Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Высшая математика»

Е. З. Авакян, С. Л. Авакян, И. В. Иванейчик

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

ПРАКТИКУМ
по дисциплине «Высшая математика»
для студентов дневной формы обучения

Гомель 2010

УДК 517.5(075.8)
ББК 22.1я73
А18

Рекомендовано научно-методическим советом
факультета автоматизированных и информационных систем
ГГТУ им. П. О. Сухого
(*протокол № 10 от 28.06.2010 г.*)

Рецензент: зав. каф. «Физика» ГГТУ им. П. О. Сухого, д-р физ.-мат. наук, проф. *П. А. Хило*

Авакян, Е. З.

А18 Дифференцирование функции одной переменной : практикум по дисциплине «Высшая математика» для студентов днев. формы обучения / Е. З. Авакян, С. Л. Авакян, И. В. Иванейчик. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2010. – 38 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: http://lib.gstu.local. – Загл. с титул. экрана.

Содержит основной теоретический материал, относящийся к разделу «Дифференцирование функции одной переменной». Кроме того, подробно и в доступной форме дается решение основных типов задач.

Для студентов дневной формы обучения.

УДК 517.5(075.8)
ББК 22.1я73

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.

Производной данной функции $y = f(x)$ по аргументу x назывется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx, когда последнее произвольным образом стремится к нулю:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Операция нахождения производной от функции $f(x)$ называется *дифференцированием* этой функции.

1. Правила дифференцирования.

Если $u(x)$ и $v(x)$ являются дифференцируемыми функциями аргумента x, то:

$$(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x) \qquad (1)$$

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \qquad (2)$$

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} \qquad (3)$$

$$C' = 0, (C = const) \qquad (4)$$

$$(Cu(x))' = Cu'(x) \qquad (5)$$

Таблица производных элементарных функций:

	Функция $f(x)$	Производная функции $f'(x)$
1.	x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
2.	a^x e^x	$a^x \ln a$ e^x
3.	$\log_a x$ $\ln x$	$\frac{1}{x \ln a}$ $\frac{1}{x}$
4.	$\sin x$	$\cos x$
5.	$\cos x$	$-\sin x$
6.	tgx	$\frac{1}{\cos^2 x}$
7.	$ctgx$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
8.	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

9.	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
10.	$arctgx$	$\frac{1}{1+x^2}$
1	$arcctgx$	$-\frac{1}{1+x^2}$
1	shx	chx
13.	chx	shx
14.	thx	$\frac{1}{ch^2x}$
15.	$cthx$	$-\frac{1}{sh^2x}$

Задания 1. Найти производные функции:

1. $y=5x^4-3x^3+3x^2-2x+4.$
2. $y=\frac{1}{x}+\sqrt{x}+\sqrt[3]{5}.$
3. $y=\sqrt{x}\left(x^2-3\sqrt{x}+2\right).$
4. $y=\frac{1-x^3}{\sqrt{\pi}}.$
5. $y=\frac{\left(x^2+2\right)^2}{\sqrt[3]{x}}.$
6. $y=\frac{ax+b}{cx+d}.$
7. $y=(1+x^2)\left(5-\frac{1}{x^2}\right).$
8. $y=\frac{tgx}{a}+\frac{a}{tgx}.$
9. $y=\frac{x}{sinx+cosx}.$
10. $y=\frac{x\,sinx}{1+tgx}.$
11. $y=x\,arcsinx.$
12. $y=\frac{arcsinx}{arccosx}.$
13. $y-\sqrt{x}\,arctgx.$
14. $y=x\,sinx\,arctgx.$
15. $y=\frac{\ln x}{1+x^2}.$
16. $y=\frac{1-\ln x}{1+\ln x}.$
17. $y=e^x\cos x.$
18. $y=\frac{ax+b}{cx+d}.$
19. $y=x^3-3^x.$
20. $y=xe^x(\cos x+\sin x).$
21. $y=\frac{1+e^x}{1-e^x}.$
22. $y=x\,shx-chx.$

2. Производная сложной функции.

Если $y=f(u)$ и $u=u(x)$ являются дифференцируемыми функциями своих аргументов, то производная сложной функции $y=f(u(x))$ существует и равна произведению производной данной функции f по промежуточному аргументу u на производную промежуточного аргумента u по независимой переменной :

$$y'_x = f'(u)u'(x) \qquad (6)$$

В случае $y = f(u)$, $u = u(z)$, $z = z(x)$:

$$y'_x = f'(u)u'(z)z'(x) \qquad (7)$$

Аналогично во всех более сложных случаях.

Пример 1

Найти производную функции $y = arctg\left(\frac{\sqrt{x}}{1+x}\right)$

Решение:

Аргументом данной функции y является $u = \frac{\sqrt{x}}{1+x}$

Используя таблицу производных, имеем:

$$y'_u = (arctgu)' = \frac{1}{1+u^2} = \frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{x}}{1+x}\right)^2} = \frac{(1+x)^2}{(1+x)^2+x} = \frac{(1+x)^2}{1+3x+x^2}.$$

Производную функции u по переменной x найдем, используя правило дифференцирования частного (3) и таблицу производных:

$$u'_x = \frac{(\sqrt{x})'(1+x)-\sqrt{x}(1+x)'}{(1+x)^2} = \frac{\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}(1+x)-\sqrt{x}}{(1+x)^2} = \frac{\frac{(1+x)}{2\sqrt{x}}-\sqrt{x}}{(1+x)^2} = \frac{1-x}{2\sqrt{x}(1+x)^2}$$

Таким образом, получаем, согласно (6):

$$y'_x = \frac{(1+x)^2}{1+3x+x^2}\cdot\frac{1-x}{2\sqrt{x}(1+x)^2} = \frac{1-x}{2\sqrt{x}(1+3x+x^2)}$$

Ответ: $y'_x = \frac{1-x}{2\sqrt{x}(1+3x+x^2)}$

Задания 2. Найти производные функции:

1. $y = \sqrt{1-x^2}$.
2. $y = \sqrt[3]{\frac{1}{1+x^2}}$.
3. $y = \frac{3}{(x-1)^5} + \sqrt[4]{5-3x-x^2}$.
4. $y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}$.
5. $y = cos^3 5x$.
6. $y = \frac{1}{3}tg^3 x - tgx + x$.
7. $y = \sqrt{tg\frac{x}{2}}$.
8. $y = sin^2(\cos 3x)$.

9. $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

10. $y = \arccos\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

11. $y = \operatorname{arctg}^2\frac{1}{x}$.

12. $y = \sqrt{1+\ln^2 x}$.

13. $y = \log_3(\log_2(\log_5 x))$.

14. $y = e^{\sqrt{\ln x}}$.

15. $y = \operatorname{arctg}\frac{x+1}{x-1}$.

16. $y = \arcsin\sqrt{\sin x}$.

17. $y = \frac{e^{\cos 3x}}{(2x+1)^5}$.

18. $y = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.

19. $y = \ln\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

20. $y = \frac{1+x\operatorname{arctg}x}{\sqrt{1+x^2}}$.

21. $y = \ln\left(x\sin x\sqrt{1-x^2}\right)$.

22. $y = \frac{\sin^2 x}{1+\operatorname{ctg}x} + \frac{\cos^2 x}{1+\operatorname{tg}x}$.

3. Производная функции, заданной неявно.

Пусть зависимость между y и x задана в виде соотношения:

$$F(x,y) = \Phi(x,y) \qquad (8)$$

В этом случае говорят, что функция $y(x)$ задана неявно.

Для вычисления производной y'_x необходимо:

а) вычислить производные от обеих частей уравнения (8), считая при этом y функцией от x;

б) приравнять полученные производные;

в) решить полученное уравнение относительно y'_x.

Пример 2

Найти производную y'_x, *если* $\sin x + \ln y = e^{xy}$

Решение:

а) вычисляем производные от обеих частей заданного равенства, считая y функцией от x:

$$(\sin x + \ln y)' = \cos x + \frac{1}{y}y'_x,$$

$$\left(e^{xy}\right)' = e^{xy}(xy)' = e^{xy}\left(y + xy'_x\right)$$

б) приравниваем полученные производные:

$$\cos x + \frac{1}{y}y'_x = e^{xy}\left(y + xy'_x\right)$$

в) решаем уравнение относительно y'_x:

$$y'_x\left(\frac{1}{y} - xe^{xy}\right) = ye^{xy} - \cos x,$$

$$y'_x = \frac{ye^{xy} - \cos x}{\left(\frac{1}{y} - xe^{xy}\right)} = \frac{y\left(ye^{xy} - \cos x\right)}{\left(1 - xye^{xy}\right)}$$

Ответ: $y'_x = \frac{y\left(ye^{xy} - \cos x\right)}{\left(1 - xye^{xy}\right)}$.

4. Производная функции, заданной параметрически.

Функция $y(x)$ является заданной параметрически, если y и x заданы как функции параметра t:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \qquad (9)$$

Если $\varphi(t), \psi(t)$ - дифференцируемые функции и $x'_t \neq 0$, то производная y'_x может быть найдена по формуле:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \qquad (10)$$

Пример 3

Найти производную y'_x, если

$$\begin{cases} x = a\,tgt \\ y = b\sin t \end{cases}$$

Решение:

Находим x'_t, y'_t:

$$x'_t = \left(a\,tgt\right)' = \frac{a}{\cos^2 t};$$

$$y'_t = \left(b\sin t\right)' = b\cos t$$

Воспользовавшись формулой (10), получаем:

$$y'_x = \frac{b\cos t}{\frac{a}{\cos^2 t}} = \frac{b}{a}\cos^3 t$$

Ответ: $y'_x = \frac{b}{a}\cos^3 t$

5. Производная степенно-показательной функции.

