Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Высшая математика»

Л. Д. Корсун, С. П. Курлович, В. Г. Тепляков

# РЯДЫ

## ПОСОБИЕ
## для студентов дневной формы обучения

Гомель 2010

Библиотека ГГТУ им.П.О.Сухого

УДК 517.52(075.8)
ББК 22.16я73
К69

*Рекомендовано научно-методическим советом
факультета автоматизированных и информационных систем
ГГТУ им. П. О. Сухого*
(*протокол № 1 от 14.09.2009 г.*)

Рецензент: зав. каф. «Физика» ГГТУ им. П. О. Сухого
д-р физ.-мат. наук *П. А. Хило*

**Корсун, Л. Д.**
К69 Ряды : пособие для студентов днев. формы обучения / Л. Д. Корсун, С. П. Курлович, В. Г. Тепляков. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2010. – 41 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: http://lib.gstu.local. – Загл. с титул. экрана.

Рассмотрены основные положения теории рядов и методы решения задач с их использованием. Пособие содержит задачи по числовым и функциональным рядам и их применениям, а также по рядам Фурье. Даны краткие теоретические сведения, снабженные большим количеством разобранных примеров.

Для студентов всех специальностей дневной формы обучения.

**УДК 517.52(075.8)**
**ББК 22.16я73**

© Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого», 2010

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

# 1 Числовые ряды

**Числовым рядом** называется выражение вида

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \,, \qquad (1)$$

где $a_n \in \mathbb{R}$. Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называются **членами ряда**; $n$-й член ряда называется также **общим членом ряда**. Сумма $n$ первых членов ряда называется **$n$-частичной суммой ряда** и обозначается символом

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \,.$$

Если существует конечный предел $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, то ряд называется **сходящимся**, а число $S$ — **суммой ряда**

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Ряд называется **расходящимся**, если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует или равен бесконечности. Ряд

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+k} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k} = R_n \,,$$

полученный из ряда (1) отбрасыванием первых его $n$ членов, называется **$n$-м остатком ряда** (1).

Справедливы следующие свойства рядов:

1. Отбрасывание от ряда или присоединение к ряду любого конечного числа членов не меняет его сходимости или расходимости.

2. Если ряд (1) сходится, то предел его $n$-го остатка при $n \to \infty$ равен нулю, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$.

3. Если члены сходящегося ряда (1), имеющего сумму $S$, умножить на число $\lambda$, то полученный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ будет также сходящимся, а число $\lambda S$ — его суммой.

4. Умножение членов расходящегося ряда на число $\lambda \neq 0$ не нарушает его расходимости.

5. Если сходятся ряды $S_1 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $S_2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, то ряд, образованный сложением соответствующих членов данных рядов:

   $$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots + (a_n + b_n) + \ldots \,,$$

   тоже сходится и его сумма равна $S_1 + S_2$.



Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

Одна из важнейших задач теории числовых рядов — разработка методов вычисления их сумм. Точное вычисление суммы ряда, если оно возможно, как правило, связано с громоздкими вычислениями. Поэтому чаще всего ограничиваются приближенным вычислением суммы ряда, полагая $S \cong S_n$ и допуская при этом ошибку, равную сумме ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n+k}$. Но прежде чем браться за вычисление суммы ряда, нужно выяснить, сходится или расходится данный ряд, ибо расходящийся ряд суммы не имеет. При этом особое значение приобретает задача об исследовании ряда на сходимость.

**Необходимый признак сходимости ряда.**

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то предел его общего члена равен нулю:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0\,.$$

Отсюда следует, что если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд расходится. Если же $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то числовой ряд (1) может как сходиться, так и расходиться. В этом случае требуется дополнительное исследование данного ряда.

Примером расходящегося ряда, удовлетворяющего необходимому признаку сходимости, служит так называемый **гармонический ряд**

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\,.$$

Здесь $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, но ряд расходится.

**Критерий Коши.**

Для того, чтобы ряд (1) сходился, необходимо и достаточно, чтобы для всякого $\epsilon > 0$ существовало число $N > 0$ (зависящее только от $\epsilon$) такое, что для всех $n > N$ и любого натурального $p$ было справедливо неравенство

$$\mid a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p} \mid < \epsilon\,.$$

**Пример 1.** Известно, что ряд начинается членами $\frac{1}{2} + \frac{4}{3} + \frac{9}{4} + \frac{16}{5} + \ldots$. Написать формулу общего члена ряда.

**Решение.** Нетрудно заметить, что числители данных членов ряда являются квадратами натуральных чисел, а в знаменателях стоят натуральные числа начиная с 2. Формула общего члена ряда будет иметь вид

$$a_n = n^2/(n+1)\,.$$



Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

$\boxed{\textbf{Пример 2.}}$ Показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{n}$ удовлетворяет необходимому признаку сходимости, но является расходящимся.

**Решение.** Запишем ряд в развернутом виде:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots .$$

Необходимый признак сходимости выполняется, так как

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

Для доказательства расходимости данного ряда оценим его $n$-ю частичную сумму:

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq$$

$$\geq \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}}_{n \text{ раз}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}\,;$$

итак, $S_n \geq \sqrt{n}$. При $n \to \infty$, $\sqrt{n} \to \infty$, а следовательно, $S_n \to \infty$. Ряд расходится.

$\boxed{\textbf{Пример 3.}}$ Проверить, выполняется ли необходимый признак сходимости для рядов:

$$а)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{3n^2+1}{n^2}, \qquad\qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}.$$

**Решение.** а) Так как

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \ln \frac{3n^2+1}{n^2} = \ln \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+1}{n^2} = \ln 3 \neq 0\,,$$

необходимый признак сходимости не выполняется и ряд расходится.

б) Пользуясь правилом Лопиталя, вычислим предел:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{2^n \ln 2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{2^n (\ln 2)^2} = 0\,.$$

Необходимый признак сходимости выполняется, но о сходимости ряда ничего нельзя сказать, надо исследовать ряд дальше.

$\boxed{\textbf{Пример 4.}}$ Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}\,.$



Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

**Решение.** Представим общий член ряда $a_n$ в виде суммы простейших дробей

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right).$$

Отсюда

$$a_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{2} + \frac{1}{3}\right), \qquad a_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right),$$

$$a_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5}\right), \qquad a_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{5} + \frac{1}{6}\right), \ldots$$

$$S_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{2}{5} + \frac{1}{6} + \ldots \right.$$
$$\left. + \frac{1}{n-1} - \frac{2}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right).$$

Итак, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{4}$; следовательно ряд сходится и имеет сумму $\frac{1}{4}$.

## Упражнения

Написать 4-5 первых членов ряда по известному общему члену $a_n$. (По определению, $(2n-1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)$; $(2n)!! = 2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n)$; $0!! = 1$ ).

**1.** $a_n = \dfrac{3n-2}{n^2+1}$.

**2.** $a_n = \dfrac{(-1)^n n}{2^n}$.

**3.** $a_n = \dfrac{2+(-1)^n}{n!}$.

**4.** $a_n = \dfrac{(2n)!!}{n^2}$.

**5.** $a_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

**6.** $a_n = sin\dfrac{\pi n}{4}$.

Написать простейшую формулу $n$-го члена ряда для следующих рядов:

**7.** $1 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{16} + \ldots$ .

**8.** $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{12} + \ldots$ .

**9.** $1 + \dfrac{2}{2} + \dfrac{3}{4} + \dfrac{4}{8} + \ldots$ .

**10.** $\dfrac{3}{4} + \dfrac{4}{9} + \dfrac{5}{16} + \dfrac{6}{25} + \ldots$ .



Библиотека ГГТУ им.П.О.Сухого

**11.** $1+\dfrac{1\cdot 3}{1\cdot 2}+\dfrac{2\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}+\dfrac{3\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\dots$ .

**12.** $1+\dfrac{1\cdot 3}{1\cdot 4}+\dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{1\cdot 4\cdot 7}+\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10}+\dots$ .

**13.** $1-1+1-1+1-\dots$ . **14.** $\dfrac{2}{5}+\dfrac{4}{8}+\dfrac{6}{11}+\dfrac{8}{14}+\dots$ .

Найти суммы следующих рядов:

**15.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{3^n}$ . **16.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$ . **17.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{4n^2-1}$ .

**18.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(4n-3)(4n+1)}$ . **19.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n+4^n}{6^{n+1}}$ . **20.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{3^n}$ .

