frac{a^4 \cdot \Delta t^3}{4} \end{pmatrix} =$$

$$= Y_{i-1} \cdot \left(1 - a \cdot \Delta t + \frac{a^2 \cdot \Delta t^2}{2} - \frac{a^3 \cdot \Delta t^3}{6} + \frac{a^4 \cdot \Delta t^4}{24} \right).$$

Отсюда неравенство

$$1 > 1 - a \cdot \Delta t + \frac{a^2 \cdot \Delta t^2}{2} - \frac{a^3 \cdot \Delta t^3}{6} + \frac{a^4 \cdot \Delta t^4}{24} > 0,$$

решая которое получим условие для численной устойчивости

$$\Delta t < 2,7853 \cdot T.$$

4. Затраты времени.

Аналитическое вычисление затрат времени невозможно. Сравнение методов можно производить только опытным путем. Затраты времени совместно с численной устойчивостью влияют на выбор метода для жестких

моделей. Т.е. при прочих равных условиях следует выбирать наиболее устойчивый метод.

2. Модели элементов систем автоматического управления электроприводами

2.1. Модели типовых статических элементов систем автоматического управления

К типовым статическим элементам систем управления относятся измерители рассогласования, типовые нелинейные элементы – ограничители, выделители модуля, звенья с мертвой зоной и функциональные преобразователи.

Измерители рассогласования обычно выполняются на операционных усилителях. В модели их можно представить тремя различными способами.

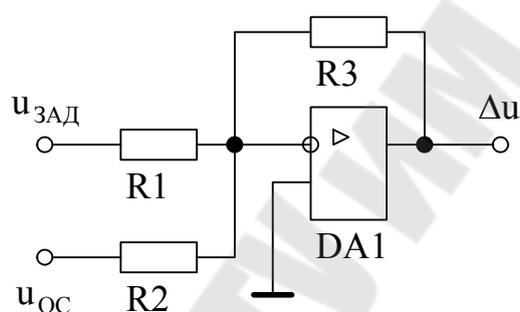


Рис. 2.1. Принципиальная схема измерителя рассогласования.

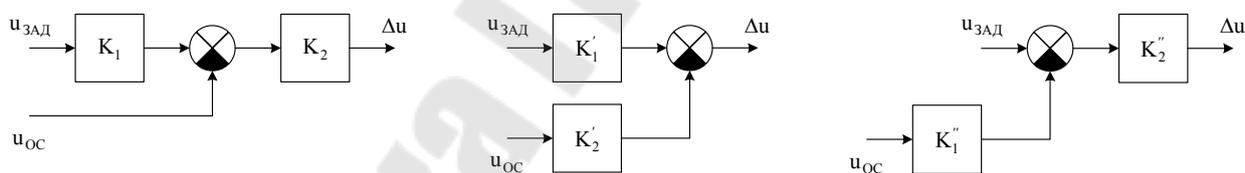


Рис. 2.2. Модели измерителя рассогласования.

$$\Delta u = K_2 \cdot (K_1 \cdot u_{\text{ЗАД}} - u_{\text{ОС}}), \quad K_1 = \frac{R_2}{R_1}, \quad K_2 = \frac{R_3}{R_2};$$

$$\Delta u = K_1' \cdot u_{\text{ЗАД}} - K_2' \cdot u_{\text{ОС}}, \quad K_1' = \frac{R_3}{R_1}, \quad K_2' = \frac{R_3}{R_2};$$

$$\Delta u = K_2'' \cdot (u_{\text{ЗАД}} - K_1'' \cdot u_{\text{ОС}}), \quad K_1'' = \frac{R_1}{R_2}, \quad K_2'' = \frac{R_3}{R_1}.$$

Часто в электроприводах возникает необходимость ограничения переменных. Ограничение реализуется при помощи звеньев с ограничением в прямом канале или за счет обратных связей, содержащих звено с зоной нечувствительности.

Звено с ограничением, схемы и характеристика которого представлены на рис. 2.3 и 2.4, описывается следующим уравнением

$$u_{\text{ВЫХ}} = \begin{cases} U_{0+} & \text{при } K \cdot u_{\text{ВХ}} \geq U_{0+}, \\ K \cdot u_{\text{ВХ}} & \text{при } U_{0-} < K \cdot u_{\text{ВХ}} < U_{0+}, \\ U_{0-} & \text{при } K \cdot u_{\text{ВХ}} < U_{0-}, \end{cases}$$

где: U_{0+} и U_{0-} – положительный и отрицательный уровни ограничения (для схемы на стабилитронах определяются напряжением стабилизации стабилитронов);

K – коэффициент передачи звена, который при наличии сопротивления $R2$ равен

$$K = \frac{R2}{R1}.$$

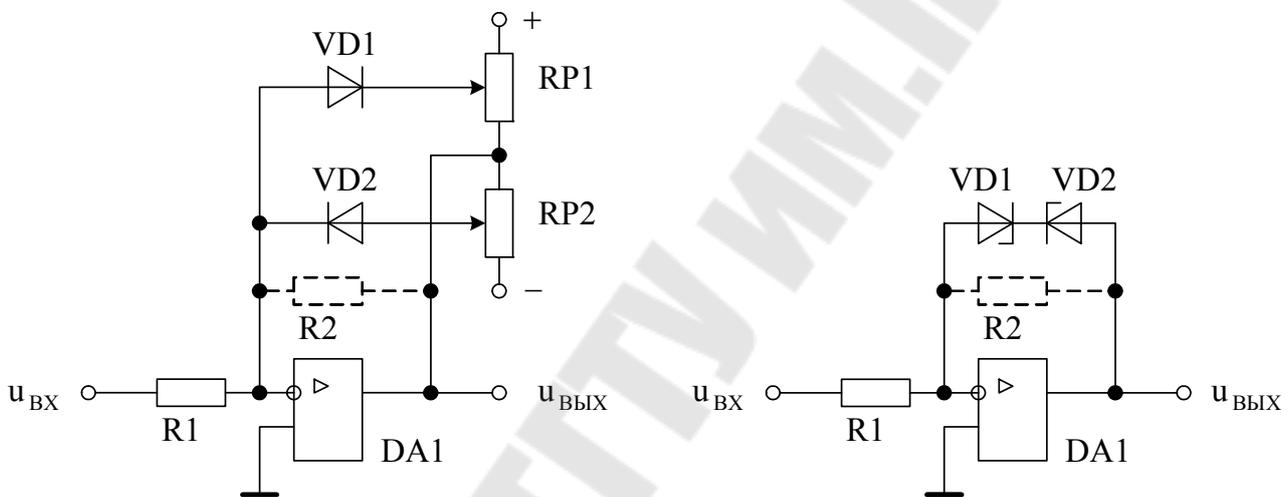


Рис. 2.3. Принципиальные схемы звена с ограничением.

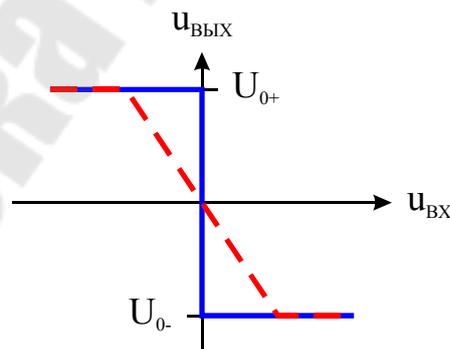


Рис. 2.4. Статическая характеристика звена с ограничением.

Звено с зоной нечувствительности, схема и характеристика которого представлены на рис. 2.5 и 2.6, описывается уравнением

$$u_{\text{ВЫХ}} = \begin{cases} 0 & \text{при } U_{0-} \leq u_{\text{ВХ}} \leq U_{0+}, \\ K \cdot (u_{\text{ВХ}} - U_{0+}) & \text{при } u_{\text{ВХ}} > U_{0+}, \\ K \cdot (u_{\text{ВХ}} + U_{0-}) & \text{при } u_{\text{ВХ}} < U_{0-}, \end{cases}$$

где: U_{0+} и U_{0-} – положительная и отрицательная границы зоны нечувствительности;
 K – коэффициент передачи звена

$$K = \frac{R2}{R1}.$$

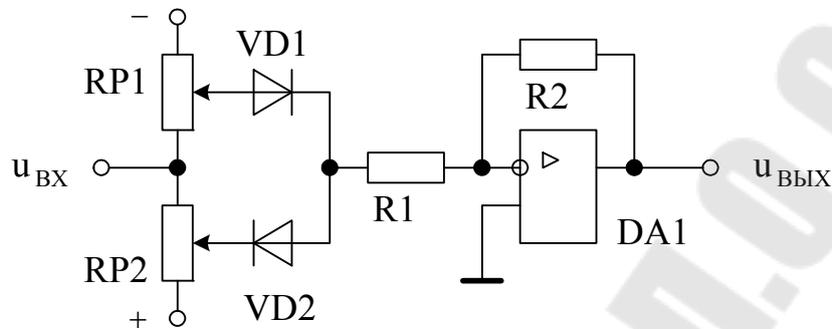


Рис. 2.5. Принципиальная схема звена с зоной нечувствительности.

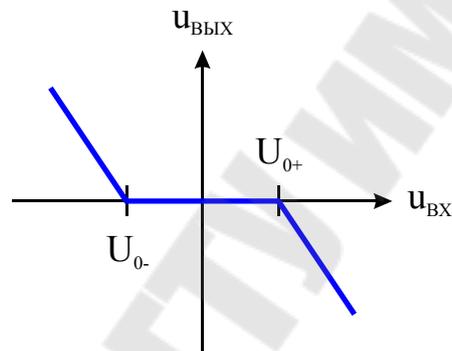


Рис. 2.6. Статическая характеристика звена с зоной нечувствительности.

В двухзонной системе автоматического управления скоростью двигателя постоянного тока независимого возбуждения используется выделитель модуля, схема и статическая характеристика которого представлены на рис. 2.7 и 2.8. Он описывается уравнением

$$u_{\text{ВЫХ}} = |u_{\text{ВХ}}|.$$

Причем, для приведенной схемы должны выполняться условия

$$R1 = R3 = R4 = R5, R2 = \frac{R1}{2}.$$

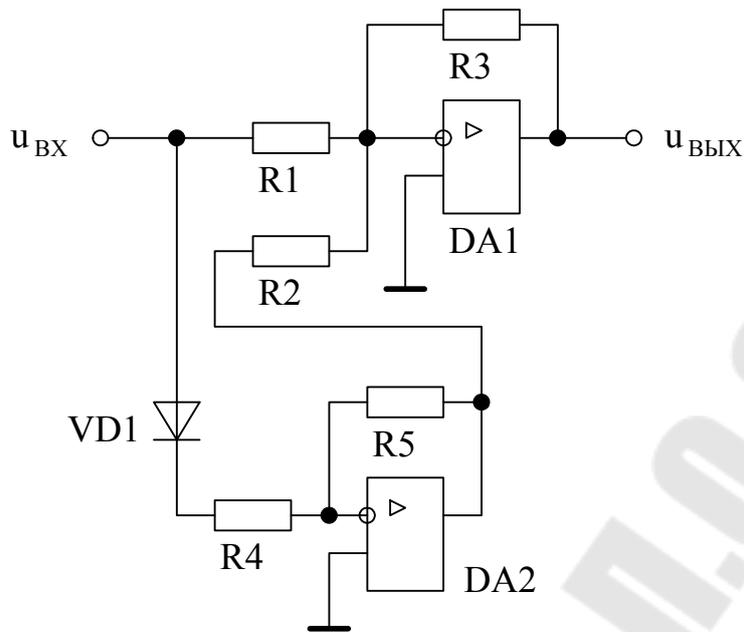


Рис. 2.7. Принципиальная схема выделителя модуля.

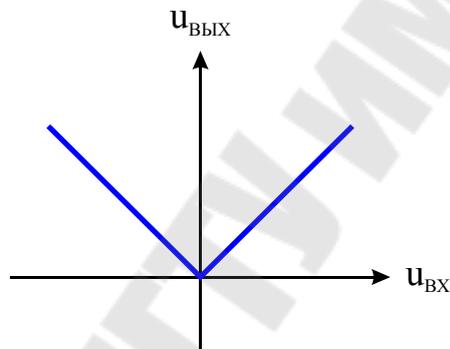


Рис. 2.8. Статическая характеристика выделителя модуля.

2.2. Модели регуляторов

Регуляторы выполняются на операционных усилителях. Передаточная функция регулятора равна отношению сопротивлений обратной связи и прямого канала усилителя, записанных в операторной форме.

Например для интегрирующего регулятора, принципиальная схема которого представлена на рис. 2.9,

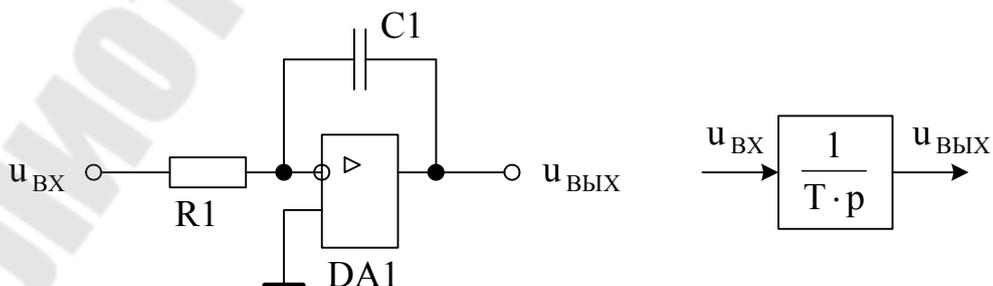


Рис. 2.9. Принципиальная и структурная схемы интегрирующего регулятора.

$$Z_{\Pi} = R1, Z_O = \frac{1}{C1 \cdot p};$$

$$W(p) = \frac{Z_O}{Z_{\Pi}} = \frac{1}{C1 \cdot p \cdot R1} = \frac{1}{R1 \cdot C1 \cdot p} = \frac{1}{T \cdot p}.$$

Дифференциальное уравнение, описывающее регулятор

$$\frac{du_{\text{ВЫХ}}}{dt} = \frac{u_{\text{ВХ}}}{T}.$$

При более сложной передаточной функции регулятора для составления системы уравнений удобно разделять регулятор на соединенные последовательно простые звенья.

В большинстве случаев выходное напряжение регуляторов ограничивается. В этом случае, если в состав регулятора входит интегрирующее или апериодическое звено, то добавление в состав модели отдельного статического звена с ограничением не соответствует протекающим процессам. Рассмотрим на примере интегрирующего регулятора (рис. 2.10). Составим две модели интегратора: из интегрирующего звена и звена с ограничением, из интегрирующего звена при ограничении его выходного напряжения (рис. 2.11).

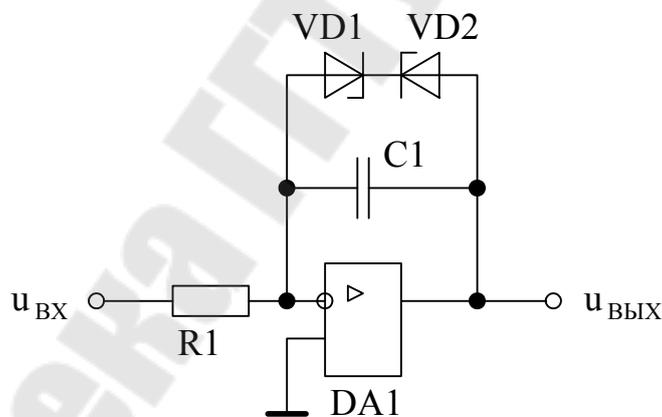


Рис. 2.10. Интегрирующий регулятор с ограничением.

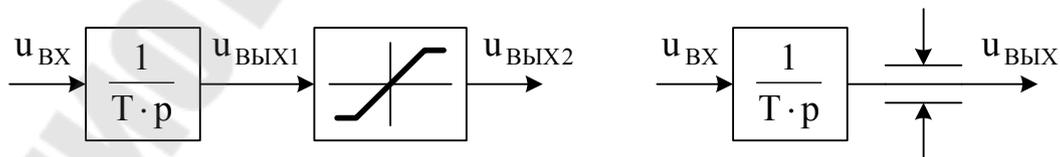


Рис. 2.11. Два варианта модели интегратора с ограничением.

Подав на вход единичный скачок в момент времени $t = 0$, учтя нулевые начальные условия, получим выражения для сигналов

$$u_{\text{ВЫХ1}}(t) = \int_0^t \frac{u_{\text{ВХ}}(t)}{T} \cdot dt = \frac{1}{T} \cdot t, \quad u_{\text{ВЫХ2}}(t) = u_{\text{ВЫХ1}}(t), \quad u_{\text{ВЫХ}}(t) = \int_0^t \frac{u_{\text{ВХ}}(t)}{T} \cdot dt = \frac{1}{T} \cdot t.$$

В момент времени t_1 выходной сигнал интегратора сравнивается с уровнем ограничения $u_{\text{ВЫХ1}}(t_1) = U_{0+}$, $u_{\text{ВЫХ}}(t_1) = U_{0+}$. В первом варианте модели выходной сигнал интегрирующего звена продолжит нарастать, ограничен будет только сигнал на выходе нелинейного звена

$$u_{\text{ВЫХ1}}(t) = \int_{t_1}^t \frac{u_{\text{ВХ}}(t)}{T} \cdot dt = u_{\text{ВЫХ1}}(t_1) + \frac{t - t_1}{T} = U_{0+} + \frac{t - t_1}{T}, \quad u_{\text{ВЫХ2}}(t) = U_{0+}.$$

Во втором варианте модели ограничение учитывается для выходного сигнала интегрирующего звена

$$u_{\text{ВЫХ}}(t) = U_{0+}.$$

В момент времени t_2 сменим знак входного сигнала. Выходные сигналы интеграторов начнут уменьшаться, но с разных значений

$$u_{\text{ВЫХ1}}(t) = \int_{t_2}^t \frac{u_{\text{ВХ}}(t)}{T} \cdot dt = u_{\text{ВЫХ1}}(t_2) - \frac{t - t_2}{T} = U_{0+} + \frac{t_2 - t_1}{T} - \frac{t - t_2}{T}, \quad u_{\text{ВЫХ2}}(t) = U_{0+},$$

$$u_{\text{ВЫХ}}(t) = \int_{t_2}^t \frac{u_{\text{ВХ}}(t)}{T} \cdot dt = u_{\text{ВЫХ}}(t_2) - \frac{t - t_2}{T} = U_{0+} - \frac{t - t_2}{T}.$$

Т.о. видна существенная разница между процессами, протекающими в различных вариантах модели, диаграммы которых показаны на рис. 2.12. Поскольку в принципиальной схеме стабилитроны ограничивают напряжение на выходе операционного усилителя, на котором реализован сам интегрирующий регулятор, то второй вариант модели будет верен.

Реализацию ограничения выходного сигнала интегрирующего звена в программе покажем на основе ранее рассмотренного примера моделирования простейшей системы.

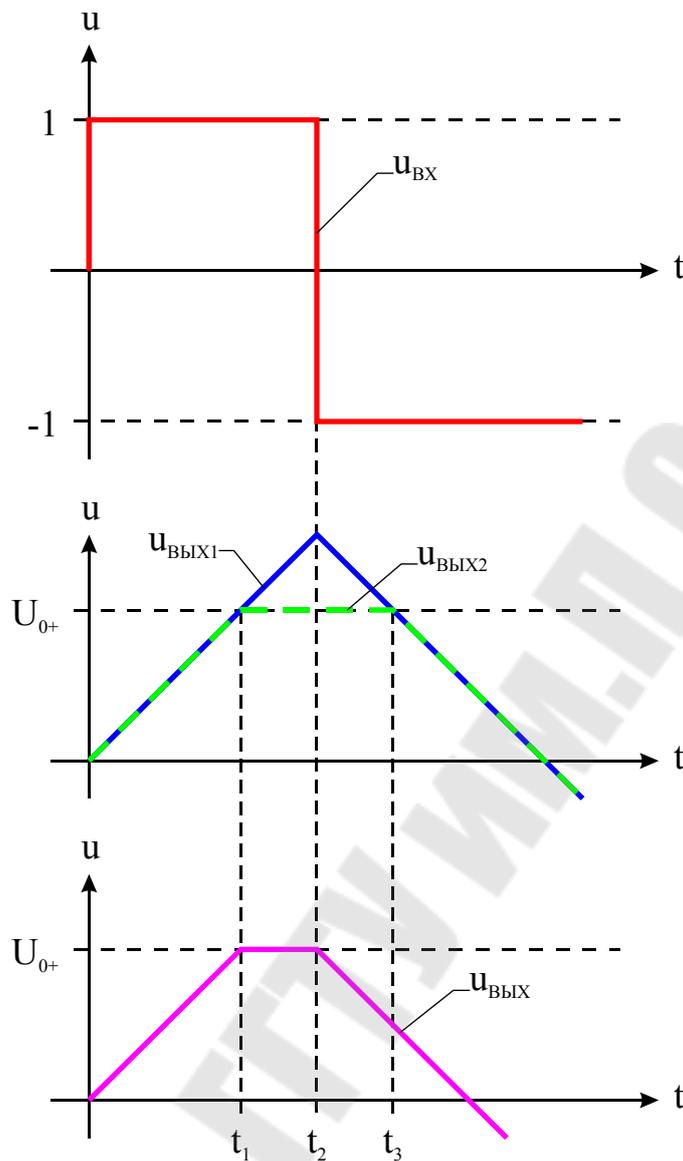


Рис. 2.12. Диаграммы процессов в моделях интегратора.

Program Example;

...

{Расчет значений правых частей дифференциальных уравнений и расчет переменных по алгебраическим уравнениям}

Procedure cF(Y: DArray; t: double; var Z, F: DArray);

var

x: DArray; *{Значения входных воздействий}*

begin

cX(t, x);

Z[1] := x[1] - Y[1]; *{Вычитатель}*

{Интегратор с ограничением}

if ((Y[1] >= ly0[1]) **and** (Z[1] > 0)) **or**
 ((Y[1] <= -ly0[1]) **and** (Z[1] < 0)) **then** F[1] := 0

else F[1] := Z[1]/lT[1];

...

end;

{Подпрограмма коррекции результатов расчета для учета ограничения}

```

Procedure cL(Y: DArray);
begin
  if Y[1] > ly0[1] then Y[1] := ly0[1]
  else if Y[1] < -ly0[1] then Y[1] := -ly0[1];
end;

...

Begin
...
  for i := 1 to N do           {Цикл по шагам расчета}
  begin
    t := dt*i;                 {Определение текущего времени}
    cY(Yp, t, dt, Y, Z);       {Расчет значений переменных на текущем шаге}
    cL(Y);                     {Коррекция рассчитанных значений для учета ограничения}
                                {Вывод рассчитанных значений}
    writeln(f, t:13:5, Y[1]:13:5, Y[2]:13:5, Z[2]:13:5);
    Yp := Y;                   {Перенос значений на шаг назад}
  end;
  close(f);                    {Закрытие файла вывода}
End.

```

При необходимости учесть ограничение более сложного регулятора разбивая его на простые звенья интегрирующее звено следует располагать последним и учитывать ограничение для его выходного сигнала.

2.3. Модели датчиков координат электроприводов

В большинстве случаев датчики в моделях электроприводов представляются безинерционными звеньями.

Датчики напряжения обычно выполняются на делителе напряжения и узле гальванической развязки. Постоянные времени выходных фильтров цепей гальванической развязки, как правило, достаточно малы для того, чтобы ими пренебречь.

Датчики тока выполняются на основе шунта или трансформаторов тока. При выполнении датчика на основе шунта его построение и модель аналогичны датчику напряжения.

При выполнении датчика тока на трансформаторах тока, как показано на рис. 2.13, применяется фильтр для сглаживания пульсаций выпрямленного напряжения (на элементах R1 и C1). Его постоянная времени оказывается соизмеримой с постоянными времени других узлов системы автоматического управления. В этом случае необходимо учитывать инерционность датчика представляя его апериодическим звеном.

Датчики скорости, выполненные на основе тахогенераторов обычно имеют достаточно большую постоянную времени фильтра на выходе (рис. 2.14) и, поэтому должны рассматриваться как апериодическое звено.

Фото-электрические датчики скорости, принцип действия которых основан на подсчете количества импульсов за определенный интервал времени обычно необходимо рассматривать как звено с чистым запаздыванием.

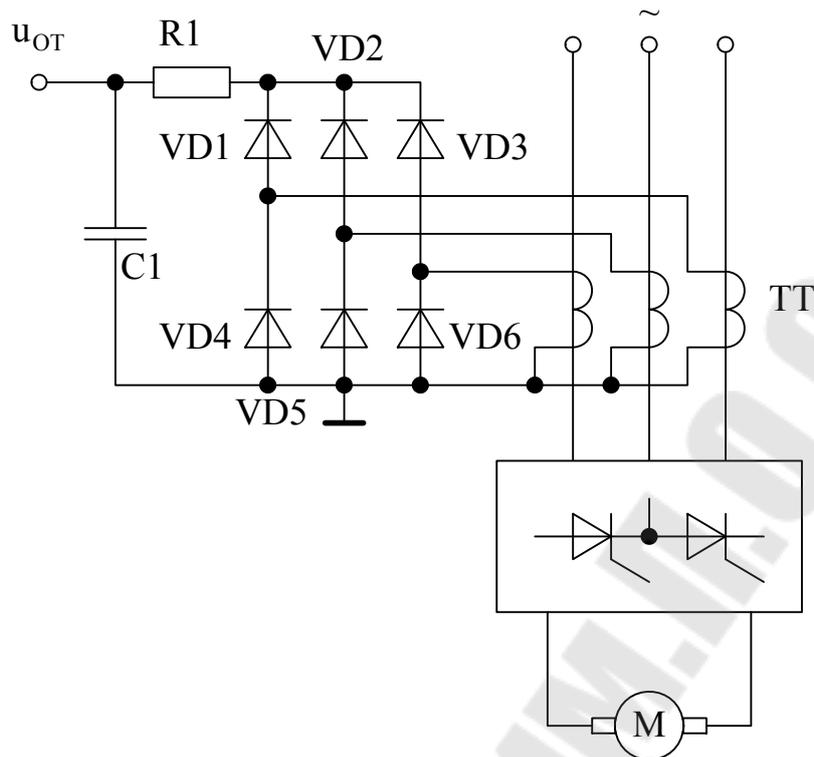


Рис. 2.13. Принципиальная схема датчика тока.

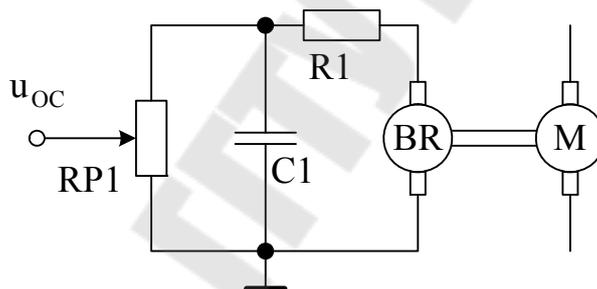


Рис. 2.14. Схема датчика скорости на основе тахогенератора.

3. Модели элементов силовой части электропривода

3.1. Электромеханический преобразователь. Обобщенная электрическая машина

Электродвигатель обычно является многофазной машиной с n обмотками статора и m обмотками ротора. Для описания процессов с учетом всех особенностей необходимо использовать модель электромеханического преобразователя в виде многофазной машины, что неудобно из-за высокого порядка системы уравнений. Для облегчения анализа используют эквивалентную 2-хфазную машину, которую называют обобщенной электрической машиной.

Переход от реальной к обобщенной электрической машине возможен при соблюдении следующих допущений:

1. Магнитная цепь машины имеет очень высокую магнитную проницаемость и ненасыщена. Т.е. предполагается, что энергия магнитного поля сосредоточена в воздушном зазоре.
2. Воздушный зазор по окружности равномерный, а явнополюсность учитывается либо введением радиальной составляющей магнитной проницаемости

$$\mu_{\text{РАД}} = \mu - \Delta\mu \cdot \cos(2 \cdot \varphi_{\text{ЭЛ}})$$

либо введением переменной составляющей индуктивностей и взаимоиндуктивностей

$$L_{i,j} = L - \Delta L_{\text{МАХ}} \cdot \cos(2 \cdot \varphi_{\text{ЭЛ}}),$$

где: $\varphi_{\text{ЭЛ}} = p_{\text{д}} \cdot \varphi$ – электрический угол поворота ротора относительно статора;
 φ – геометрический угол поворота ротора относительно статора;
 $p_{\text{д}}$ – число пар полюсов двигателя.

3. Магнитный поток в воздушном зазоре синусоидальный.
4. Электрическая машина выполнена симметрично. Т.е. имеет место равенство параметров обмоток статора и ротора по фазам и отсутствуют геометрические ошибки при изготовлении.
5. В случае несимметрии напряжений питания фаз обмоток применяется метод симметричных составляющих.

С учетом вышеуказанных допущений схема модели обобщенной двухфазной машины имеет вид, представленный на рис. 3.1.

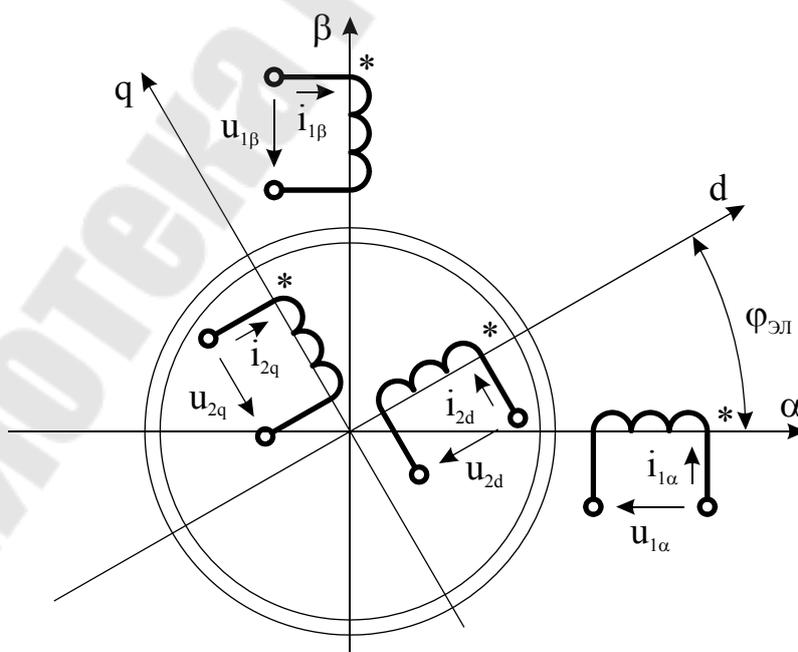


Рис. 3.1. Схема модели обобщенной электрической машины.

α и β – оси, связанные со статором; d и q – оси, связанные с ротором. Оси α и d совпадают с продольными осями статора и ротора. Индексы обмоток соответствуют осям, с которыми совпадают оси обмоток.

Динамика обобщенной электрической машины описывается системой из четырех дифференциальных уравнений электрического равновесия, составленных по 2-му закону Кирхгофа и уравнения электромеханического преобразования энергии, выражающего электромагнитный момент машины через электрические и механические координаты системы.

Уравнения по 2-му закону Кирхгофа, выраженные через потокосцепления

$$\begin{cases} u_{1\alpha} = R_1 \cdot i_{1\alpha} + \frac{d\psi_{1\alpha}}{dt}, \\ u_{1\beta} = R_1 \cdot i_{1\beta} + \frac{d\psi_{1\beta}}{dt}, \\ u_{2d} = R_2 \cdot i_{2d} + \frac{d\psi_{2d}}{dt}, \\ u_{2q} = R_2 \cdot i_{2q} + \frac{d\psi_{2q}}{dt}; \end{cases} \quad (3.1)$$

$$u_i = R_i \cdot i_i + \frac{d\psi_i}{dt} \quad (i = 1\alpha, 1\beta, 2d, 2q).$$

Потокосцепление каждой обмотки определяется действием токов всех обмоток

$$\begin{cases} \psi_{1\alpha} = L_{1\alpha,1\alpha} \cdot i_{1\alpha} + L_{1\alpha,1\beta} \cdot i_{1\beta} + L_{1\alpha,2d} \cdot i_{2d} + L_{1\alpha,2q} \cdot i_{2q}, \\ \psi_{1\beta} = L_{1\beta,1\alpha} \cdot i_{1\alpha} + L_{1\beta,1\beta} \cdot i_{1\beta} + L_{1\beta,2d} \cdot i_{2d} + L_{1\beta,2q} \cdot i_{2q}, \\ \psi_{2d} = L_{2d,1\alpha} \cdot i_{1\alpha} + L_{2d,1\beta} \cdot i_{1\beta} + L_{2d,2d} \cdot i_{2d} + L_{2d,2q} \cdot i_{2q}, \\ \psi_{2q} = L_{2q,1\alpha} \cdot i_{1\alpha} + L_{2q,1\beta} \cdot i_{1\beta} + L_{2q,2d} \cdot i_{2d} + L_{2q,2q} \cdot i_{2q}; \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\psi_i = \sum_{j=1\alpha}^{2q} L_{i,j} \cdot i_j.$$

Индекс i указывает номер обмотки, в которой наводится ЭДС, j указывает, магнитным потоком тока какой обмотки наводится ЭДС. Одинаковые индексы соответствуют собственным индуктивностям обмоток, различные – взаимноиндуктивностям.

При повороте ротора меняется взаимное расположение обмоток и изменяются индуктивности, т.е. $L_{i,j} = f(\varphi_{ЭЛ})$.

Неявнополюсная машина

Собственные индуктивности обмоток являются независимыми и постоянными.

$$L_{1\alpha,1\alpha} = L_{1\beta,1\beta} = L_1,$$

$$L_{2d,2d} = L_{2q,2q} = L_2.$$

Взаимные индуктивности между обмотками статора и взаимные индуктивности между обмотками ротора равны нулю

$$L_{1\alpha,1\beta} = L_{1\beta,1\alpha} = L_{2d,2q} = L_{2q,2d} = 0.$$

Взаимные индуктивности между обмотками статора и ротора изменяются с периодом 360 эл. градусов.

$$L_{1\alpha,2d} = L_{2d,1\alpha} = L_{12} \cdot \cos(\varphi_{\text{эл}}),$$

$$L_{1\beta,2q} = L_{2q,1\beta} = L_{12} \cdot \cos(\varphi_{\text{эл}}),$$

$$L_{1\alpha,2q} = L_{2q,1\alpha} = L_{12} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_{\text{эл}}\right) = -L_{12} \cdot \sin(\varphi_{\text{эл}}),$$

$$L_{1\beta,2d} = L_{2d,1\beta} = L_{12} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_{\text{эл}}\right) = L_{12} \cdot \sin(\varphi_{\text{эл}}).$$

Явнополюсная машина

В соответствии с принятыми допущениями неравномерность воздушного зазора представляется введением переменной составляющей индуктивности. Обычно принято описывать ротор как гладкий, а статор – как явнополюсный.

Для ротора собственные индуктивности обмоток будут изменяться с периодом в одно полюсное деление – 180 эл. градусов

$$L_{2d,2d} = L_2 + \Delta L_2 \cdot \cos(2 \cdot \varphi_{\text{эл}}),$$

$$L_{2q,2q} = L_2 - \Delta L_2 \cdot \cos(2 \cdot \varphi_{\text{эл}}),$$

$$L_{2d,2q} = L_{2q,2d} = -\Delta L_2 \cdot \cos(2 \cdot \varphi_{\text{эл}}).$$

Для статора, поскольку ротор гладкий, собственные индуктивности будут постоянны, а взаимные индуктивности – равны нулю

$$L_{1\alpha,1\alpha} = L_1 + \Delta L_1,$$

$$L_{1\beta,1\beta} = L_1 - \Delta L_1,$$

$$L_{1\alpha,1\beta} = L_{1\beta,1\alpha} = 0.$$

Взаимоиндуктивности между обмотками статора и ротора будут изменяться с периодом 360 эл. градусов

$$L_{1\alpha,2d} = L_{2d,1\alpha} = (L_{12} + \Delta L_{12}) \cdot \cos(\varphi_{\text{эл}}),$$

$$L_{1\beta,2q} = L_{2q,1\beta} = (L_{12} - \Delta L_{12}) \cdot \cos(\varphi_{\text{эл}}),$$

$$L_{1\alpha,2q} = L_{2q,1\alpha} = -(L_{12} + \Delta L_{12}) \cdot \sin(\varphi_{\text{эл}}),$$

$$L_{1\beta,2d} = L_{2d,1\beta} = (L_{12} - \Delta L_{12}) \cdot \sin(\varphi_{\text{эл}}).$$

Т.о. потокосцепления зависят от угла поворота ротора через взаимные и собственные индуктивности.

Уравнения электрического равновесия (3.1) с учетом выражений для потокосцеплений (3.2)

$$u_i = R_i \cdot i_i + \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1\alpha}^{2q} L_{i,j} \cdot i_j \right). \quad (3.3)$$

Выражение для электромагнитного момента можно определить через изменение электромагнитной энергии при повороте ротора

$$M = \frac{\partial W_{\text{ЭМГ}}}{\partial \varphi} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1\alpha}^{2q} i_i \cdot \frac{\partial \psi_i}{\partial \varphi}.$$

С учетом (3.2) получим

$$M = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1\alpha}^{2q} i_i \cdot \sum_{j=1\alpha}^{2q} \left(i_j \cdot \frac{dL_{i,j}}{d\varphi} \right). \quad (3.4)$$

Подставив выражения для индуктивностей неявнополюсной машины получим

$$M = p_D \cdot L_{12} \cdot [(i_{1\beta} \cdot i_{2d} - i_{1\alpha} \cdot i_{2q}) \cdot \cos(\varphi_{\text{ЭЛ}}) - (i_{1\beta} \cdot i_{2q} + i_{1\alpha} \cdot i_{2d}) \cdot \sin(\varphi_{\text{ЭЛ}})].$$

Уравнения (3.3) и (3.4) совместно описывают процессы в обобщенной электрической машине.

Раскроем скобки в (3.3)

$$u_i = R_i \cdot i_i + \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1\alpha}^{2q} L_{i,j} \cdot i_j \right) = R_i \cdot i_i + \sum_{j=1\alpha}^{2q} \left(L_{i,j} \cdot \frac{di_j}{dt} \right) + \sum_{j=1\alpha}^{2q} \left(i_j \cdot \frac{dL_{i,j}}{dt} \right).$$

Поскольку $L_{i,j} = f(\varphi)$, то заменим dt на $d\varphi$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}, \quad dt = \frac{1}{\omega} \cdot d\varphi, \\ u_i = R_i \cdot i_i + \sum_{j=1\alpha}^{2q} \left(L_{i,j} \cdot \frac{di_j}{dt} \right) + \omega \cdot \sum_{j=1\alpha}^{2q} \left(i_j \cdot \frac{dL_{i,j}}{d\varphi} \right). \quad (3.5)$$

3.2. Линейное преобразование уравнений обобщенной электрической машины

Рассмотрим преобразование реальных переменных обобщенной электрической машины, которая представлена в осях α, β, d, q к системе координат uv , которая вращается с произвольной скоростью ω_K . При преобразовании необходимо сохранить адекватность математической модели реальному физическому объекту. Условием адекватности является сохранение значения мощности при преобразованиях.

Новые переменные в осях uv определим через сумму проекций реальных переменных на новые оси. При этом представим переменные в виде векторов, жестко связанных с координатными осями с изменяющимся с течением

времени модулем. Для получения преобразований обозначим переменные через x .

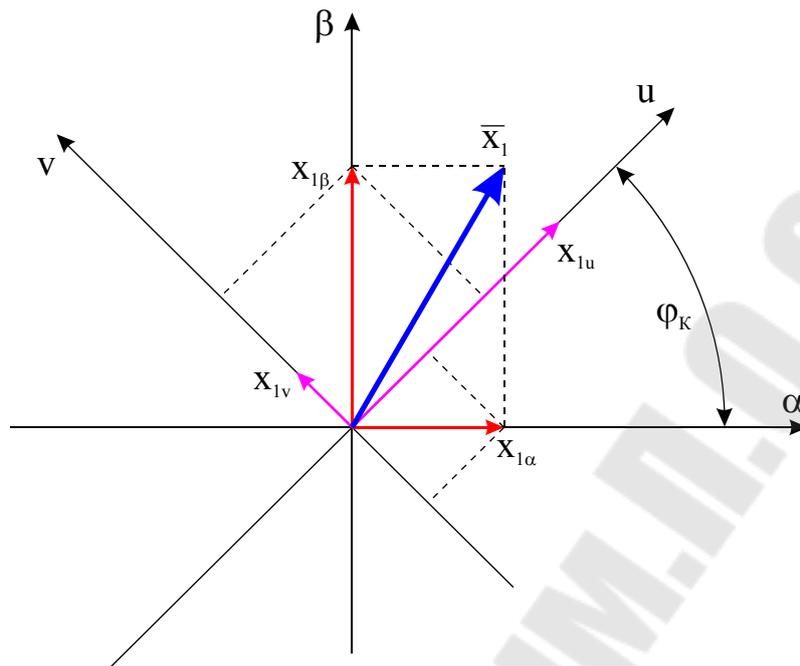


Рис. 3.2. Координатные преобразования переменных статора.

$$\begin{cases} x_{1u} = x_{1\alpha} \cdot \cos(\varphi_K) + x_{1\beta} \cdot \sin(\varphi_K), \\ x_{1v} = -x_{1\alpha} \cdot \sin(\varphi_K) + x_{1\beta} \cdot \cos(\varphi_K). \end{cases}$$

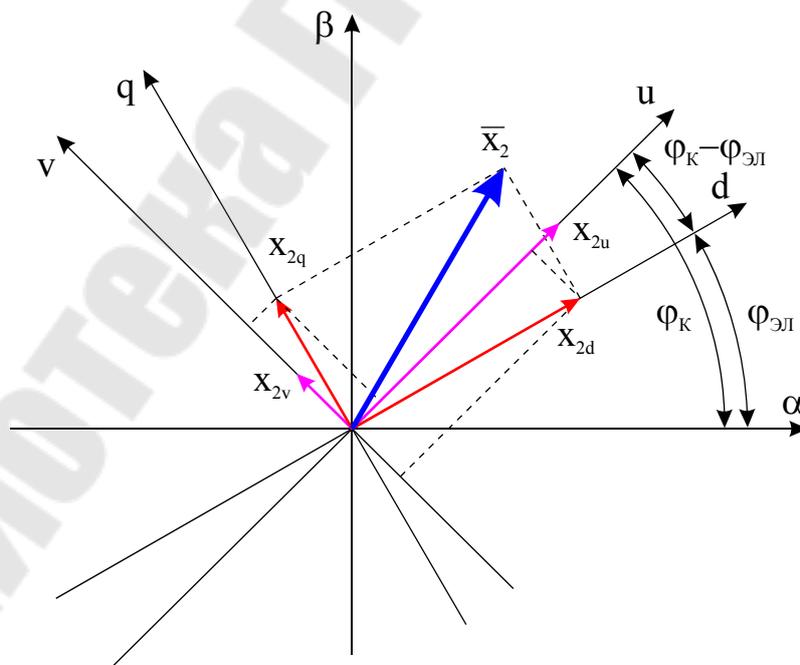


Рис. 3.3. Координатные преобразования переменных ротора.

$$\begin{cases} x_{2u} = x_{2d} \cdot \cos(\varphi_K - \varphi_{\text{ЭЛ}}) + x_{2q} \cdot \sin(\varphi_K - \varphi_{\text{ЭЛ}}), \\ x_{2v} = -x_{2d} \cdot \sin(\varphi_K - \varphi_{\text{ЭЛ}}) + x_{2q} \cdot \cos(\varphi_K - \varphi_{\text{ЭЛ}}). \end{cases}$$

Т.о. выражения для прямого преобразования переменных

$$\begin{cases} x_{1u} = x_{1\alpha} \cdot \cos(\varphi_K) + x_{1\beta} \cdot \sin(\varphi_K), \\ x_{1v} = -x_{1\alpha} \cdot \sin(\varphi_K) + x_{1\beta} \cdot \cos(\varphi_K), \\ x_{2u} = x_{2d} \cdot \cos(\varphi_K - \varphi_{\text{ЭЛ}}) + x_{2q} \cdot \sin(\varphi_K - \varphi_{\text{ЭЛ}}), \\ x_{2v} = -x_{2d} \cdot \sin(\varphi_K - \varphi_{\text{ЭЛ}}) + x_{2q} \cdot \cos(\varphi_K - \varphi_{\text{ЭЛ}}). \end{cases} \quad (3.6)$$

Для получения выражений обратного преобразования запишем суммы проекций на оси α , β , и d , q .

$$\begin{cases} x_{1\alpha} = x_{1u} \cdot \cos(\varphi_K) - x_{1v} \cdot \sin(\varphi_K), \\ x_{1\beta} = x_{1u} \cdot \sin(\varphi_K) + x_{1v} \cdot \cos(\varphi_K), \\ x_{2d} = x_{2u} \cdot \cos(\varphi_K - \varphi_{\text{ЭЛ}}) - x_{2v} \cdot \sin(\varphi_K - \varphi_{\text{ЭЛ}}), \\ x_{2q} = x_{2u} \cdot \sin(\varphi_K - \varphi_{\text{ЭЛ}}) + x_{2v} \cdot \cos(\varphi_K - \varphi_{\text{ЭЛ}}). \end{cases} \quad (3.7)$$

Для преобразования исходных уравнений к новым переменным в осях uv используют преобразование (3.7) для каждой переменной с последующим разделением переменных по осям. Уравнения для статора

$$\begin{cases} u_{1\alpha} = R_1 \cdot i_{1\alpha} + \frac{d\psi_{1\alpha}}{dt}, \\ u_{1\beta} = R_1 \cdot i_{1\beta} + \frac{d\psi_{1\beta}}{dt}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{1u} \cdot \cos(\varphi_K) - u_{1v} \cdot \sin(\varphi_K) = R_1 \cdot [i_{1u} \cdot \cos(\varphi_K) - i_{1v} \cdot \sin(\varphi_K)] + \\ + \frac{d}{dt} [\psi_{1u} \cdot \cos(\varphi_K) - \psi_{1v} \cdot \sin(\varphi_K)], \\ u_{1u} \cdot \sin(\varphi_K) + u_{1v} \cdot \cos(\varphi_K) = R_1 \cdot [i_{1u} \cdot \sin(\varphi_K) + i_{1v} \cdot \cos(\varphi_K)] + \\ + \frac{d}{dt} [\psi_{1u} \cdot \sin(\varphi_K) + \psi_{1v} \cdot \cos(\varphi_K)]. \end{cases}$$

Раскроем скобки при производных

$$\begin{cases} u_{1u} \cdot \cos(\varphi_K) - u_{1v} \cdot \sin(\varphi_K) = R_1 \cdot [i_{1u} \cdot \cos(\varphi_K) - i_{1v} \cdot \sin(\varphi_K)] + \\ + \frac{d\psi_{1u}}{dt} \cdot \cos(\varphi_K) - \omega_K \cdot \psi_{1u} \cdot \sin(\varphi_K) - \frac{d\psi_{1v}}{dt} \cdot \sin(\varphi_K) - \omega_K \cdot \psi_{1v} \cdot \cos(\varphi_K), \\ u_{1u} \cdot \sin(\varphi_K) + u_{1v} \cdot \cos(\varphi_K) = R_1 \cdot [i_{1u} \cdot \sin(\varphi_K) + i_{1v} \cdot \cos(\varphi_K)] + \\ + \frac{d\psi_{1u}}{dt} \cdot \sin(\varphi_K) + \omega_K \cdot \psi_{1u} \cdot \cos(\varphi_K) + \frac{d\psi_{1v}}{dt} \cdot \cos(\varphi_K) - \omega_K \cdot \psi_{1v} \cdot \sin(\varphi_K). \end{cases}$$

1-ое уравнение умножим на $\cos(\varphi_K)$, 2-ое – на $\sin(\varphi_K)$ и сложим

$$\begin{aligned}
 & u_{1u} \cdot \cos^2(\varphi_K) + u_{1u} \cdot \sin^2(\varphi_K) - \\
 & - u_{1v} \cdot \sin(\varphi_K) \cdot \cos(\varphi_K) + u_{1v} \cdot \cos(\varphi_K) \cdot \sin(\varphi_K) = \\
 & = R_1 \cdot i_{1u} \cdot \cos^2(\varphi_K) + R_1 \cdot i_{1u} \cdot \sin^2(\varphi_K) - \\
 & - R_1 \cdot i_{1v} \cdot \sin(\varphi_K) \cdot \cos(\varphi_K) + R_1 \cdot i_{1v} \cdot \cos(\varphi_K) \cdot \sin(\varphi_K) + \\
 & + \frac{d\psi_{1u}}{dt} \cdot \cos^2(\varphi_K) + \frac{d\psi_{1u}}{dt} \cdot \sin^2(\varphi_K) - \\
 & - \omega_K \cdot \psi_{1u} \cdot \sin(\varphi_K) \cdot \cos(\varphi_K) + \omega_K \cdot \psi_{1u} \cdot \cos(\varphi_K) \cdot \sin(\varphi_K) - \\
 & - \frac{d\psi_{1v}}{dt} \cdot \sin(\varphi_K) \cdot \cos(\varphi_K) + \frac{d\psi_{1v}}{dt} \cdot \cos(\varphi_K) \cdot \sin(\varphi_K) - \\
 & - \omega_K \cdot \psi_{1v} \cdot \cos^2(\varphi_K) - \omega_K \cdot \psi_{1v} \cdot \sin^2(\varphi_K); \\
 & \quad u_{1u} = R_1 \cdot i_{1u} + \frac{d\psi_{1u}}{dt} - \omega_K \cdot \psi_{1v}.
 \end{aligned}$$

1-ое уравнение умножим на $-\sin(\varphi_K)$, 2-ое – на $\cos(\varphi_K)$ и сложим

$$u_{1v} = R_1 \cdot i_{1v} + \frac{d\psi_{1v}}{dt} + \omega_K \cdot \psi_{1u}.$$

Для преобразования уравнений ротора выполним аналогичные действия.

$$\begin{cases}
 u_{1u} = R_1 \cdot i_{1u} + \frac{d\psi_{1u}}{dt} - \omega_K \cdot \psi_{1v}, \\
 u_{1v} = R_1 \cdot i_{1v} + \frac{d\psi_{1v}}{dt} + \omega_K \cdot \psi_{1u}, \\
 u_{2u} = R_2 \cdot i_{2u} + \frac{d\psi_{2u}}{dt} - (\omega_K - \omega_{\text{ЭЛ}}) \cdot \psi_{2v}, \\
 u_{2v} = R_2 \cdot i_{2v} + \frac{d\psi_{2v}}{dt} + (\omega_K - \omega_{\text{ЭЛ}}) \cdot \psi_{2u}.
 \end{cases} \quad (3.8)$$

Выражения для потокосцеплений (3.2) с учетом значений индуктивностей неявнополюсной машины

$$\begin{cases}
 \psi_{1\alpha} = L_1 \cdot i_{1\alpha} + L_{12} \cdot \cos(\varphi_{\text{ЭЛ}}) \cdot i_{2d} - L_{12} \cdot \sin(\varphi_{\text{ЭЛ}}) \cdot i_{2q}, \\
 \psi_{1\beta} = L_1 \cdot i_{1\beta} + L_{12} \cdot \sin(\varphi_{\text{ЭЛ}}) \cdot i_{2d} + L_{12} \cdot \cos(\varphi_{\text{ЭЛ}}) \cdot i_{2q}, \\
 \psi_{2d} = L_2 \cdot i_{2d} + L_{12} \cdot \cos(\varphi_{\text{ЭЛ}}) \cdot i_{1\alpha} + L_{12} \cdot \sin(\varphi_{\text{ЭЛ}}) \cdot i_{1\beta}, \\
 \psi_{2q} = L_2 \cdot i_{2q} - L_{12} \cdot \sin(\varphi_{\text{ЭЛ}}) \cdot i_{1\alpha} + L_{12} \cdot \cos(\varphi_{\text{ЭЛ}}) \cdot i_{1\beta}.
 \end{cases}$$

Применим преобразования (3.7) к выражениям для потокосцеплений обмоток статора

$$\begin{cases} \psi_{1u} \cdot \cos(\varphi_K) - \psi_{1v} \cdot \sin(\varphi_K) = L_1 \cdot [i_{1u} \cdot \cos(\varphi_K) - i_{1v} \cdot \sin(\varphi_K)] + \\ + L_{12} \cdot \cos(\varphi_{\text{ЭЛ}}) \cdot [i_{2u} \cdot \cos(\varphi_K - \varphi_{\text{ЭЛ}}) - i_{2v} \cdot \sin(\varphi_K - \varphi_{\text{ЭЛ}})] - \\ - L_{12} \cdot \sin(\varphi_{\text{ЭЛ}}) \cdot [i_{2u} \cdot \sin(\varphi_K - \varphi_{\text{ЭЛ}}) + i_{2v} \cdot \cos(\varphi_K - \varphi_{\text{ЭЛ}})], \\ \psi_{1u} \cdot \sin(\varphi_K) + \psi_{1v} \cdot \cos(\varphi_K) = L_1 \cdot [i_{1u} \cdot \sin(\varphi_K) + i_{1v} \cdot \cos(\varphi_K)] + \\ + L_{12} \cdot \sin(\varphi_{\text{ЭЛ}}) \cdot [i_{2u} \cdot \cos(\varphi_K - \varphi_{\text{ЭЛ}}) - i_{2v} \cdot \sin(\varphi_K - \varphi_{\text{ЭЛ}})] + \\ + L_{12} \cdot \cos(\varphi_{\text{ЭЛ}}) \cdot [i_{2u} \cdot \sin(\varphi_K - \varphi_{\text{ЭЛ}}) + i_{2v} \cdot \cos(\varphi_K - \varphi_{\text{ЭЛ}})]; \\ \psi_{1u} \cdot \cos(\varphi_K) - \psi_{1v} \cdot \sin(\varphi_K) = L_1 \cdot \cos(\varphi_K) \cdot i_{1u} - L_1 \cdot \sin(\varphi_K) \cdot i_{1v} + \\ + L_{12} \cdot i_{2u} \cdot [\cos(\varphi_{\text{ЭЛ}}) \cdot \cos(\varphi_K - \varphi_{\text{ЭЛ}}) - \sin(\varphi_{\text{ЭЛ}}) \cdot \sin(\varphi_K - \varphi_{\text{ЭЛ}})] + \\ + L_{12} \cdot i_{2v} \cdot [-\cos(\varphi_{\text{ЭЛ}}) \cdot \sin(\varphi_K - \varphi_{\text{ЭЛ}}) - \sin(\varphi_{\text{ЭЛ}}) \cdot \cos(\varphi_K - \varphi_{\text{ЭЛ}})], \\ \psi_{1u} \cdot \sin(\varphi_K) + \psi_{1v} \cdot \cos(\varphi_K) = L_1 \cdot \sin(\varphi_K) \cdot i_{1u} + L_1 \cdot \cos(\varphi_K) \cdot i_{1v} + \\ + L_{12} \cdot i_{2u} \cdot [\sin(\varphi_{\text{ЭЛ}}) \cdot \cos(\varphi_K - \varphi_{\text{ЭЛ}}) + \cos(\varphi_{\text{ЭЛ}}) \cdot \sin(\varphi_K - \varphi_{\text{ЭЛ}})] + \\ + L_{12} \cdot i_{2v} \cdot [-\sin(\varphi_{\text{ЭЛ}}) \cdot \sin(\varphi_K - \varphi_{\text{ЭЛ}}) + \cos(\varphi_{\text{ЭЛ}}) \cdot \cos(\varphi_K - \varphi_{\text{ЭЛ}})]. \end{cases}$$

1-ое уравнение умножим на $\cos(\varphi_K)$, 2-ое – на $\sin(\varphi_K)$ и сложим

$$\begin{aligned} & \psi_{1u} \cdot \cos^2(\varphi_K) + \psi_{1u} \cdot \sin^2(\varphi_K) - \psi_{1v} \cdot \sin(\varphi_K) \cdot \cos(\varphi_K) + \psi_{1v} \cdot \cos(\varphi_K) \cdot \sin(\varphi_K) = \\ & = L_1 \cdot i_{1u} \cdot \cos^2(\varphi_K) + L_1 \cdot i_{1u} \cdot \sin^2(\varphi_K) - \\ & - L_1 \cdot i_{1v} \cdot \sin(\varphi_K) \cdot \cos(\varphi_K) + L_1 \cdot i_{1v} \cdot \cos(\varphi_K) \cdot \sin(\varphi_K) + \\ & + L_{12} \cdot i_{2u} \cdot \left[\cos(\varphi_K) \cdot \cos(\varphi_{\text{ЭЛ}}) \cdot \cos(\varphi_K - \varphi_{\text{ЭЛ}}) - \cos(\varphi_K) \cdot \sin(\varphi_{\text{ЭЛ}}) \cdot \sin(\varphi_K - \varphi_{\text{ЭЛ}}) + \right. \\ & \left. + \sin(\varphi_K) \cdot \sin(\varphi_{\text{ЭЛ}}) \cdot \cos(\varphi_K - \varphi_{\text{ЭЛ}}) + \sin(\varphi_K) \cdot \cos(\varphi_{\text{ЭЛ}}) \cdot \sin(\varphi_K - \varphi_{\text{ЭЛ}}) \right] + \\ & + L_{12} \cdot i_{2v} \cdot \left[-\cos(\varphi_K) \cdot \cos(\varphi_{\text{ЭЛ}}) \cdot \sin(\varphi_K - \varphi_{\text{ЭЛ}}) - \cos(\varphi_K) \cdot \sin(\varphi_{\text{ЭЛ}}) \cdot \cos(\varphi_K - \varphi_{\text{ЭЛ}}) - \right. \\ & \left. - \sin(\varphi_K) \cdot \sin(\varphi_{\text{ЭЛ}}) \cdot \sin(\varphi_K - \varphi_{\text{ЭЛ}}) + \sin(\varphi_K) \cdot \cos(\varphi_{\text{ЭЛ}}) \cdot \cos(\varphi_K - \varphi_{\text{ЭЛ}}) \right]; \\ & \psi_{1u} = L_1 \cdot i_{1u} + \\ & + L_{12} \cdot i_{2u} \cdot [\cos(\varphi_K - \varphi_{\text{ЭЛ}}) \cdot \cos(\varphi_K - \varphi_{\text{ЭЛ}}) + \sin(\varphi_K - \varphi_{\text{ЭЛ}}) \cdot \sin(\varphi_K - \varphi_{\text{ЭЛ}})] + \\ & + L_{12} \cdot i_{2v} \cdot [-\cos(\varphi_K - \varphi_{\text{ЭЛ}}) \cdot \sin(\varphi_K - \varphi_{\text{ЭЛ}}) + \sin(\varphi_K - \varphi_{\text{ЭЛ}}) \cdot \cos(\varphi_K - \varphi_{\text{ЭЛ}})]; \\ & \psi_{1u} = L_1 \cdot i_{1u} + L_{12} \cdot i_{2u}. \end{aligned}$$

Выполнив аналогичные действия получим

$$\begin{cases} \psi_{1u} = L_1 \cdot i_{1u} + L_{12} \cdot i_{2u}, \\ \psi_{1v} = L_1 \cdot i_{1v} + L_{12} \cdot i_{2v}, \\ \psi_{2u} = L_2 \cdot i_{2u} + L_{12} \cdot i_{1u}, \\ \psi_{2v} = L_2 \cdot i_{2v} + L_{12} \cdot i_{1v}. \end{cases} \quad (3.9)$$

После преобразования выражения для момента неявнополюсной машины получим

$$\begin{aligned}
 M &= p_D \cdot (\psi_{1u} \cdot i_{1v} - \psi_{1v} \cdot i_{1u}) = p_D \cdot (\psi_{2v} \cdot i_{2u} - \psi_{2u} \cdot i_{2v}) = \\
 &= p_D \cdot L_{12} \cdot (i_{2v} \cdot i_{1u} - i_{2u} \cdot i_{1v}) = \frac{p_D \cdot L_{12}}{L_1 \cdot L_2 - L_{12}^2} \cdot (\psi_{1v} \cdot \psi_{2u} - \psi_{1u} \cdot \psi_{2v}).
 \end{aligned}$$

3.3. Представление уравнений обобщенной электрической машины в различных системах координат

Для получения математических моделей двигателей используют систему уравнений, записанную в осях, жестко связанных со статором, ротором или вращающихся с синхронной скоростью $\omega_{0ЭЛ}$:

1. $\omega_K = 0$. Система координат жестко связанная со статором $\alpha\beta$.

$$\begin{cases}
 u_{1\alpha} = R_1 \cdot i_{1\alpha} + \frac{d\psi_{1\alpha}}{dt}, \\
 u_{1\beta} = R_1 \cdot i_{1\beta} + \frac{d\psi_{1\beta}}{dt}, \\
 u_{2\alpha} = R_2 \cdot i_{2\alpha} + \frac{d\psi_{2\alpha}}{dt} + \omega_{ЭЛ} \cdot \psi_{2\beta}, \\
 u_{2\beta} = R_2 \cdot i_{2\beta} + \frac{d\psi_{2\beta}}{dt} - \omega_{ЭЛ} \cdot \psi_{2\alpha}.
 \end{cases}$$

2. $\omega_K = \omega_{ЭЛ}$. Система координат жестко связанная с ротором dq .

$$\begin{cases}
 u_{1d} = R_1 \cdot i_{1d} + \frac{d\psi_{1d}}{dt} - \omega_{ЭЛ} \cdot \psi_{1q}, \\
 u_{1q} = R_1 \cdot i_{1q} + \frac{d\psi_{1q}}{dt} + \omega_{ЭЛ} \cdot \psi_{1d}, \\
 u_{2d} = R_2 \cdot i_{2d} + \frac{d\psi_{2d}}{dt}, \\
 u_{2q} = R_2 \cdot i_{2q} + \frac{d\psi_{2q}}{dt}.
 \end{cases}$$

3. $\omega_K = \omega_{0ЭЛ}$. Система координат xu жестко связанная с полем статора. К обмотке статора приложены напряжения

$$u_{1x} = u_{1m} \cdot \cos(\omega_{0ЭЛ} \cdot t), \quad u_{1y} = u_{1m} \cdot \sin(\omega_{0ЭЛ} \cdot t).$$

Применим (3.6)

$$\begin{aligned}
 u_{1x} &= u_{1m} \cdot \cos^2(\omega_{0ЭЛ} \cdot t) + u_{1m} \cdot \sin^2(\omega_{0ЭЛ} \cdot t) = u_{1m}, \\
 u_{1y} &= -u_{1m} \cdot \cos(\omega_{0ЭЛ} \cdot t) \cdot \sin(\omega_{0ЭЛ} \cdot t) + u_{1m} \cdot \sin(\omega_{0ЭЛ} \cdot t) \cdot \cos(\omega_{0ЭЛ} \cdot t) = 0.
 \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{cases} u_{1m} = R_1 \cdot i_{1x} + \frac{d\psi_{1x}}{dt} - \omega_{0ЭЛ} \cdot \psi_{1y}, \\ 0 = R_1 \cdot i_{1y} + \frac{d\psi_{1y}}{dt} + \omega_{0ЭЛ} \cdot \psi_{1x}, \\ u_{2x} = R_2 \cdot i_{2x} + \frac{d\psi_{2x}}{dt} - (\omega_{0ЭЛ} - \omega_{ЭЛ}) \cdot \psi_{2y}, \\ u_{2y} = R_2 \cdot i_{2y} + \frac{d\psi_{2y}}{dt} + (\omega_{0ЭЛ} - \omega_{ЭЛ}) \cdot \psi_{2x}. \end{cases}$$

3.4. Трехфазно-двухфазные преобразования переменных

Динамика любой симметричной многофазной машины может быть путем замены переменных описана системой уравнений эквивалентной двухфазной машины. Т.е. имеет место задача преобразования переменных реальной машины к системе координат двухфазной машины. Рассмотрим преобразования для трехфазной машины

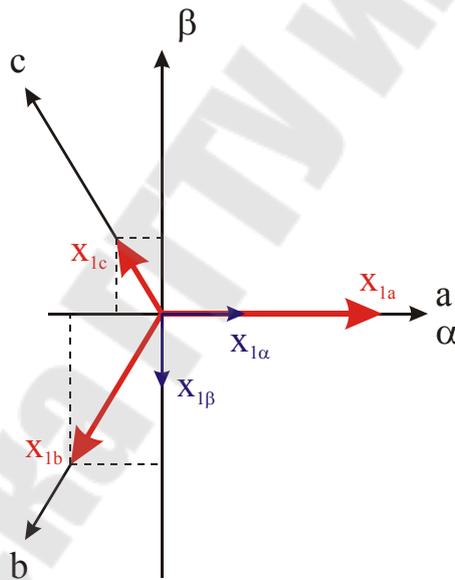


Рис. 3.4. Проекция координат.

$$\begin{cases} x_{1\alpha} = k_C \cdot [x_{1a} - x_{1b} \cdot \sin(30^\circ) - x_{1c} \cdot \sin(30^\circ)] = k_C \cdot \left(x_{1a} - \frac{1}{2} \cdot x_{1b} - \frac{1}{2} \cdot x_{1c} \right), \\ x_{1\beta} = k_C \cdot [x_{1c} \cdot \cos(30^\circ) - x_{1b} \cdot \cos(30^\circ)] = k_C \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x_{1c} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x_{1b} \right), \end{cases}$$

где k_C – согласующий коэффициент, который необходимо выбрать по условию инвариантности мощности.

Рассмотрим случай для симметричной системы трехфазных переменных

$$x_{1a} + x_{1b} + x_{1c} = 0.$$

Тогда

$$\begin{cases} x_{1\alpha} = k_C \cdot \left(x_{1a} - \frac{1}{2} \cdot x_{1b} - \frac{1}{2} \cdot x_{1c} + \frac{1}{2} \cdot x_{1a} + \frac{1}{2} \cdot x_{1b} + \frac{1}{2} \cdot x_{1c} \right) = k_C \cdot \frac{3}{2} \cdot x_{1a}, \\ x_{1\beta} = k_C \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (x_{1c} - x_{1b}) \end{cases}$$

Переменные для роторной цепи машины x_{2d} и x_{2q} также определяются подобными выражениями при соответствующей замене индексов.

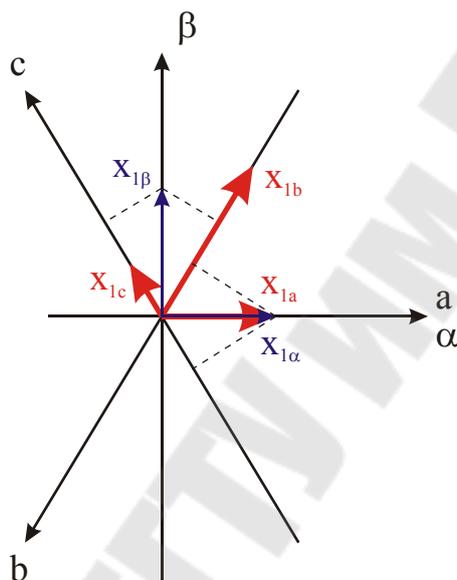


Рис. 3.5. Проекция координат.

$$\begin{cases} x_{1a} = k_C \cdot x_{1\alpha}, \\ x_{1b} = k_C \cdot \left[-x_{1\alpha} \cdot \sin(30^\circ) - x_{1\beta} \cdot \cos(30^\circ) \right] = k_C \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot x_{1\alpha} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x_{1\beta} \right), \\ x_{1c} = k_C \cdot \left[-x_{1\alpha} \cdot \sin(30^\circ) + x_{1\beta} \cdot \cos(30^\circ) \right] = k_C \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot x_{1\alpha} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x_{1\beta} \right). \end{cases}$$

Для получения k_C выразим через переменные двухфазной машины мгновенную мощность

$$\begin{aligned}
s &= \mathbf{i}_{1a} \cdot \mathbf{u}_{1a} + \mathbf{i}_{1b} \cdot \mathbf{u}_{1b} + \mathbf{i}_{1c} \cdot \mathbf{u}_{1c} = k_C \cdot \mathbf{i}_{1\alpha} \cdot k_C \cdot \mathbf{u}_{1\alpha} + \\
&+ k_C \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot \mathbf{i}_{1\alpha} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \mathbf{i}_{1\beta} \right) \cdot k_C \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot \mathbf{u}_{1\alpha} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \mathbf{u}_{1\beta} \right) + \\
&+ k_C \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot \mathbf{i}_{1\alpha} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \mathbf{i}_{1\beta} \right) \cdot k_C \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot \mathbf{u}_{1\alpha} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \mathbf{u}_{1\beta} \right) = \\
&= k_C^2 \cdot \left(\begin{array}{l} \mathbf{i}_{1\alpha} \cdot \mathbf{u}_{1\alpha} + \\ + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{i}_{1\alpha} \cdot \frac{1}{2} \cdot \mathbf{u}_{1\alpha} + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{i}_{1\alpha} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \mathbf{u}_{1\beta} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \mathbf{i}_{1\beta} \cdot \frac{1}{2} \cdot \mathbf{u}_{1\alpha} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \mathbf{i}_{1\beta} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \mathbf{u}_{1\beta} + \\ + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{i}_{1\alpha} \cdot \frac{1}{2} \cdot \mathbf{u}_{1\alpha} - \frac{1}{2} \cdot \mathbf{i}_{1\alpha} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \mathbf{u}_{1\beta} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \mathbf{i}_{1\beta} \cdot \frac{1}{2} \cdot \mathbf{u}_{1\alpha} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \mathbf{i}_{1\beta} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \mathbf{u}_{1\beta} \end{array} \right) = \\
&= k_C^2 \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) \cdot \mathbf{i}_{1\alpha} \cdot \mathbf{u}_{1\alpha} + \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{4} \right) \cdot \mathbf{i}_{1\beta} \cdot \mathbf{u}_{1\beta} \right] = k_C^2 \cdot \frac{3}{2} \cdot (\mathbf{i}_{1\alpha} \cdot \mathbf{u}_{1\alpha} + \mathbf{i}_{1\beta} \cdot \mathbf{u}_{1\beta}) = \\
&= k_C^2 \cdot \frac{3}{2} \cdot s.
\end{aligned}$$

Отсюда

$$k_{C3 \rightarrow 2}^2 = \frac{2}{3}, \quad k_{C3 \rightarrow 2} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

При обратных преобразованиях

$$\begin{aligned}
s &= i_{1\alpha} \cdot u_{1\alpha} + i_{1\beta} \cdot u_{1\beta} = \\
&= k_C \cdot \left(i_{1a} - \frac{1}{2} \cdot i_{1b} - \frac{1}{2} \cdot i_{1c} \right) \cdot k_C \cdot \left(u_{1a} - \frac{1}{2} \cdot u_{1b} - \frac{1}{2} \cdot u_{1c} \right) + \\
&+ k_C \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i_{1c} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i_{1b} \right) \cdot k_C \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot u_{1c} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot u_{1b} \right) = \\
&= k_C^2 \cdot \left(\begin{aligned} &i_{1a} \cdot u_{1a} - \frac{1}{2} \cdot i_{1a} \cdot u_{1b} - \frac{1}{2} \cdot i_{1a} \cdot u_{1c} - \frac{1}{2} \cdot i_{1b} \cdot u_{1a} + \frac{1}{4} \cdot i_{1b} \cdot u_{1b} + \\ &+ \frac{1}{4} \cdot i_{1b} \cdot u_{1c} - \frac{1}{2} \cdot i_{1c} \cdot u_{1a} + \frac{1}{4} \cdot i_{1c} \cdot u_{1b} + \frac{1}{4} \cdot i_{1c} \cdot u_{1c} + \\ &+ \frac{3}{4} \cdot i_{1c} \cdot u_{1c} - \frac{3}{4} \cdot i_{1c} \cdot u_{1b} - \frac{3}{4} \cdot i_{1b} \cdot u_{1c} + \frac{3}{4} \cdot i_{1b} \cdot u_{1b} \end{aligned} \right) = \\
&= k_C^2 \cdot \left(\begin{aligned} &i_{1a} \cdot u_{1a} + i_{1b} \cdot u_{1b} + i_{1c} \cdot u_{1c} - \frac{1}{2} \cdot i_{1a} \cdot u_{1b} - \frac{1}{2} \cdot i_{1a} \cdot u_{1c} - \\ & - \frac{1}{2} \cdot i_{1b} \cdot u_{1a} - \frac{1}{2} \cdot i_{1c} \cdot u_{1a} - \frac{1}{2} \cdot i_{1b} \cdot u_{1c} - \frac{1}{2} \cdot i_{1c} \cdot u_{1b} \end{aligned} \right) = \\
&= k_C^2 \cdot \left[\begin{aligned} &i_{1a} \cdot u_{1a} + i_{1b} \cdot u_{1b} + i_{1c} \cdot u_{1c} - \frac{1}{2} \cdot (-i_{1b} - i_{1c}) \cdot u_{1b} - \frac{1}{2} \cdot (-i_{1b} - i_{1c}) \cdot u_{1c} - \\ & - \frac{1}{2} \cdot (-i_{1a} - i_{1c}) \cdot u_{1a} - \frac{1}{2} \cdot i_{1c} \cdot u_{1a} - \frac{1}{2} \cdot i_{1b} \cdot u_{1c} - \frac{1}{2} \cdot i_{1c} \cdot u_{1b} \end{aligned} \right] = \\
&= k_C^2 \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot i_{1a} \cdot u_{1a} + \frac{3}{2} \cdot i_{1b} \cdot u_{1b} + \frac{3}{2} \cdot i_{1c} \cdot u_{1c} \right) = k_C^2 \cdot \frac{3}{2} \cdot (i_{1a} \cdot u_{1a} + i_{1b} \cdot u_{1b} + i_{1c} \cdot u_{1c}) = \\
&= k_C^2 \cdot \frac{3}{2} \cdot s.
\end{aligned}$$

Отсюда

$$k_{C2 \rightarrow 3}^2 = \frac{2}{3}, \quad k_{C2 \rightarrow 3} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

3.5. Модель ДПТ независимого возбуждения

Для преобразования энергии необходимо, чтобы переменным током обтекалось по крайней мере несколько обмоток. В ДПТ создание переменного тока обеспечивается коллектором, который коммутирует постоянный ток с угловой частотой $\omega_{ЭЛ}$. Т.е. коллектор выполняет функцию механического преобразователя частоты.

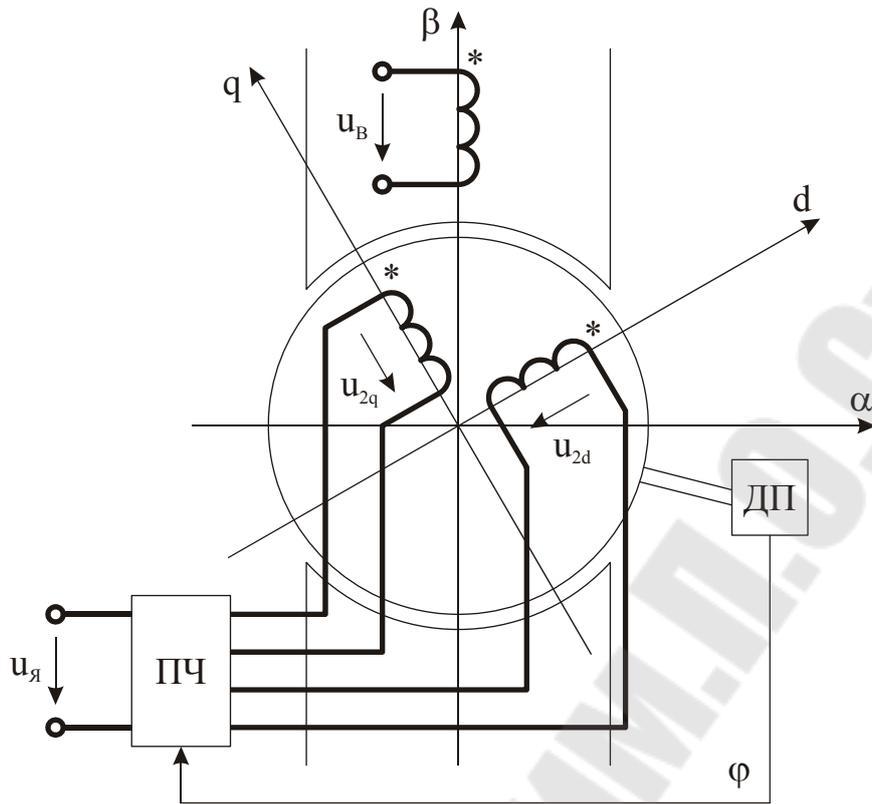


Рис. 3.6. Схема модели ДПТ НВ.

На статоре по оси β расположена обмотка возбуждения ОВ.

$$u_{1\beta} = u_B, \quad i_{1\beta} = i_B.$$

Намагничивающая сила этой обмотки неподвижна относительно статора и направлена по оси β .

Намагничивающая сила роторных обмоток должна вращаться относительно ротора в противоположную сторону, т.е. токи должны изменяться по закону

$$i_{2d} = i_{я} \cdot \cos(\omega_{\text{ЭЛ}} \cdot t), \quad i_{2q} = i_{я} \cdot \cos(90^\circ + \omega_{\text{ЭЛ}} \cdot t) = -i_{я} \cdot \sin(\omega_{\text{ЭЛ}} \cdot t).$$

Используя преобразования (3.6) приведём роторные токи к неподвижным осям статора

$$\begin{aligned} i_{2\alpha} &= i_{я} \cdot \cos(\omega_{\text{ЭЛ}} \cdot t) \cdot \cos(-\omega_{\text{ЭЛ}} \cdot t) - i_{я} \cdot \sin(\omega_{\text{ЭЛ}} \cdot t) \cdot \sin(-\omega_{\text{ЭЛ}} \cdot t) = \\ &= i_{я} \cdot \cos^2(\omega_{\text{ЭЛ}} \cdot t) + i_{я} \cdot \sin^2(\omega_{\text{ЭЛ}} \cdot t) = i_{я}, \\ i_{2\beta} &= -i_{я} \cdot \cos(\omega_{\text{ЭЛ}} \cdot t) \cdot \sin(-\omega_{\text{ЭЛ}} \cdot t) - i_{я} \cdot \sin(\omega_{\text{ЭЛ}} \cdot t) \cdot \cos(-\omega_{\text{ЭЛ}} \cdot t) = 0. \end{aligned}$$

Т.о. переменным токам ротора обобщенной электрической машины эквивалентна в неподвижных осях статора одна обмотка по оси α , запитываемая постоянным током $i_{я}$. Намагничивающая сила этой обмотки направлена по оси α и представляет собой поперечную реакцию якоря, для компенсации которой по этой же оси расположены дополнительные полюса ДП и намагничивающая сила компенсационной обмотки КО.

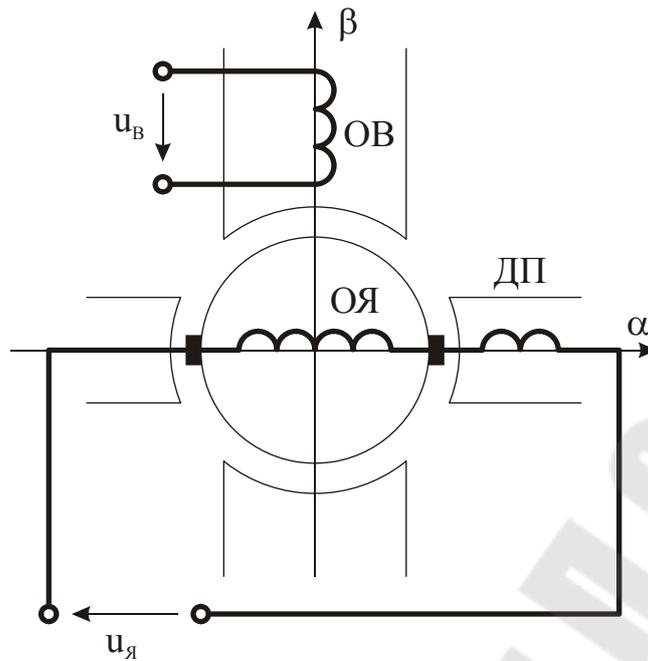


Рис. 3.7. Схема модели ДПТ НВ в осях $\alpha\beta$.

Дополним систему уравнений в осях $\alpha\beta$ выражением для момента

$$\begin{cases} u_{1\alpha} = R_1 \cdot i_{1\alpha} + \frac{d\psi_{1\alpha}}{dt}, \\ u_{1\beta} = R_1 \cdot i_{1\beta} + \frac{d\psi_{1\beta}}{dt}, \\ u_{2\alpha} = R_2 \cdot i_{2\alpha} + \frac{d\psi_{2\alpha}}{dt} + \omega_{\text{ЭЛ}} \cdot \psi_{2\beta}, \\ u_{2\beta} = R_2 \cdot i_{2\beta} + \frac{d\psi_{2\beta}}{dt} - \omega_{\text{ЭЛ}} \cdot \psi_{2\alpha}, \\ M = p_d \cdot L_{12} \cdot (i_{1\beta} \cdot i_{2\alpha} - i_{1\alpha} \cdot i_{2\beta}). \end{cases}$$

Запишем параметры и переменные модели. При этом на статоре по оси α располагать не будем, а включим параметры КО в параметры якорной цепи двигателя.

$$\begin{aligned} u_{1\beta} &= u_B, \quad i_{1\beta} = i_B, \quad u_{1\alpha} = 0, \quad i_{1\alpha} = 0, \\ u_{2\alpha} &= u_я, \quad i_{2\alpha} = i_я, \quad u_{2\beta} = 0, \quad i_{2\beta} = 0, \\ R_1 &= R_B, \quad R_2 = R_{\text{яд}} = R_{\text{оя}} + R_{\text{щк}} + R_{\text{дп}} [+ R_{\text{ко}}], \\ L_{1\beta,1\beta} &= L_B, \quad L_{2\alpha,2\alpha} = L_{\text{яд}} = L_{\text{оя}} + L_{\text{дп}} [+ L_{\text{ко}}], \\ \psi_{1\beta} &= L_{1\beta,1\beta} \cdot i_{1\beta} + L_{12} \cdot i_{2\beta} = L_B \cdot i_B, \\ \psi_{2\alpha} &= L_{2\alpha,2\alpha} \cdot i_{2\alpha} + L_{12} \cdot i_{1\alpha} = L_{\text{яд}} \cdot i_я, \\ \psi_{2\beta} &= L_{2\beta,2\beta} \cdot i_{2\beta} + L_{12} \cdot i_{1\beta} = L_{12} \cdot i_B, \end{aligned}$$

где: $R_{яд}, L_{яд}$ – суммарные активное сопротивление и индуктивность
якорной цепи двигателя,
 $R_{оя}, L_{оя}$ – сопротивление обмотки якоря ОЯ,
 $R_{щк}$ – сопротивление щеточно-коллекторного контакта,
 $R_{дп}, L_{дп}$ – сопротивление обмотки ДП,
 $R_{ко}, L_{ко}$ – сопротивление и индуктивность КО.

Т.о. получим

$$\begin{cases} u_B = R_B \cdot i_B + L_B \cdot \frac{di_B}{dt}, \\ u_{я} = R_{яд} \cdot i_{я} + L_{яд} \cdot \frac{di_{я}}{dt} + \omega_{эл} \cdot L_{12} \cdot i_B, \\ M = p_D \cdot L_{12} \cdot i_B \cdot i_{я}. \end{cases}$$

Третье слагаемое во втором уравнении представляет собой ЭДС вращения (обозначим $e_{я}$)

$$e_{я} = \omega_{эл} \cdot L_{12} \cdot i_B = p_D \cdot L_{12} \cdot i_B \cdot \omega.$$

С другой стороны, через магнитный поток

$$e_{я} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{N}{a} \cdot p_D \cdot \Phi \cdot \omega = k \cdot \Phi \cdot \omega,$$

где: N – число проводников якоря,
 a – число параллельных ветвей,
 Φ – магнитный поток одного полюса.

Тогда

$$\begin{cases} u_B = R_B \cdot i_B + L_B \cdot \frac{di_B}{dt}, \\ u_{я} = R_{яд} \cdot i_{я} + L_{яд} \cdot \frac{di_{я}}{dt} + e_{я}, \\ M = k \cdot \Phi \cdot i_{я}, \\ e_{я} = k \cdot \Phi \cdot \omega, \\ \Phi = k_{\Phi} \cdot i_B, \end{cases}$$

где: $k_{\Phi} = \frac{\Phi_N}{I_{вн}}$ – коэффициент, определяемый по кривой намагничивания.

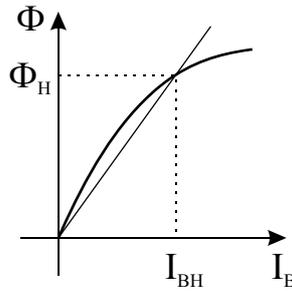


Рис. 3.8. Кривая намагничивания.

Введем обозначения:

$$T_{\text{яд}} = \frac{L_{\text{яд}}}{R_{\text{яд}}} \quad \text{— постоянная времени якорной цепи,}$$

$$T_{\text{в}} = \frac{L_{\text{в}}}{R_{\text{в}}} \quad \text{— постоянная времени цепи возбуждения.}$$

Дополним систему уравнением для механической части и, после преобразований, запишем систему в операторной форме и составим структурную схему, представленную на рис. 3.9.

$$\begin{cases} i_{\text{в}}(p) = \frac{1/R_{\text{в}}}{T_{\text{в}} \cdot p + 1} \cdot u_{\text{в}}(p), \\ i_{\text{я}}(p) = \frac{1/R_{\text{яд}}}{T_{\text{яд}} \cdot p + 1} \cdot [u_{\text{я}}(p) - e_{\text{я}}(p)], \\ \omega(p) = \frac{1}{J \cdot p} \cdot [M(p) - M_{\text{с}}(p)], \\ M(t) = k\Phi(t) \cdot i_{\text{я}}(t), \\ e_{\text{я}}(t) = k\Phi(t) \cdot \omega(t), \\ k\Phi(p) = k \cdot k_{\Phi} \cdot i_{\text{в}}(p). \end{cases}$$

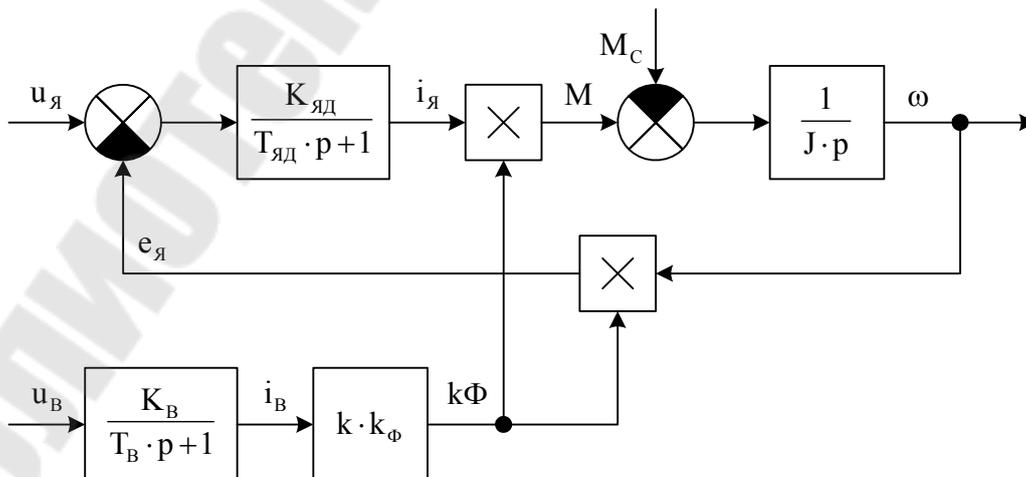


Рис. 3.9. Структурная схема модели ДПТ НВ.

На структурной схеме обозначено:

$$K_{\text{яд}} = \frac{1}{R_{\text{яд}}}, \quad K_{\text{в}} = \frac{1}{R_{\text{в}}}.$$

Если в справочной литературе не хватает параметров, то некоторые из них можно рассчитать по следующим формулам

$$R_{\text{яд}} = 0,5 \cdot \frac{\Delta p_{\text{н}}}{I_{\text{ян}}^2},$$

где: $\Delta p_{\text{н}} = P_{\text{н}} \cdot \left(\frac{1}{\eta_{\text{н}}} - 1 \right)$ – номинальные потери мощности,

$P_{\text{н}}$ – номинальная мощность двигателя,

$\eta_{\text{н}}$ – номинальный КПД двигателя,

$I_{\text{ян}}$ – номинальный ток якоря двигателя.

$$L_{\text{яд}} = \beta_{\text{к}} \cdot \frac{U_{\text{ян}}}{p_{\text{д}} \cdot \omega_{\text{н}} \cdot I_{\text{ян}}},$$

где: $\beta_{\text{к}}$ – коэффициент, учитывающий наличие КО, и принимающий значения: 0,2 – при наличии и 0,6 – при отсутствии;

$U_{\text{ян}}$ – номинальное напряжение на якоре;

$\omega_{\text{н}}$ – номинальная угловая скорость вращения двигателя.

$$k \cdot k_{\phi} = \frac{U_{\text{ян}} - R_{\text{яд}} \cdot I_{\text{ян}}}{\omega_{\text{н}} \cdot I_{\text{вн}}},$$

где $I_{\text{вн}}$ – номинальный ток возбуждения двигателя.

$$R_{\text{в}} = \frac{U_{\text{вн}}}{I_{\text{вн}}},$$

где $U_{\text{вн}}$ – номинальное напряжение возбуждения.

3.6. Модель ДПТ последовательного возбуждения

При анализе процессов в ДПТ последовательного возбуждения (ПВ) в большинстве случаев необходимо учитывать влияние вихревых токов. Это достигается введением фиктивной короткозамкнутой обмотки вихревых токов.

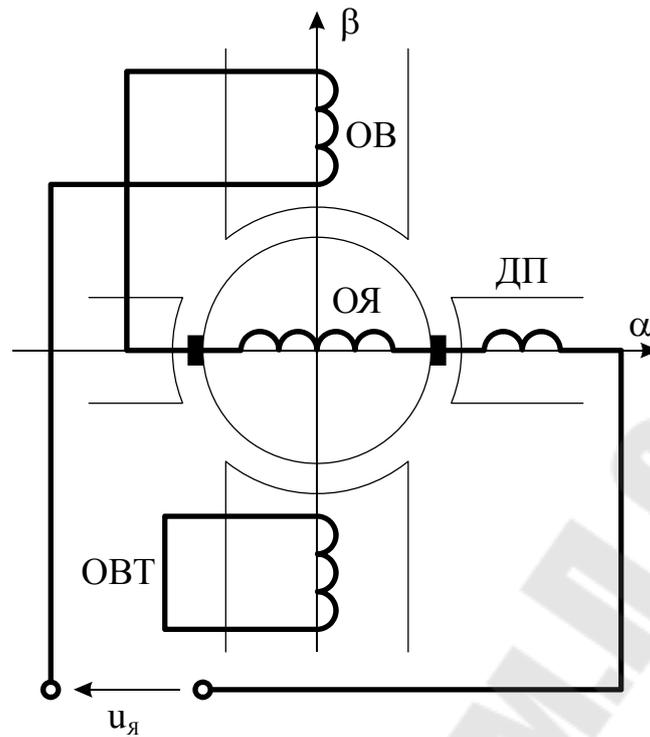


Рис. 3.10. Схема модели ДПТ ПВ.

Запишем систему уравнений

$$\begin{cases} 0 = R_{\text{ВТ}} \cdot i_{\text{ВТ}} + w_{\text{ВТ}} \cdot \frac{d\Phi}{dt}, \\ u_{\text{я}} = R_{\text{яд}} \cdot i_{\text{я}} + L_{\text{яд}} \cdot \frac{di_{\text{я}}}{dt} + e_{\text{я}} + w_{\text{В}} \cdot \frac{d\Phi}{dt}, \\ M = k \cdot \Phi \cdot i_{\text{я}}, \\ e_{\text{я}} = k \cdot \Phi \cdot \omega, \end{cases}$$

где: $i_{\text{ВТ}}$, $R_{\text{ВТ}}$, $w_{\text{ВТ}}$ – ток, сопротивление и число витков фиктивной короткозамкнутой обмотки вихревых токов,
 $w_{\text{В}}$ – число витков последовательной обмотки возбуждения.

Причем в сопротивлении якорной цепи учтено сопротивление обмотки возбуждения

$$R_{\text{яд}} = R_{\text{оя}} + R_{\text{ов}} + R_{\text{щк}} + R_{\text{дп}} [+ R_{\text{ко}}].$$

Разделим первые 2 уравнения на соответствующие сопротивления и вместо первого запишем сумму первых двух

$$\begin{cases} \frac{u_{я}}{R_{яд}} = i_{я} + i_{вг} + \frac{L_{яд}}{R_{яд}} \cdot \frac{di_{я}}{dt} + \frac{e_{я}}{R_{яд}} + \left(\frac{w_{в}}{R_{яд}} + \frac{w_{вг}}{R_{вг}} \right) \cdot \frac{d\Phi}{dt}, \\ \frac{u_{я}}{R_{яд}} = i_{я} + \frac{L_{яд}}{R_{яд}} \cdot \frac{di_{я}}{dt} + \frac{e_{я}}{R_{яд}} + \frac{w_{в}}{R_{яд}} \cdot \frac{d\Phi}{dt}, \\ M = k \cdot \Phi \cdot i_{я}, \\ e_{я} = k \cdot \Phi \cdot \omega. \end{cases}$$

Введем обозначения

$$k_{\Phi} = \frac{\Phi}{i_{я} + i_{вг}}, T_{в} = \frac{k_{\Phi} \cdot w_{в}}{R_{яд}}, T_{вг} = \frac{k_{\Phi} \cdot w_{в}}{R_{яд}} + \frac{k_{\Phi} \cdot w_{вг}}{R_{вг}}.$$

Тогда

$$\begin{cases} \frac{u_{я}}{R_{яд}} = \frac{1}{k_{\Phi}} \cdot \Phi + T_{яд} \cdot \frac{di_{я}}{dt} + \frac{e_{я}}{R_{яд}} + \frac{T_{вг}}{k_{\Phi}} \cdot \frac{d\Phi}{dt}, \\ \frac{u_{я}}{R_{яд}} = i_{я} + T_{яд} \cdot \frac{di_{я}}{dt} + \frac{e_{я}}{R_{яд}} + \frac{T_{в}}{k_{\Phi}} \cdot \frac{d\Phi}{dt}, \\ M = k \cdot \Phi \cdot i_{я}, \\ e_{я} = k \cdot \Phi \cdot \omega. \end{cases}$$

Запишем систему в операторной форме дополнив ее уравнением механической части и преобразовав

$$\begin{cases} k\Phi(p) = \frac{k \cdot k_{\Phi} / R_{яд}}{T_{вг} \cdot p + 1} \cdot [u_{я}(p) - e_{я}(p)] - k \cdot k_{\Phi} \cdot T_{яд} \cdot p \cdot i_{я}(p), \\ i_{я}(p) = \frac{1/R_{яд}}{T_{яд} \cdot p + 1} \cdot [u_{я}(p) - e_{я}(p)] - \frac{T_{в}}{k \cdot k_{\Phi}} \cdot p \cdot k\Phi(p), \\ M(t) = k\Phi(t) \cdot i_{я}(t), \\ \omega(p) = \frac{1}{J \cdot p} \cdot [M(t) - M_c(t)], \\ e_{я}(t) = k\Phi(t) \cdot \omega(t). \end{cases}$$

По полученной системе составим структурную схему, показанную на рис. 3.11.

Введем обозначение $\underline{I}_\mu = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$. В выражениях для потокосцеплений добавим и вычтем произведение L_{12} на соответствующий ток.

$$\begin{cases} \underline{\Psi}_1 = L_1 \cdot \underline{I}_1 - L_{12} \cdot \underline{I}_1 + L_{12} \cdot \underline{I}_1 + L_{12} \cdot \underline{I}_2 = (L_1 - L_{12}) \cdot \underline{I}_1 + L_{12} \cdot \underline{I}_\mu, \\ \underline{\Psi}_2 = L_2 \cdot \underline{I}_2 - L_{12} \cdot \underline{I}_2 + L_{12} \cdot \underline{I}_2 + L_{12} \cdot \underline{I}_1 = (L_2 - L_{12}) \cdot \underline{I}_2 + L_{12} \cdot \underline{I}_\mu. \end{cases}$$

Учтя, что для установившегося режима $\frac{d\Psi}{dt} = 0$ получим

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = R_1 \cdot \underline{I}_1 + j \cdot \omega_{0ЭЛ} \cdot (L_1 - L_{12}) \cdot \underline{I}_1 + j \cdot \omega_{0ЭЛ} \cdot L_{12} \cdot \underline{I}_\mu, \\ 0 = R_2 \cdot \underline{I}_2 + j \cdot (\omega_{0ЭЛ} - \omega_{ЭЛ}) \cdot (L_2 - L_{12}) \cdot \underline{I}_2 + j \cdot (\omega_{0ЭЛ} - \omega_{ЭЛ}) \cdot L_{12} \cdot \underline{I}_\mu. \end{cases}$$

Разделим 2-ое уравнение на $(\omega_{0ЭЛ} - \omega_{ЭЛ})$ и умножим на $\omega_{0ЭЛ}$

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = R_1 \cdot \underline{I}_1 + j \cdot \omega_{0ЭЛ} \cdot (L_1 - L_{12}) \cdot \underline{I}_1 + j \cdot \omega_{0ЭЛ} \cdot L_{12} \cdot \underline{I}_\mu, \\ 0 = R_2 \cdot \frac{\omega_{0ЭЛ}}{\omega_{0ЭЛ} - \omega_{ЭЛ}} \cdot \underline{I}_2 + j \cdot \omega_{0ЭЛ} \cdot (L_2 - L_{12}) \cdot \underline{I}_2 + j \cdot \omega_{0ЭЛ} \cdot L_{12} \cdot \underline{I}_\mu. \end{cases}$$

Введя обозначения

$$x_1 = \omega_{0ЭЛ} \cdot (L_1 - L_{12}), \quad x_2 = \omega_{0ЭЛ} \cdot (L_2 - L_{12}), \quad x_\mu = \omega_{0ЭЛ} \cdot L_{12},$$

получим уравнения, по которым составляется Т-образная схема замещения

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = R_1 \cdot \underline{I}_1 + j \cdot x_1 \cdot \underline{I}_1 + j \cdot x_\mu \cdot \underline{I}_\mu, \\ 0 = \frac{R_2}{s} \cdot \underline{I}_2 + j \cdot x_2 \cdot \underline{I}_2 + j \cdot x_\mu \cdot \underline{I}_\mu, \end{cases}$$

где $s = \frac{\omega_{0ЭЛ} - \omega_{ЭЛ}}{\omega_{0ЭЛ}}$ – скольжение.

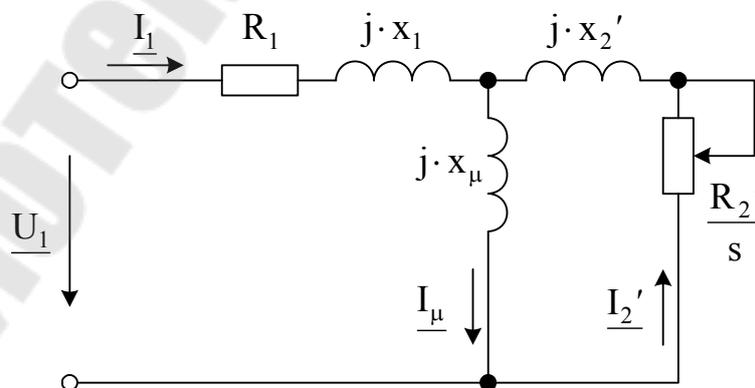


Рис. 3.12. Т-образная схема замещения АД.

Т.о. через параметры схемы замещения параметры модели определяются по следующим формулам

$$L_1 = \frac{X_1 + X_\mu}{\omega_{0ЭЛ}}, L_2 = \frac{X_2' + X_\mu}{\omega_{0ЭЛ}}, L_{12} = \frac{X_\mu}{\omega_{0ЭЛ}}.$$

В системе уравнений в осях uv

$$\begin{cases} u_{1u} = R_1 \cdot i_{1u} + \frac{d\psi_{1u}}{dt} - \omega_K \cdot \psi_{1v}, \\ u_{1v} = R_1 \cdot i_{1v} + \frac{d\psi_{1v}}{dt} + \omega_K \cdot \psi_{1u}, \\ u_{2u} = R_2 \cdot i_{2u} + \frac{d\psi_{2u}}{dt} - (\omega_K - \omega_{ЭЛ}) \cdot \psi_{2v}, \\ u_{2v} = R_2 \cdot i_{2v} + \frac{d\psi_{2v}}{dt} + (\omega_K - \omega_{ЭЛ}) \cdot \psi_{2u}, \\ m = \frac{p_D \cdot L_{12}}{L_1 \cdot L_2 - L_{12}^2} \cdot (\psi_{1v} \cdot \psi_{2u} - \psi_{1u} \cdot \psi_{2v}), \\ \begin{cases} \psi_{1u} = L_1 \cdot i_{1u} + L_{12} \cdot i_{2u}, \\ \psi_{1v} = L_1 \cdot i_{1v} + L_{12} \cdot i_{2v}, \\ \psi_{2u} = L_2 \cdot i_{2u} + L_{12} \cdot i_{1u}, \\ \psi_{2v} = L_2 \cdot i_{2v} + L_{12} \cdot i_{1v}. \end{cases} \end{cases}$$

выразим токи через потокосцепления

$$\begin{cases} i_{1u} = \frac{L_2 \cdot \psi_{1u} - L_{12} \cdot \psi_{2u}}{L_1 \cdot L_2 - L_{12}^2}, \\ i_{1v} = \frac{L_2 \cdot \psi_{1v} - L_{12} \cdot \psi_{2v}}{L_1 \cdot L_2 - L_{12}^2}, \\ i_{2u} = \frac{L_1 \cdot \psi_{2u} - L_{12} \cdot \psi_{1u}}{L_1 \cdot L_2 - L_{12}^2}, \\ i_{2v} = \frac{L_1 \cdot \psi_{2v} - L_{12} \cdot \psi_{1v}}{L_1 \cdot L_2 - L_{12}^2}. \end{cases}$$

и подставим в дифференциальные уравнения

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\psi_{1u}}{dt} &= u_{1u} - \frac{R_1 \cdot L_2}{L_1 \cdot L_2 - L_{12}^2} \cdot \psi_{1u} + \frac{R_1 \cdot L_{12}}{L_1 \cdot L_2 - L_{12}^2} \cdot \psi_{2u} + \omega_K \cdot \psi_{1v}, \\ \frac{d\psi_{1v}}{dt} &= u_{1v} - \frac{R_1 \cdot L_2}{L_1 \cdot L_2 - L_{12}^2} \cdot \psi_{1v} + \frac{R_1 \cdot L_{12}}{L_1 \cdot L_2 - L_{12}^2} \cdot \psi_{2v} - \omega_K \cdot \psi_{1u}, \\ \frac{d\psi_{2u}}{dt} &= u_{2u} - \frac{R_2 \cdot L_1}{L_1 \cdot L_2 - L_{12}^2} \cdot \psi_{2u} + \frac{R_2 \cdot L_{12}}{L_1 \cdot L_2 - L_{12}^2} \cdot \psi_{1u} + (\omega_K - \omega_{\text{ЭЛ}}) \cdot \psi_{2v}, \\ \frac{d\psi_{2v}}{dt} &= u_{2v} - \frac{R_2 \cdot L_1}{L_1 \cdot L_2 - L_{12}^2} \cdot \psi_{2v} + \frac{R_2 \cdot L_{12}}{L_1 \cdot L_2 - L_{12}^2} \cdot \psi_{1v} - (\omega_K - \omega_{\text{ЭЛ}}) \cdot \psi_{2u}, \\ m &= \frac{p_D \cdot L_{12}}{L_1 \cdot L_2 - L_{12}^2} \cdot (\psi_{1v} \cdot \psi_{2u} - \psi_{1u} \cdot \psi_{2v}). \end{aligned} \right.$$

Обычно, для описания АД используют координатные оси $\alpha\beta$ и xu . Система уравнений АД в осях $\alpha\beta$ с уравнением для механической части имеет вид

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\psi_{1\alpha}}{dt} &= u_{1\alpha} - \frac{R_1 \cdot L_2}{L_1 \cdot L_2 - L_{12}^2} \cdot \psi_{1\alpha} + \frac{R_1 \cdot L_{12}}{L_1 \cdot L_2 - L_{12}^2} \cdot \psi_{2\alpha}, \\ \frac{d\psi_{1\beta}}{dt} &= u_{1\beta} - \frac{R_1 \cdot L_2}{L_1 \cdot L_2 - L_{12}^2} \cdot \psi_{1\beta} + \frac{R_1 \cdot L_{12}}{L_1 \cdot L_2 - L_{12}^2} \cdot \psi_{2\beta}, \\ \frac{d\psi_{2\alpha}}{dt} &= u_{2\alpha} - \frac{R_2 \cdot L_1}{L_1 \cdot L_2 - L_{12}^2} \cdot \psi_{2\alpha} + \frac{R_2 \cdot L_{12}}{L_1 \cdot L_2 - L_{12}^2} \cdot \psi_{1\alpha} - \omega_{\text{ЭЛ}} \cdot \psi_{2\beta}, \\ \frac{d\psi_{2\beta}}{dt} &= u_{2\beta} - \frac{R_2 \cdot L_1}{L_1 \cdot L_2 - L_{12}^2} \cdot \psi_{2\beta} + \frac{R_2 \cdot L_{12}}{L_1 \cdot L_2 - L_{12}^2} \cdot \psi_{1\beta} + \omega_{\text{ЭЛ}} \cdot \psi_{2\alpha}, \\ m &= \frac{p_D \cdot L_{12}}{L_1 \cdot L_2 - L_{12}^2} \cdot (\psi_{1\beta} \cdot \psi_{2\alpha} - \psi_{1\alpha} \cdot \psi_{2\beta}), \\ \frac{d\omega_{\text{ЭЛ}}}{dt} &= \frac{p_D}{J} \cdot (m - m_C). \end{aligned} \right.$$

Соответствующая структурная схема представлена на рис. 3.13.

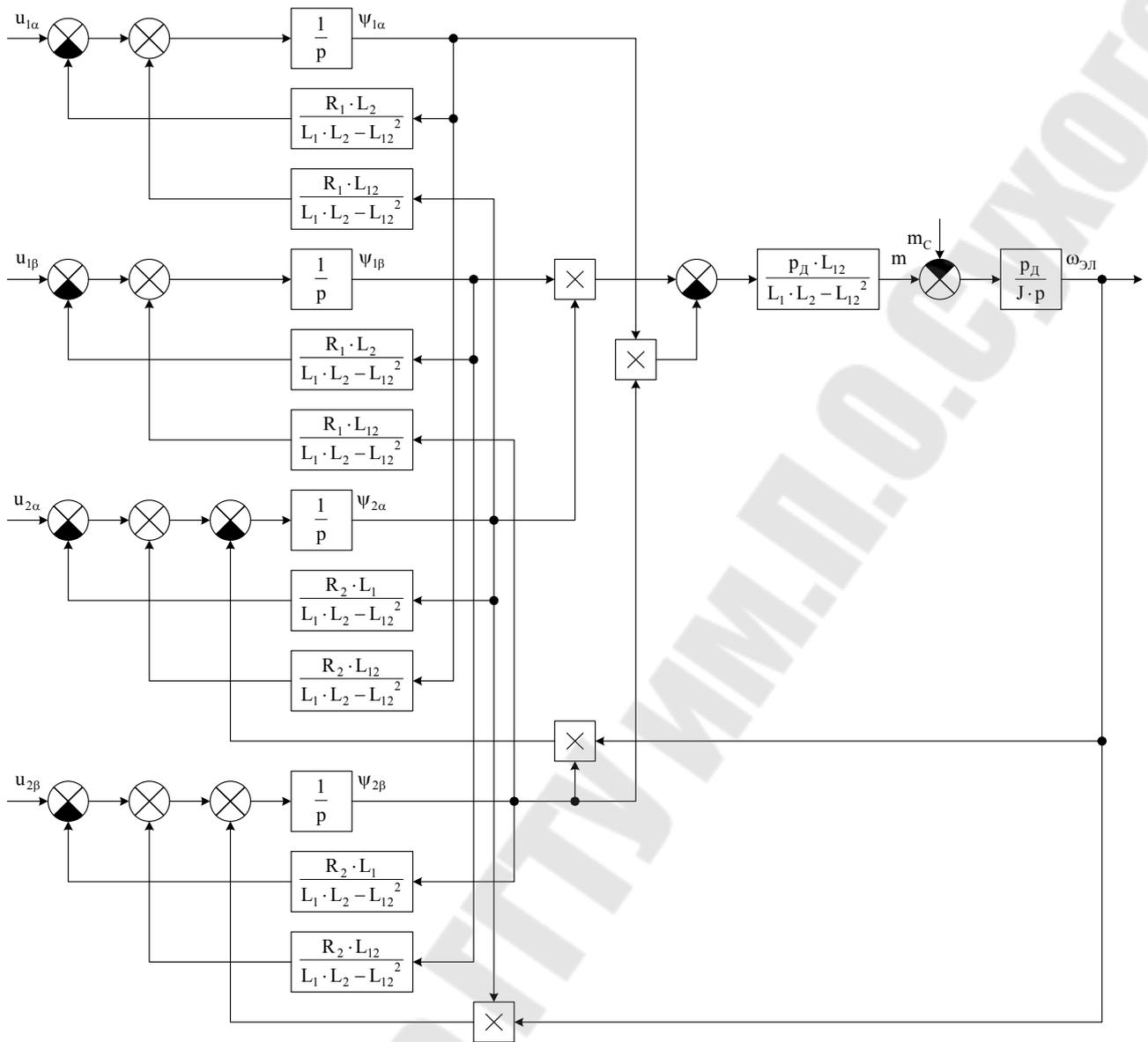


Рис. 3.13. Структурная схема модели АД в осях $\alpha\beta$.

Модель АД в осях ху

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\psi_{1x}}{dt} &= u_{1x} - \frac{R_1 \cdot L_2}{L_1 \cdot L_2 - L_{12}^2} \cdot \psi_{1x} + \frac{R_1 \cdot L_{12}}{L_1 \cdot L_2 - L_{12}^2} \cdot \psi_{2x} + \omega_{0ЭЛ} \cdot \psi_{1y}, \\ \frac{d\psi_{1y}}{dt} &= u_{1y} - \frac{R_1 \cdot L_2}{L_1 \cdot L_2 - L_{12}^2} \cdot \psi_{1y} + \frac{R_1 \cdot L_{12}}{L_1 \cdot L_2 - L_{12}^2} \cdot \psi_{2y} - \omega_{0ЭЛ} \cdot \psi_{1x}, \\ \frac{d\psi_{2x}}{dt} &= u_{2x} - \frac{R_2 \cdot L_1}{L_1 \cdot L_2 - L_{12}^2} \cdot \psi_{2x} + \frac{R_2 \cdot L_{12}}{L_1 \cdot L_2 - L_{12}^2} \cdot \psi_{1x} + (\omega_{0ЭЛ} - \omega_{ЭЛ}) \cdot \psi_{2y}, \\ \frac{d\psi_{2y}}{dt} &= u_{2y} - \frac{R_2 \cdot L_1}{L_1 \cdot L_2 - L_{12}^2} \cdot \psi_{2y} + \frac{R_2 \cdot L_{12}}{L_1 \cdot L_2 - L_{12}^2} \cdot \psi_{1y} - (\omega_{0ЭЛ} - \omega_{ЭЛ}) \cdot \psi_{2x}, \\ m &= \frac{p_D \cdot L_{12}}{L_1 \cdot L_2 - L_{12}^2} \cdot (\psi_{1y} \cdot \psi_{2x} - \psi_{1x} \cdot \psi_{2y}), \\ \frac{d\omega_{ЭЛ}}{dt} &= \frac{p_D}{J} \cdot (m - m_C). \end{aligned} \right.$$

Соответствующая структурная схема показана на рис. 3.14.

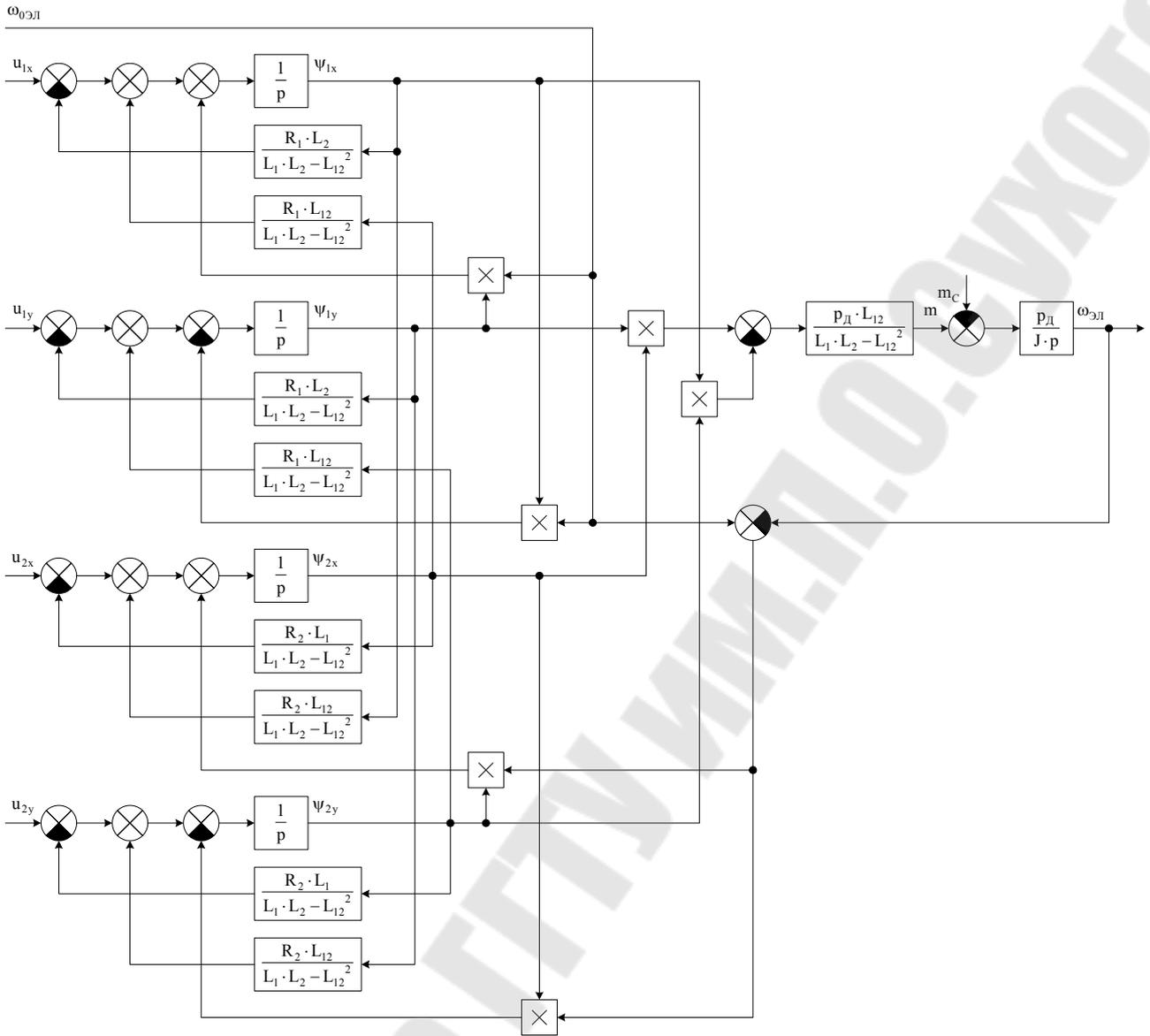


Рис. 3.14. Структурная схема модели АД в осях ху.

В реальных координатах ABCabc модель АД выглядит следующим образом

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{d\psi_A}{dt} = u_A - R_1 \cdot i_A, \\
 \frac{d\psi_B}{dt} = u_B - R_1 \cdot i_B, \\
 \frac{d\psi_C}{dt} = u_C - R_1 \cdot i_C, \\
 \frac{d\psi_a}{dt} = u_a - R_2 \cdot i_a, \\
 \frac{d\psi_b}{dt} = u_b - R_2 \cdot i_b, \\
 \frac{d\psi_c}{dt} = u_c - R_2 \cdot i_c, \\
 m = -L_{12} \cdot p_D \cdot \left\{ \begin{array}{l}
 i_A \cdot \left[i_a \cdot \sin(\varphi_{\text{ЭЛ}}) + i_b \cdot \sin\left(\varphi_{\text{ЭЛ}} + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) + i_c \cdot \sin\left(\varphi_{\text{ЭЛ}} - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) \right] + \\
 + i_B \cdot \left[i_a \cdot \sin\left(\varphi_{\text{ЭЛ}} - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) + i_b \cdot \sin(\varphi_{\text{ЭЛ}}) + i_c \cdot \sin\left(\varphi_{\text{ЭЛ}} + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) \right] + \\
 + i_C \cdot \left[i_a \cdot \sin\left(\varphi_{\text{ЭЛ}} + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) + i_b \cdot \sin\left(\varphi_{\text{ЭЛ}} - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) + i_c \cdot \sin(\varphi_{\text{ЭЛ}}) \right]
 \end{array} \right\}, \\
 \frac{d\omega_{\text{ЭЛ}}}{dt} = \frac{p_D}{J} \cdot (m - m_C), \\
 \frac{d\varphi_{\text{ЭЛ}}}{dt} = \omega_{\text{ЭЛ}},
 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \Psi_A = L_1 \cdot i_A - \frac{L_{12}}{2} \cdot i_B - \frac{L_{12}}{2} \cdot i_C + \\
 + L_{12} \cdot \cos(\varphi_{\text{ЭЛ}}) \cdot i_a + L_{12} \cdot \cos\left(\varphi_{\text{ЭЛ}} + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) \cdot i_b + L_{12} \cdot \cos\left(\varphi_{\text{ЭЛ}} - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) \cdot i_c, \\
 \Psi_B = -\frac{L_{12}}{2} \cdot i_A + L_1 \cdot i_B - \frac{L_{12}}{2} \cdot i_C + \\
 + L_{12} \cdot \cos\left(\varphi_{\text{ЭЛ}} - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) \cdot i_a + L_{12} \cdot \cos(\varphi_{\text{ЭЛ}}) \cdot i_b + L_{12} \cdot \cos\left(\varphi_{\text{ЭЛ}} + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) \cdot i_c, \\
 \Psi_C = -\frac{L_{12}}{2} \cdot i_A - \frac{L_{12}}{2} \cdot i_B + L_1 \cdot i_C + \\
 + L_{12} \cdot \cos\left(\varphi_{\text{ЭЛ}} + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) \cdot i_a + L_{12} \cdot \cos\left(\varphi_{\text{ЭЛ}} - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) \cdot i_b + L_{12} \cdot \cos(\varphi_{\text{ЭЛ}}) \cdot i_c, \\
 \Psi_a = L_{12} \cdot \cos(\varphi_{\text{ЭЛ}}) \cdot i_A + L_{12} \cdot \cos\left(\varphi_{\text{ЭЛ}} - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) \cdot i_B + L_{12} \cdot \cos\left(\varphi_{\text{ЭЛ}} + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) \cdot i_C + \\
 + L_2 \cdot i_a - \frac{L_{12}}{2} \cdot i_b - \frac{L_{12}}{2} \cdot i_c, \\
 \Psi_b = L_{12} \cdot \cos\left(\varphi_{\text{ЭЛ}} + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) \cdot i_A + L_{12} \cdot \cos(\varphi_{\text{ЭЛ}}) \cdot i_B + L_{12} \cdot \cos\left(\varphi_{\text{ЭЛ}} - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) \cdot i_C - \\
 - \frac{L_{12}}{2} \cdot i_a + L_2 \cdot i_b - \frac{L_{12}}{2} \cdot i_c, \\
 \Psi_c = L_{12} \cdot \cos\left(\varphi_{\text{ЭЛ}} - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) \cdot i_A + L_{12} \cdot \cos\left(\varphi_{\text{ЭЛ}} + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) \cdot i_B + L_{12} \cdot \cos(\varphi_{\text{ЭЛ}}) \cdot i_C - \\
 - \frac{L_{12}}{2} \cdot i_a - \frac{L_{12}}{2} \cdot i_b + L_2 \cdot i_c.
 \end{array} \right.$$

3.8. Модель синхронного электродвигателя

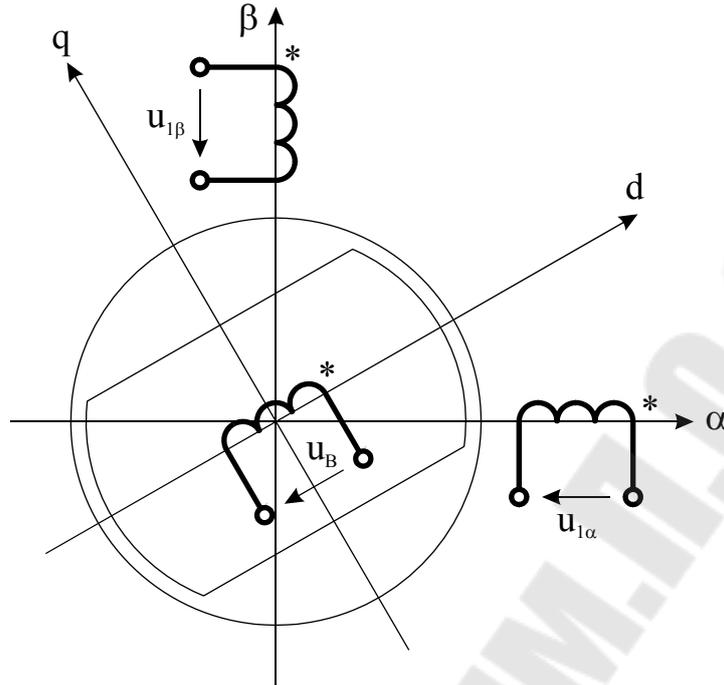


Рис. 3.15. Схема модели синхронного двигателя.

Обмотка возбуждения расположена на оси d. Координатная система dq и якорь вращается с синхронной скоростью $\omega_{0ЭЛ}$. Якорь отстает от поля статора на угол $\theta_{ЭЛ} = \varphi_{0ЭЛ} - \varphi_{ЭЛ}$.

Запишем систему уравнений в осях dq

$$\begin{cases} u_{1d} = R_1 \cdot i_{1d} + \frac{d\psi_{1d}}{dt} - \omega_{ЭЛ} \cdot \psi_{1q}, \\ u_{1q} = R_1 \cdot i_{1q} + \frac{d\psi_{1q}}{dt} + \omega_{ЭЛ} \cdot \psi_{1d}, \\ u_B = R_B \cdot i_B + \frac{d\psi_B}{dt}. \end{cases}$$

Выражения для потокосцеплений

$$\begin{cases} \psi_{1d} = L_{1d} \cdot i_{1d} + L_{12d} \cdot i_B, \\ \psi_{1q} = L_{1q} \cdot i_{1q}, \\ \psi_B = L_B \cdot i_B + L_{12d} \cdot i_{1d}. \end{cases}$$

Выразим токи через потокосцепления для подстановки в дифференциальные уравнения

$$\begin{cases} i_{1d} = \frac{L_B \cdot \Psi_{1d} - L_{12d} \cdot \Psi_B}{L_{1d} \cdot L_B - L_{12d}^2}, \\ i_{1q} = \frac{\Psi_{1q}}{L_{1q}}, \\ i_B = \frac{L_{1d} \cdot \Psi_B - L_{12d} \cdot \Psi_{1d}}{L_{1d} \cdot L_B - L_{12d}^2}. \end{cases}$$

Дополнив систему выражением для электромагнитного момента $m = p_D \cdot (\Psi_{1d} \cdot i_{1q} - \Psi_{1q} \cdot i_{1d})$, получим

$$\begin{cases} u_{1d} = \frac{R_1 \cdot L_B}{L_{1d} \cdot L_B - L_{12d}^2} \cdot \Psi_{1d} + \frac{d\Psi_{1d}}{dt} - \frac{R_1 \cdot L_B}{L_{1d} \cdot L_B - L_{12d}^2} \cdot \Psi_B - \omega_{ЭЛ} \cdot \Psi_{1q}, \\ u_{1q} = \frac{R_1}{L_{1q}} \cdot \Psi_{1q} + \frac{d\Psi_{1q}}{dt} + \omega_{ЭЛ} \cdot \Psi_{1d}, \\ u_B = \frac{R_B \cdot L_{1d}}{L_{1d} \cdot L_B - L_{12d}^2} \cdot \Psi_B + \frac{d\Psi_B}{dt} - \frac{R_B \cdot L_{1d}}{L_{1d} \cdot L_B - L_{12d}^2} \cdot \Psi_{1d}, \\ m = \frac{p_D}{L_{1d} \cdot L_B - L_{12d}^2} \cdot \left(\frac{L_{1d} \cdot L_B - L_{1q} \cdot L_B - L_{12d}^2}{L_{1q}} \Psi_{1d} \cdot \Psi_{1q} + L_{12d} \cdot \Psi_{1q} \cdot \Psi_B \right), \\ J \cdot \frac{d\omega_{ЭЛ}}{dt} = p_D \cdot (m - m_C), \\ \frac{d\varphi_{ЭЛ}}{dt} = \omega_{ЭЛ}. \end{cases}$$

Запишем систему в форме Коши

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\psi_{1d}}{dt} &= u_{1d} - \frac{R_1 \cdot L_B}{L_{1d} \cdot L_B - L_{12d}^2} \cdot \psi_{1d} + \frac{R_1 \cdot L_B}{L_{1d} \cdot L_B - L_{12d}^2} \cdot \psi_B + \omega_{\text{ЭЛ}} \cdot \psi_{1q}, \\ \frac{d\psi_{1q}}{dt} &= u_{1q} - \frac{R_1}{L_{1q}} \cdot \psi_{1q} - \omega_{\text{ЭЛ}} \cdot \psi_{1d}, \\ \frac{d\psi_B}{dt} &= u_B - \frac{R_B \cdot L_{1d}}{L_{1d} \cdot L_B - L_{12d}^2} \cdot \psi_B + \frac{R_B \cdot L_{1d}}{L_{1d} \cdot L_B - L_{12d}^2} \cdot \psi_{1d}, \\ m &= \frac{p_D}{L_{1d} \cdot L_B - L_{12d}^2} \cdot \left(\frac{L_{1d} \cdot L_B - L_{1q} \cdot L_B - L_{12d}^2}{L_{1q}} \psi_{1d} \cdot \psi_{1q} + L_{12d} \cdot \psi_{1q} \cdot \psi_B \right), \\ \frac{d\omega_{\text{ЭЛ}}}{dt} &= \frac{p_D}{J} \cdot (m - m_C), \\ \frac{d\varphi_{\text{ЭЛ}}}{dt} &= \omega_{\text{ЭЛ}}. \end{aligned} \right.$$

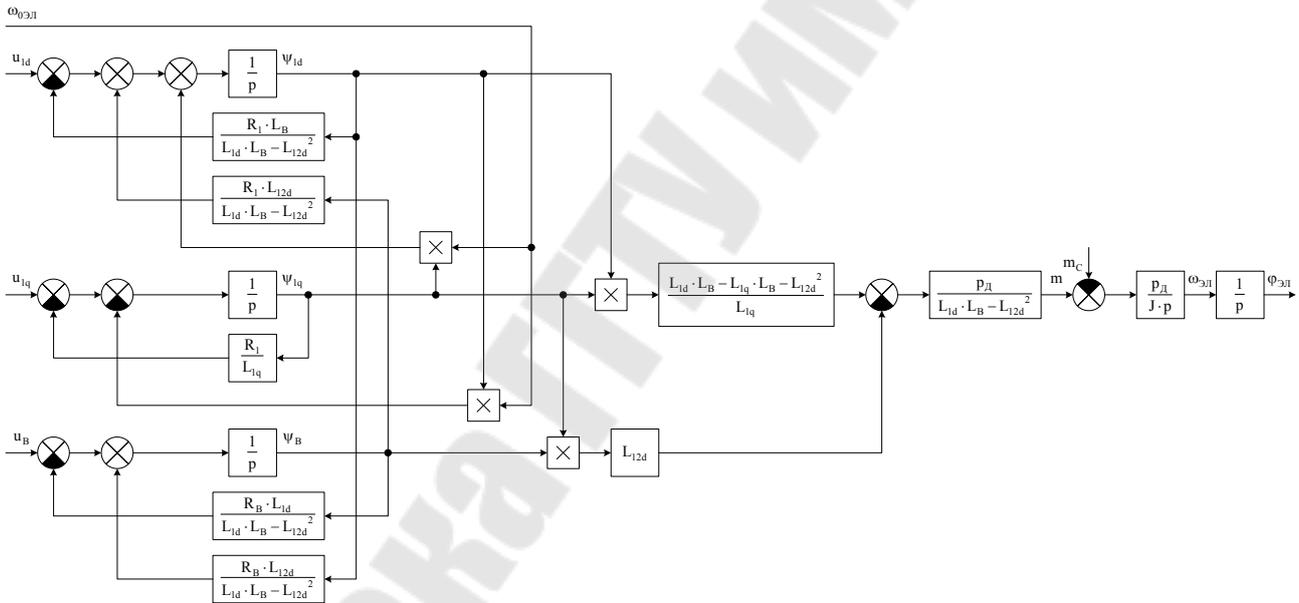


Рис. 3.16. Структурная схема модели СД.

3.9. Модели силовых преобразователей

3.9.1. Тиристорный преобразователь

Тиристорный преобразователь может быть представлен тремя функциональными элементами: система импульсно-фазового управления (СИФУ), силовая цепь преобразователя (СЦП), цепь нагрузки преобразователя (ЦНП).

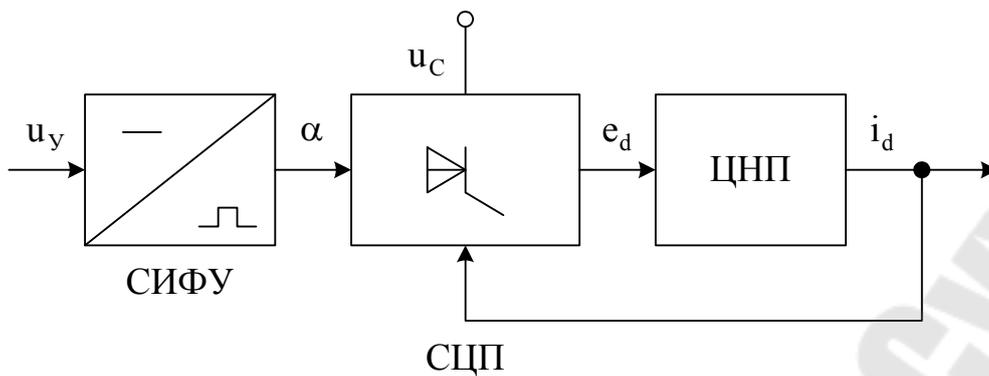


Рис. 3.17. Функциональная схема тиристорного преобразователя.

СИФУ преобразовывает непрерывный управляющий сигнал в последовательность импульсов, имеющих соответствующий угол сдвига α относительно естественного момента коммутации. Современные аналоговые СИФУ имеют высокое быстродействие, что позволяет их считать почти безинерционными элементами, имеющими линейные или нелинейные регулировочные характеристики.

Выходная ЭДС ТП формируется синусоидальным напряжением питающей сети. Процессы, протекающие в СЦП, описываются системой нелинейных дифференциальных уравнений с переменной структурой и параметрами, изменение которых происходит периодически в зависимости от режима работы преобразователя.

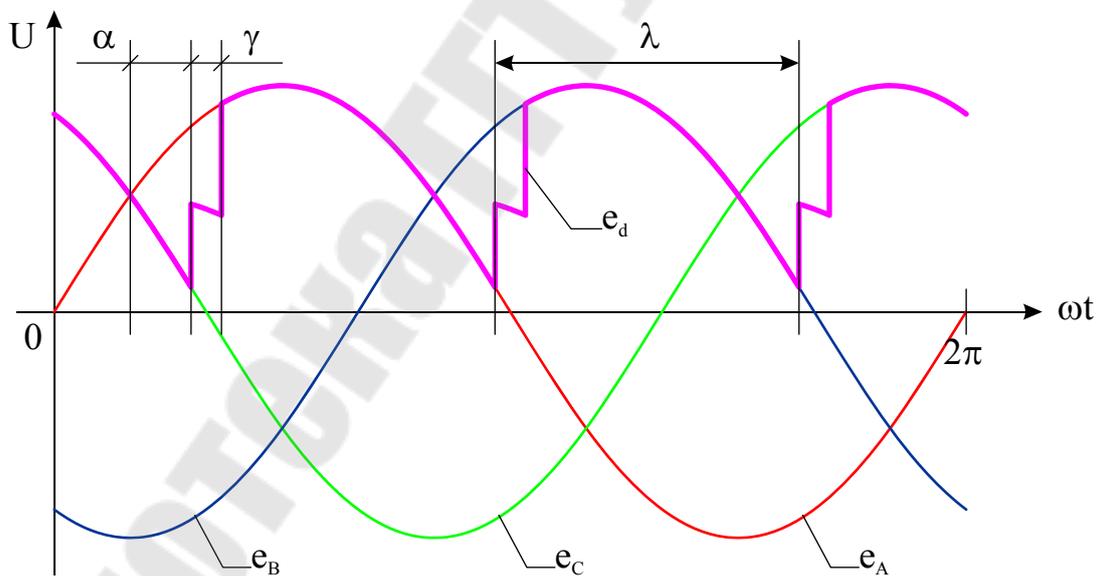


Рис. 3.18. Диаграмма выпрямленной ЭДС преобразователя.

Из диаграммы e_d видно, что ток нагрузки определяется током одной или двух фаз СЦП (на интервалах λ и γ) и, следовательно, изменяется число дифференциальных уравнений и их параметры. Нелинейный характер уравнений обусловлен нелинейными свойствами тиристоров. Характер ЦНП оказывает существенное влияние на внутренние процессы, протекающие в СЦП,

определяя углы проводимости λ и коммутации γ . Одновременно в ЦПП происходит сглаживание ЭДС и тока преобразователя.

Введем показатель k , равный отношению длительности переходных процессов в САУ к времени проводимости отдельного вентиля.

$$k = \frac{t_{\text{ПП}}}{t_{\text{ПР}}} = t_{\text{ПП}} \cdot m \cdot f_C,$$

где: m – число фаз СЦП,
 f_C – частота напряжения сети.

В зависимости от k применяются модели:

1. Имитационные – при $k \leq 10$.
2. Нелинейные непрерывные – при $10 < k \leq 30$.
3. Упрощенные непрерывные – при $k > 30$.

Для большинства промышленных электроприводов целесообразно применение непрерывных моделей. Применение имитационных и импульсных моделей сопровождается значительным усложнением модели ЭП, и, как правило, необходимо для ЭП малой мощности.

3.9.2. Упрощенная модель тиристорного преобразователя

При моделировании системы ЭП, в которой влияние прерывистых токов имеет несущественное значение, рассчитать выходную ЭДС преобразователя можно по упрощенной модели.

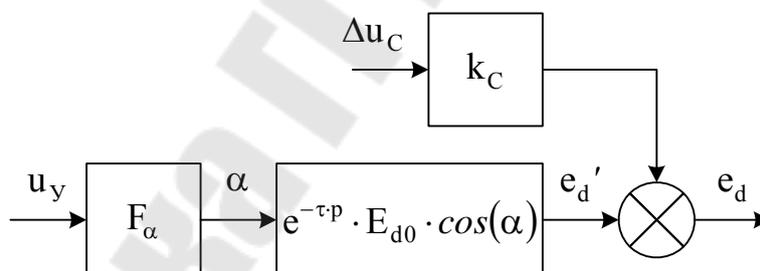


Рис. 3.19. Упрощенная модель тиристорного преобразователя.

На схеме обозначено:

- F_α – звено, представляющее собой СИФУ,
 $E_{d0} = k_{\text{СХ}} \cdot U_2$ – максимальное значение выпрямленной ЭДС преобразователя,
 $k_{\text{СХ}}$ – схемный коэффициент, определяемый видом СЦП,
 U_2 – номинальное фазное напряжение вторичной обмотки трансформатора, или сети (при подключении преобразователя через коммутационные реакторы),
 $\tau = \frac{1}{p \cdot f_C}$ – среднестатистическое запаздывание,

p – количество пульсаций выпрямленной ЭДС преобразователя за период напряжения сети.

Если опорное напряжение СИФУ – косинусоидальное, то СИФУ имеет арккосинусную регулировочную характеристику, и регулировочная характеристика преобразователя получается линейной. В этом случае его можно рассматривать как звено с чистым запаздыванием.

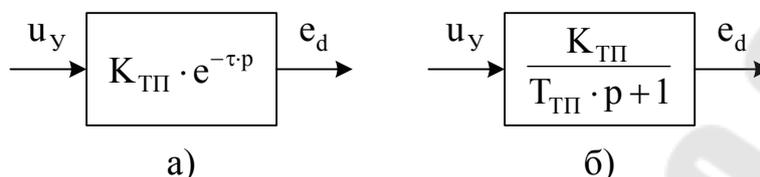


Рис. 3.20. Упрощенная линейризованная модель преобразователя.

При пилообразном опорном напряжении СИФУ ее регулировочная характеристика линейна

$$\alpha = F_{\alpha}(u_y) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \cdot \frac{u_y}{U_{OPmax}},$$

где U_{OPmax} – максимальное значение опорного напряжения СИФУ.

В большинстве ЭП присутствуют нелинейные звенья для компенсации нелинейностей преобразователя. В этом случае при линейной регулировочной характеристике СИФУ преобразователь можно считать линейным звеном с коэффициентом передачи

$$K_{TP} = \frac{E_{d0}}{U_{OPmax}}.$$

При представлении преобразователя эквивалентным аperiodическим звеном, его постоянная времени равна

$$T_{TP} = \tau.$$

3.9.3. Нелинейная непрерывная модель преобразователя

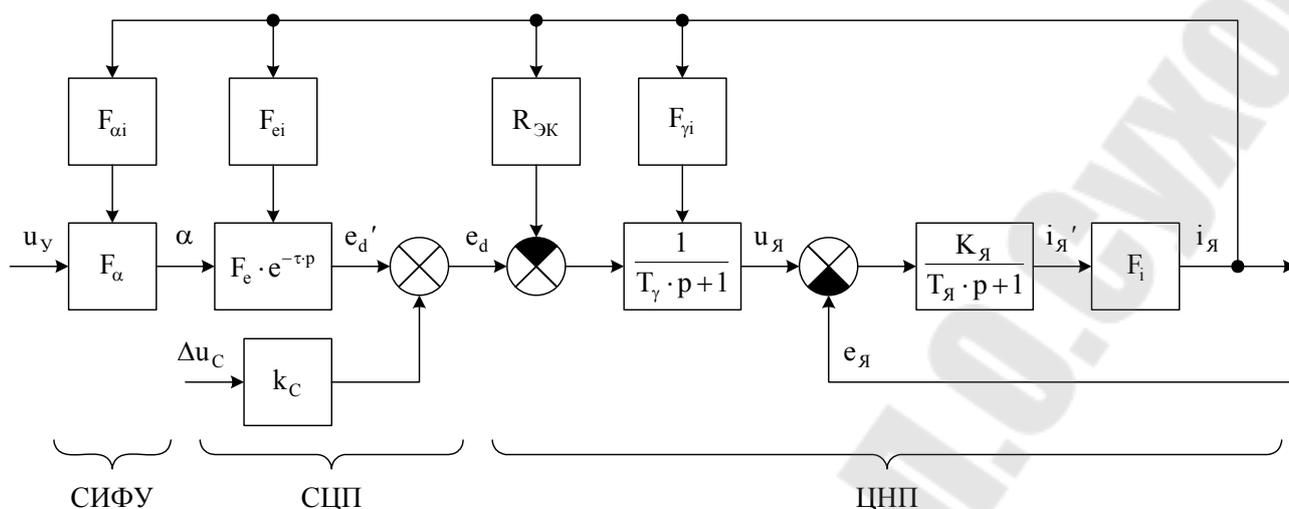


Рис. 3.21. Нелинейная непрерывная модель преобразователя.

Блок F_{oi} предназначен для учета логических уравнений переключения выпрямительных групп реверсивного преобразователя с отдельным управлением.

Блоки F_e и F_{ei} моделируют СЦП, регулировочная характеристика которой зависит от ее режима работы.

Режим непрерывного тока преобразователя имеет место при токе нагрузки, больше граничного

$$i_{я} \geq i_{ГР} = \frac{E_{d0} \cdot \sin(\alpha)}{2 \cdot \pi \cdot f_C \cdot L_{я}} \cdot \left[1 + \frac{\pi}{m} \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{m}\right) \right],$$

где $L_{я}$ – суммарная индуктивность СЦП и ЦНП.

В режиме непрерывного тока

$$e_d' = E_{d0} \cdot \cos(\alpha).$$

В режиме прерывистого тока

1. При выполнении условия

$$e_{я} < E_{d0} \cdot \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{m}\right)$$

ЭДС преобразователя равна

$$e_d' = \frac{E_m}{\alpha} \cdot \left[\sin\left(\lambda + \alpha - \frac{\pi}{m}\right) - \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{m}\right) \right],$$

где $E_m = \sqrt{6} \cdot U_2$ – для 3-фазной мостовой схемы,

$E_m = \sqrt{2} \cdot U_2$ – для 3-фазной нулевой схемы.

Интервал проводимости λ при этом определяется решением трансцендентного уравнения

$$\sin\left(\lambda + \alpha - \frac{\pi}{m}\right) - \frac{e_d'}{E_m} \cdot \lambda = \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{m}\right).$$

2. При

$$e_{я} > E_{d0} \cdot \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{m}\right)$$

фактический угол управления равен

$$\alpha_{\Phi} = \arccos\left(\frac{e_d'}{E_m}\right) - \frac{\pi}{m},$$

а угол проводимости определяется решением уравнения

$$\sin\left(\lambda_{\Phi} + \alpha_{\Phi} - \frac{\pi}{m}\right) - \lambda_{\Phi} \cdot \cos\left(\alpha_{\Phi} - \frac{\pi}{m}\right) = \sin\left(\alpha_{\Phi} - \frac{\pi}{m}\right).$$

При этом ЭДС преобразователя

$$e_d' = E_m.$$

На выходную ЭДС преобразователя влияет изменение напряжения сети Δu_C

$$e_d = e_d' + k_C \cdot \Delta u_C,$$

где k_C – коэффициент характеризующий влияние напряжения сети на выходную ЭДС преобразователя и, определяемый видом СЦП.

Модель цепи нагрузки ТП содержит: звено якорной цепи двигателя (нагрузки преобразователя), пропорциональное звено с коэффициентом передачи $R_{ЭК}$, характеризующее падение напряжения в преобразователе и существенно зависящее от режима работы, апериодическое звено, учитывающее сдвиг выходного напряжения преобразователя относительно ЭДС за счет процесса коммутации с постоянной времени

$$T_{\gamma} = \frac{\gamma}{2 \cdot \omega_0},$$

где γ – угол коммутации

$$\gamma = \arccos\left[\cos(\alpha) - u_K \cdot \frac{I_d}{I_{дН}}\right] - \alpha,$$

где: u_K – относительное напряжение КЗ СЦП,
 $I_d, I_{дН}$ – средний и средний номинальный выпрямленный ток.

В режиме непрерывного тока эквивалентное сопротивление преобразователя

$$R_{\text{ЭК}} = R_{\text{К}} + R_{\text{П}} + R_{\text{ДТ}},$$

где: $R_{\text{К}} = \frac{p \cdot X_{\text{T}}}{2 \cdot \pi}$ – коммутационное сопротивление,
 X_{T} – индуктивное сопротивление обмотки фазы трансформатора или коммутационного реактора,
 $R_{\text{П}}$ – активное сопротивление СЦП ($R_{\text{П}} = r_{\text{T}}$ для нулевых схем и $R_{\text{П}} = 2 \cdot r_{\text{T}}$ – для мостовых),
 $R_{\text{ДТ}}$ – динамическое сопротивление тиристоров.

В режиме прерывистого тока

$$R_{\text{ЭК}} = \frac{4 \cdot \pi \cdot \omega_0 \cdot L_{\text{ЯД}}}{m \cdot \lambda^2}$$

При моделировании нереверсивного преобразователя для исключения реверса тока включено звено F_1 , имеющее характеристику

$$i_{\text{Я}} = \begin{cases} i_{\text{Я}}' & \text{при } i_{\text{Я}}' \geq 0, \\ 0 & \text{при } i_{\text{Я}}' < 0. \end{cases}$$

В реверсивных ТП с совместным управлением режим прерывистого тока практически исключен из-за наличия уравнивающих токов.

3.9.4. Имитационная модель преобразователя

Построение имитационной модели преобразователя рассмотрим на примере преобразователя с трехфазной нулевой силовой схемой.

Составим систему уравнений для описания преобразователя и его нагрузки – якорной цепи двигателя.

Для СИФУ с пилообразным опорным напряжением уравнение для угла открывания выглядит следующим образом

$$\alpha = \frac{U_{\text{ОП МАХ}} - u_{\text{У}}}{2 \cdot U_{\text{ОП МАХ}}} \cdot \pi.$$

Уравнения для силовой цепи преобразователя и цепи нагрузки зависят от режима работы:

1. Нормальный режим, когда открыт только один тиристор и ток нагрузки протекает по одной фазе трансформатора.

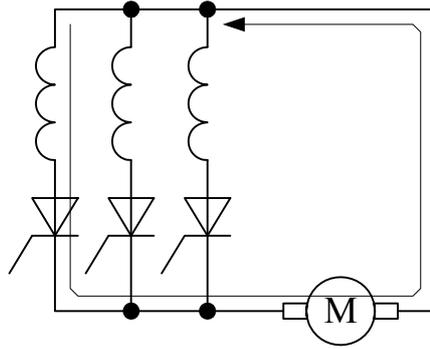


Рис. 3.22. Путь протекания тока якоря в нормальном режиме.

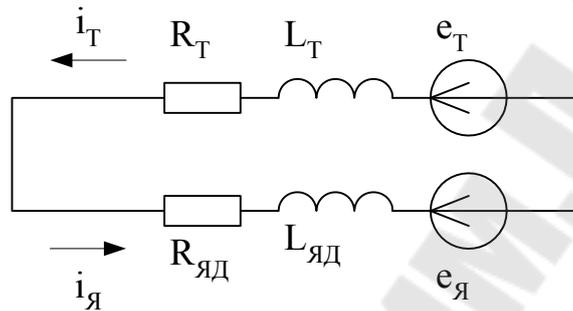


Рис. 3.23. Схема замещения силовой цепи для нормального режима.

В соответствии со схемой замещения запишем уравнения

$$\begin{cases} (L_T + L_{\text{яд}}) \cdot \frac{di_{\text{я}}}{dt} + (R_T + R_{\text{яд}}) \cdot i_{\text{я}} = e_T - e_{\text{я}}, \\ i_T = i_{\text{я}}, \end{cases}$$

где: e_T, i_T – ЭДС и ток фазы трансформатора, через которую протекает ток якоря.

Запишем дифференциальное уравнение в форме Коши относительно тока якоря

$$\begin{cases} \frac{di_{\text{я}}}{dt} = \frac{1}{L_T + L_{\text{яд}}} \cdot (e_T - k\Phi_H \cdot \omega) - \frac{R_T + R_{\text{яд}}}{L_T + L_{\text{яд}}} \cdot i_{\text{я}}, \\ i_T = i_{\text{я}}. \end{cases}$$

2. Режим коммутации, когда открывается новый тиристор, но еще не закрылся работавший ранее.

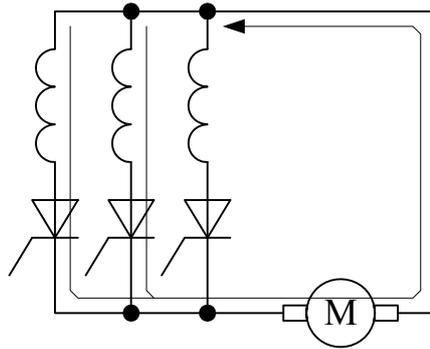


Рис. 3.24. Путь протекания тока якоря в режиме коммутации.

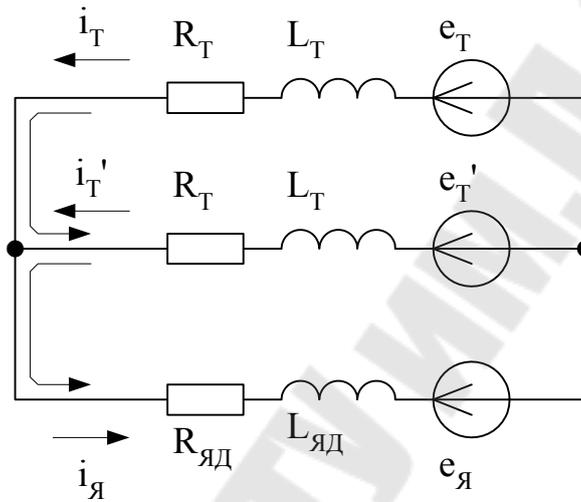


Рис. 3.25. Схема замещения силовой цепи в режиме коммутации.

Запишем систему уравнений по 1-му и 2-му законам Кирхгофа, обойдя контура, как показано на схеме.

$$\begin{cases} L_T \cdot \frac{di_T}{dt} + R_T \cdot i_T - L_T \cdot \frac{di_T'}{dt} - R_T \cdot i_T' = e_T - e_T', \\ L_T \cdot \frac{di_T'}{dt} + R_T \cdot i_T' + L_{яд} \cdot \frac{di_{яд}}{dt} + R_{яд} \cdot i_{яд} = e_T' - e_{я}, \\ i_T + i_T' = i_{я}, \end{cases}$$

где: e_T, i_T – ЭДС и ток фазы трансформатора, тиристор в которой работал ранее, но еще не закрылся,
 e_T', i_T' – ЭДС и ток фазы трансформатора, тиристор в которой открывается.

Выразим i_T' из 3-го уравнения и подставим в первое и второе

$$\begin{cases} 2 \cdot L_T \cdot \frac{di_T}{dt} + 2 \cdot R_T \cdot i_T - L_T \cdot \frac{di_{Я}}{dt} - R_T \cdot i_{Я} = e_T - e_T', \\ (L_T + L_{ЯД}) \cdot \frac{di_{Я}}{dt} + (R_T + R_{ЯД}) \cdot i_{Я} - L_T \cdot \frac{di_T}{dt} - R_T \cdot i_T = e_T' - e_{Я}, \\ i_T' = i_{Я} - i_T. \end{cases}$$

Избавимся от i_T во 2-ом уравнении. Для этого умножим его на 2 и сложим с 1-ым.

$$\begin{cases} 2 \cdot L_T \cdot \frac{di_T}{dt} + 2 \cdot R_T \cdot i_T - L_T \cdot \frac{di_{Я}}{dt} - R_T \cdot i_{Я} = e_T - e_T', \\ (L_T + 2 \cdot L_{ЯД}) \cdot \frac{di_{Я}}{dt} + (R_T + 2 \cdot R_{ЯД}) \cdot i_{Я} = e_T + e_T' - 2 \cdot e_{Я}, \\ i_T' = i_{Я} - i_T. \end{cases}$$

Запишем дифференциальные уравнения в нормальной форме Коши относительно токов

$$\begin{cases} \frac{di_{Я}}{dt} = \frac{1}{L_T + 2 \cdot L_{ЯД}} \cdot (e_T + e_T' - 2 \cdot k\Phi_H \cdot \omega) - \frac{R_T + 2 \cdot R_{ЯД}}{L_T + 2 \cdot L_{ЯД}} \cdot i_{Я}, \\ \frac{di_T}{dt} = \frac{1}{2 \cdot L_T} \cdot (e_T - e_T') + \frac{1}{2} \cdot \frac{di_{Я}}{dt} + \frac{R_T}{2 \cdot L_T} \cdot i_{Я} - \frac{R_T}{L_T} \cdot i_T, \\ i_T' = i_{Я} - i_T. \end{cases}$$

3. Бестоковая пауза режима прерывистого тока.

$$\begin{cases} i_{Я} = 0, \\ i_T = 0. \end{cases}$$

Выбор уравнений для токов, в зависимости от текущего режима работы преобразователя, осуществляется в подпрограмме расчета правых частей уравнений. После определения значений переменных модели на текущем шаге расчета необходимо, проанализировать значения токов, при необходимости сменить текущий режим и скорректировать значения токов.

Логика смены режимов в зависимости от значений токов следующая:

1. Если режим бестоковой паузы и включается тиристор, то переходим к нормальному режиму работы.
2. Если нормальный режим и включается тиристор, то переходим к режиму коммутации.

3. Если режим коммутации и ток ранее работавшего тиристора i_T перешел через 0 ($i_{Ti} \leq 0$), то переходим к нормальному режиму.
4. Если ток якоря перешел через 0 ($i_{яi} \leq 0$), то переходим к режиму бестоковой паузы, корректируя значение тока якоря $i_{яi} = 0$.

Для определения момента подачи открывающего импульса на тиристор необходимо анализировать значение угла поворота вектора напряжения следующей фазы трансформатора в соответствии со следующим условием

$$\begin{cases} \psi_{i-1} \leq \alpha + 30^\circ, \\ \psi_i \geq \alpha + 30^\circ, \end{cases}$$

где ψ – угол поворота вектора напряжения следующей фазы (той, в которой будет открываться тиристор в следующий такт коммутации).

В условии момента подачи импульсов 30 эл. градусов обусловлено моментом естественной коммутации. Угол поворота вектора напряжения определяется по номеру фазы следующим образом

$$\psi_j = \omega_C \cdot t + \frac{2 \cdot \pi}{3} \cdot (j - 1),$$

где: $\omega_C = 2 \cdot \pi \cdot f_C$ – угловая частота напряжения сети,
 f_C – частота сети (50 Гц),
 j – номер фазы (1, 2, 3 соответствуют соответственно фазам А, В, С).

Составим уравнение для ПИ-регулятора скорости

$$u_y = K_{PC} \cdot \frac{T_{PC} \cdot p + 1}{T_{PC} \cdot p} \cdot (u_3 - K_{OC} \cdot \omega),$$

где: K_{PC} – коэффициент передачи регулятора скорости,
 T_{PC} – постоянная времени регулятора скорости,
 u_3 – напряжение задания скорости,
 K_{OC} – коэффициент передачи обратной связи по скорости.

$$T_{PC} \cdot p \cdot u_y = K_{PC} \cdot T_{PC} \cdot p \cdot u_3 + K_{PC} \cdot u_3 - K_{PC} \cdot K_{OC} \cdot T_{PC} \cdot p \cdot \omega - K_{PC} \cdot K_{OC} \cdot \omega,$$

$$p \cdot u_y = K_{PC} \cdot p \cdot u_3 + \frac{K_{PC}}{T_{PC}} \cdot u_3 - K_{PC} \cdot K_{OC} \cdot p \cdot \omega - \frac{K_{PC} \cdot K_{OC}}{T_{PC}} \cdot \omega,$$

$$\frac{du_y}{dt} = K_{PC} \cdot \frac{du_3}{dt} + \frac{K_{PC}}{T_{PC}} \cdot u_3 - K_{PC} \cdot K_{OC} \cdot \frac{d\omega}{dt} - \frac{K_{PC} \cdot K_{OC}}{T_{PC}} \cdot \omega.$$

Запишем уравнение для механической части

$$J \cdot \frac{d\omega}{dt} = m - m_C,$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{J} \cdot (m - m_C).$$

На основании составленных уравнений и метода Эйлера составим программу моделирования одноконтурной САУ скоростью с имитационной моделью тиристорного преобразователя, приведенную в приложении 1.

4. Модели систем автоматического управления электроприводами

4.1. Модель двухзонной системы автоматического управления скоростью двигателя постоянного тока

Структурная схема модели представлена на рис. 4.1. Система имеет 2 канала регулирования: якорный канал и канал возбуждения. В якорном канале находятся контур регулирования скорости (передаточная функция регулятора – W_{PC}) и подчиненный контур регулирования тока якоря (передаточная функция регулятора – W_{PT}). В канале возбуждения также 2 контура регулирования: контур ЭДС (передаточная функция регулятора – W_{PE}) и подчиненный контур тока возбуждения (передаточная функция регулятора – W_{PTB}). На структурной схеме обозначено:

u_{3C} –	напряжение задания скорости;
u_{3T} –	напряжение задания тока якоря, которое формируется регулятором скорости и ограничено на уровне задания максимального тока с учетом перегрузочной способности двигателя;
u_y –	напряжение управления тиристорным преобразователем якорного канала, которое формируется регулятором тока якоря и ограничено на уровне амплитуды опорного напряжения СИФУ;
u_{3E} –	напряжение задания ЭДС якоря;
u_{3TB} –	напряжение задания тока возбуждения, которое формируется регулятором ЭДС и ограничено на уровне задания номинального тока возбуждения сверху и на уровне задания тока, соответствующего минимальному потоку снизу;

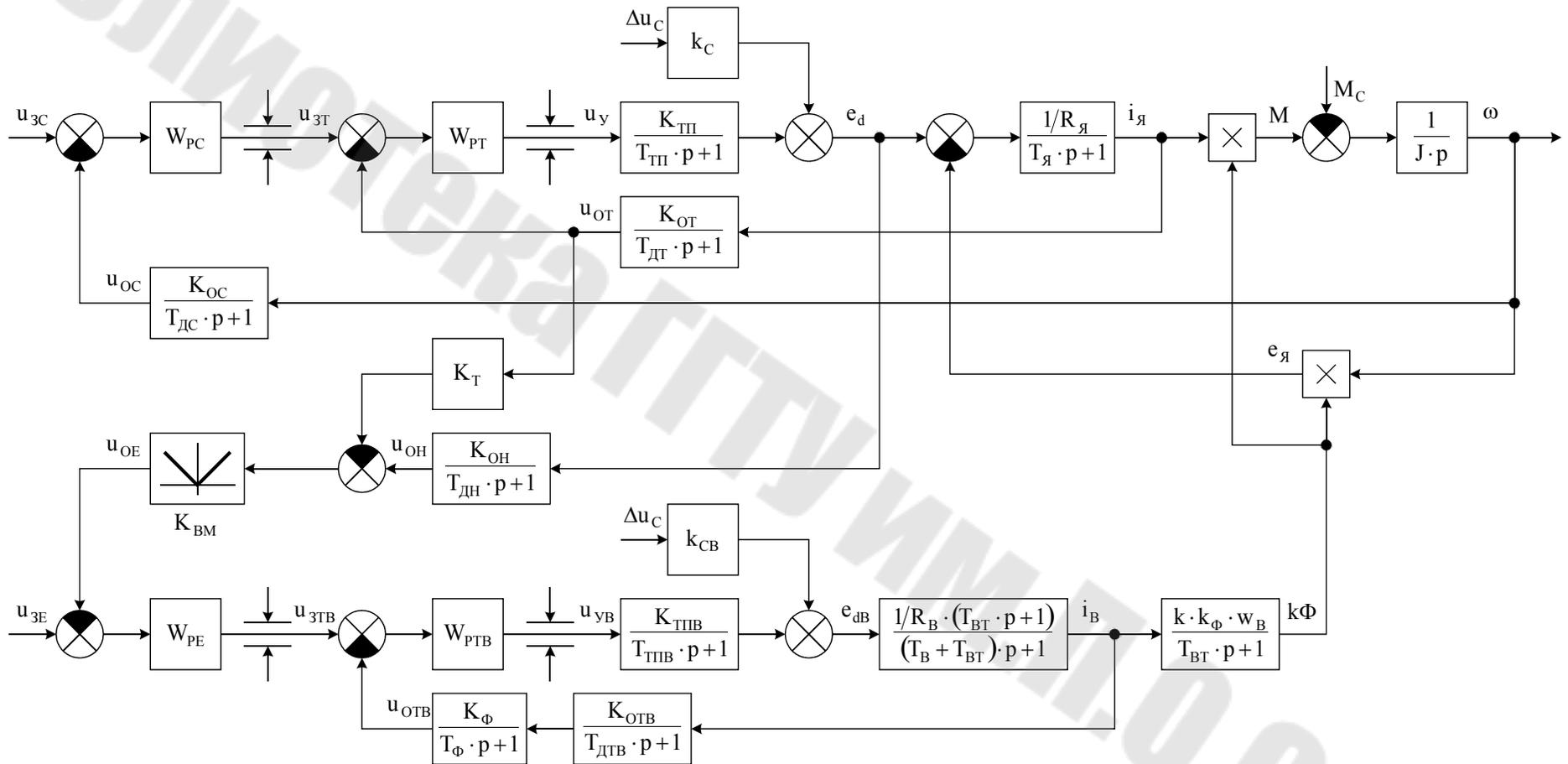


Рис. 4.1. Полная структурная схема непреобразованной нелинеаризованной модели всей двухзонной системы управления скоростью двигателя постоянного тока.

$u_{ув}$ –	напряжение управления тиристорным преобразователем канала возбуждения, которое формируется регулятором тока возбуждения и ограничено на уровне амплитуды опорного напряжения СИФУ;
$\Delta u_C, k_C, k_{CB}$ –	изменение напряжения сети и коэффициенты его влияния на выходную ЭДС тиристорных преобразователей якоря и возбуждения;
u_{OC} –	напряжение обратной связи по скорости;
$K_{OC}, T_{ДС}$ –	коэффициент передачи обратной связи по скорости и постоянная времени датчика скорости;
u_{OT} –	напряжение обратной связи по току якоря;
$K_{OT}, T_{ДТ}$ –	коэффициент передачи обратной связи по току якоря и постоянная времени датчика тока;
u_{OE} –	напряжение обратной связи по ЭДС;
u_{OH} –	напряжение обратной связи по напряжению, которая используется для вычисления сигнала обратной связи по ЭДС;
$K_{OH}, T_{ДН}$ –	коэффициент передачи обратной связи по напряжению и постоянная времени датчика напряжения;
K_T, K_{BM} –	коэффициент передачи согласующего звена и выделителя модуля;
u_{OTB} –	напряжение обратной связи по току возбуждения;
$K_{OTB}, T_{ДТВ}$ –	коэффициент передачи обратной связи по току возбуждения и постоянная времени датчика тока возбуждения;
K_Φ, T_Φ –	коэффициент передачи и постоянная времени фильтра в канале обратной связи по току возбуждения;
$K_{ТП}, T_{ТП}$ –	коэффициент передачи и постоянная времени тиристорного преобразователя якорного канала;
$K_{ТП}, T_{ТП}$ –	коэффициент передачи и постоянная времени тиристорного преобразователя канала возбуждения.

4.2. Модель системы частотного управления скоростью асинхронного двигателя с короткозамкнутым ротором

Модель данной системы более компактна в виде системы уравнений.

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{du_v}{dt} = \frac{K_{PC}}{T_{PC}} \cdot \left(T_{PC} \cdot \frac{du_{3C}}{dt} + u_{3C} - T_{PC} \cdot K_{OC} \cdot \frac{d\omega}{dt} - K_{OC} \cdot \omega \right), \\
 u_\gamma = f(u_v), \\
 \omega_{0ЭЛ} = K_f \cdot u_v, \\
 u_{1x} = \sqrt{2} \cdot k_C \cdot K_U \cdot u_\gamma, \\
 \frac{d\psi_{1x}}{dt} = u_{1x} - R_1 \cdot i_{1x} + \omega_{0ЭЛ} \cdot \psi_{1y}, \\
 \frac{d\psi_{1y}}{dt} = -R_1 \cdot i_{1y} - \omega_{0ЭЛ} \cdot \psi_{1x}, \\
 \frac{d\psi_{2x}}{dt} = -R_2 \cdot i_{2x} + (\omega_{0ЭЛ} - \omega_{ЭЛ}) \cdot \psi_{2y}, \\
 \frac{d\psi_{2y}}{dt} = -R_2 \cdot i_{2y} - (\omega_{0ЭЛ} - \omega_{ЭЛ}) \cdot \psi_{2x}, \\
 i_{1x} = \frac{L_2 \cdot \psi_{1x} - L_{12} \cdot \psi_{2x}}{L_1 \cdot L_2 - L_{12}^2}, \\
 i_{1y} = \frac{L_2 \cdot \psi_{1y} - L_{12} \cdot \psi_{2y}}{L_1 \cdot L_2 - L_{12}^2}, \\
 i_{2x} = \frac{L_1 \cdot \psi_{2x} - L_{12} \cdot \psi_{1x}}{L_1 \cdot L_2 - L_{12}^2}, \\
 i_{2y} = \frac{L_1 \cdot \psi_{2y} - L_{12} \cdot \psi_{1y}}{L_1 \cdot L_2 - L_{12}^2}, \\
 M = \frac{p_D \cdot L_{12}}{L_1 \cdot L_2 - L_{12}^2} \cdot (\psi_{1y} \cdot \psi_{2x} - \psi_{1x} \cdot \psi_{2y}), \\
 \frac{d\omega_{ЭЛ}}{dt} = \frac{p_D}{J} \cdot (M - M_C), \\
 \omega = \frac{\omega_{ЭЛ}}{p_D}.
 \end{array} \right.$$

Первое уравнение соответствует регулятору скорости, который обычно пропорционально-интегрирующий. Второе уравнение соответствует функциональному преобразователю, реализующему закон частотного регулирования. Третье уравнение описывает автономный инвертор напряжения по каналу управления частотой, а четвертое – по каналу управления напряжением. Уравнения с пятого по тринадцатое – модель двигателя. Четырнадцатое и пятнадцатое – механической части.

Литература

1. Башарин А.В., Постников Ю.В. Примеры расчета автоматизированного электропривода на ЭВМ. – Ленинград: Энергоатомиздат, 1990.
2. Егоров В.Н., Корженевский-Яковлев О.В. Цифровое моделирование систем электропривода. – Ленинград: Энергоатомиздат, Ленингр. отд-ние, 1986. – 168 с.
3. Копылов И.П. Математическое моделирование электрических машин. – Москва: Высшая школа, 1987. – 248 с.

Приложение 1. Листинг программы имитационного моделирования тиристорного преобразователя

```
Program TP;  
{ИММИТАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ ТП}  
  
Type  
  DoubleArray = array [1..40] of double;  
  
{Процедура ввода исходных данных}  
Procedure pIn(var t, dt: double; var D: DoubleArray);  
var  
  f: text;  
  filename: string[13];  
  Rj, Lj,  
  kFn, J,  
  Rt, Lt,  
  Rk,  
  Uopmax,  
  Em,  
  Uzn,  
  Ktp, Ttp, Edmax,  
  Krs, Trs, Kos,  
  Mcn,  
  Tm, Tj, Tmu, ds: double;  
begin  
  write('Введите имя файла ввода ');  
  readln(filename);  
  assign(f, filename);  
  reset(f);  
  write('Введите интервал и шаг расчета ');  
  {readln(f, t, dt);} t:=0.5; dt:=5e-5;  
  write('Введите Rя, Lя ');  
  {readln(f, Rj, Lj);} Rj:=0.1391; Lj:=0.004609;  
  write('Введите kфн и момент инерции ');  
  {readln(f, kFn, J);} kFn:=2.64; J:=1.24;  
  write('Введите Rт, Lт ');  
  {readln(f, Rt, Lt);} Rt:=0.087; Lt:=0.0021;  
  write('Введите Uопмаx ');  
  {readln(f, Uopmax);} Uopmax:=5;  
  write('Введите напряжение вторичной обмотки трансформатора ');  
  {readln(f, Em);} Em:=380;  
  write('Введите сигнал задания скорости ');  
  {readln(f, Uzn);} Uzn:=0.4;  
  write('Введите Кос ');  
  {readln(f, Kos);} Kos:=0.01049;  
  write('Введите номинальный момент двигателя ');  
  {readln(f, Mcn);} Mcn:=481;  
  close(f);  
  
  Rk := 6*50*Lt;  
  Edmax := Em*1.17;  
  Ktp := Pi*Edmax/(2*Uopmax)*sin(Pi/2-Uzn*Pi/Uopmax);  
  Ttp := 1/(3*50);  
  Em := Em*sqrt(2);  
  Tm := (Rj+Rk+Rt)*J/sqr(kFn);  
  Tj := (Lj+Lt)/(Rj+Rk+Rt);  
  ds := sqrt(sqr(Tm)-4*Tm*Tj);  
  Trs := 2*Tm*Tj/(Tm-ds);
```

```

Tmu := 2*Tm*Tj/(Tm+ds)+Ttp;
Krs := kFn*Trs/(2*Tmu*Kos*Ktp);

D[1] := Krs; D[2] := Krs/Trs; D[3] := Krs*Kos; D[4] := Krs*Kos/Trs;
D[5] := Pi/(2*Uopmax);
D[6] := 1/(Lj+Lt); D[7] := D[6]*kFn; D[8] := (Rj+Rt)/(Lj+Lt);
D[9] := 1/(2*Lj+Lt); D[10] := D[9]*2*kFn; D[11] := (2*Rj+Rt)/(2*Lj+Lt);
D[12] := 1/(2*Lt); D[13] := 0.5; D[14] := Rt/(2*Lt); D[15] := Rt/Lt;
D[16] := kFn;
D[17] := kFn/J; D[18] := 1/J;
D[19] := 0.9*Uopmax;
D[20] := Uzn; D[21] := Mcn; D[22] := Em;
end;

```

{Расчет значений входных воздействий}

```

Procedure pX(var Uz, Mc: double; D: DoubleArray; t: double);
begin
  if t > 0.014 then Uz := D[20] else Uz := 0;
  Mc := 0.1*D[21];
end;

```

{Расчет эл. углов векторов напряжений вторичной обмотки трансформатора}

```

Function Psi(t: double; Ph: integer): double;
var
  a: double;
  n: integer;
begin
  a := 100*Pi*t-2*Pi/3*(Ph-1);
  {Выделение целого числа периодов}
  n := trunc(a/(2*Pi));
  if a < 0 then dec(n);
  a := a-2*Pi*n;
  {Корректировка значения так, чтобы было в диапазоне от 30 до 390 эл. градусов}
  if a < Pi/6 then a := a+2*Pi;
  Psi := a;
end;

```

{Расчет правых частей дифуров}

```

Procedure pF(var Y, Yp, F: DoubleArray; D: DoubleArray;
  var CurPh, LastPh: integer; var Com, Ij0: boolean; t, dt: double);
var
  Uz, Uzp, fUz, fw, Mc: double;
  i, n, NextPh: integer;
begin
  {Значения напряжения задания и момента сопротивления}
  pX(Uzp, Mc, D, t-2*dt);
  pX(Uz, Mc, D, t-dt);
  {Производные от скорости и напряжения задания}
  fw := (Y[4]-Yp[4])/dt;
  fUz := (Uz-Uzp)/dt;
  {Определение номера следующей фазы}
  NextPh := CurPh+1; if NextPh > 3 then NextPh := 1;
  {Напряжение управления}
  F[1] := D[1]*fUz+D[2]*Uz-D[3]*fw-D[4]*Y[4];
  {Угол открывания тиристорov}
  Y[11] := Pi/2{3}+Pi/2-D[5]*Y[1];
  {Проверяем условие открывания следующего тиристора}
  if (Y[4+NextPh] >= Y[11]) and (Yp[4+NextPh] <= Yp[11]) then
    begin
      {Если да, то:}
      {Переносим номера фаз на такт коммутации назад}
      LastPh := CurPh; CurPh := NextPh;
    end;

```

```

        {Если был режим бестоковой паузы то переходи к
        нормальному режиму работы}
    if Ij0 then Ij0 := false
    else
        {Если был нормальный режим работы, то переходим к
        режиму коммутации (работа двух тиристоров одновременно)
        и задаем начальное значение для тока в предыдущей фазе}
        begin
            Com := true;
            Y[3] := Y[2];
        end;
    end;
    {Ток якоря и ток предыдущей фазы:}
    if Ij0 then
        {Для режима бестоковой паузы}
        begin
            F[2] := 0;
            F[3] := 0;
        end
    else
        if not Com then
            {Для нормального режима}
            begin
                F[2] := D[6]*Y[7+CurPh]-D[7]*Y[4]-D[8]*Y[2];
                F[3] := 0;
            end
        else
            {Для режима коммутации}
            begin
                F[2] := D[9]*Y[7+LastPh]+D[9]*Y[7+CurPh]-D[10]*Y[4]-D[11]*Y[2];
                F[3] := D[12]*Y[7+LastPh]-D[12]*Y[7+CurPh]+D[13]*F[2]+D[14]*Y[2]-
                    D[15]*Y[3];
            end;
            {Скорость}
            if (D[16]*Y[2] > Mc) or (Y[4] <> 0) then
                F[4] := D[17]*Y[2]-D[18]*Mc
            else F[4] := 0;
        end;

    {Расчет значений переменных модели на текущем шаге
    (метод Эйлера)}
    Procedure pY(var Y, Yp, Yp1: DoubleArray; D: DoubleArray;
        var CurPh, LastPh: integer; var Com, Ij0: boolean; t, dt: double);
    var
        F: DoubleArray;
        i: integer;
    begin
        pF(Yp, Yp1, F, D, CurPh, LastPh, Com, Ij0, t-dt, dt);
        for i := 1 to 4 do
            Y[i] := Yp[i]+dt*F[i];
        end;

    {Корректировка переменных модели}
    Procedure pC(var Y: DoubleArray; D: DoubleArray; CurPh, LastPh: integer;
        var Com, Ij0: boolean);
    var
        i: integer;
    begin
        {Ограничение напряжения управления}
        if Y[1] > D[19] then Y[1] := D[19]
        else if Y[1] < -D[19] then Y[1] := -D[19];

        {Если ток якоря упал до нуля, то переходим к режиму бестоковой

```

```

    паузы}
if Y[2] <= 0 then
  begin
    Ij0 := true;
    Y[2] := 0;
    if Com then
      begin
        Com := false;
        Y[3] := 0;
      end;
    end;
  {Если режим коммутации, то}
  if Com then
    {Проверяем условие закрывания тиристора в прошлой фазе}
    if Y[3] <= 0 then
      begin
        {Если закрылся, то переходим к нормальному режиму}
        Y[3] := 0;
        Com := false;
      end;

    {Определение значений токов в фазах трансформатора}
    for i := 1 to 3 do
      Y[11+i] := 0;
    if not Com then Y[11+CurPh] := Y[2]
    else
      begin
        Y[11+LastPh] := Y[3];
        Y[11+CurPh] := Y[2]-Y[3];
      end;
    {Определение значения ЭДС преобразователя (без учета падения
    напряжения в силовой цепи преобразователя)}
    if Ij0 then Y[13] := 0
    else if not Com then
      Y[15] := Y[7+CurPh]
    else
      Y[15] := (Y[7+CurPh]+Y[7+LastPh])/2;
  end;

Var
  Y, Yp, Yp1, D: DoubleArray;
  t, dt: double;
  CurPh, LastPh, i, j, N: integer;
  Com, Ij0: boolean;
  f: text;

Begin
  {Ввод исходных данных}
  pIn(t, dt, D);
  {Открытие файла вывода}
  assign(f, 'tp1.out'); rewrite(f);
  {Начальные условия:}
  {Режим бестоковой паузы, текущая фаза - C}
  Com := false; Ij0 := true; CurPh := 3; LastPh := 2;
  {Все переменные = нулю}
  fillchar(Y, sizeof(Y), 0);
  fillchar(Yp, sizeof(Yp), 0);
  fillchar(Yp1, sizeof(Yp1), 0);
  {Расчет значений эл. углов и напряжений фаз}
  for i := 1 to 3 do Yp[4+i] := Psi(-dt, i);
  for i := 1 to 3 do Yp[7+i] := D[22]*sin(Yp[4+i]);
  for i := 1 to 3 do Yp1[4+i] := Psi(-2*dt, i);
  for i := 1 to 3 do Yp1[7+i] := D[22]*sin(Yp1[4+i]);

```

```

{Кол-во шагов расчета}
N := round(t/dt);
for i := 1 to N do
  begin
    {Текущее время}
    t := i*dt;
    {Расчет значений эл. углов и напряжений фаз}
    for j := 1 to 3 do
      begin
        Y[4+j] := Psi(t, j); {Psi}
        Y[7+j] := D[22]*sin(Y[4+j]); {Et}
      end;
    {Расчет значений переменных модели на текущем шаге}
    pY(Y, Yp, Yp1, D, CurPh, LastPh, Com, Ij0, t, dt);
    {Корректировка после расчета}
    pC(Y, D, CurPh, LastPh, Com, Ij0);
    {Вывод}
    write(f, t:12:5, ' ');
    for j := 1 to 15 do
      write(f, Yp[j]:12:5, ' ');
    writeln(f);
    {Перенос значений на шаг назад}
    Yp1 := Yp;
    Yp := Y;
  end;
close(f);
End.

```

Содержание

Введение	3
1. Математическое моделирование	4
1.1. Классификация математических моделей	6
1.2. Классификация методов численного решения систем дифференциальных уравнений	8
1.3. Методы численного решения систем дифференциальных уравнений	8
1.4. Пример моделирования простейшей системы	10
1.5. Численное дифференцирование	16
1.6. Рекомендации по выбору численных методов	16
2. Модели элементов систем автоматического управления электроприводами	22
2.1. Модели типовых статических элементов систем автоматического управления	22
2.2. Модели регуляторов	25
2.3. Модели датчиков координат электроприводов	29
3. Модели элементов силовой части электропривода	30
3.1. Электромеханический преобразователь. Обобщенная электрическая машина	30
3.2. Линейное преобразование уравнений обобщенной электрической машины	34
3.3. Представление уравнений обобщенной электрической машины в различных системах координат	39
3.4. Трехфазно-двухфазные преобразования переменных	40
3.5. Модель ДПТ независимого возбуждения	43
3.6. Модель ДПТ последовательного возбуждения	48
3.7. Модель асинхронного электродвигателя	51
3.8. Модель синхронного электродвигателя	60
3.9. Модели силовых преобразователей	62
3.9.1. Тиристорный преобразователь	62
3.9.2. Упрощенная модель тиристорного преобразователя	64
3.9.3. Нелинейная непрерывная модель преобразователя	66
3.9.4. Имитационная модель преобразователя	68
4. Модели систем автоматического управления электроприводами	73
4.1. Модель двухзонной системы автоматического управления скоростью двигателя постоянного тока	73
4.2. Модель системы частотного управления скоростью асинхронного двигателя с короткозамкнутым ротором	75
Литература	77
Приложение 1. Листинг программы имитационного моделирования тиристорного преобразователя	78

Захаренко Владимир Сергеевич

МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЭЛЕКТРОПРИВОДЕ

**Курс лекций
для студентов специальности 1-53 01 05
«Автоматизированные электроприводы»
дневной и заочной формы обучения**

Подписано к размещению в электронную библиотеку
ГГТУ им. П. О. Сухого в качестве электронного
учебно-методического документа 15.12.10.

Рег. № 46Е.

E-mail: ic@gstu.by

<http://www.gstu.by>