Рассмотрим степенно-показательную функцию $y = \left(u(x)\right)^{v(x)}$.

Для вычисления производной y'_x предварительно прологарифмируем y:

$$\ln y = \ln\left(u(x)\right)^{v(x)} = v(x)\ln\left(u(x)\right)$$

Продифференцируем обе части полученного равенства, считая при этом y функцией от x:

$$(\ln y)' = (v(x)\ln(u(x)))' = v'(x)\ln(u(x)) + v(x)(\ln(u(x)))'$$

$$\frac{y'_x}{y} = v'(x)\ln(u(x)) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}$$

Разрешая полученное уравнение относительно y'_x, окончательно получаем:

$$y'_x = (u(x))^{v(x)}\left(v'(x)\ln(u(x)) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right) \qquad (11)$$

Пример 4

Найти производную функции $y = x^{\sin x}$

<u>Решение:</u>

Прологарифмируем заданную функцию:

$$\ln y = \ln\left(x^{\sin x}\right) = \sin x \cdot \ln x$$

Продифференцируем обе части полученного равенства по x:

$$(\ln y)' = \frac{y'_x}{y}$$

$$(\sin x \cdot \ln x)' = \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}$$

Приравниваем полученные производные:

$$\frac{y'_x}{y} = \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x};$$

$$y'_x = y\left(\cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}\right)$$

Учитывая явный вид заданной функции, окончательно получаем:

$$y'_x = x^{\sin x}\left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}\right)$$

<u>Ответ:</u> $y'_x = x^{\sin x}\left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}\right)$

Задания 3. Найти производные функции:

1. $x^3 + y^3 - 6xy = 0.$
2. $y = x + arctgy.$
3. $2y\,lny = x.$
4. $y^2 + x^2 = ln(xy).$
5. $e^y cosx + e^x sinyx = 0.$
6. $y^x = x^y.$
7. $\begin{cases} x = \frac{t+1}{t} \\ y = \frac{t-1}{t} \end{cases}$
8. $\begin{cases} x = ln(1+t^2) \\ y = t - arctgt \end{cases}$

9. $\begin{cases} x = e^t \sin t \\ y = e^t \cos t \end{cases}$

10. $\begin{cases} x = 5(t - \sin t) \\ y = 5(t - \cos t) \end{cases}$

11. $\begin{cases} x = \arccos\sqrt{1 - t^2} \\ y = \ln(1 - t^2) \end{cases}$

12. $\begin{cases} x = \arcsin^2 t \\ y = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \end{cases}$

13. $y = x^{1/x}$.

14. $y = (\ln x)^x$.

15. $y = (\sin x)^{\cos x}$.

16. $y = x^{x^x}$.

17. $y = \frac{(x-2)^2\sqrt[3]{x+1}}{(x-5)^4}$.

18. $y = \sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}$.

6. Производные высших порядков.

Производной второго порядка или второй производной функции $y = f(x)$ называется производная от ее производной $y' = f'(x)$:

$$y'' = (f'(x))' \qquad (12)$$

Аналогично определяются производные третьего, четвертого и, вообще, любого n-го порядка:

$$y''' = (y'')'; \quad y^{IV} = (y''')'; \ldots y^{(n)} = (y^{(n-1)})' \qquad (13)$$

Производная n-го порядка от суммы функций равна:

$$(y_1 + y_2 + \cdots + y_k)^{(n)} = y_1^{(n)} + y_2^{(n)} + \cdots + y_k^{(n)} \qquad (14)$$

Производная n-го порядка от произведения функций вычисляется по формуле Лейбница:

$$(u \cdot v)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} + \cdots + nu'v^{(n-1)} + uv^{(n)} \qquad (15)$$

Пример 5

Найти производную второго порядка функции $y = tg^2 x$.

Решение:

Найдем первую производную заданной функции:

$$y' = (tg^2 x)' = 2tgx(tgx)' = 2tgx\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}$$

Найдем вторую производную согласно (12):

$$y'' = \left(\frac{2\sin x}{\cos^3 x}\right)' = 2\frac{\cos x \cdot \cos^3 x - \sin x \cdot 3\cos^2 x \cdot (-\sin x)}{\cos^6 x} =$$

$$= 2\frac{\cos^2 x + 3\sin^2 x}{\cos^4 x} = 2\frac{1 + 2\sin^2 x}{\cos^4 x}.$$

Ответ: $y'' = 2\dfrac{1 + 2\sin^2 x}{\cos^4 x}$.

Пример 6

Найти производную n-го *порядка функции* $y = \sin(\alpha x) \cdot x^2$.

Решение:

$$\begin{array}{ll} u = \sin(\alpha x) & v = x^2 \\ u' = \alpha\cos(\alpha x) & v' = 2x \\ u'' = -\alpha^2\sin(\alpha x) & v = 2 \\ \ldots & \end{array}$$

$$u^{(n)} = \alpha^n \sin\left(\alpha x + n\frac{\pi}{2}\right) \quad v''' = v^{IV} = \cdots v^{(n)} = 0$$

Подставим найденные производные в формулу (15). Тогда

$$(\sin(\alpha x) \cdot x^2)^{(n)} = \alpha^n \sin\left(\alpha x + n\frac{\pi}{2}\right) \cdot x^2 +$$

$$+ n \cdot \alpha^{n-1} \sin\left(\alpha x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right) \cdot 2x + \alpha^{n-2} \sin\left(\alpha x + (n-2)\frac{\pi}{2}\right) \cdot 2 =$$

$$= \alpha^{n-2}\left((\alpha^2 x^2 - 2)\sin\left(\alpha x + n\frac{\pi}{2}\right) - 2n\alpha x\cos\left(\alpha x + n\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

Ответ:

$$(\sin(\alpha x) \cdot x^2)^{(n)} = \alpha^{n-2}\left((\alpha^2 x^2 - 2)\sin\left(\alpha x + n\frac{\pi}{2}\right) - 2n\alpha x\cos\left(\alpha x + n\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

Если $y = y(x)$ задана параметрически в виде (9), то производная второго порядка может быть вычислена как

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}, \qquad (16)$$

где y'_x определена по формуле (10).

Для вычисления второй производной функции, заданной параметрически, можно также использовать формулу

$$y''_{xx} = \frac{x'_t y''_{tt} - x''_{tt} y'_t}{(x'_t)^3} \qquad (17)$$

Пример 7

Найти производную второго порядка y''_{xx}, *если*

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$$

Решение:

Найдем x'_t, y'_t:

$$x'_t = (a\cos t)' = -a\sin t,\ y'_t = (b\sin t)' = b\cos t$$

Воспользовавшись формулой (10), получаем y'_x:

$$y'_x = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = -\frac{b}{a}ctgt$$

Найдем $(y'_x)'_t$:

$$(y'_x)'_t = \left(-\frac{b}{a}ctgt\right)' = -\frac{b}{a}\left(-\frac{1}{\sin^2 t}\right) = \frac{b}{a\sin^2 t}$$

y''_{xx} найдем по формуле (16):

$$y''_{xx} = \frac{\dfrac{b}{a\sin^2 t}}{-a\sin t} = -\frac{b}{a^2\sin^3 t}$$

<u>Ответ:</u> $y''_{xx} = -\dfrac{b}{a^2\sin^3 t}$

Задания 4.

Найти производные функций указанного порядка :

1. $y = x^4 - 3x^2 - 2x + 5,\ y'' = ?$
2. $y = (x^2+1)^3,\ y'' = ?$
3. $y = ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right),\ y'' = ?$
4. $y = \cos^2 x,\ y''' = ?$
5. $y = (1+x^2)\, arctgx,\ y'' = ?$
6. $y = \frac{1}{1-x},\ y^{IV} = ?$
7. $y = \frac{1-x}{1+x},\ y^{(n)} = ?\ \left(\frac{2(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}\right)$
8. $y = cos3x,\ y^{(n)} = ?\ \left(3^n cos\left(3x + \frac{n\pi}{2}\right)\right)$

Применяя формулу Лейбница, найти производные функций n-го порядка :

9. $y = x\,e^x,\ \left(e^x(x+n)\right)$
10. $y = x\,lnx,\ \left((-1)^n\frac{(n-2)!}{x^{n-1}}, n \geq 2\right)$
11. $y = sin^2 x,\ \left(2^{n-1}sin\left(2x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right)\right)$

Найти производные 2-го порядка y''_{xx} функций заданных параметрически:

12. $\begin{cases} x = at^2 \\ y = bt^2 \end{cases}$
13. $\begin{cases} x = a(t - sint) \\ y = a(1 - cost) \end{cases}$
14. $\begin{cases} x = ln\,t \\ y = t^2 - 1 \end{cases}$
15. $\begin{cases} x = arcsin\,t \\ y = ln(1-t^2) \end{cases}$

7. Дифференциал функции.

7.1 Вычисление дифференциала.