Проверить, выполняется ли необходимый признак сходимости для рядов:

**21.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n}{n+1}$ . **22.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3n+1}{4n+3}$ . **23.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}cos\dfrac{n+1}{n^2+1}$ .

**24.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}arctg\dfrac{2n^2}{2n+3}$ . **25.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2+1}{n+1}$ . **26.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n^3-n}{3n+1}$ .

## 1.1 Признаки сходимости числовых рядов

Пусть задан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ (1) с положительными членами $a_n>0$. Нужно ответить на вопрос, сходится он или расходится. Следующие достаточные признаки позволяют судить об этом.

**Первый признак сравнения**

Пусть даны ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n \tag{1.1}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n \tag{1.2}$$

с положительными членами $a_n\geq 0, b_n\geq 0$, причем $0<a_n\leq b_n$, начиная с некоторого $n\geq N\geq 1$. Тогда
1) из сходимости ряда (1.2) следует сходимость ряда (1.1);
2) из расходимости ряда (1.1) следует расходимость ряда (1.2).
Сравнение исследуемых рядов производится обычно с табличными рядами:



Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$, $a \neq 0$ (геометрическая прогрессия, сходящаяся при $|q| < 1$ и расходящаяся при $|q| \geq 1$);

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ (расходящийся гармонический ряд);

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ (обобщенный гармонический ряд, сходящийся при $p > 1$ и расходящийся при $p \leq 1$).

**Пример 5.** Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{(n+1)3^n}$.

**Решение.** Сравнивая общий член данного ряда с общим членом сходящейся геометрической прогрессии $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3^n}$, где $q = \dfrac{1}{3} < 1$, замечаем, что

$$\frac{n}{(n+1)3^n} < \frac{1}{3^n} \qquad \text{при всех} \qquad n \geq 1\,.$$

Следовательно, исследуемый ряд сходится по первому признаку сравнения.

**Пример 6.** Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{\ln n}$.

**Решение.** Так как $\dfrac{1}{\ln n} > \dfrac{1}{n}$ для $n \geq 2$, а $\dfrac{1}{n}$ — общий член расходящегося гармонического ряда, то в силу первого признака сравнения данный ряд расходится.

**Второй признак сравнения**

Исследуется на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (1.1). Известно поведение ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ (1.2). Если существует конечный и отличный от нуля предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k \qquad (k \neq 0, \infty)\,,$$

то ряды или оба сходятся, или оба расходятся (т.е. ведут себя одинаково).

**Пример 7.** Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n + \ln n}$.

**Решение.** Сравнение с гармоническим рядом по первому признаку сравнения здесь ничего не дает, так как $\dfrac{1}{n+\ln n} < \dfrac{1}{n}$ для любого $n \geq 2$, и никакого заключения о сходимости данного ряда сделать нельзя. Воспользуемся вторым признаком сравнения, полагая



Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

$a_n = \dfrac{1}{n+\ln n}$; $\quad b_n = \dfrac{1}{n}$ (гармонический ряд). Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/(n+\ln n)}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{\ln n}{n}+1} = 1 \neq 0\,.$$

Получен конечный и отличный от нуля предел. Сравниваемые ряды ведут себя одинаково, и так как гармонический ряд расходится, то расходится и данный ряд.

**Признак Даламбера**

Пусть существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q\,,$$

тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (1.1) сходится, если $q < 1$ и расходится при $q > 1$ (при $q = 1$ ряд может сходиться или расходиться—в этом случае вопрос о сходимости ряда остается открытым).

$\boxed{\textbf{Пример 8.}}$ Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^{\,n}}{n!}$.

**Решение.** Здесь

$$a_n = \frac{2^n}{n!}, \qquad a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\,.$$

Применяем признак Даламбера.

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} n!}{2^n (n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1\,,$$

и,следовательно, ряд сходится.

**Радикальный признак Коши**

Пусть существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q\,,$$

то при $q < 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (1.1) сходится, а при $q > 1$—расходится (при $q = 1$ вопрос о сходимости ряда остается открытым).

$\boxed{\textbf{Пример 9.}}$ Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n+1}{3n+2}\right)^n$.

**Решение.** Применяем признак Коши в предельной форме:

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3n+2} = \frac{1}{3} < 1;$$



Библиотека БГТУ им.П.О.Сухого

так как $q < 1$, то данный ряд сходится.

**Интегральный признак Коши**

Пусть общий член ряда (1.1) $a_n = f(n) > 0$. Если функция $f(x)$, принимающая в точках $x = n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ значения $a_n = f(n)$, монотонно убывает в некотором промежутке $a < x < \infty$, где $a \geq 1$, то ряд (1.1) и несобственный интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ оба сходятся или оба расходятся (т.е. ведут себя одинаково).

**Пример 10.** Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln n}$.

**Решение.** Применяем интегральный признак Коши. Так как $a_n = \dfrac{1}{n \ln n}$, то функцией, принимающей в точках $x = n$ значения $a_n = f(n)$, будет функция $f(x) = \dfrac{1}{x \ln x}$. Она непрерывна в промежутке $2 \leq x < \infty$ и монотонно в нем убывает. Вычислим несобственный интеграл:

$$\int\limits_2^\infty \frac{1}{x \ln x} dx = \lim_{b \to \infty} \int\limits_2^b \frac{1}{\ln x} d\ln x = \lim_{b \to \infty} (\ln \ln b - \ln \ln 2) = \infty\,.$$

Интеграл расходится. Из его расходимости следует расходимость и данного ряда.

**Достаточный признак расходимости ряда**

Пусть члены ряда (1.1) неотрицательны. Если существует предел $\lim\limits_{n \to \infty} n a_n \neq 0$, то ряд (1.1) расходится.

## Упражнения

С помощью признаков сравнения исследовать на сходимость следующие ряды:

**27.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n-1}\,.$ **28.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2n^2+1}\,.$ **29.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n+3}\,.$

**30.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{n^2+1}\,.$ **31.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n-1}{n^3+n}\,.$ **32.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n2^n}\,.$

**33.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n^3}}{\sqrt[3]{n^4+1}}\,.$ **34.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[5]{n^4}\sqrt[4]{n+1}}\,.$ **35.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\dfrac{\pi}{4^n}\,.$

**36.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2+4}{(n^2+2)2^n}\,.$ **37.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} tg^2\dfrac{\pi}{4\sqrt{n}}\,.$ **38.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n arctg\dfrac{5}{3^n}\,.$



Библиотека БГТУ им. П.О. Сухого

**39.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}$. **40.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n+n\sqrt[n]{n}}$. **41.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+\ln n}$.

**42.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt[4]{n^5}}\right)$. **43.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$. **44.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{\sqrt[4]{n^5}}$.

С помощью признака Даламбера исследовать на сходимость следующие ряды:

**45.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}$. **46.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{n^2}$. **47.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}$.

**48.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{(n+1)!}$. **49.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{(2n)!}$. **50.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{(3n-1)!}$.

**51.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^n}$. **52.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!}{n!}$. **53.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2\sin\dfrac{\pi}{2^n}$.

**54.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^n tg\dfrac{1}{n^2}$. **55.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{(3n+1)!}$. **56.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{(n^2+1)3^n}}{n\cdot 2^{n/2}}$.

**57.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2\cdot 5\cdot 8\ldots(3n-1)}{1\cdot 5\cdot 9\ldots(4n-3)}$. **58.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{7\cdot 13\cdot 19\ldots(6n+1)}{1\cdot 8\cdot 27\ldots n^3}$.

Исследовать на сходимость следующие ряды с помощью радикального признака Коши:

**59.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n$. **60.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+1}{3n-1}\right)^n$. **61.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n^2+1}{n^2+1}\right)^n$.

**62.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3n+1}{2n+5}\right)^{n^2}$. **63.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{10n+5}\right)^{n^2}$. **64.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+2}{n}\right)^{n^2}$.

**65.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\ln^n(n+1)}$. **66.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2}3^n}$. **67.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n$.

**68.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^{n+2}}{(2n^2+1)^{n/2}}$. **69.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}sin\left(\dfrac{\sqrt{n}}{n+1}\right)^n$. **70.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n^2+3}{n^2-1}\right)^{n^2+2n}$.

Исследовать на сходимость следующие ряды с помощью интегрального признака Коши:



Библиотека БГТУ им. П.О. Сухого

**71.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln n}$.

**72.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln^2 n}$.

**73.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{\ln(n+1)}}{n+1}$.

**74.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{(n+3)\ln^3 n}$.

**75.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n^2+4}$.

**76.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2^{n^2}}$.

**77.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

**78.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln n}{n(\ln^4 n+1)}$.

**79.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^{1/n}}{n^2}$.

**80.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln^2(3n+1)}$.

**81.** $\sum\limits_{n=4}^{\infty} \dfrac{n+1}{3n^2 \ln(n-2)}$.

**82.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n 2^{\ln n}}$.

Исследовать на сходимость следующие ряды различными способами:

**83.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n}{\ln^n(n+1)}$.

**84.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-1)\sqrt[3]{n^2+2}}$.

**85.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1+n}{n}\right)^{n/3}$.

**86.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n+1}{n^3}$.

**87.** $\sum\limits_{n=4}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln n \ln\ln n}$.

**88.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} arctg^n \dfrac{1}{n}$.

**89.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$.

**90.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1 \cdot 4 \cdot 7 \ldots (3n-2)}{2 \cdot 7 \cdot 12 \ldots (5n-3)}$.

**91.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \dfrac{1}{n^2}$.

**92.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

**93.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2+3n}{2+3n^2}\right)^2$.

**94.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n\sqrt[3]{n}-\sqrt{n}}$.

**95.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1-\cos\dfrac{\pi}{n})$.

**96.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n}}{(2n-1)(5\sqrt[3]{n}-1)}$.

**97.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n n!}{n^n}$.

**98.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n n!}{n^n}$.

**99.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1-\dfrac{\ln n}{n}\right)^n$.

**100.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{n}{(n^2-3)\ln^4 n}$.



Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

**101.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n+1}(e^{1/\sqrt[3]{n}} - 1)\,.$ **102.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2+4}{n^3+\sin 3^n}\,.$

## 1.2 Знакочередующиеся и знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\,. \tag{1.3}$$

с членами произвольных знаков называется **знакопеременным.**

Если знакопеременный ряд содержит конечное число отрицательных (положительных) членов, то его исследование на сходимость сводится к исследованию знакоположительного ряда, так как отбрасывание от ряда конечного числа начальных членов не нарушает его сходимости или расходимости. Таким образом, существенно новым случаем будет тот, когда среди членов ряда есть бесконечное количество как положительных так и отрицательных членов.

Ряд (1.3) называется **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\,, \tag{1.4}$$

составленный из модулей членов данного ряда.

Ряд (1.3) называется **условно сходящимся**, если он сходится, а ряд (1.4), составленный из модулей его членов, расходится.

Относительно знакопеременных абсолютно сходящихся рядов имеет место следующее свойство:

Абсолютно сходящийся ряд остается сходящимся и не меняет величины своей суммы при любой перестановке его членов (переместительное свойство). Условно сходящиеся ряды переместительным свойством не обладают.

Для исследования знакопеременного ряда (1.3) на абсолютную сходимость можно применять любой из признаков сходимости для знакоположительного ряда (1.4). В частности, ряд (1.3) сходится абсолютно, если

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q < 1 \qquad \text{или} \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = q < 1\,.$$



Библиотека БГТУ им. П.О. Сухого

В общем случае из расходимости ряда (1.4) не следует расходимость ряда (1.3). Но если $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ или $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} > 1$, то расходятся как ряд (1.4), так и ряд (1.3).

**Исследовать на сходимость знакопеременный ряд — значит не только ответить на вопрос, сходится он или расходится, но и как сходится: абсолютно или условно.**

**Пример 11.** Исследовать сходимость ряда

$$1-\left(\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{3}{5}\right)^3+\left(\frac{4}{7}\right)^4+\ldots+(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\left(\frac{n}{2n-1}\right)^n+\ldots.$$

**Решение.** Составим ряд из модулей членов данного ряда:

$$1+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{3}{5}\right)^3+\left(\frac{4}{7}\right)^4+\ldots+\left(\frac{n}{2n-1}\right)^n+\ldots.$$

Так как (по радикальному признаку Коши)

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n-1}\right)^n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2-\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}<1\,,$$

то ряд из модулей сходится. Следовательно, сходится и знакопеременный ряд, и притом абсолютно.

**Знакочередующиеся ряды**

Среди знакопеременных рядов особо выделяют класс знакочередующихся рядов. Ряд

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\ldots+(-1)^{n-1}u_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n\,,\quad(1.5)$$

где $u_n>0,\quad n=1,2,3,\ldots$, называется знакочередующимся.

**Признак Лейбница**. Если для знакочередующегося ряда (1.5) все члены монотонно убывают по абсолютной величине:

$$|u_n|>|u_{n+1}|\qquad(n=1,2,3,\ldots)$$

и при этом $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0,\quad$ то ряд (1.5) сходится.

Для остатка ряда $R_n$ в этом случае справедлива оценка $|R_n|\le u_{n+1}$.



Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

**Замечание.**

Исследование сходимости знакочередующихся рядов, как частного случая знакопеременных рядов, начинают с исследования их абсолютной сходимости. Если абсолютной сходимости нет, то, применяя признак Лейбница, исследуют данный знакочередующийся ряд на условную сходимость.

**Пример 12.** Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-n)^n}{(2n)!}$.

**Решение.** Прежде всего исследуем данный знакочередующийся ряд на абсолютную сходимость. Для этого составим ряд из модулей членов данного ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{(2n)!}$. Применим к этому ряду признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}(2n)!}{(2n+2)!n^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}(n+1)\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\frac{(2n)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\frac{1}{2(2n+1)} = e\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2(2n+1)} = e\cdot 0 = 0 < 1\,.$$

Ряд из модулей сходится. Следовательно, исходный ряд сходится абсолютно.

**Пример 13.** Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$.

**Решение.** Для исследования данного знакочередующегося ряда на абсолютную сходимость составим ряд из модулей его членов: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Этот ряд расходится как обобщенный гармонический с показателем $p = \dfrac{1}{2} < 1$. Следовательно, абсолютной сходимости нет. Исследуем исходный ряд на условную сходимость. Так как $1 > \dfrac{1}{\sqrt{2}} > \dfrac{1}{\sqrt{3}} > \ldots > \dfrac{1}{\sqrt{n}} > \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\ldots$ (члены ряда монотонно убывают) и $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$, то по признаку Лейбница данный ряд сходится условно.

## Упражнения

Исследовать на абсолютную и условную сходимости следующие знакочередующиеся ряды:



Библиотека БГУИР

**103.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$.

**104.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n(n+1)}$.

**105.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\ln n}$.

**106.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{2n}{3n+2}$.

**107.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 7^n}$.

**108.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{(3n-2)!}$.

**109.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(-\dfrac{2n}{3n+5}\right)^n$.

**110.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\dfrac{10}{n}$.

**111.** $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n \ln n (\ln\ln n)^2}$.

**112.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}\sqrt[5]{(n+1)^3}}$.

**113.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} tg\dfrac{1}{4n}$.

**114.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-3)^n}{(2n+1)^n}$.

**115.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2} \sin\dfrac{\sqrt{n}}{n+1}$.

**116.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}(n!)^2}{(2n)!}$.

**117.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{5^n\, n!}{n^n}$.

**118.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1} n}{5^n - n^2}$.

**119.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{2+(-1)^n}{n}$.

**120.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{\sin^2 \dfrac{1}{n}}{n}$.

**121.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1 \cdot 4 \cdot 7 \ldots (3n-2)}{7 \cdot 9 \cdot 11 \ldots (2n+5)}$.

**122.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \ldots (3n-1)}$.

Исследовать на абсолютную и условную сходимость следующие знакопеременные ряды:

**123.** $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{17} - \dfrac{1}{26} - \dfrac{1}{37} + \ldots$.

**124.** $2 - \dfrac{2^2}{2!} - \dfrac{2^3}{3!} + \dfrac{2^4}{4!} + \dfrac{2^5}{5!} + \dfrac{2^6}{6!} - \ldots$.



Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

**125.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot\dfrac{n}{3^n}$.

**126.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n}\sin\dfrac{\pi}{4n}$.

**127.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}2^n}{(2n+1)!}$.

**128.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{2+(-1)^n}{n}$.

**129.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}+(-1)^n}$.

**130.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cos an}{\sqrt[4]{n^3+1}}$.

# 2 Функциональные ряды

## 2.1 Функциональные ряды. Равномерная сходимость

Ряд

$$f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x), \tag{2.1}$$

членами которого являются функции от аргумента $x$, определенные на некотором множестве $D$, называется **функциональным**. Если подставлять в ряд (2.1) определенные числовые значения $x\in D$, то будут получаться различные числовые ряды, как сходящиеся, так и расходящиеся.