Приращение Δy функции $y = f(x)$ может быть представлено в виде

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(x)\Delta x, \qquad \lim_{\Delta x\to 0}\alpha(x) = 0 \quad (18)$$

Произведение $f'(x)\Delta x$, представляющее собой , так называемую главную часть приращения, линейную относительно Δx, называют *дифференциалом* функции и обозначается следующим образом:

$$dy = f'(x)dx \qquad (19)$$

Правила вычисления дифференциала имеют вид:

$$d(c\,u(x)) = c\cdot du(x) \quad (20)$$

$$d(u \pm v) = du \pm dv \quad (21)$$

$$d(u\,v) = vdu + udv \quad (22)$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu-udv}{v^2} \quad (23)$$

Пример 8

Найти дифференциал функции

$$y = \sqrt{1+x^2}arctgx.$$

Решение:

Для того, чтобы вычислить дифференциал по формуле (19), найдем производную заданной функции:

$$y' = \left(\sqrt{1+x^2}arctgx\right)' = \left(\sqrt{1+x^2}\right)'arctgx + \sqrt{1+x^2}(arctgx)'$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}arctgx + \sqrt{1+x^2}\frac{1}{1+x^2} = \frac{xarctgx+1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Тогда,согласно (19) получаем:

$$dy = y'dx = \frac{xarctgx+1}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

Ответ: $dy = \frac{xarctgx+1}{\sqrt{1+x^2}}dx$

Пример 9

Найти дифференциал функции, заданной неявно:

$$\ln\sqrt{x^2+y^2} = arctg\frac{y}{x}.$$

Решение:

Для того, чтобы вычислить дифференциал по формуле (19), найдем y'_x. Воспользуемся правилом вычисления производной, приведенным в 3.

а) вычисляем производные от обеих частей заданного уравнения, считая при этом y функцией от x:

$$\left(\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)' = \frac{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)'}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{(x^2+y^2)'}{2(x^2+y^2)} = \frac{2x+2yy'_x}{2(x^2+y^2)} = \frac{x+yy'_x}{x^2+y^2}$$

$$\left(arctg\frac{y}{x}\right)' = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{y}{x}\right)' = \frac{x^2}{x^2+y^2}\frac{y'_x x - y}{x^2} = \frac{y'_x x - y}{x^2+y^2}$$

б) приравниваем полученные производные:

$$\frac{x + yy'_x}{x^2+y^2} = \frac{y'_x x - y}{x^2+y^2}$$

$$x + yy'_x = y'_x x - y$$

в) решаем полученное уравнение относительно y'_x:

$$x + y = y'_x(x - y)$$

$$y'_x = \frac{x+y}{x-y}$$

Тогда,согласно (19) получаем:

$$dy = y'_x dx = \frac{x+y}{x-y}dx$$

Ответ: $dy = \frac{x+y}{x-y}dx$.

7.2 Применение дифференциала к приближенным вычислениям.

Согласно формуле (18) в случае, когда $\Delta x \to 0$, приращение функции Δy в точке x_0 можно считать приближенно равным ее дифференциалу ($dx = \Delta x$)

$$\Delta y \approx dy = f'(x_0)\Delta x \qquad (24)$$

Учитывая, что

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$,

Получаем формулу, для приближенного вычисления значения функции в точке x, близкой к точке x_0:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x. \qquad (25)$$

Пример 10

Насколько приблизительно изменилась сторона квадрата, если его площадь увеличилась от 9 $м^2$ до 9,1$м^2$?

Решение:

Обозначим через x площадь квадрата, а через y - его сторону.

Тогда

$y = \sqrt{x}$.

По условию $x_0 = 9$; $\Delta x = 9{,}1 - 9 = 0{,}1$.

Приращение Δy стороны квадрата найдем согласно (24).

$$y' = \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y'(9) = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{6}$$

Тогда

$$\Delta y \approx \frac{1}{6}0{,}1 \approx 0{,}016.$$

Ответ: Сторона квадрата увеличилась приблизительно на 0,016 м.

Пример 11

Найти приближенное значение $\sqrt[3]{67}$.

Решение:

Воспользуемся формулой (25). В данном случае $f(x) = \sqrt[3]{x}$. В качестве x_0 выберем $x_0 = 64$. Тогда $\Delta x = 67 - 64 = 3$, $f(64) = \sqrt[3]{64} = 4$.
Найдем $f'(x_0)$:

$$f'(x) = \left(\sqrt[3]{x}\right)' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$f'(64) = \frac{1}{3\sqrt[3]{64^2}} = \frac{1}{48}.$$

Тогда, согласно (25) получаем:

$$\sqrt[3]{67} \approx 4 + \frac{1}{48} \cdot 3 = 4 + \frac{1}{16} = 4{,}0625$$

Ответ: $\sqrt[3]{67} \approx 4{,}0625$.

7.3 Дифференциалы высших порядков.

Дифференциалом второго порядка называется дифференциал, от дифференциала первого порядка:

$$d^2y = d(dy) \qquad (26)$$

Аналогично определяются дифференциалы третьего, четвертого и, вообще любого n -го порядка.

Если $y = f(x)$ и x- независимая переменная, то

$$d^2y = f''(u)(du)^2 + f'(u)d^2u, \qquad (27)$$

$$d^3y = f'''(u)(du)^3 + 3f''(u)du\,d^2u + f'(u)d^3u \qquad (28)$$

Пример 12.

Вычислить $d^2y, y = x^2$ в случае если а) x-независимая переменная; б) $x = t^2$.

Решение:

а) x-независимая переменная

$f'(x) = (x^2)' = 2x;\ f''(x) = (2x)' = 2$

тогда, согласно (26)

$$d^2y = 2(dx)^2$$

б) $x = t^2$.

$x'(t) = 2t; x''(t) = 2$

$dx = 2tdt;\ d^2x = 2(dt)^2$

По формуле (27) получаем

$d^2y = 2(2tdt)^2 + 2t^2 \cdot 2(dt)^2 = 12t^2(dt)^2$.

Ответ: а) $d^2y = 2(dx)^2$ б) $d^2y = 12t^2(dt)^2$

Задания 5.
Найти дифференциалы функций:

1. $y = arctg\,\frac{x}{a}$.

2. $y = \frac{x^3+1}{x^3-1}$.

3. $y = \ln\left(\arcsin\sqrt{1-x^2}\right)$.

4. $y = \cos^2(tg\,x^2)$.

5. $y = \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$.

6. $y = x^2 arctg\sqrt{x}$.

Найти дифференциалы функций, заданных неявно:

7. $x^4 + y^4 = x^2y^2$.

8. $y^2 + 3xy + \sin y = 0$.

Найти дифференциалы 2-го порядка:

9. $y = x^2e^{-x}$.

10. $y = \ln x \cdot \sin x$.

Найти d^2y функции $y = \ln\frac{1-x^2}{1+x^2}$ в случае если

11. x – независимая переменная.

12. $x = tg\,t$.

Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

13. $\sqrt{80,9}$.

14. *arctg 1,02.*

15. $\sin 31°$.

16. $\sqrt[5]{31}$.

17. Найти точное и приближенное изменение объёма шара при изменении его радиуса с $R = 2$ до $R = 1,98$.

8. Правило Лопиталя – Бернулли.

8.1 Раскрытие неопределенностей типа $\left(\frac{0}{0}\right)$ и $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ -дифференцируемые функции.

Если $f(x)$ и $g(x)$ являются бесконечно малыми или бесконечно большими при $x \to a$, тогда

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad (29)$$

при условии, что предел отношения производных существует. При необходимости формула (29) может быть применена к полученным отношениям несколько раз.

Пример 13

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{ctgx}$.

Решение:

В данном случае $f(x)=\ln x,\ g(x)=ctgx$. При $x\to 0$ имеем неопределенность типа $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Применяя правило Лопиталя - Бернулли, получаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{ctgx}=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{(ctgx)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}}=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}=0$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{ctgx}=0$

8.2 Раскрытие неопределенности типа $(0\cdot\infty)$.

Для раскрытия неопределенности типа $(0\cdot\infty)$ преобразуем произведение $f_1(x)\cdot f_2(x)$, где $\lim\limits_{x\to a}f_1(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}f_2(x)=\infty$, в частное:

$$\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{\frac{1}{f_2(x)}}=\left(\frac{0}{0}\right) \text{ или } \lim_{x\to a}\frac{f_2(x)}{\frac{1}{f_1(x)}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right) \quad (30)$$

и далее воспользуемся правилом Лопиталя – Бернулли (29).

Пример 14

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-x}$.

Решение:

В данном случае $f_1(x)=e^{-x},\ f_2(x)=x$. При $x\to+\infty$ имеем неопределенность типа $(0\cdot\infty)$. Преобразуем произведение xe^{-x} в частное

$$xe^{-x}=\frac{x}{\frac{1}{e^{-x}}}=\frac{x}{e^x}$$

В результате получили неопределенность типа $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

Применяя правило Лопиталя - Бернулли, получаем:

$$\lim_{x\to+\infty}xe^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-x}=0$

8.3 Раскрытие неопределенности типа $(\infty-\infty)$.