Множество тех значений $x\in D$, для которых функциональный ряд сходится, называется **областью сходимости** данного ряда. Различают области абсолютной и условной сходимости функционального ряда.

Функция

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x),\quad \text{где}\qquad S_n(x)=f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)\,,$$

а $x$ принадлежит области сходимости, называется **суммой** ряда, а $R_n(x)=S(x)-S_n(x)$ — **остатком** ряда.

Для нахождения областей сходимости функциональных рядов можно использовать достаточные признаки сходимости числовых рядов, считая х фиксированным.

**Пример 14.** Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.

**Решение.** Для х > 1 данный функциональный ряд сходится абсолютно, так как для этих $x$ сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^x}$, составленный из абсолютных величин членов данного ряда (как обобщенный гармонический ряд с $p=x>1$). Для каждого $x$ из промежутка $0<x\leq 1$ он



Библиотека ГГТУ им.П.О.Сухого

сходится условно, как знакочередующийся и удовлетворяющий признаку Лейбница; при $x \le 0$ — расходится, как неудовлетворяющий необходимому признаку сходимости. Таким образом, область сходимости данного ряда характеризуется неравенством x $> 0$.

$\boxed{\textbf{Пример 15.}}$ Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln^n x$.

**Решение.** Данный ряд представляет собой бесконечную геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \ln x$. Так как прогрессия сходится лишь при $|\, q\,| < 1$, то ряд сходится, и притом абсолютно, при $|\ln x\,| < 1$, т.е. при $-1 < \ln x < 1$, и, следовательно, неравенство $\dfrac{1}{e} < x < e$ определяет область сходимости ряда.

$\boxed{\textbf{Пример 16.}}$ Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-3)^n}{n^n}$.

Исследуем ряд на абсолютную сходимость с помощью признака Коши:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\, f_n(x)\,|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|\, x-3\,|^n}{n^n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{|\, x-3\,|}{n} = 0 < 1$$

для любого $x$. Следовательно, ряд сходится абсолютно в бесконечном промежутке $-\infty < x < \infty$.

**Равномерная сходимость**.

Функциональный ряд (2.1) сходится к сумме $S(x)$ на некотором множестве $\{x\}$ **равномерно**, если для любого $\epsilon > 0$ существует такое число $N(\epsilon) > 0$ и не зависящее от x, что при $n \ge N(\epsilon)$ для всех x из данного множества $\{x\}$ имеет место неравенство $|\, S(x) - S_n(x)\,| = |\, R_n(x)\,| < \epsilon$, где $R_n(x)$ — остаток данного ряда.

**Признак Вейерштрасса**.

Если $|\, f_n(x)\,| \le C_n$ для любого $n = 1, 2, \ldots$ и для любого $x \in \{x\}$, а числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} C_n$ сходится, то функциональный ряд (2.1) сходится на множестве $\{x\}$ абсолютно и равномерно. При этом сходящийся числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} C_n$ называется **мажорирующим** рядом.

$\boxed{\textbf{Пример 17.}}$ Установить равномерную сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n^2}$.



Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

**Решение.** Для всех значений $x$ справедливо неравенство

$$|\cos nx/n^2| \le 1/n^2,$$

поскольку $|\cos nx| \le 1$. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ — сходящийся, то данный функциональный ряд, по признаку Вейерштрасса, сходится равномерно на всей числовой прямой $x \in (-\infty, \infty)$.

### Упражнения

Найти области сходимости функциональных рядов:

**131.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^x}$. **132.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{2x+1}}$. **133.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{|2x-1|}}$.

**134.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{2}\right)^x$. **135.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^{3x-2}}$. **136.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^{-n^2x^2}}{n^2}$.

**137.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^{n\sin x}}$. **138.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{1-x^n}$. **139.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^{\ln x}}$.

Доказать равномерную сходимость функциональных рядов в указанных промежутках:

**140.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^2}, \quad [-1;1]$. **141.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{2^n}, \quad (-\infty;\infty)$.

**142.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{\sqrt{n}}, \quad [0;1)$. **143.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos^2 nx}{\sqrt{n^3+1}}, \quad (-\infty;\infty)$.

**144.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{x^2+n^3}}, \quad (-\infty;\infty)$. **145.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{e^{\cos nx}}{n\ln^2 n}, \quad (-\infty;\infty)$.

**146.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}x^n}{\sqrt{n}+n^3}, \quad [0;1]$. **147.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{x^2+n^2}, \quad [1;4]$.

## 2.2 Степенные ряды. Суммирование степенных рядов

Функциональный ряд вида

$$c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_n(x-a)^n + \ldots =$$



Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n, \qquad (2.2)$$

где $c_n$ и $a$ - действительные числа, называется **степенным рядом**.

Для степенного ряда (2.2) существует интервал $|\, x-a \,| < R$ с центром в точке а, внутри которого ряд сходится, а для всех $|\, x-a \,| > R$ - расходится. Этот интервал называют **интервалом сходимости**, а число $R$ — **радиусом сходимости** степенного ряда. Радиус сходимости можно вычислять по одной из формул

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| \quad \text{или} \quad R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|\, C_n \,|}} \qquad (2.3)$$

при условии, что пределы, входящие в них, существуют. Радиус сходимости $R$ может быть в частных случаях равен также 0 или $\infty$.

**Исследовать степенной ряд на сходимость** - значит найти его интервал сходимости, используя достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов, в частности, Даламбера и Коши

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| < 1\,, \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} < 1\,, \qquad (2.4)$$

и выяснить, сходится или расходится ряд в граничных точках интервала сходимости.

**Пример 18.** Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 (x-3)^n}{2^n}\,.$$

**Решение.** Здесь

$$f_n(x) = \frac{n^2 (x-3)^n}{2^n}, \quad f_{n+1}(x) = \frac{(n+1)^2 (x-3)^{n+1}}{2^{n+1}}\,,$$

по признаку Даламбера

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x-3)^{n+1} (n+1)^2 \cdot 2^n}{(x-3)^n \cdot 2^{n+1} n^2} \right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{|\, x-3 \,| (n+1)^2}{n^2 \cdot 2} = \frac{|\, x-3 \,|}{2} < 1 \quad .$$

Следовательно, интервал сходимости характеризуется неравенством $|\, x-3 \,| < 2$, или $1 < x < 3$. Исследуем сходимость ряда в граничных точках интервала.



Библиотека ГГТУ имени П.О. Сухого

При $x = 1; 5$ имеем $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^2(\pm 2)^n}{2^n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (\pm 1)^n n^2$ . Оба ряда расходятся, так как не удовлетворяют необходимому признаку сходимости. Следовательно, область сходимости данного ряда совпадает с его интервалом сходимости: $1 < x < 5$.

**Пример 19.** Найти область сходимости степенного ряда

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n .$$

**Решение.** Здесь $f_n(x) = n^n x^n$ и по признаку Коши

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\ f_n(x)\ |} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\ n^n x^n\ |} = \lim_{n\to\infty} n|\ x\ | = \begin{cases} 0, & \text{при } x = 0; \\ \infty, & \text{при } x \neq 0. \end{cases}$$

Следовательно, ряд сходится в одной точке x=0.

**Пример 20.** Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

**Решение.** Так как $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}$, $f_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$, то по признаку Даламбера

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n! x^{n+1}}{x^n (n+1)!}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|\ x\ |}{n+1} = 0 < 1$$

при любом $x$. Следовательно, ряд сходится при всех значениях $-\infty < x < \infty$.

## Свойства степенных рядов. Суммирование степенных рядов.

1. На любом отрезке, целиком принадлежащем интервалу сходимости, степенной ряд можно почленно интегрировать, дифференцировать и совершать предельный переход; при этом радиус сходимости полученных рядов не меняется.

2. Свойство равномерной сходимости степенного ряда (почленное дифференцирование и интегрирование) используют для суммирования степенного ряда (нахождения его суммы).

**Пример 21.** Найти сумму ряда

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots = S(x) .$$



Библиотека ГГТУ им.П.О.Сухого

**Решение.** Интервал сходимости данного ряда $(-1, 1)$. На основании свойств степенных рядов его можно дифференцировать в каждой точке интервала $(-1, 1)$. Выполним дифференцирование:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-1} + \ldots = S'(x)\,.$$

Суммируя полученную бесконечно убывающую при $|\,x\,| < 1$ прогрессию, находим

$$S'(x) = \frac{1}{1-x}\,.$$

Отсюда

$$S(x) = \int \frac{dx}{1-x} = -\ln(1-x) + C\,.$$

Постоянную C вычислим, зная, что при x = 0, $S(0) = 0$. Тогда $0 = -\ln(1-0) + C$ и C = 0. Таким образом, сумма данного ряда $S(x) = -\ln(1-x)$ при $|\,x\,| < 1$.

**Пример 22.** Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(x^2-1)^n$.

**Решение.** Положим $x^2 - 1 = y$ и найдем сумму $S(y)$ степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)y^n$, сходящегося для $|\,y\,| < 1$. Интегрируя равенство $S(y) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)y^n$ на отрезке $[0, y]$ и затем дифференцируя полученное равенство по $y$, будем иметь

$$\int\limits_0^y S(y)dy = \int\limits_0^y \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)y^n dy =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_0^y (n+1)y^n dy = \sum_{n=0}^{\infty} y^{n+1} = \frac{y}{1-y}\,;$$

$$S(y) = \left(\frac{y}{1-y}\right)' = \frac{1}{(1-y)^2}\,.$$

Полагая $y = x^2 - 1$, получим:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(x^2-1)^n = \frac{1}{(2-x^2)^2}\,.$$

Разложение имеет место для всех значений $x$, удовлетворяющих неравенству

$$|\,x^2 - 1\,| < 1\,,$$

т.е. $0 < x^2 < 2$, откуда $-\sqrt{2} < x < 0$ и $0 < x < \sqrt{2}$. Эти неравенства и определяют область сходимости данного ряда к сумме $1/(2-x^2)^2$.



Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

## Упражнения

Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах этого интервала:

**147.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n\,.$

**148.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n2^n}\,.$

**149.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}\,.$

**150.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^n}{\sqrt{n}}\,.$

**151.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(n+1)^5 x^{2n}}{2n+1}\,.$

**152.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{x^n}\,.$

**153.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n!x^n}\,.$

**155.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!x^n\,.$

**156.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n^n}\,.$

**157.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(x-1)^n}{2^n(n+3)}\,.$

**158.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+5)^n}{\sqrt[3]{n}\cdot\sqrt{n^2+1}}\,.$

**159.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{(3x+2)^n}\,.$

**160.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n}{\ln(n+1)(2x-3)^n}\,.$

**161.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!(x+3)^n}{n^n}\,.$

**162.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+1)^n}{(n+1)\ln^2(n+1)}\,.$

**163.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2} x^n\,.$

**164.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (2-x)^n \sin\dfrac{\pi}{2^n}\,.$

**165.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(3-2x)^n}{n-\ln^2 n}\,.$

**166.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln^n x\,.$

**167.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(x-1)^n}{n\ln^m n}, \quad m\epsilon R\,.$

Применяя почленное дифференцирование и интегрирование, найти суммы рядов:

**168.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n\,.$

**169.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n x^n}{n}\,.$



Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

**170.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

**171.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

**172.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1}$.

**173.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}$.

**174.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{2n-1}$.

**175.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{n}}{n\cdot 2^n}$.

## 2.3 Разложение функций в степенные ряды

Если функция $f(x)$ допускает в некоторой окрестности $\mid x-a \mid< R$ точки $a$ разложения в степенной ряд по степеням $x-a$, то этот ряд— (**ряд Тейлора**) имеет вид

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots +$$
$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots \quad . \tag{2.5}$$

При $a = 0$ ряд Тейлора называют также **рядом Маклорена**.

Равенство (2.5) справедливо, если при $\mid x-a \mid< R$ остаточный член ряда Тейлора $R_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$. Для оценки остаточного члена степенного ряда можно пользоваться остаточным членом в форме Лагранжа

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)]\,, \qquad 0<\theta<1\,. \tag{2.6}$$

Если функция $f(x)$ разложима на интервале $(a-R, a+R)$ в степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$, то этот ряд будет для нее рядом Тейлора, а коэффициенты этого степенного ряда будут однозначно определяться формулами

$$c_0 = f(a); \qquad c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}; \quad n = 1, 2, \ldots \quad . \tag{2.7}$$

При разложении функции в степенные ряды применяют следующие приемы:

**1. Непосредственное разложение функции $f(x)$ в ряд Тейлора.** При этом: а) формально составляют ряд Тейлора для функции $f(x)$. С этой целью вычисляют производные всех порядков функций



Библиотека ГГТУ им.П.О.Сухого

$f(x)$ в точке $x = a$ и подставляют их в разложение (2.5); б) находят область сходимости полученного ряда.

**2. Использование табличных разложений.**

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots \qquad (|\, x \,| < \infty); \tag{2.8}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \qquad (|\, x \,| < \infty); \tag{2.9}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \qquad (|\, x \,| < \infty); \tag{2.10}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots \qquad (|\, x \,| < 1); \tag{2.11}$$

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!} x^n =$$

$$= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \ldots \qquad (|\, x \,| < 1); \tag{2.12}$$

(m - любое действительное число);

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \qquad (-1 < x \leq 1); \tag{2.13}$$

$$arctgx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \qquad (|\, x \,| \leq 1). \tag{2.14}$$

**3. Использование сложения , вычитания рядов и умножения ряда на число.**

**4. Использование дифференцирования и интегрирования рядов.**

**5. При разложении в ряд рациональной функции рекомендуется разлагать ее на простейшие дроби.**



Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

**Пример 23.** Разложить функцию $f(x) = 2^x$ в ряд Тейлора по степеням $x$.

**Решение.** Применим прием непосредственного разложения. Найдем числовые значения производных всех порядков функции $2^x$ в точке $x = 0$:

$$
\begin{array}{ll}
f(x) = 2^x, & f(0) = 1; \\
f'(x) = 2^x \ln 2, & f'(0) = \ln 2; \\
f''(x) = 2^x \ln^2 2, & f''(0) = \ln^2 2; \\
\multicolumn{2}{c}{\dots\dots\dots\dots} \\
f^{(n)}(x) = 2^x \ln^n 2, & f^{(n)}(0) = \ln^n 2, \;\; n \geq 1\,.
\end{array}
$$

Подставляя теперь найденные значения производных в (2.5) при $a = 1$, получаем ряд Тейлора для функции $2^x$ по степеням $x$:

$$2^x = 1 + \frac{\ln 2}{1!}x + \frac{\ln^2 2}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\ln^n 2}{n!}x^n + \ldots \quad .$$

Находим область сходимости полученного ряда. Так как

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}x^{n+1}}{c_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n!\,\ln^{n+1} 2}{(n+1)!\,\ln^n 2}\mid x\mid = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln 2}{(n+1)}\mid x\mid = 0\,,$$

то ряд сходится для всех значений $x$.

**Пример 24.** Разложить в ряд по степеням $x$ функцию $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

**Решение.** Полагаем $-x^2 = y$ и используем табличное разложение (2.11), справедливое при $\mid y\mid = \mid x^2\mid < 1$

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + y^3 + \ldots + y^n + \ldots =$$

$$= 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}.$$

Разложение имеет место для $-1 < x < 1$ .

**Пример 25.** Получить табличное разложение в ряд по степеням $x$ функции $f(x) = arctg\, x$.

**Решение.** Замечаем, что функцию $arctg\, x$ можно получить интегрированием функции $\dfrac{1}{1+x^2}$ , разложение которой в ряд найдено в



Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

примере **24**. Поэтому

$$arctg x=\int\limits_0^x \frac{dx}{1+x^2}=\int\limits_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}dx=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int\limits_0^x x^{2n}dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\,.$$

Так как полученный ряд сходится к функции $arctg\, x$ и в граничных точках интервала сходимости $x=\pm 1$ , то найденное разложение имеет место для $-1\le x\le 1$ .