Для раскрытия неопределенности типа $(\infty-\infty)$ разность $f_1(x)-f_2(x)$ преобразуем в произведение:

$$f_1(x)-f_2(x)=f_1(x)\left[1-\frac{f_2(x)}{f_1(x)}\right] \qquad (31)$$

Если $\lim\limits_{x\to a}\frac{f_2(x)}{f_1(x)}=1$, то произведение (31) может быть преобразовано в частное:

$$f_1(x)-f_2(x)=f_1(x)\left[1-\frac{f_2(x)}{f_1(x)}\right]=\frac{1-\frac{f_2(x)}{f_1(x)}}{\frac{1}{f_1(x)}} \qquad (32)$$

Предел (32) представляет собой неопределенность типа $\left(\frac{0}{0}\right)$ и может быть вычислен с помощью правила Лопиталя – Бернулли (29).

Пример 15

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)$.

<u>Решение:</u>

Преобразуем выражение, стоящее под знаком предела, согласно изложенной схеме:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}\right)$$

Для упрощения вычислений воспользуемся эквивалентностью бесконечно малых при $x\to 0$:

$$\sin x\sim x;\quad x^2\sin^2 x\sim x^4$$

Тогда

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^4}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{(x^2-\sin^2 x)'}{(x^4)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x-2\sin x\cos x}{4x^3}=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{2x-\sin 2x}{x^3}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{(2x-\sin 2x)'}{(x^3)'}=$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos 2x}{3x^2}=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{2(1-\cos 2x)}{3x^2}=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{4\sin^2 x}{3x^2}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}=\frac{1}{3}$$

<u>Ответ:</u> $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{3}$

8.4 Раскрытие неопределенностей типа $(0^0),(1^\infty),(\infty^0)$.

Неопределенности указанного типа раскрываются с помощью предварительного логарифмирования:

$$\ln(\lim_{x\to a}\left(f_1(x)\right)^{f_2(x)}) = \lim_{x\to a}\ln\left(f_1(x)\right)^{f_2(x)} = \lim_{x\to a} f_2(x)\ln\left(f_1(x)\right) \quad (33)$$

В результате получаем неопределенность типа $(0\cdot\infty)$(см. пункт 8.2).

Пример 16

Вычислить предел $\lim_{x\to 0}(\sin x)^{tg 2x}$.

Решение:

В данном случае

$$f_1(x) = \sin x,\ \lim_{x\to 0}\sin x = 0$$

$$f_2(x) = tg 2x,\ \lim_{x\to 0} tg 2x = 0$$

т.е. имеем неопределенность типа $\left(0^0\right)$.

Прологарифмируем функцию, стоящую под знаком предела и преобразуем полученное выражение в частное:

$$\ln(\sin x)^{tg 2x} = tg 2x\cdot\ln(\sin x) = \frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{tg 2x}} = \frac{\ln(\sin x)}{ctgx}.$$

Получили неопределенность типа $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Вычислим полученный предел, используя правило Лопиталя – Бернулли (29):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin x)}{ctg\,2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\ln(\sin x)\right)'}{(ctg\,2x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sin x}\cos x}{-\frac{2}{\sin^2 2x}} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x\cos x}{\sin x} = 0.$$

Таким образом, получаем

$$\ln(\lim_{x\to 0}(\sin x)^{tg 2x}) = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}(\sin x)^{tg 2x} = e^0 = 1$$

Ответ: $\lim_{x\to 0}(\sin x)^{tg 2x} = 1$

Задания 6. Найти пределы, используя правило Лопиталя – Бернулли:

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{x^3+5x^2-6x-16}$ $\left(\dfrac{16}{13}\right)$	2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\sin x}$ (2)
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos ax}{1-\cos bx}$ $\left(\dfrac{a^2}{b^2}\right)$	4. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^{3x}}{x^3}$ $(+\infty)$
5. $\lim\limits_{x\to \pi/4}\dfrac{\sqrt{tg\, x}-1}{2\sin^2 x-1}$ $\left(\dfrac{1}{2}\right)$	6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{\sin x\cos x}$ (2)
7. $\lim\limits_{x\to 0} x\, ctgx$ $\left(\dfrac{1}{2}\right)$	8. $\lim\limits_{x\to +0}\sqrt[3]{x}\,\ln x$ (0)
9. $\lim\limits_{x\to \pi/2}\cos 3x\, tg 5x$ $\left(-\dfrac{5}{3}\right)$	10. $\lim\limits_{x\to 0} ctgx\,\ln(x+e^{x})$ (2)
11. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{x-1}\right)$ $\left(-\dfrac{1}{2}\right)$	12. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$ (0)
13. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{\ln x}\right)$ (-1)	14. $\lim\limits_{x\to \pi/2}\left(\dfrac{x}{ctg\, x}-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$ (-1)
15. $\lim\limits_{x\to +\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}$ (1)	16. $\lim\limits_{x\to +0} x^{\frac{6}{1+2\ln x}}$ (e^3)
17. $\lim\limits_{x\to \pi/4}(tg\, x)^{tg 2x}$ $\left(\dfrac{1}{e}\right)$	18. $\lim\limits_{x\to \pi/2}(tg\, x)^{2x-\pi}$ (1)

9. Уравнения касательной и нормали.

Рассмотрим кривую, уравнение которой имеет вид $y=f(x)$.
Уравнение касательной к данной кривой в точке $M(x_0,y_0)$ имеет вид:

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0) \qquad (34)$$

Нормалью к кривой в данной точке называется прямая, проходящая через данную точку, перпендикулярную к касательной в этой точке.
Уравнение нормали к данной кривой в точке $M(x_0,y_0)$ имеет вид:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \qquad (35)$$

Длина отрезка касательной, заключенного между точкой касания и осью абсцисс называется *длиной касательной*, проекция этого отрезка на ось абсцисс называется *подкасательной*.

Длина отрезка нормали, заключенного между точкой касания и осью абсцисс называется *длиной нормали*,проекция этого отрезка на ось абсцисс называется *поднормалью*.

Пример 17

Написать уравнения касательной и нормали к кривой $y = tgx$ *в точке, абсцисса которой равна* $\frac{\pi}{4}$.

Решение:

Найдем значение функции в точке $x_0 = \frac{\pi}{4}$:

$$y_0 = f(x_0) = tg\frac{\pi}{4} = 1.$$

Найдем производную заданной функции в точке $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

$$f'(x) = (tgx)' = \frac{1}{cos^2 x}$$

$$f'(x_0) = \frac{1}{cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 2$$

Уравнение касательной найдем по формуле (34):

$$y - 1 = 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$y = 2x - \frac{\pi}{2} + 1$$

Уравнение нормали найдем по формуле (35):

$$y - 1 = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{8} + 1$$

Ответ: Уравнение касательной :$y = 2x - \frac{\pi}{2} + 1;$

Уравнение нормали : $y = -\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{8} + 1$.

Пример 18

Написать уравнения касательной и нормали, длины касательной и подкасательной, длины нормали и поднормали для эллипса

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$$

в точке $M(x_0, y_0)$, для которой $t = \frac{\pi}{4}$.

Решение:

Найдем $f'(x)$ как производную функции, заданной параметрически по формуле (10):

$y'_t = (b\sin t)' = b\cos t$

$x'_t = (a\cos t)' = -a\sin t$

$f'(x) = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = -\frac{b}{a}ctgt.$

Найдем координаты точки касания $x_0, y_0 f'(x_0)$: и значение производной в точке касания $f'(x_0)$:

$$x_0 = a\cos\frac{\pi}{4} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$y_0 = b\sin\frac{\pi}{4} = \frac{b}{\sqrt{2}}$$

$$f'(x_0) = -\frac{b}{a}ctg\frac{\pi}{4} = -\frac{b}{a}$$

Уравнение касательной найдем по формуле (34):

$y - \frac{b}{\sqrt{2}} = -\frac{b}{a}\left(x - \frac{a}{\sqrt{2}}\right), bx + ay - \sqrt{2}ab = 0$

Найдем координаты (x_1, y_1)точки Tпересечения касательной с осью Ox:

$y_1 = 0;\ x_1 = \sqrt{2}a$

Длина касательной равна длине отрезка MT:

$$|MT| = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} = \sqrt{\left(\sqrt{2}a - \frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{2}}$$

Согласно определению, подкасательная MP равна

$|MP| = \left||MT|\cos\alpha\right|$

Где угол α – угол между касательной и осью Ox . Поэтому, $tg\alpha$ - угловой коэффициент касательной, равный $f'(x_0)$.

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(f'(x_0)\right)^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Таким образом, подкасательная $|MP|$ равна

$$|MP| = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

Уравнение нормали найдем по формуле (35):

$$y - \frac{b}{\sqrt{2}} = \frac{a}{b}\left(x - \frac{a}{\sqrt{2}}\right), (ax - by)\sqrt{2} - a^2 + b^2 = 0$$

Найдем координаты (x_2, y_2) точки N пересечения нормали с осью Ox:

$y_2 = 0;\ x_2 = \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{2}a}$

Длина нормали равна длине отрезка MN:

$$|MN| = \sqrt{(x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2} = \sqrt{\left(\frac{a^2 - b^2}{\sqrt{2}a} - \frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{b\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{2}a}$$

Согласно определению, поднормаль MK равна

$|MK| = \left||MN|\cos\beta\right|$

Где угол β – угол между нормалью и осью Ox. Поэтому, $tg\beta$ - угловой коэффициент нормали, равный $-\frac{1}{f'(x_0)}$.

$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\beta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(f'(x_0)\right)^{-2}}} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Поэтому, поднормаль $|MK|$ равна:

$$|MK| = \frac{b\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{2}a} \cdot \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{b^2}{\sqrt{2}a}$$

Ответ: Уравнение касательной : $bx + ay - \sqrt{2}ab = 0$

Уравнение нормали : $(ax - by)\sqrt{2} - a^2 + b^2 = 0$

Длина касательной $|MT| = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{2}}$; подкасательная $|MP| = \frac{a}{\sqrt{2}}$;

Длина нормали $|MN| = \frac{b\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{2}a}$; поднормаль $|MK| = \frac{b^2}{\sqrt{2}a}$

Задания 7. Написать уравнения касательной и нормали:

1. К параболе $y = x^2 - 4x$ *в точке, абсцисса которой* $x_0 = 1$.
$(2x + y + 1 = 0,\ x - 2y - 7 = 0)$.

2. К окружности $y^2 + x^2 - 2x + 4y - 3 = 0$ *в точках пересечения её с осью абсцисс*.
$(x - y + 1 = 0,\ x + y + 1 = 0;\ x + y - 3 = 0,\ x - y - 3 = 0)$.

3. К циклоиде $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ *в точке, для которой* $t = \frac{\pi}{2}$.
$(2x - 2y - \pi + 4 = 0,\ 2x + 2y - \pi = 0)$.

4. В каких точках кривой $\begin{cases} x = t - 1 \\ y = t^3 - 12t + 1 \end{cases}$ *касательная параллельна:*
а) оси Ox; б) прямой $9x + y + 3 = 0$.
(а)$(1,-15),(-3,17)$; б)$(0,-10),(-2,12)$).

10. Промежутки монотонности функции. Экстремумы функции.

Условие монотонности функции:

Для того, чтобы дифференцируемая на $(a;b)$ функция $f(x)$ не возрастала, необходимо и достаточно, чтобы во всех точках, принадлежащих $(a;b)$ ее производная была неположительна .

$$f'(x) \le 0 \qquad (36)$$

Для того, чтобы дифференцируемая на $(a;b)$ функция $f(x)$ не убывала, необходимо и достаточно, чтобы во всех точках, принадлежащих $(a;b)$ ее производная была неотрицательна.

$$f'(x) \ge 0 \qquad (37)$$

Промежутки, на которых производная функции сохраняет определенный знак, называются промежутками *монотонности* функции $f(x)$

Пример 19

Найти промежутки монотонности функции $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 14$.

Решение:

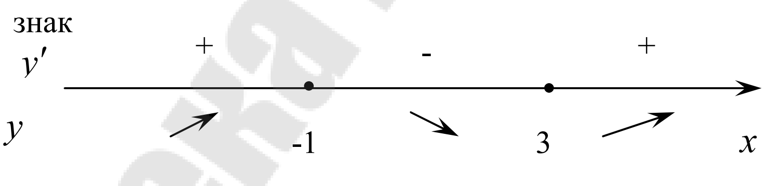
Найдем производную функции $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 14$.

$$y' = (x^3 - 3x^2 - 9x + 14)' = 3x^2 - 6x - 9$$

Найдем промежутки знакопостоянства полученной производной. Для этого разложим полученный квадратный трехчлен на множители:

$$y' = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3).$$

Исследуем знак полученного выражения, используя метод интервалов.



Таким образом, получаем согласно (36), (37),что заданная функция возрастает на $(-\infty;-1) \cup (3;\infty)$ и убывает на $(-1;3)$.

Ответ: Заданная функция $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 14$ возрастает на $(-\infty;-1) \cup (3;\infty)$ и убывает на $(-1;3)$.

Определение Функция $f(x)$ имеет в точке x_0 *локальный максимум (минимум)*, если существует такая окрестность точки x_0 $(x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x)$, что для всех $x \in (x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x)$ выполняется условие $f(x) \le f(x_0)$ ($f(x) \ge f(x_0)$).

Локальный минимум или максимум функции $f(x)$ называется *локальным экстремумом.*

Необходимое условие существования экстремума.

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 экстремум, то производная $f'(x)$ в точке x_0 либо равна нулю, либо не существует.

Точка x_0 называется *критической точкой* функции $f(x)$, если производная $f'(x)$ в точке x_0 либо равна нулю, либо не существует.

Достаточные условия наличия экстремума в критической точке x_0.

Пусть точка x_0 является критической.

Первое достаточное условие экстремума:

Пусть функция $f(x)$ непрерывна в некоторой окрестности $(x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x)$ точки x_0 и дифференцируема в каждой точке $x \in (x_0 - \Delta x, x_0) \cup (x_0, x_0 + \Delta x)$.

Точка (x_0, y_0) является точкой локального максимума, если при переходе через x_0

производная функции меняет знак с плюса на минус.

Точка (x_0, y_0) является локальным минимумом, если при переходе через x_0 производная функции меняет знак с минуса на плюс.

Пример 20

Найти экстремумы функции $y = \frac{2}{3}x^2\sqrt[3]{6x-7}$.

Решение:

Найдем производную заданной функции

$$y' = \left(\frac{2}{3}x^2\sqrt[3]{6x-7}\right)' = \frac{2}{3}\left(2x\sqrt[3]{6x-7} + x^2\frac{1}{3}(6x-7)^{-\frac{2}{3}}\cdot 6\right) =$$

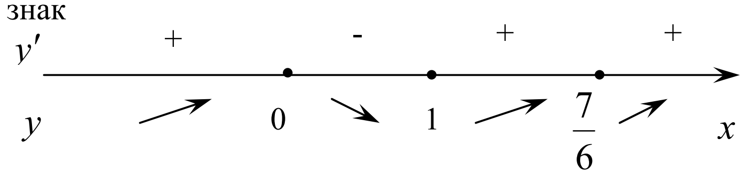
$$= \frac{2}{3}\left(2x\sqrt[3]{6x-7} + \frac{2x^2}{\sqrt[3]{(6x-7)^2}}\right) = \frac{4}{3}\frac{x(6x-7)+x^2}{\sqrt[3]{(6x-7)^2}} = \frac{28}{3}\frac{x(x-1)}{\sqrt[3]{(6x-7)^2}}$$

Приравнивая в полученной производной к нулю числитель и знаменатель, найдем критические точки:

$$x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0; x = 1$$

$$6x - 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{7}{6}$$

Исследуем знак производной, используя метод интервалов.



Из рисунка видно, что при переходе через точку $x=0$ производная меняет знак с плюса на минус. Следовательно, в точке $x=0$ - локальный максимум.
При переходе через точку $x=1$ производная меняет знак с минуса на плюс. Следовательно, в точке $x=1$ - локальный минимум.

При переходе через точку $x=\frac{7}{6}$ производная не меняет знак.

Следовательно, критическая точка $x=\frac{7}{6}$ не является экстремумом заданной функции.

Ответ: $y(0)=0$ - локальный максимум, $y(1)=-\frac{2}{3}$ - локальный минимум.

Второе достаточное условие экстремума:
Если первые $2n-1$ производные функции $f(x)$ в точке x_0 равны нулю, а $2n$-ная производная функции $f(x)$ в точке x_0 отлична от нуля, то точка x_0 является точкой экстремума функции $f(x)$, причем,
если

$$f'(x)=f''(x)=f'''(x)=\ldots f^{(2n-1)}(x)=0, f^{(2n)}(x)>0, \quad (38)$$

то x_0 - точка локального минимума
если

$$f'(x)=f''(x)=f'''(x)=\ldots f^{(2n-1)}(x)=0, f^{(2n)}(x)<0, \quad (39)$$

то x_0 - точка локального максимума.

Пример 21

Найти экстремумы функции, пользуясь второй производной $y=x+\sqrt{1-x}$.

Решение:

ОДЗ: $x\in(-\infty,1]$.
Найдем первую производную заданной функции

$$y'=(x+\sqrt{1-x})'=1-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}=\frac{2\sqrt{1-x}-1}{2\sqrt{1-x}}$$

Найдем критические точки функции:

$$2\sqrt{1-x}-1=0, \sqrt{1-x}=\frac{1}{2}, x=\frac{3}{4}$$

Точку $x=1$ мы не рассматриваем, так как функция определена только в левой окрестности $x=1$.
Найдем вторую производную

$$y''==\left(1-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}\right)'=-\frac{1}{2}\left((1-x)^{-\frac{1}{2}}\right)'=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)(1-x)^{-\frac{3}{2}}(-1)=-\frac{1}{4(1-x)\sqrt{1-x}}$$

Находим $y''\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{1}{4\left(1-\frac{3}{4}\right)\sqrt{1-\frac{3}{4}}} = -2 < 0$

Таким образом, на основании (39) делаем вывод о том, что при $x = \frac{3}{4}$ $y(\frac{3}{4}) = \frac{5}{4}$ - локальный максимум.

Ответ: $y(\frac{3}{4}) = \frac{5}{4}$ - локальный максимум.

Задания 8.