### Упражнения

Следующие функции разложить в ряд Тейлора по степеням $x$ и указать области сходимости полученных рядов к своим суммам:

**176.** $\cos 5x$ .  **177.** $\sin x^2$ .  **178.** $\dfrac{1}{\sqrt{e^x}}$ .

**179.** $e^{-x^4}$ .  **180.** $5^x$ .  **181.** $2^{-x}$ .

**182.** $sh\, x$ .  **183.** $ch(2x^3)$ .  **184.** $\dfrac{2}{1-3x^2}$ .

**185.** $\dfrac{x^2}{1+x}$ .  **186.** $x\cos\sqrt{x}$ .  **187.** $\dfrac{1}{\sqrt[5]{1+x}}$ .

**188.** $\ln\dfrac{(1+x)}{1-x}$ .  **189.** $arcsin\, x$ .

**190.** $\ln(1-5x+4x^2)$ .  **191.** $\dfrac{3x-5}{x^2-4x+3}$ .

**192.** $\dfrac{4x+3}{x^2-3x+2}$  **193.** $(1+x)\ln(1+x)$ .

**194.** $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ .  **195.** $\dfrac{1}{(1-x)^3}$ .

**196.** $e^x\sin x$ .  **197.** $\sqrt{x}\, arctg\sqrt{x}$ .

**198.** $\dfrac{1+x^3}{(1-x)^3}$ .  **199.** $arctg^2 x$ .



Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

Следующие функции разложить в ряды Тейлора в окрестности указанной точки $a$. Указать области сходимости найденных разложений к своим суммам:

**200.** $\ln(x), \quad a = 1\,.$

**201.** $\sqrt{x}, \quad a = 2\,.$

**202.** $\dfrac{1}{x}, \quad a = -2\,.$

**203.** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}, \quad a = 3\,.$

**204.** $e^x, \quad a = 1\,.$

**205.** $\dfrac{1}{5+2x}, \quad a = 3\,.$

**206.** $\sin\dfrac{\pi x}{4}, \quad a = 2\,.$

**207.** $\ln(5x+3), \quad a = -\dfrac{2}{5}\,.$

**208.** $\dfrac{1}{x^2-4x+3}, \quad a = -2\,.$

**209.** $\dfrac{1}{x^2+4x+7}, \quad a = -2\,.$

Найти первые 3-4 члена разложения в ряд Маклорена для следующих функций:

**210.** $tgx$

**211.** $e^{\cos x}$

**212.** $arctg\dfrac{1}{1+x}$

**213.** $\sqrt{1+\sin x}$

**214.** $\ln\cos x$

**215.** $\sec x$

## 2.4 Применение степенных рядов к вычислению пределов, производных и интегралов.

При вычислении пределов применяют различные приемы: используют табличные формулы, эквивалентные бесконечно малые и правила Лопиталя. Способ, основанный на применении числовых рядов, состоит в следующем. Числитель и знаменатель дроби раскладываются в числовые ряды по одинаковым степеням. После этого производят необходимые сокращения и неопределенность исчезает.

С помощью рядов Тейлора можно находить числовые значения производных любого порядка от данной функции. Чтобы найти $f^{(n)}(a)$, нужно разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора по степеням $(x-a)$, а затем по формуле $f^{(n)}(a) = c_n\, n!$ вычислить нужную производную.

Теорию рядов можно применить и к интегрированию функций. Если функция $f(x)$ разложима в равномерно сходящийся на отрезке



Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

$[a, b]$ ряд, то интеграл $\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx$, где $a \le x_1 < x_2 \le b$, часто также легко представляется в виде сходящегося ряда.

$\boxed{\textbf{Пример 26.}}$ Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{2+\cos x}{x^3\sin x} - \dfrac{3}{x^4}\right]$.

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{2+\cos x}{x^3\sin x} - \frac{3}{x^4}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{2x + x\cos x - 3\sin x}{x^4\sin x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{2x + x\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\right) - 3\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\right)}{x^5}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{4!} - \frac{3}{5!}\right)x^5 + \left(-\frac{1}{6!} + \frac{3}{7!}\right)x^7 + \ldots}{x^5} = \frac{1}{4!} - \frac{3}{5!} = \frac{1}{60}.$$

$\boxed{\textbf{Пример 27.}}$ Найти производную 11-го порядка от функции $f(x) = x^5\cos\dfrac{x}{2}$ в точке $x = 0$.

**Решение.** Разложим данную функцию в ряд Тейлора по степеням $x$:

$$x^5\cos\frac{x}{2} = x^5 - \frac{x^7}{2^2\,2!} + \frac{x^9}{2^4\,4!} - \frac{x^{11}}{2^6\,6!} + \frac{x^{13}}{2^8\,8!} - \ldots \quad .$$

Так как $f^{(11)}(0) = c_{11}\cdot 11!$, то $f^{(11)}(0) = -\dfrac{11!}{2^6 6!} = -\dfrac{3465}{4}$.

$\boxed{\textbf{Пример 28.}}$ Представить в виде ряда интеграл $\int\limits_{1/4}^{1/2}\dfrac{ln(1+x)}{x}dx$.

$$\int\limits_{1/4}^{1/2}\frac{ln(1+x)}{x}dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{1/4}^{1/2}\frac{(-1)^{n-1}x^{n-1}dx}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n^2}\Big|_{1/4}^{1/2} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right] = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^n - 1}{n^2 4^n}.$$

## Упражнения

Вычислить пределы:



Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

**216.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - arctgx}{x^3}$ .

**217.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{e^x - 1 - x}$ .

**218.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1+x^2}\cos x}{tg^4 x}$ .

**219.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(tgx - \sin x) - x^3}{x^5}$ .

Найти значения производных от функций:

**220.** $e^{-x^2/2}$; $\quad f^{(10)}(0) = ?$

**221.** $\dfrac{2x}{1+x^2}$; $\quad f^{(6)}(0) = ?$

**222.** $\dfrac{x^3}{\sqrt[3]{1+x^3}}$; $\quad f^{(5)}(0) = ?$

**223.** $x^4\ln(1+\dfrac{x}{2})$; $\quad f^{(9)}(0) = ?$

**224.** $x^6 arctg\, x$; $\quad f^{(10)}(0) = ?$

**225.** $(x-1)^2\ln x$; $\quad f^{(5)}(1) = ?$

Представить в виде рядов следующие интегралы:

**226.** $\int\limits_0^x x^2 e^{-x^2}dx$ .

**227.** $\int\limits_0^x \cos x^3 dx$ .

**228.** $\int\limits_0^x \dfrac{\ln(1+x)}{x}dx$ .

**229.** $\int\limits_0^x \dfrac{\sin x^3}{x^3}dx$ .

**230.** $\int\limits_0^x \dfrac{\sqrt[3]{1+x^3}-1}{x}dx$ .

**231.** $\int\limits_0^x \dfrac{arctg\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$ .

## 2.5 Приближенные вычисления с помощью степенных рядов

Для приближенного вычисления значения функции $f(x)$ в точке $x_0$ можно использовать следующий прием. Функцию $f(x)$ раскладывают в степенной ряд. В полученном разложении полагают $x = x_0$. Затем для вычисления $f(x_0)$ с нужной точностью берут необходимое число его начальных членов.

Для оценки погрешности найденного приближенного значения нужно оценить остаток ряда. Если ряд знакопостоянный, то остаток ряда сравнивают с бесконечно убывающей геометрической прогрессией. В случае знакопеременного ряда, члены которого удовлетворяют признаку Лейбница, используется оценка $\mid R_n \mid < U_{n+1}$ где $U_{n+1}$ — первый из отброшенных членов ряда.



Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

**Замечание.** Для вычисления логарифмов чисел можно пользоваться рядом

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots),\qquad (\mid x\mid<1).$$

Степенные ряды используются и для приближенного вычисления интегралов $\int\limits_a^b f(x)dx$. Для этого раскладывают подынтегральную функцию $f(x)$ в степенной ряд.

$\boxed{\textbf{Пример 29.}}$ Вычислить $\cos 1^0$ с точностью до $0,0001$.

**Решение.** Так как $\cos 1^0=\cos\dfrac{\pi}{180}$, то, полагая в разложении косинуса $x=\dfrac{\pi}{180}$, получаем $\cos 1^0\approx 1-\dfrac{\pi^2}{180^2\cdot 2!}\approx 0,9998$. Здесь первые два члена разложения уже обеспечивают большую точность, так как

$$\mid R_2\mid\le\frac{\pi^4}{180^4\cdot 4!}<\frac{4^4}{180^4\cdot 4!}=\frac{1}{45^4\cdot 24}<0,0000001.$$

$\boxed{\textbf{Пример 30.}}$ Вычислить $\ln 1,04$ с точностью $0,0001$.

**Решение.** Воспользуемся разложением $\ln(1+x)$ в ряд:

$$\ln 1,04=\ln(1+0,4)=0,04-\frac{(0,04)^2}{2}+\frac{(0,04)^3}{3}-\ldots,$$

или $\ln 1,04=0,04-0,0008+0,000021-\ldots$. Очевидно, что ряд знакочередующийся и уже третий член ряда может быть отброшен в силу того, что он меньше заданной точности. Тогда $\ln 1,04\cong 0.0392$.

$\boxed{\textbf{Пример 31.}}$ Вычислить интеграл $\int\limits_0^2\dfrac{\sin x}{x}dx$ с точностью до $0.001$. (Предполагается, что $\frac{\sin x}{x}=1$ при $x=0$).

**Решение.**

$$\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{x}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots\right)=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\ldots\ .$$

Интегрируем полученное разложение на отрезке

$$\int\limits_0^2\frac{\sin x}{x}dx=\left[x-\frac{x^3}{3\cdot 3!}+\frac{x^5}{5\cdot 5!}-\frac{x^7}{7\cdot 7!}+\ldots\right]\Bigg|_0^2=$$



Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

$$= 2 - \frac{2^3}{3 \cdot 3!} + \frac{2^5}{5 \cdot 5!} - \frac{2^7}{7 \cdot 7!} + \ldots .$$

Для вычисления интеграла с указанной точностью достаточно взять четыре члена ряда, так как при этом $|R_4| \le 2^9/(9 \cdot 9!) < 0.001$. Тогда

$$\int\limits_0^2 \frac{\sin x}{x} dx \approx 1.605 .$$

### Упражнения

Вычислить приближенно с указанной степенью точности $\epsilon$:

**232.** $\frac{1}{\sqrt{e}}\,, \quad \epsilon = 0,001\,.$

**233.** $\sin\frac{\pi}{100}\,, \quad \epsilon = 0,0001\,.$

**234.** $\sin 1^0\,, \quad \epsilon = 0,001\,.$

**235.** $\sqrt{1,3}\,, \quad \epsilon = 0,001\,.$

**236.** $\sqrt[3]{80}\,, \quad \epsilon = 0,001\,.$

**237.** $\sqrt[4]{90}\,, \quad \epsilon = 0,01\,.$

**238.** $\ln 10\,, \quad \epsilon = 0,01\,.$

**239.** $\ln 5\,, \quad \epsilon = 0,01\,.$

**240.** $\int\limits_0^{1/4} e^{-x^2} dx\,, \quad \epsilon = 0,001\,.$

**241.** $\int\limits_0^{1/4} \sin x^2 dx\,, \quad \epsilon = 0,001\,.$

**242.** $\int\limits_0^{1/2} \sqrt{1+x^3}\, dx\,, \quad \epsilon = 0,001\,.$

**243.** $\int\limits_0^{1} \frac{arctg\, x}{x}\, dx\,, \quad \epsilon = 0,001\,.$

## 2.6 Применение степенных рядов к решению дифференциальных уравнений

1.Способ неопределенных коэффициентов.

Если интегрирование дифференциального уравнения при помощи элементарных функций не удается, то его решение в некоторых случаях можно искать в виде степенного ряда

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n\,. \tag{2.15}$$

Неопределенные коэффициенты $c_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ находятся путем подстановки ряда (2.15) в уравнение и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях бинома $x - x_0$ в левой и правой частях полученного равенства.



Библиотека ГГТУ им.П.О.Сухого

2. Способ последовательных дифференцирований.

Этот способ применяется, когда требуется найти частное решение уравнения

$$y' = f(x, y); \qquad \text{где} \quad y(x_0) = y_0\,. \tag{2.16}$$

Частное решение можно попробовать искать в виде ряда Тейлора:

$$y = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

первый член которого известен из начальных условий ($y(x_0) = y_0$). Из уравнения находим $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$, а дальнейшие производные $y^{(n)}(x_0)$ ($n = 2, 3, \cdots$) последовательно находятся при помощи дифференцирования уравнения (2.16) и подстановки вместо $x$ числа $x_0$.

Эти способы применимы и при решении дифференциальных уравнений высших порядков.

Пример 32. Найти общее решение уравнения $y' - xy = 0$ в виде степенного ряда.

**Решение.** Так как точка $x = 0$ не является особой для данного уравнения, то общее решение можно искать в виде ряда:

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots\,,$$

отсюда, дифференцируя, получим:

$$y' = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \cdots + nc_n x^{n-1} + (n+1)c_{n+1} x^n \cdots\,.$$

Подставляя $y$ и $y'$ в данное уравнение, приходим к тождеству

$$c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \cdots + nc_n x^{n-1} + (n+1)c_{n+1} x^n \cdots \equiv$$

$$\equiv x(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x$, получим

$$c_1 = 0; \quad c_2 = \frac{c_0}{2}; \quad c_3 = 0; \quad c_4 = \frac{c_0}{2 \cdot 4}; \quad c_5 = 0; \quad c_6 = \frac{c_0}{2 \cdot 4 \cdot 6} \; \cdots\,.$$

Вообще,

$$c_{2k-1} = 0; \qquad c_{2k} = \frac{c_0}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot 2k} = \frac{c_0}{(2k)!!} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$



Библиотека ГГТУ им.П.О.Сухого

Следовательно,

$$y = c_0 \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2\cdot 4} + \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6} + \dots + \frac{x^{2k}}{(2k)!!} + \dots\right) = c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!!},$$

где $c_0 = y_0$.

$\boxed{\textbf{Пример 33.}}$ Найти частное решение уравнения $y' = x+y$; $\quad y_0 = y(0) = 1$.

**Решение.** Полагаем

$$y = y_0 + y_0' x + \frac{y_0''}{2!}x^2 + \frac{y_0'''}{3!}x^3 + \cdots .$$

Имеем $y_0 = 1$, $\quad y_0' = 0 + 1 = 1$. Дифференцируя обе части уравнения $y' = x + y$, последовательно находим

$$y'' = 1 + y', \quad y_0'' = 1 + 1 = 2, \quad y''' = y'', \quad y_0''' = 2, \quad \text{и т.д.}$$

Следовательно,

$$y = 1 + x + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 + \cdots .$$

Для этого примера найденное решение можно записать в конечном виде

$$y = 1 + x + 2(e^x - 1 - x) \quad \text{или} \quad y = 2e^x - 1 - x\,.$$

## Упражнения

**244.** $y' = y + x^2$; $\qquad y = -2 \quad$ при $\quad x = 0$.

**245.** $y' = 2y + x - 1$; $\qquad y = y_0 \quad$ при $\quad x = 1$.

**246.** $y' = y^2 + x^3$; $\qquad y = \dfrac{1}{2} \quad$ при $\quad x = 0$.

**247.** $y' = x^2 - y^2$; $\qquad y = 0 \quad$ при $\quad x = 0$.

**248.** $(1 - x)y' = 1 + x - y$; $\qquad y = 0 \quad$ при $\quad x = 0$.

**249.** $xy'' + y = 0$; $\qquad y = 0,\ y' = 1 \quad$ при $\quad x = 0$.

**250.** $y'' + xy = 0$; $\qquad y = 1,\ y' = 0 \quad$ при $\quad x = 0$.

**251.** $y'' + \dfrac{1}{x}y' + y = 0$; $\qquad y = 1,\ y' = 0 \quad$ при $\quad x = 0$.



Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

# 3 Ряды Фурье

Бесконечная последовательность функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$, ... называется **ортогональной** на отрезке $[a, b]$, если $\int\limits_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)dx = 0$ для любых $m$ и $n$, для которых $m \neq n$. При этом считается, что норма этих функций

$$\| \varphi_n(x) \| = [\int\limits_a^b \varphi_n^2(x)dx]^{1/2} \neq 0.$$

Примеры ортогональных систем:

1. Множество функций 1, $\cos x$, $\sin x$, $\cos 2x$, $\sin 2x$, ..., $\cos nx$, $\sin nx$, ... образует ортогональную систему функций на отрезке $[-\pi, \pi]$.
2. Множество функций $\left\{\cos \dfrac{n\pi x}{l}, \sin \dfrac{n\pi x}{l}\right\}_{n=0}^{\infty}$ образует ортогональную систему функций на отрезке $[-l, l]$.

Функциональный ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{3.1}$$

где коэффициенты $a_0$, $a_n$, $b_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ определяются по формулам

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx\,, \tag{3.2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx\,, \tag{3.3}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx\,, \tag{3.4}$$

называется **тригонометрическим рядом Фурье**. Если ряд (3.1) сходится, то его сумма $S(x)$ является периодической функцией с периодом $T = 2\pi$.