Исследовать на возростание и убывание функции:

1. $y = x^3 - 3x + 5$ 2. $y = e^{kx}$ 3. $y = \sqrt{(x^2-9)^3}$
4. $y = x(1 + 2\sqrt{x})$ 5. $y = ln(1 - x^2)$ 6. $y = x|x|$

Исследовать на экстремумы функции:

7. $y = (1 - x^2)^3$ $(y_{max} = y(0) = 1)$
8. $y = x\sqrt{1 - x^2}$ $\left(y_{max} = y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2};\ y_{min} = y\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2}\right)$
9. $y = 2\sqrt[3]{x^5} - 5\sqrt[3]{x^2} + 1$ $(y_{max} = y(0) = 1;\ y_{min} = y(1) = -2)$
10. $y = sin^2 x$ $\left(\begin{array}{c} x_k = \frac{\pi k}{2};\ y_{min} = y\left(\frac{\pi k}{2}\right) = 0, \text{при } k = 2n; \\ y_{max} = y\left(\frac{\pi k}{2}\right) = 1, \text{при } k = 2n-1 \end{array}\right)$

11. Наибольшее и наименьшее значения функции.

Чтобы найти наибольшее или наименьшее значения непрерывной функции на отрезке $[a;b]$ надо:

- Найти все критические точки функции на заданном отрезке и вычислить значения функции в найденных точках;
- Вычислить значения функции на концах промежутка $f(a)$ и $f(b)$;
- Из всех полученных значений функции выбрать наибольшее или наименьшее; оно и будет представлять собой наибольшее или наименьшее значение функции на отрезке $[a;b]$.

Пример 22

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = -3x^4 + 6x^2 - 1$ *на отрезке* $-2 \le x \le 2$.

Решение:

1.Найдем критические точки функции, принадлежащие данному отрезку:

$$y' = (-3x^4 + 6x^2 - 1)' = -12x^3 + 12x = -12x(x^2 - 1)$$
$$= -12x(x-1)(x+1) = 0$$

$x_1 = 0; x_2 = -1; x_3 = 1$

Все найденные точки принадлежат заданному отрезку. Найдем значения заданной функции в найденных точках:

$y(0) = -1; y(-1) = 2; y(1) = 2$

2.Найдем значения функции на концах промежутка:

$$y(-2) = -25;\ y(2) = -25$$

3.Среди всех найденных значений y выберем наименьшее и наибольшее:

$y_{min} = y(-2) = y(2) = -25;\ y_{max} = y(-1) = y(1) = 2$

Ответ: наименьшее значение функции $y_{min} = -25$; наибольшее значение- $y_{max} = 2$

С помощью теории максимума и минимума решаются многие задачи геометрии, физики, экономики.

Пример 23

Какие размеры надо придать цилиндру, чтобы при данном объеме V его полная поверхность S была наименьшей?

Решение:

Обозначим через R радиус основания цилиндра и через H - его высоту.
Тогда площадь его полной поверхности равна:

$S = 2\pi R^2 + 2\pi RH$

Объем цилиндра V задан, поэтому R и H связаны соотношением:

$V = \pi R^2 H$

откуда

$$H = \frac{V}{\pi R^2}$$

Подставив полученное выражение для H в формулу для S, получим S как функцию от одной переменной R:

$$S(R) = 2\pi R^2 + 2\pi R\frac{V}{\pi R^2} = 2\left(\pi R^2 + \frac{V}{R}\right)$$

Найдем наименьшее значение функции $S(R)$ в промежутке $0 < R < \infty$.

$$\frac{dS}{dR} = 2\left(\pi R^2 + \frac{V}{R}\right)' = 2\left(2\pi R - \frac{V}{R^2}\right)$$

$$\frac{dS}{dR} - 0, \left(2\pi R - \frac{V}{R^2}\right) - 0,$$

$$R_1 = \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Найдем вторую производную $S(R)$:

$$\frac{d^2S}{dR^2} = 2\left(2\pi R - \frac{V}{R^2}\right)' = 2\left(2\pi + \frac{2V}{R^3}\right)$$

$$\left(\frac{d^2S}{dR^2}\right)_{R_1=\left(\frac{V}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}}} = 2\left(2\pi + \frac{2V}{\frac{V}{2\pi}}\right) = 12\pi > 0$$

Вторая производная положительна, следовательно в точке R_1 функция $S(R)$ имеет минимум.

Найдем H:

$$H = \frac{V}{\pi\left(\frac{V}{2\pi}\right)^{\frac{2}{3}}} = 2\left(\frac{V}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = 2R_1$$

Таким образом, для того чтобы при заданном объеме полная поверхность цилиндра была наименьшей, высота цилиндра должна равняться диаметру его основания.

Ответ: $R_1 = \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$; $H = 2\left(\frac{V}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$

Задания 9.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.

1. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$ на $[-4,4]$ $\quad y_{наиб} = y(-1) = 40$, $y_{наим} = y(-4) = -41$

2. $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 10$ на $[0,3]$ $\quad y_{наиб} = y(2) = 10$, $y_{наим} = y(0) = -10$

3. $y = x^2 \ln x$ на $[1, e]$ $\quad y_{наиб} = y(e) = e^2$, $y_{наим} = y(1) = 0$

4. $y = x - 2\ln x$ на $[1, e]$ $\quad y_{наиб} = y(1) = 1$, $y_{наим} = y(2) = 2(1 - \ln 2)$

5. Из куска проволоки длиной l согнуть прямоугольник, чтобы его площадь была наибольшей. (квадрат)

6. В прямоугольном куске картона длиной 48 см и шириной 30 см вырезают по углам одинаковые квадраты и из оставшейся части склеивают открытую прямоугольную коробку. Какова должна быть

сторона вырезаемых квадратов, чтобы объем коробки был наибольшим?(6 см)

7. На прямой между двумя источниками света силы F и $8F$ найти наименее освещенную точку, если расстояние между источниками 24 м, а освещенность точки обратно пропорциональна расстоянию ее от источника. (16 м от более сильного источника света)

8. Из данного круга вырезать такой сектор, чтобы, свернув его, получить конус с наибольшим объёмом. (центральный угол сектора равен $2\pi(2/3)^{1/2}$).

12. Промежутки выпуклости и вогнутости. Точки перегиба.

Рассмотрим на плоскости кривую $y = f(x)$, являющуюся графиком однозначной дифференцируемой функции $f(x)$.

Говорят, что кривая обращена *выпуклостью вверх* на интервале (a,b), если все точки кривой лежат ниже любой ее касательной на этом интервале.

Говорят, что кривая обращена *выпуклостью вниз* на интервале (a,b), если все точки кривой лежат выше любой ее касательной на этом интервале.

Кривую, обращенную выпуклостью вверх, будем называть *выпуклой*, а обращенную выпуклостью вниз – *вогнутой.*

Условие выпуклости кривой.

Если во всех точках интервала (a,b) вторая производная функции $f(x)$ отрицательна, т.е.

$$f''(x) < 0, \qquad (40)$$

то кривая $y = f(x)$ выпукла на этом интервале.

Условие вогнутости кривой.

Если во всех точках интервала (a,b) вторая производная функции $f(x)$ положительна, т.е.

$$f''(x) > 0, \qquad (41)$$

то кривая $y = f(x)$ вогнута на этом интервале.

Пример 24

Установить интервалы выпуклости и вогнутости кривой, заданной уравнением $y = x^3 - 10x^2 + 3x - 5$.

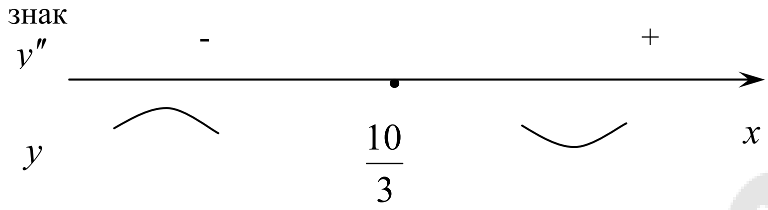
Решение:

Найдем вторую производную заданной функции

$$y'' = (x^3 - 10x^2 + 3x - 5)'' = (3x^2 - 20x + 3)' = 6x - 20.$$

Найдем промежутки знакопостоянства полученной производной

$$6x - 20 = 0 \Rightarrow x = \frac{10}{3}$$



Таким образом, на основании (40) и (41) делаем вывод о том, что кривая вогнута на $\left(\frac{10}{3},\infty\right)$; кривая выпукла на $\left(-\infty,\frac{10}{3}\right)$.

Ответ: промежуток выпуклости кривой - $\left(-\infty,\frac{10}{3}\right)$; промежуток вогнутости- $\left(\frac{10}{3},\infty\right)$.

Точка, отделяющая промежутки выпуклости и вогнутости кривой друг от друга называется *точкой перегиба.*

Достаточное условие точки перегиба:

Пусть кривая определена уравнением $y=f(x)$. Если $f''(x_0)=0$ или $f''(x_0)$ не существует и при переходе через $x=x_0$ производная $f''(x)$ меняет знак , то точка кривой с абсциссой $x=x_0$ есть точка перегиба.

Пример 25

Найти точки перегиба кривой , заданной уравнением $y=x^4-12x^3+48x^2-50$.

Решение:

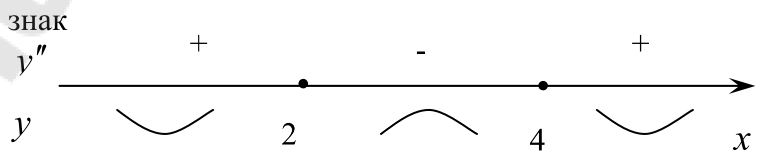
Найдем вторую производную заданной функции:

$$y''=\left(x^4-12x^3+48x^2-50\right)''=\left(4x^3-36x^2+96x\right)'=12x^2-72x+96$$

Найдем значения x, при которых полученная вторая производная обращается в нуль:

$$12x^2-72x+96=0,\Rightarrow x_1=2;\, x_2=4$$

Исследуем знак второй производной :



При переходе через полученные точки вторая производная меняет знак, следовательно, точки $x_1=2;\, x_2=4$ являются абсциссами точек перегиба.

Ответ: точки перегиба функции $y=x^4-12x^3+48x^2-50$- $(2,62);(4,-274)$.

Задания 10. Установить интервалы выпуклости и вогнутости кривой, найти точки перегиба.

1. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 9$ $(1;-2)$. *2.* $y = 3x^5 - 5x^4 + 4$ $(1;2)$.

3. $y - 3 - \sqrt[5]{(x+2)^7}$ $(-2;3)$. *4.* $y = 1 - ln(x^2 - 4)$ *нет.*

5. $y = \frac{1}{(x+1)^2}$ *нет.* *6.* $y = x + 2 - \sqrt[3]{x^5}$ $(0;2)$.

13. Общая схема исследования функций и построения графиков.

13.1 Общая схема исследования и построения графика функции заданной явно.

Общее исследование функции следует проводить по приведенной ниже схеме:

1.Определить область существования функции, область непрерывности, точки разрыва.

2. Найти асимптоты функции.
3. Выяснить вопрос о периодичности.
4. Выяснить вопрос о четности или нечетности.

В случае, если функция окажется четной $f(-x) = f(x)$ или нечетной $f(-x) = -f(x)$ достаточно исследовать функцию только при положительных значениях аргумента. При построении графика следует учесть, что график четной функции симметричен относительно оси ординат; график нечетной функции симметричен относительно начала координат.

5.Найти точки пересечения графика функции с осями координат:

с осью абсцисс - точки $(x_0, 0)$, где x_0 -решение уравнения $f(x) = 0$;

с осью ординат- точки $(0, y_0)$, где $y_0 = f(0)$.

6. Найти промежутки монотонности и локальные экстремумы.
7.Найти интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба.
8. Составить таблицу

x	$(-\infty, x_1)$	x_1	(x_1, x_2)	x_2	$\dots$	x_n	$(x_n, +\infty)$
y	Возрастает или убывает, Выпукла или вогнута	$y(x_1)$	Возрастает или убывает, Выпукла или вогнута	$y(x_2)$	Возрастает или убывает, Выпукла или вогнута	$y(x_n)$	Возрастает или убывает, Выпукла или вогнута
y'	знак y'	$y'(x_1)$	знак y'	$y'(x_2)$	знак y'	$y'(x_n)$	знак y'
y''	знак y''	$y''(x_1)$	знак y''	$y''(x_2)$	знак y''	$y''(x_n)$	знак y''

Точки $x_{1,} x_2 \ldots, x_n$ -все найденные в п.6-7 точки, в которых производные обращаются в нуль или не существуют.

9.На основании проведенного исследования построить график заданной функции.

Пример 26

Провести полное исследование и построить график функции $y = \dfrac{x^3}{2(x-1)^2}$.

<u>Решение:</u>

Область определения функции

$$x \in (-\infty,1) \cup (1,+\infty)$$

Точка разрыва функции $x = 1$, функция непрерывна на $(-\infty,1)$ и $(1,+\infty)$.

2. Асимптоты.

Вертикальная асимптота $x = 1$.

Поведение функции в окрестности $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1-0}\left(\frac{x^3}{2(x-1)^2}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1+0}\left(\frac{x^3}{2(x-1)^2}\right) = +\infty$$

Найдем наклонную асимптоту:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty}\left(\frac{\dfrac{x^3}{2(x-1)^2}}{x}\right) = \lim_{x \to \pm\infty}\left(\frac{x^3}{2x(x-1)^2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty}\left(\frac{x^3}{2(x-1)^2} - \frac{1}{2} \cdot x\right) = \lim_{x \to \pm\infty}\left(\frac{x^3 - (x^3 - 2x^2 + x)}{2(x-1)^2}\right) = \lim_{x \to \pm\infty}\left(\frac{2x^2 - x}{2(x-1)^2}\right) = 1$$

Прямая $y = \dfrac{1}{2}x + 1$ является наклонной асимптотой заданной кривой.

3. Функция не является периодической.

4. Четность функции

$$y(-x) = \frac{(-x)^3}{2(-x-1)^2} = -\frac{x^3}{2(x+1)^2} \neq \begin{cases} y(x) \\ -y(x) \end{cases}$$

Условие четности или нечетности не выполнено. Заданная функция – функция общего вида.

5. Точки пересечения с осями.

$$y(0) = 0$$

График функции проходит через начало координат.

6. Промежутки монотонности, локальные экстремумы.

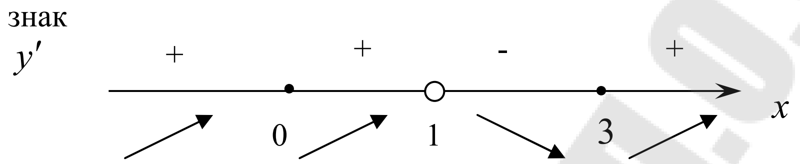
$$y' = \left(\frac{x^3}{2(x-1)^2} \right)' = \frac{1}{2}\frac{3x^2(x-1)^2 - x^3 \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{1}{2}\frac{3x^3 - 3x^2 - 2x^3}{(x-1)^3} = \frac{1}{2}\frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3}$$

Найдем критические точки:

$$x^3 - 3x^2 = 0,\ x_1 = 0, x_2 = 3$$

$$(x-1)^3 = 0,\ x_3 = 1$$

Исследуем знак производной методом интервалов:



Найдем значения функции в критических точках:

$$y(0) = 0;\ y(3) = \frac{27}{8}$$

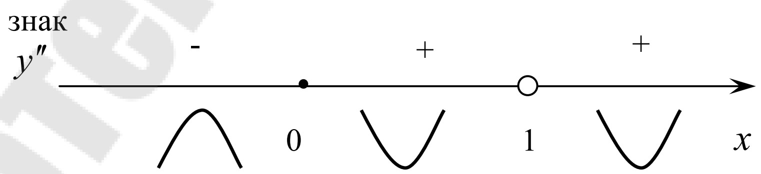
7.Промежутки выпуклости и вогнутости. Точки перегиба.
Найдем вторую производную.

$$y'' = \left(\frac{x^3}{2(x-1)^2} \right)'' = \frac{1}{2}\left(\frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3} \right)' = \frac{1}{2}\frac{(3x^2 - 6x)(x-1)^3 - (x^3 - 3x^2)\cdot 3(x-1)^2}{(x-1)^6} =$$

$$= \frac{3}{2}\frac{x^3 - x^2 - 2x^2 + 2x - x^3 + 3x^2}{(x-1)^4} = \frac{3x}{(x-1)^4}$$

Точки, в которых y'' равна нулю или несуществует: $x = 0, x = 1$

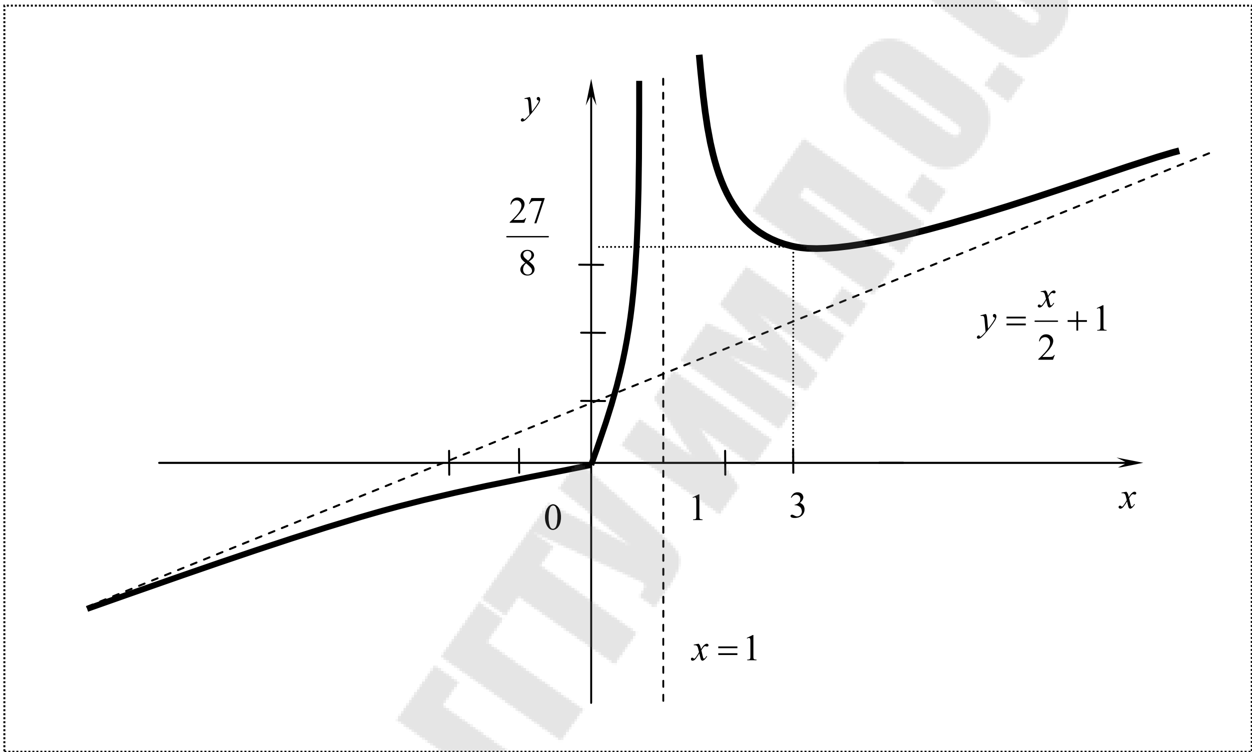
Исследуем знак второй производной методом интервалов:



8. Составляем таблицу.

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,3)$	3	$(3,+\infty)$

y	$\uparrow$ $\cap$	0	$\uparrow$ $\cup$	-	$\downarrow$ $\cup$	$\frac{27}{8}$	$\uparrow$ $\cup$
y'	+	0	+	-	-	0	+
y''	-	0	+	-	+	$\frac{1}{9}$	+
		перегиб		разрыв		Мин.	



13.2 Общая схема исследования и построения графика функции заданной параметрически.

Функция $y=f(x)$ задана параметрически

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

1.Исследовать область изменения x и y при изменении параметра t.
2. Найти значения параметра t, при которых $x=0$ и $y=0$.
3.а)Найти значения параметра t, при котрых $y=\pm\infty$. Найти вертикальную асимптоту $x=x(t)$
б) Найти значения параметра t_a, при котрых $x=\pm\infty$. Найти наклонную асимптоту

$$y=kx+b,\ k=\lim_{t\to t_a}\frac{y(t)}{x(t)};\ b=\lim_{t\to t_a}(y(t)-kx(t))$$

4. Вычисляем $x'(t)$ и $y'(t)$.Находим все значения параметра t, при которых хотя бы одна из полученных производных обращается в нуль или терпит разрыв. Найденные значения параметра будем называть критическими.По

формуле (9) определяем знак производной $\frac{dy}{dx}$ в каждом из полученных интервалов.
5. Вычисляем вторую производную $y''(x)$ по формуле (16) или (17). Определяем значения параметра t при которых $y''(x)$ обращается в нуль или терпит разрыв. Определяем промежутки выпукдости вогнутости согласно (40) и (41).
6. Строим таблицу

Область изм. t	Область изм. $x(t)$	Область изм. $y(t)$	Знак $x'(t)$	Знак $y'(t)$	Знак $\frac{dy}{dx}$	Знак $\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)$	Знак $\frac{d^2y}{dx^2}$	Поведение $y(x)$

7. Строим график функции.

Пример 27

Построить кривую (декартов лист), заданную параметрическими уравненниями:

$$\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3} \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3} \end{cases}, a > 0$$

Решение:

1.Обе функции определены при $t \in (-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$.
При этом $x \in (-\infty; \infty); y \in (-\infty; \infty)$.

2. $x = 0; y = 0$ при $t = 0$
$x \to 0; y \to 0$ при $t \to \pm\infty$.

3.а) При $t = -1$

$$\lim_{t \to -1-0} y(t) = \lim_{t \to -1-0} \frac{3at^2}{1+t^3} = -\infty$$

$$\lim_{t \to -1+0} y(t) = \lim_{t \to -1+0} \frac{3at^2}{1+t^3} = \infty$$

При этом

$$\lim_{t \to -1-0} x(t) = \lim_{t \to -1-0} \frac{3at}{1+t^3} = \infty$$

$$\lim_{t \to -1+0} x(t) = \lim_{t \to -1+0} \frac{3at}{1+t^3} = -\infty$$

Таким образом, вертикальных асимптот график функции не имеет.

б) Найдем наклонную асимптоту:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{t \to -1} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \to -1} \frac{3at^2}{1+t^3} : \frac{3at}{1+t^3} = \lim_{t \to -1} t = -1$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}(y(x) - kx) = \lim_{t\to-1}\left(y(t) - kx(t)\right) = \lim_{t\to-1}\left(\frac{3at^2}{1+t^3} + \frac{3at}{1+t^3}\right)$$
$$= \lim_{t\to-1}\frac{3at(t+1))}{(t+1)(t^2-t+1)} = \lim_{t\to-1}\frac{3at}{(t^2-t+1)} = -a$$

Таким образом, график функции имеет наклонную асимптоту:
$y = -x - a$

4. Найдем производные $x'(t)$ и $y'(t)$.

$$x'(t) = \left(\frac{3at}{1+t^3}\right)' = \frac{3a(1+t^3) - 3at\cdot 3t^2}{(1+t^3)^2} = \frac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}$$
$$y'(t) = \left(\frac{3at^2}{1+t^3}\right)' = \frac{6at(1+t^3) - 3at^2\cdot 3t^2}{(1+t^3)^2} = \frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2}$$

Найдем критические значения параметра t

$$x'(t) = 0;\ \frac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2} = 0;\ t = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

$$y'(t) = 0;\ \frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2} = 0;\ t = 0;\ t = \sqrt[3]{2}$$

При $t = -1$ обе производные терпят разрыв.

Таким образом, получаем следующие критические значения параметра t :

$$t_1 = -1;\ t_2 = 0;\ t_3 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}};\ t_4 = \sqrt[3]{2}$$

Найдем $\frac{dy}{dx}$ по формуле (9):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2} : \frac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2} = \frac{t(2-t^3)}{(1-2t^3)}$$

5. Найдем $\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)$:

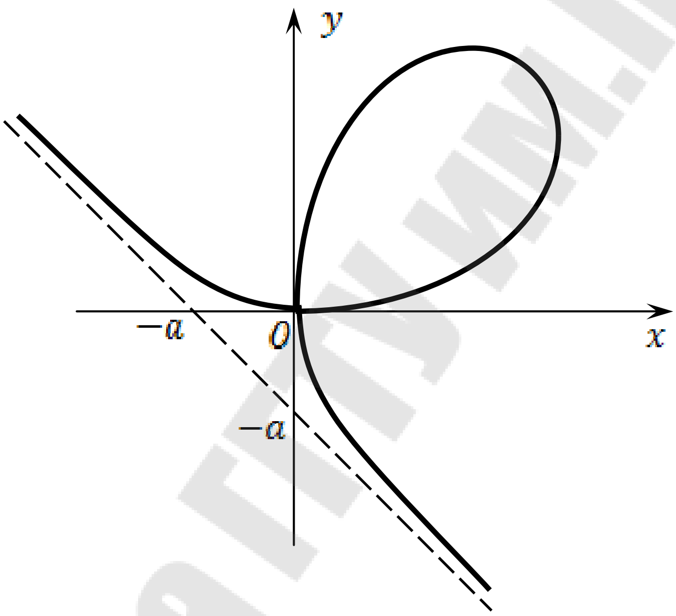
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \left(\frac{(2t-t^4)}{(1-2t^3)}\right)' = \frac{(2-4t^3)(1-2t^3) + 6t^2(2t-t^4)}{(1-2t^3)^2} = \frac{2(1+t^3)^2}{(1-2t^3)^2}$$

6. Строим таблицу

Область изм. t	Область изм. $x(t)$	Область изм. $y(t)$	Знак $x'(t)$	Знак $y'(t)$	Знак $\frac{dy}{dx}$	Знак $\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)$	Знак $\frac{d^2y}{dx^2}$	Поведение $y(x)$

$(-\infty;-1)$	$(0;+\infty)$	$(0;-\infty)$	+	−	−	+	+	*убывает, вогнута*
$(-1;0)$	$(-\infty;0)$	$(+\infty;0)$	+	−	−	+	+	*убывает, вогнута*
$\left(0;\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$	$(0;a\sqrt[3]{4})$	$(0;a\sqrt[3]{2})$	+	+	+	+	+	*возрастает, вогнута*
$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}};\sqrt[3]{2}\right)$	$(a\sqrt[3]{4};\, a\sqrt[3]{2})$	$(a\sqrt[3]{2};\, a\sqrt[3]{4})$	+	−	−	+	+	*убывает, вогнута*
$(\sqrt[3]{2};\infty)$	$(a\sqrt[3]{2};\, 0)$	$(a\sqrt[3]{4};\, 0)$	−	−	+	+	−	*возрастает, выгнута*

7. Строим график



Задания 11. Провести полное исследование и построить график функции:

1. $y=\frac{1-x^3}{x^2}$	*2.* $y=\frac{1}{5}(4x^3-x^4)$	*3.* $y=\frac{(x+1)^3}{x-2}$
4. $y=\frac{x^3}{x^2-1}$	*5.* $y=\sqrt[3]{1-x^3}$	*6.* $y=(x-3)\sqrt{x}$
7. $y=x^2e^{1/x}$	*8.* $y=x+2arctgx$	*9.* $y=e^x sinx$

10. $\begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = 5 - 2t \end{cases}$	*11.* $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$ $a > 0, b > 0$	*12.* $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ $a > 0$

Авакян Елена Зиновьевна
Авакян Сергей Левонович
Иванейчик Ирина Владимировна

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Практикум по дисциплине «Высшая математика» для студентов дневной формы обучения

Подписано к размещению в электронную библиотеку
ГГТУ им. П. О. Сухого в качестве электронного
учебно-методического документа 30.11.10.

Рег. № 42Е.
E-mail: ic@gstu.by
http://www.gstu.by