**Условие разложимости функции в тригонометрический ряд Фурье.** Если периодическая функция $f(x)$ на сегменте $[-\pi, \pi]$ имеет конечное число экстремумов и является непрерывной, за исключением, может быть, конечного числа точек разрыва I рода (т.е. удовлетворяет условиям Дирихле), то ряд Фурье в каждой точке непрерывности сегмента $[-\pi, \pi]$ сходится к функции $f(x)$.



Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

Если $x \in (-\pi, \pi)$ — точка разрыва функции $f(x)$, то сумма ряда Фурье $S(x)$ равна среднему арифметическому левого и правого пределов функции:

$$S(x) = \frac{1}{2}[f(x-0) + f(x+0)]\,,$$

на концах интервала $x = \pm\pi$

$$S(-\pi) = S(\pi) = \frac{1}{2}[f(-\pi+0) + f(\pi-0)].$$

**Неполные ряды Фурье.**

Если функция $f(x)$ — четная (т.е. $f(-x) = f(x)$), то $b_n = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\cos nx dx \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)\,. \tag{3.5}$$

Если функция $f(x)$ — нечетная ( т.е. $f(-x) = -f(x)$), то $a_n = 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ и

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\sin nx dx \qquad (n = 1, 2, \ldots)\,. \tag{3.5$'$}$$

**Замечания.**

1. Периодическая функция с периодом $2\pi$, заданная в интервале $(0, \pi)$, может быть по нашему усмотрению продолжена в интервал $(-\pi, 0$ либо как четная, либо как нечетная, т.е. разложена либо только в ряд косинусов, либо только в ряд синусов.

2. Периодическая функция с периодом $(2\pi)$, заданная в интервале $(0, \pi)$, может быть разложена в ряд Фурье бесконечным числом способов, смотря по тому, как построено ее продолжение в интервал $(-\pi, 0)$.

**Ряды Фурье периода $2l$.**

Если периодическая функция $f(x)$ с периодом $2l$ удовлетворяет условиям Дирихле в интервале $(-l, l)$, то в точках непрерывности функции, принадлежащих этому интервалу, справедливо разложение:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l}\right), \tag{3.6}$$

где

$$a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx; \qquad b_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx. \tag{3.7}$$



Библиотека БГТУ им. П.О. Сухого

**Ряд Фурье для функции, заданной на интервале длины T.**

В приложениях часто возникает задача о разложении в тригонометрический ряд функции $f(x)$, заданной лишь на некотором интервале $[a, a+T]$ длины $T$ и удовлетворяющей на этом интервале условиям Дирихле. Периодически продолжив $f(x)$ с интервала $[a, a+T]$ на всю ось $x$, получим периодическую функцию $\phi(x)$ периода $T$, совпадающую с $f(x)$ на интервале $[a, a+T]$. Ряд Фурье для функции $\phi(x)$ имеет вид

$$\phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{2\pi nx}{T} + b_n \sin\frac{2\pi nx}{T}\right), \tag{3.8}$$

где

$$a_n = \frac{2}{T}\int\limits_a^{a+T} \phi(x)\cos\frac{2\pi nx}{T}dx; \qquad b_n = \frac{2}{T}\int\limits_a^{a+T} \phi(x)\sin\frac{2\pi nx}{T}dx\,. \tag{3.9}$$

**Пример 34.** Разложить в тригонометрический ряд Фурье в интервале $(-\pi, \pi)$ функцию

$$f(x) = \begin{cases} \pi, & -\pi < x < 0; \\ \pi - x, & 0 \le x < \pi. \end{cases}$$

**Решение.** Вычислим по формулам (3.7) коэффициенты ряда Фурье ($l = \pi$):

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0} \pi dx + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(\pi - x)dx = \frac{3}{2}\pi;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0}\pi\cos nxdx +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(\pi - x)\cos nxdx - \frac{1}{\pi n^2}\cos nx|_0^{\pi} = \frac{(-1)^{n+1}+1}{\pi n^2};$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0}\pi\sin nxdx +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(\pi - x)\sin nxdx = \frac{\cos n\pi}{n} = \frac{(-1)^n}{n}.$$

Тогда тригонометрический ряд Фурье (3.3) имеет вид



Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

$$f(x) = \frac{3}{4}\pi + \sum_{n=1}^{\infty} [\frac{(-1)^{n+1}+1}{\pi n^2} \cos nx + \frac{(-1)^n}{n} \sin nx].$$

Найденное разложение имеет место при всех значениях $x \in (-\pi, \pi)$.

**Пример 35.** Дана функция $f(x) = x^2$. Разложить ее в ряд Фурье в интервале $(0, \pi)$ в ряд синусов.

**Решение.** Функция, разлагаемая в ряд по синусам, должна быть нечетной. Следовательно, нужно построить ее нечетное продолжение в интервал $(-\pi, 0)$; тогда $a_n = 0$, а

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} x^2 \sin nx dx =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[ \frac{2x}{n^2} \sin nx - \left( \frac{x^2}{n} - \frac{2}{n^3} \right) \cos nx \right]_0^{\pi} = \frac{4}{\pi n^3}[(-1)^n - 1] - \frac{2\pi}{n}.$$

Искомое разложение имеет вид

$$x^2 = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^3} \sin nx - 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} =$$

$$= -\frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3} - 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}.$$

Полученное равенство имеет место для всех значений $x \in (0, \pi)$.

## Упражнения

Следующие функции разложить в тригонометрические ряды Фурье в интервале $(-\pi, \pi)$:

**252.**

$$f(x) = \begin{cases} -2, & \text{при} \quad -\pi < x \le 0, \\ 1, & \text{при} \quad 0 \le x < \pi. \end{cases}$$

**253.**

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad -\pi < x \le 0, \\ x, & \text{при} \quad 0 \le x < \pi. \end{cases}$$

**254.**

$$f(x) = \begin{cases} \pi + 2x, & \text{при} \quad -\pi < x \le 0, \\ -\pi, & \text{при} \quad 0 \le x < \pi. \end{cases}$$

**255.**

$$f(x) = 4x - 1.$$



Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

**256.**

$$f(x) = x^2 + 1\,.$$

**257.** Функцию $f(x) = x$ в интервале $(0, \pi)$ разложить в ряд Фурье по косинусам кратных дуг.

**258.** Функцию $f(x) = x$ в интервале $(0, \pi)$ разложить в ряд Фурье по синусам кратных дуг.

**259.** Функцию $f(x) = 1 - 2x$ на отрезке $[0, 1]$ разложить в ряд Фурье по косинусам кратных дуг.

**260.** Функцию $f(x) = \cos 2x$ в интервале $(0, \pi)$ разложить в ряд Фурье по синусам кратных дуг.

**261.** Разложить по синусам в сегменте $[0, 2]$ функцию $f(x) = 1 - x/2$.

Разложить в ряд Фурье в указанных интервалах функции:

**262.** $f(x) = |\, x\,|, \qquad (-1 < x < 1)\,.$

**263.** $f(x) = e^x, \qquad (-e < x < e)\,.$

**264.** $f(x) = 10 - x, \qquad (5 < x < 15)\,.$

**265.**

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{при} \quad 0 < x \le 1, \\ 2 - x, & \text{при} \quad 1 \le x < 2. \end{cases}$$



Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

## Литература


1. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу.- М.: Наука, 1962.
2. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа.- М.: Наука, 1977.
3. Бермант А.Ф.,Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа для ВТУзов.- М.: Наука, 1971.
4. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.II.- М.: Наука, 1970.
5. Никольский С.М. Курс математического анализа. Т I.,II.- М.: Наука, 1983.
6. Шмелев П.А. Теория рядов в задачах и упражнениях.- М.: Высшая школа, 1983.
7. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу (интегралы, ряды).- М.: Наука, 1986.
8. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа.- М.: Наука, 1988.


Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

# Содержание



Библиотека ГГТУ им.П.О.Сухого

**Корсун** Лидия Дмитриевна
**Курлович** Сергей Петрович
**Тепляков** Виктор Герардович

# РЯДЫ

## Пособие
## для студентов дневной формы обучения

Подписано к размещению в электронную библиотеку
ГГТУ им. П. О. Сухого в качестве электронного
учебно-методического документа 01.02.10.
Рег. № 118Е.
E-mail: ic@gstu.by
http://www.gstu.by

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого