Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Высшая математика»

А. А. Бабич, А. В. Емелин, Л. Д. Корсун

СПЕЦИАЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И ФУНКЦИИ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ
по одноименной дисциплине для студентов специальности 1-36 04 02 «Промышленная электроника» дневной формы обучения

Гомель 2012

УДК 517(075.8)
ББК 22.16я73
Б12

Рекомендовано научно-методическим советом
факультета автоматизированных и информационных систем
ГГТУ им. П. О. Сухого
(*протокол № 5 от 26.12.2011 г.*)

Рецензенты: зав. каф. «Промышленная электроника» ГГТУ им. П. О. Сухого
канд. техн. наук, доц. *Ю. В. Крышнев*;
доц. каф. «Высшая математика» ГГТУ им. П. О. Сухого
канд. физ.-мат. наук, доц. *Л. Л. Великович*

Бабич, А. А.
Б12 Специальные математические методы и функции : учеб.-метод. пособие по одноим. дисциплине для студентов специальности 1-36 04 02 «Промышленная электроника» днев. формы обучения / А. А. Бабич, А. В. Емелин, Л. Д. Корсун. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2012. – 63 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: http://alis.gstu.by/StartEK/. – Загл. с титул. экрана.

Рассматриваются основные положения раздела «Специальные математические методы и функции» и методы решения задач с их использованием. Учебно-методическое пособие содержит краткие теоретические сведения по каждой теме и снабжено большим количеством заданий.

Предназначено для использования на практических занятиях и для самостоятельной работы студентов специальности 1-36 04 02 «Промышленная электроника» дневной формы обучения.

УДК 517(075.8)
ББК 22.16я73

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данное учебно-методическое пособие является частью комплекса учебных пособий под общим названием «Специальные математические методы и функции» и написано в соответствии с действующей программой курса «Специальные математические методы и функции», соответствующей новому образовательному стандарту и учебному плану по специальности 1–36 04 02 «Промышленная электроника». Учебно-методическое пособие адресовано студентам дневной формы обучения, овладевшим основами линейной алгебры и математического анализа в рамках курса «Высшая математика».

В методическом пособии весь практический материал по курсу «Специальные математические методы и функции» разбит на разделы, в каждом из которых даются необходимые сведения (основные определения, формулы), используемые при решении задач. Для проведения практических занятий и самостоятельной работы студентов в конце каждого раздела имеется задание, содержащее список задач.

Для самостоятельной подготовки к практическим занятиям и экзамену рекомендуем курс лекций по дисциплине «Специальные математические методы и функции» [1].

РАЗДЕЛ 1. **Отображения множеств. Мощность множеств**

Отображением f множества X в множество Y называется всякое правило, сопоставляющее *каждому* элементу x множества X *единственный* элемент y множества Y. При этом $y = f(x)$ называется ***образом*** x, а $x = f^{-1}(y)$ – прообразом y.

Отображение $f : X \to Y$ называется ***сюръективным*** или ***сюръекцией***, если X отображается на всё множество Y, т. е. $f(X) = Y$.

Отображение $f : X \to Y$ называется ***инъективным*** или ***инъекцией***, если любым двум различным элементам $x_1 \neq x_2$ соответствуют различные образы $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Отображение $f : X \to Y$, являющееся одновременно сюръекцией и инъекцией, называется ***биекцией*** или ***взаимнооднозначным*** отображением.

Множества X и Y называются ***эквивалентными***, т.е. $X \sim Y$, если между ними можно установить взаимнооднозначное соответствие.

Мощностью конечного множества M называется число его элементов $n(M)$.

Множества A и B имеют равные мощности, если $A \sim B$.

Множество A называется ***счетным***, если $A \sim \boldsymbol{N}$, где $\boldsymbol{N}$ – множество натуральных чисел.

Теорема 1.1. Множество действительных чисел, принадлежащих отрезку $[0,1]$, несчетно.

Множество $A \sim [0,1]$ называется множеством ***мощности континуум***. Мощность счетного множества обозначается символом $\aleph_0$ (***алеф-нуль***). Мощность множества континуум обозначается как $\aleph$ (алеф) или **с** (готическая буква С).

Теорема Кантора-Берштейна. Пусть A и B - два произвольных множества, а $A_1 \subseteq A$ и $B_1 \subseteq B$ - два их подмножества. Тогда если $A_1 \sim B$ и $B_1 \sim A$, то $A \sim B$.

Задания к разделу 1

1.1. Задают ли указанные функции отображение f множества действительных чисел $\boldsymbol{R}$ в себя, и если задают, то является ли оно сюръективным? инъективным? биективным?

а) $y = \operatorname{tg} x$;

б) $y = \ln x$;

в) $y = e^x$;

г) $y = \sin x$;

д) $y = \dfrac{x^2}{x^2 + x + 1}$.

1.2. Установить, являются ли указанные отношения, действующие на множествах A и B, отображениями $f : A \to B$, и если являются, то будут ли они сюръективными, инъективными, биективными:

а) A – множество русских слов; B – множество букв в русском алфавите; $f : A \to B$ сопоставляет слову его первую букву;

б) A – множество функций, непрерывных на отрезке $[-1;1]$, B – множество действительных чисел; $f : A \to B$ сопоставляет функции $y(x)$ число $\int_{-1}^{1} y(x)dx$;

в) A – множество функций, имеющих на отрезке $[-1;1]$ производные всех порядков; $f : A \to A$ сопоставляет функции $y(x)$ ее производную $y'(x)$;

г) A – множество всех окружностей плоскости; B – множество всех точек плоскости; $f : A \to B$ сопоставляет каждой окружности ее центр;

д) A – множество всех окружностей радиуса $r = 1$; B – множество всех точек плоскости; $f : A \to B$ сопоставляет каждой окружности ее центр.

1.3. Множество A состоит из четырех элементов, а множество B из двух. Существуют ли указанные типы отображений, и если существуют, то определить их количество:

а) инъекция A в B;

б) сюръекция A на B;

в) инъекция B в A;

г) сюръекция B на A.

1.4. Построить следующие биективные отображения:

а) интервал $(0,1)$ на интервал $(0,10)$;

б) интервал $(0,1)$ на интервал $(-1,1)$;
в) интервал $(-a,1)$ на интервал (a,b);
г) интервал (a,b) на интервал (c,d);
д) интервал $(0,1)$ на прямую $(-\infty,\infty)$;
е) интервал $(0,1)$ на луч $(0,+\infty)$;
ж) отрезок $[-1,1]$ на интервал $(-1,1)$.

1.5. Отобразить множество квадратных трехчленов $\{ax^2+bx+c$, где a, b, c – натуральные числа$\}$ на множество натуральных чисел, кратных 30. Существует ли биективное отображение?

1.6. Установить, являются ли эквивалентными множество A точек произвольного круга и множество B точек произвольного квадрата. (*Указание*: воспользоваться теоремой Кантора-Берштейна.)

1.7. Установить, являются ли счетными следующие множества:
а) множество целых чисел $\boldsymbol{Z}$;
б) объединение конечного числа счетных множеств;
в) объединение счетного множества счетных множеств;
г) множество рациональных чисел $\boldsymbol{Q}$;
д) образ счетного множества при отображении f;
е) множество многочленов с целыми коэффициентами.

1.8. Показать, что множество действительных чисел имеет мощность континуум, т. е. $\boldsymbol{R} \sim [0;1]$.

1.9. Установить мощность множества иррациональных чисел $\boldsymbol{I}$.

1.10. Показать, что множество точек квадрата имеет мощность континуум.

1.11. Задано отображение $(x,y) \to (2x-3y+4,\,-x+4y)$ пространства $\boldsymbol{R}^2$ в себя. Найти:
а) образ точки $(2,3)$;
б) образ биссектрисы первого и третьего координатных углов;
в) прообраз оси абсцисс.

1.12. Задано отображение $f: y \to \int\limits_0^1 \left(x^2 - y^2(x)\right)dx$. Найти образ функции $y = \sin \pi x$. Указать два элемента из прообраза $f^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$.

1.13. Задано отображение: $f:(x, y) \to \varphi(t) = xt^2 - 2yt$ пространства $\boldsymbol{R}^2$ в пространство многочленов. Найти:

а) образ точки $(-1;1)$;

б) прообраз функции $\varphi(t) = 3t^2 + 4t$;

в) прообраз функции $\varphi(t) = 5t^2 - 2t$.

РАЗДЕЛ 2. **Метрические пространства**

Множество M называется ***метрическим пространством***, если каждой паре его элементов x и y поставлено в соответствие действительное число $\rho(x, y)$, удовлетворяющее условиям:

(M_1) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (аксиома тождества);
(M_2) $\rho(x, y) = \rho(x, y)$ (аксиома симметрии);
(M_3) $\rho(x, y) \le \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (аксиома треугольника).

Число $\rho(x, y)$ называется ***расстоянием*** между элементами x и y. Условия (M_1) - (M_3) называются ***аксиомами метрики***. Элементы x метрического пространства (M, ρ) называются ***точками***, а функция точек $\rho(x, y)$ ***метрикой***.

Для проверки аксиом метрики полезны следующие неравенства:

1) $|x + y| \le |x| + |y|$ – неравенство треугольника для модуля;

2) $|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| \le |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$;

3) $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \le \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} b_k^2$ – неравенство Коши-Буняковского;

4) $\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k b_k| \le \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{1/q}$, где $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ – неравенство Гёльдера;

5) $\left(\sum_{k=1}^{n}\left|a_k+b_k\right|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{k=1}^{n}\left|a_k\right|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n}\left|b_k\right|^p\right)^{1/p}$, где $p>1$ – неравенство Минковского;

6) $\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(a_k+b_k\right)^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2}$;

7) $\left(\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx\right) \le \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx$ – неравенство Шварца.

Множество всех точек x метрического пространства (X,ρ), удовлетворяющих условию $\rho(x,x_0)<r$, называется ***открытым шаром*** $B(x,x_0)$ с центром в точке x_0 и радиусом r. В случае нестрогого неравенства шар называется ***замкнутым шаром*** $B[x,x_0]$.

Множество M называется ***ограниченным***, если оно целиком находится в некотором шаре.

Таблица 2.1

Таблица основных метрических пространств

Обозначение пространства	**Элементы пространства**	**Формулы для метрик**
$\boldsymbol{R}_2^n$	$x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$	$\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2}$
$\boldsymbol{R}_1^n$	$x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$	$\rho(x,y)=\sum_{k=1}^{n}\lvert x_k-y_k\rvert$
$\boldsymbol{R}_\infty^n$	$x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$	$\rho(x,y)=\max_k\lvert x_k-y_k\rvert$
$\boldsymbol{R}_2^\infty$	$x=(x_1,x_2,\dots,x_n,\dots)$, $\sum_{k=1}^{\infty}x_k^2<\infty$	$\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}(x_k-y_k)^2}$
$\boldsymbol{R}_1^\infty$	$x=(x_1,x_2,\dots,x_n,\dots)$, $\sum_{k=1}^{\infty}\lvert x_k\rvert<\infty$	$\rho(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\lvert x_k-y_k\rvert$
$\boldsymbol{R}_\infty^\infty$	$x=(x_1,x_2,\dots,x_n,\dots)$, $\lvert x_k\rvert\le M$ для $\forall k$	$\rho(x,y)=\sup_k\lvert x_k\rvert$

$\boldsymbol{C}_2[a,b]$	Функция $f(x)$, непрерывная на $[a,b]$	$\rho(f,g)=\sqrt{\int_a^b (f(x)-g(x))^2\,dx}$
$\boldsymbol{C}_1[a,b]$	Функция $f(x)$, непрерывная на $[a,b]$	$\rho(f,g)=\int_a^b \lvert f(x)-g(x)\rvert\,dx$
$\boldsymbol{C}[a,b]$	Функция $f(x)$, непрерывная на $[a,b]$	$\rho(f,g)=\max\limits_{[a,b]}\lvert f(x)-g(x)\rvert$
$\boldsymbol{D}^n[a,b]$	Функция $f(x)$, непрерывная на $[a,b]$ вместе со своими производными до n-го порядка	$\rho(f,g)=\max\limits_{[a,b]}\lvert f^{(k)}(x)-g^{(k)}(x)\rvert$, $k=\overline{1,n}$.

Задания к разделу 2

2.1. Показать, что из аксиом метрики (M1) - (M3) следует неотрицательность метрики, т. е. что $\rho(x,y)\ge 0$ для любых $x,y\in M$.

2.2. Доказать, что для любых четырех точек x, y, u, v метрического пространства (M,ρ) справедливы неравенства:

а) $\lvert\rho(x,u)-\rho(u,y)\rvert\le\rho(x,y)$;

б) $\lvert\rho(x,u)-\rho(y,v)\rvert\le\rho(x,y)+\rho(u,v)$ - (неравенство четырехугольника).

2.3. Доказать, что для любых $a,b>0$ и любых $p,q>0$ таких, что $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, выполняется неравенство $a\cdot b\le\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$ (неравенство Юнга).

Указание: рассмотреть функции $f(x)=x^{1/p}$ и $g(x)=\frac{1}{p}x+\frac{1}{q}$ на отрезке $[0,1]$. Далее положить $x=\frac{a^p}{b^q}\le 1$.

2.4. Доказать неравенство Гёльдера:

$$\sum_k \lvert x_k\cdot y_k\rvert\le\left(\sum_k \lvert x_k\rvert^p\right)^{1/p}\cdot\left(\sum_k \lvert y_k\rvert^q\right)^{1/q},\ \text{где }\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Указание: воспользоваться неравенством Юнга.

2.5. Доказать неравенство Минковского:

$$\left(\sum_k |x_k + y_k|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_k |x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_k |y_k|^p\right)^{1/p}.$$

Указание: воспользоваться неравенством Гёльдера.

2.6. Являются ли метриками на прямой

а) $\rho(x, y) = |x - y|$;

б) $\rho(x, y) = |x^2 - y^2|$;

в) $\rho(x, y) = |\sin(x - y)|$;

г) $\rho(x, y) = (x^2 + y^2) \cdot |x - y|$.

2.7. Пусть M – множество точек окружности. Зафиксируем на окружности точку P_0 и определим расстояние между точками окружности A и B следующим образом:

$$\rho(A, B) = \begin{cases} A, B \ne P_0, \text{ длина дуги } AB, \text{ не содержащей точку } P_0; \\ A = P_0 \text{ или } B = P_0, \text{ длина кратчайшей дуги } AB; \\ A = B, \quad 0. \end{cases}$$

Является ли $\rho(A, B)$ метрикой?

2.8. На множестве $M = \{a, b, c\}$ метрика задана так, что $\rho(a, b) = \rho(b, c) = 1$. Какие значения может принимать $\rho(a, c)$?

2.9. Пусть M_n – множество двоичных наборов длины n. Расстояние между двоичными наборами σ и τ равно количеству позиций, на которых стоят различные числа. Записать формулу для $\rho(\sigma, \tau)$ и доказать, что $\rho(\sigma, \tau)$ является метрикой (***метрикой Хэмминга***).

2.10. Образует ли метрическое пространство множество точек плоскости, если расстояние между точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ определить так:

а) $\rho(M_1, M_2) = \left(\sqrt{|x_1 - x_2|} + \sqrt{|y_1 - y_2|}\right)^2$;

б) $\rho(M_1, M_2) = \sqrt[4]{(x_1 - x_2)^4 + (y_1 - y_2)^4}$?

2.11. Пусть M – множество населенных пунктов на берегу реки. Расстояние между пунктами A и B определим как время движения теплохода, имеющего собственную скорость v. Образует ли M метрическое пространство?

2.12. Задает ли метрику на пространстве многочленов формула:

а) $\rho(P_1, P_2) = |P_1(0) - P_2(0)|$;

б) $\rho(P_1, P_2) = |P_1(1) - P_2(1)|$?

2.13. Образует ли метрическое пространство множество полей шахматной доски, если за расстояние ρ между полями x и y принять наименьшее число ходов, которое потребуется, чтобы перейти с поля x на поле y: а) королю; б) ладье; в) коню?

2.14. Пусть M – метрическое пространство с метрикой ρ, а $f: A \to M$ – некоторое отображение множества A в M. Положим для любых двух точек $x, y \in A$

$$\rho_A(x, y) = \rho(f(x), f(y)).$$

Установить, является ли $\rho_A(x, y)$ метрикой, если отображение f:

а) инъективно;

б) сюръективно;

в) биективно.

2.15. Будет ли пространство непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций $C_{[a,b]}$ метрическим, если метрику определить как:

а) $\rho(x, y) = \min |x(t) - y(t)|$, $t \in [a, b]$;

б) $\rho(x, y) = \int\limits_a^b |x(t) - y(t)| dt$;

в) $\rho(x, y) = \left[\int\limits_a^b (x(t) - y(t))^2 dt\right]^{1/2}$.

2.16. Для множества точек плоскости $M(x, y)$ введены следующие три метрики:

$$d(M_1, M_2) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2};$$

$$\sigma(M_1, M_2) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|;$$

$$\mu(M_1, M_2) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}.$$

Определить их геометрический смысл и найти расстояния между точками A и B в метрических пространствах $\boldsymbol{R}_d^2$, $\boldsymbol{R}_\sigma^2$ и $\boldsymbol{R}_\mu^2$:

а) $A(0,0)$, $B(1,1)$;

б) $A(-2,1)$, $B(3,4)$.

2.17. Изобразить на плоскости XOY ε-окрестность точки $M_0(x_0, y_0)$ для метрический пространств $\boldsymbol{R}_d^2$, $\boldsymbol{R}_\sigma^2$ и $\boldsymbol{R}_\mu^2$.

2.18. Указать на множестве клеток шахматной доски окрестности клетки $d4$ радиуса 2 для метрик, введенных в задаче 2.13.

2.19. Найти множество точек пространства $\boldsymbol{R}_\infty^2$, равноудаленных от точек $A=(-1,0)$ и $B=(1,0)$.

2.20. Найти множество точек пространства $\boldsymbol{R}_1^2$, расстояние от каждой из которых до точки $A(0,0)$ в 2 раза больше, чем расстояние до точки $B(3,0)$.

2.21. Найти расстояние между функциями $f(x)=x^2$ и $g(x)=2x+3$ в метриках пространств:

а) $\boldsymbol{C}\left[0,\dfrac{7}{2}\right]$; б) $\boldsymbol{C}_1\left[0,\dfrac{7}{2}\right]$; в) $\boldsymbol{D}^1\left[0,\dfrac{7}{2}\right]$.

2.22. Найти расстояние между функциями $f(x)=x^3$ и $g(x)=3x+4$ в метриках пространств:

а) $\boldsymbol{C}_1[0,2]$; б) $\boldsymbol{C}_2[0,2]$; в) $\boldsymbol{C}[0,2]$; г) $\boldsymbol{D}^1[0,2]$; д) $\boldsymbol{D}^2[0,2]$.

РАЗДЕЛ 3. **Сходимость и непрерывность в метрических пространствах**

Точкой прикосновения множества X метрического пространства M называется точка $x \in M$, любая окрестность которой содержит хотя бы одну точку из X.

Замыканием множества $X \subseteq M$ называется совокупность всех его точек прикосновения. Замыкание обозначается как $[X]$.

Предельной точкой x_0 для множества $X \subseteq M$ называется точка $x \in M$, всякая окрестность которой содержит по крайней мере одну точку из *X*, отличную от x_0.

Изолированной точкой множества $X \subseteq M$ называется точка, для которой найдется ее окрестность $O_\varepsilon(x)$, не содержащая других точек из *X*.

Внутренней точкой множества $X \subseteq M$ называется точка, для которой всегда найдется ее окрестность целиком содержащаяся в *X*.

Внешней точкой множества $X \subseteq M$ называется точка, для которой существует окрестность, целиком содержащаяся в дополнении к *X*, т. е. в $M \setminus X$.

Граничной точкой множества *X* называется точка, любая окрестность которой содержит как точки из *X*, так и точки из его дополнения $\overline{X}$.

Открытым множеством называется множество, все точки которого внутренние.

Замкнутым множеством называется множество, содержащие все свои предельные точки.

Последовательность точек $\{x_n\}$ метрического пространства *M* ***сходится к точке*** x_0, если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется номер n_0, начиная с которого все точки последовательности содержатся в ε-окрестности точки x_0, т.е. $\rho(x, x_0) < \varepsilon$. При этом точка x_0 называется ***пределом*** последовательности $\{x_n\}$.

<u>*Определение 1.*</u> Отображение $f : X \to Y$ называется непрерывным в точке $x_0 \in X$, если для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ такое, что для всех точек $x \in X$ из δ-окрестности точки x_0 их образы $f(x)$ содержатся в ε-окрестности точки $f(x_0) \in Y$, т.е.

$$\rho_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow \rho_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

<u>*Определение 2.*</u> Отображение $f : X \to Y$ называется непрерывным в точке $x_0 \in X$, если для всякой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к x_0, последовательность их образов $\{f(x_n)\}$ сходится к образу $f(x_0) \in Y$.

Последовательность точек $\{x_n\}$ метрического пространства *M* называется ***фундаментальной*** или ***последовательностью Коши***, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер n_0, начиная с которого расстояние между любыми точками последовательности x_n и x_m не превышает ε, т. е. $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ для $\forall n, m > n_0$.

Теорема. Всякая сходящаяся в метрическом пространстве последовательность является фундаментальной.

Метрическое пространство М называется ***полным***, если всякая фундаментальная последовательность $\{x_n\}$ точек этого пространства сходится к точке x_0 этого пространства.

Задания к разделу 3

3.1. Может ли множество, содержащее хотя бы одну граничную точку, быть открытым?

3.2. Множество *X* состоит из интервала $(0,1)$ и двух изолированных точек $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$. Найти все граничные и предельные точки, а также все точки прикосновения.

3.3. Множество *X* состоит из точек плоскости (x, y), координаты которых удовлетворяют неравенствам $-1 < x \leq 1$, $-1 < y \leq 1$, и одной изолированной точки $A(2,3)$. Найти границу множества *X*, а также множество предельных точек и точек прикосновения.

3.4. Множество *X* состоит из всех точек плоскости (x, y) с рациональными координатами. Найти границу множества ∂X, множество всех предельных точек, а также замыкание $[X]$.

3.5. Множество $E \subseteq \boldsymbol{R}^2$ состоит из точек круга $x^2 + y^2 < 4$, имеющих рациональную абсциссу. Найти границу этого множества и его замыкание $[E]$.

3.6. В метрическом пространстве $C_{[-1,1]}$ непрерывных на отрезке $[-1,1]$ функций задано множество функций *E*, удовлетворяющих условию $f(x) \leq 1$. Установить, к какому типу точек (внутренние, внешние, граничные) относятся указанные функции:

а) $g(x) = 1 - x^2$;

б) $g(x) = \sin x$;

в) $g(x) = 2x$;

г) $g(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$;

д) $g(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$;

е) $g(x)=\operatorname{arctg} x$;

з) $g(x)=\operatorname{tg} x$.

Указание: В пространстве $C_{[-1,1]}$ метрика вводится как $\rho(f,g)=\max|f(x)-g(x)|$, где $x\in[-1;1]$.

3.7. Является ли открытым множеством интервал (a,b), если его рассматривать как подмножество:

а) прямой; б) плоскости?

3.8. Является ли закрытым множеством отрезок $[a,b]$, если его рассматривать как подмножество:

а) прямой; б) плоскости?

3.9. Может ли в метрическом пространстве множество быть одновременно и открытым и замкнутым?

Указание: Рассмотреть множество дискретных точек.

3.10. Является ли множество иррациональных чисел $\boldsymbol{I}$ всюду плотным в $\boldsymbol{R}$?

3.11. Является ли всюду плотным в $\boldsymbol{R}$ множество чисел, десятичная запись которых содержит лишь цифры 1 и 2?

3.12. Доказать, что в любом метрическом пространстве M сходящаяся последовательность $\{x_n\}$ имеет единственный предел x_0.

3.13. Доказать, что в любом метрическом пространстве M всякая подпоследовательность сходящейся последовательности $\{x_n\}$ также сходится, причем к тому же пределу x_0.

3.14. Доказать, что в метрическом пространстве всякая сходящаяся последовательность точек $\{x_n\}$ ограничена.

3.15. Установить, сходится ли последовательность функций $f_n(x)=nx/\left(1+n^2x^2\right)$ к функции $f(x)\equiv 0$ в пространствах:

а) $\boldsymbol{C}[0,1]$; б) $\boldsymbol{C}_1[0,1]$.

3.16. Установить, сходится ли последовательность функций $f_n(x)=\dfrac{\ln\left(1+n^2x^2\right)}{2n^2}$ к функции $f(x)\equiv 0$ в пространстве $\boldsymbol{D}^1[0,1]$.

3.17. Установить, сходятся ли данные последовательности функций к функции $f(x)\equiv 0$ по метрикам указанных пространств:

а) $f_n(x)=\dfrac{x}{1+n^2x^2}$; $\boldsymbol{C}[0,1]$ и $\boldsymbol{C}_1[0,1]$;

б) $f_n(x)=xe^{-nx}$; $\boldsymbol{C}[0,10]$ и $\boldsymbol{C}_1[0,10]$;

в) $f_n(x)=\dfrac{\sin nx}{n}$; $\boldsymbol{C}[-\pi,\pi]$, $\boldsymbol{C}_1[-\pi,\pi]$, $\boldsymbol{D}^1[-\pi,\pi]$;

г) $f_n(x)=x^n$; $\boldsymbol{C}[0,1]$ и $\boldsymbol{C}_1[0,1]$.

3.18. Задано отображение $F(y)=\int\limits_0^1 |y'(x)|dx$ подпространства E непрерывно-дифференцируемых функций пространств $\boldsymbol{C}[0,1]$ в $\boldsymbol{R}$. Является ли это отображение непрерывным на E?

Указание: Рассмотреть последовательность функций $y_n(x)=\dfrac{1}{n}\sin 2\pi nx$.

3.19. Для данных отображений $f:\boldsymbol{C}[a,b]\to\boldsymbol{R}$ установить их непрерывность:

а) $f(y)=\max y(x),\ \ x\in[a,b]$;

б) $f(y)=\min y(x),\ \ x\in[a,b]$;

в) $f(y)=\int\limits_a^b y(x)dx$;

г) $f(y)=\begin{cases}0, \text{ если } \exists x_0 : y(x_0)<0;\\ 1/2, \text{ если } y(x)\equiv 0;\\ 1, \text{ если } y(x)\geq 0, \text{но } y(x)\not\equiv 0.\end{cases}$

3.20. Является ли непрерывным отображение $f(y)=y'(0)$ функционального пространства E в пространство действительных чисел R, если:

а) $E=\boldsymbol{D}^1[0,1]$;

б) $E \subseteq \boldsymbol{C}[0,1]$, причем функции дифференцируемы в точке 0.

3.21. Задано отображение $D(y) = y'(x)$ подпространства $E \subseteq \boldsymbol{C}[0, 2\pi]$, состоящего из непрерывно дифференцируемых функций, в пространстве $\boldsymbol{C}[0,1]$. Является ли это отображение непрерывным?

Указание: Рассмотреть последовательность функций $y_n = \dfrac{\sin nx}{n}$.

3.22. Пусть a – фиксированная точка метрического пространства M. Является ли функция $f(x) = \rho(a, x)$ непрерывной на M?

3.23. Установить, являются ли данные последовательности действительных чисел фундаментальными в R:

а) $x_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \ldots + \dfrac{1}{2^n}$;

б) $x_n = \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{1}{n!}$.

3.24. Установить, является ли последовательность функции $y_n(x) = x^n$ фундаментальной в указанных метрических пространствах:

а) $\boldsymbol{C}\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$; б) $\boldsymbol{C}[0,1]$.

3.25. Являются ли фундаментальными данные последовательности функций в указанных пространствах:

а) $f_n(x) = \sin(2^n x)$, $\boldsymbol{C}[0, 2\pi]$;

б) $f_n(x) = \dfrac{x}{1 + n^2 x^2}$, $\boldsymbol{C}[0,1]$;

в) $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n}$, $\boldsymbol{D}^1[0,1]$?

3.26. Является ли замкнутое подпространство полного метрического пространства полным?

РАЗДЕЛ 4. **Принцип сжимающих отображений**

Сжимающим отображением называется отображение метрического пространства M в себя $f: M \to M$, если существует такое число q, принимающее значение $0 < q < 1$, что для любых двух точек x и y из M выполняется неравенство

$$\rho(f(x), f(y)) \le q\rho(x, y).$$

Неподвижной точкой отображения $f: M \to M$ называется точка x из M такая, что

$$f(x) = x.$$

Принцип сжимающих отображений. Всякое сжимающее отображение, определенное в полном метрическом пространстве, имеет единственную неподвижную точку.

Для сжимающего отображения $f: M \to M$ справедлива следующая оценка сходимости последовательности приближений $\{x_n\}$ к неподвижной точке x:

$$\rho(x_n, x) \le \frac{q^n}{1-q}\rho(f(x_0), x_0),$$

где x_0 – стартовая точка.

Критерий сжимаемости отображения. Дифференцируемая функция $f(x)$ задает сжимающее на отрезке $[a, b]$ отображение, если на этом отрезке $|f'(x)| \le \alpha < 1$.

При этом на отрезке $[a, b]$ имеется одна неподвижная точка.

Неподвижная точка может быть обнаружена с помощью метода итераций: $x_n = f(x_{n-1})$.

Задания к разделу 4

4.1. Найти неподвижные точки отображения $f(x) = x^2$ числовой прямой в себя.

4.2. Установить, имеет ли отображение

$$f(x) = 5x^2 + 2x + 3 - 2\sin x$$

числовой прямой в себя неподвижные точки.

4.3. Найти неподвижные точки данного отображения $f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$:

$$\begin{cases} u = x(y-1) - 2y^2 + 5y + x - 3, \\ v = -x(y+1) + 5. \end{cases}$$

4.4. Найти неподвижные точки отображения

$$f(y) = y^2(x) - y(x) - x^2$$

пространства $\boldsymbol{C}[0,1]$ в себя.

4.5. Найти неподвижные точки отображения $f(y) = y''(x)$ пространства дважды дифференцируемых функций в себя.

4.6. Установить, задает ли функция $f(x) = x^2$, определенная на отрезке $\left[0, \frac{1}{3}\right]$, сжимающее отображение.

4.7. Установить, задает ли функция $f(x) = 4x - 4x^2$, определенная на отрезке $[0,1]$, сжимающее отображение.

4.8. Является ли сжимающим отображение $f(x) = x + \frac{1}{x}$ луча $[1,+\infty)$ в себя?

4.9. Является ли сжимающим отображение $f(x) = \sin x$ числовой прямой в себя.

4.10. Является ли сжимающим отображение $f : (x, y) \to (u, v)$, где

$$\begin{cases} u = 0{,}7x + 0{,}8y; \\ v = 0{,}2x - 0{,}05y \end{cases}$$

плоскости в себя, если плоскость рассматривается как метрическое пространство: а) $\boldsymbol{R}_2^2$; б) $\boldsymbol{R}_1^2$.

4.11. Является ли отображение $f : (x, y) \to (u, v)$, где

$$\begin{cases} u = 0{,}2x + 0{,}4y + 7; \\ v = -0{,}3x - 0{,}6y - 15 \end{cases}$$

плоскости в себя сжимающим, если плоскость рассматривается как метрические пространства: а) $\boldsymbol{R}_2^2$; б) $\boldsymbol{R}_1^2$; в) $\boldsymbol{R}_\infty^2$.

4.12. Установить, является ли отображение $f(y) = q\int_0^x y(t)dt$ пространства $C[0,1]$ в себя сжимающим, если $0 < q < 1$.

4.13. Установить, имеют ли последовательности, заданные рекуррентными соотношениями, неподвижные точки, и если имеют, то найти их:

а) $x_n = \dfrac{x_{n-1}}{2 + x_{n-1}}$, $x_0 = 1$;

б) $x_n = \dfrac{x_{n-1}}{3 - x_{n-1}}$, $x_0 = -5$;

в) $x_n = \dfrac{5 + x_{n-1}^2}{2x_{n-1}}$, $x_0 = 5$.

Указание: Ввести соответствующее отображение $f(x)$, определить область, в которой $f(x)$ является сжимающим отображением. Предел найти как неподвижную точку.

4.14. Установить, является ли последовательность дробей

$$2,\ 2 + \frac{1}{2},\ 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}},\ 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}},\ \ldots$$

сходящейся, и если является, то найти ее предел.

4.15. Доказать, что следующие последовательности имеют пределы и найти их:

а) $\sqrt{2}, \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \ldots$;

б) $\sqrt{3}, \sqrt{3 + \sqrt{3}}, \sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{3}}}, \ldots$.

РАЗДЕЛ 5. **Линейное пространство**

Линейным пространством V над полем действительных или комплексных чисел $\lambda \in \boldsymbol{R}(\boldsymbol{C})$ называется непустое множество, любой паре элементов которого f и q при помощи операций сложения и умножения на числе λ ставятся в соответствие единственные элементы $f+q \in V$ и $\lambda f \in V$ со свойствами:

V1: $f+g=g+f$ (коммутативность)
V2: $f+(g+h)=(f+g)+h$ (ассоциативность)
V3: $f+0=f$ (существование элемента 0)
V4: $f+(-f)=0$ (существование элемента $-f$)
V5: $\lambda(\mu f)=(\lambda\mu)f$ (ассоциативность)
V6: $\lambda+(f+g)=\lambda f+\lambda g$ (дистрибутивность)
V7: $(\lambda+\mu)f=\lambda f+\mu f$ (дистрибутивность)
V8: $1\cdot f=f$.

Элементы линейного пространства V называются ***точками*** или ***векторами***. Часто линейное пространство V называют ***векторным пространством***.

Линейно независимой называется система векторов $\{f_k\}$, $k=\overline{1,n}$, если их линейная комбинация обращается в 0 только при нулевых коэффициентах:

$$\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2+\ldots+\lambda_n f_n=0 \quad\Rightarrow\quad \lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=0.$$

В противном случае система называется ***линейно зависимой***.

Бесконечная система векторов называется независимой, если любая ее конечная подсистема линейно независима.

Конечномерным линейным пространством V называется линейное пространство, имеющее систему из n линейно независимых векторов, причем всякая система, содержащая $n+1$ вектор должна быть линейно зависимой. При этом число n называется ***размерностью*** $\dim V$ относительно линейного пространства V.

Базисом линейного пространства V размерности $\dim V=n$ называется любая совокупность n линейно независимых векторов.

Координатами вектора g в базисе $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ называются координаты λ_k, $k = \overline{1, n}$ разложения вектора g по базису $\{f_k\}$:

$$g = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_n f_n.$$

Линейным подпространством E векторного пространства V называется непустое подмножество $E \subseteq V$, которое замкнуто относительно операций сложения векторов и умножения на число λ из поля $\boldsymbol{R}$ или $\boldsymbol{C}$.

Линейной оболочкой $[S]$ системы векторов $S = \{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ линейного пространства V называется множество всех их возможных линейных комбинаций

$$[S] = \{\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_m f_m \mid \lambda_k \in \boldsymbol{R} / \boldsymbol{C}\}.$$

Векторной суммой $V + W$ линейных пространств V и W называется множество всех векторов, представленных в виде

$$f = g + h, \quad \text{где } g \in V,\ h \in W.$$

Прямой векторной суммой $V \oplus W$ линейных пространств V и W называется их сумма $V + W$ при условии, что $V \cap W = 0$.

Размерность суммы двух конечномерных векторов пространств V и W может быть найдена по ***формуле Грассмана***:

$$\dim(V = W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W).$$

Прямым произведением $V \times W$ векторных пространств V и W называется множество всех упорядоченных пар векторов $[f, g]$, $f \in V$, $g \in W$, на котором определены следующие операции сложения и умножения на число $\lambda \in \boldsymbol{R}(\boldsymbol{C})$:

$$[f_1, g_1] + [f_2, g_2] = [f_1 + f_2,\ g_1 + g_2],$$

$$\lambda[f, g] = [\lambda f, \lambda g].$$

Выпуклым множеством S называется подмножество $S \subseteq V$, если для любой пары его элементов $f, g \in S$ для произвольного числа $\alpha \in \boldsymbol{R}(\boldsymbol{C})$ справедливо включение

$$\alpha f + (1 - \alpha) g \in S.$$

Выпуклой оболочкой $[S]$ называется наименьшее подмножество V, содержащее S.

Задания к разделу 5

5.1. Является ли линейным пространством:

а) пустое множество $\varnothing$;

б) множество, состоящее из одного нулевого элемента?

5.2. Существует ли линейное пространство, состоящее только из двух элементов?

5.3. Являются ли линейными пространствами над полем $\boldsymbol{R}$ множества:

а) рациональных чисел;

б) иррациональных чисел?

5.4. Являются ли линейными пространствами над полем $\boldsymbol{C}$ множества:

а) рациональных чисел;

б) иррациональных чисел?

5.5. Установить, являются ли линейными подпространствами заданные множества векторов в n-мерном векторном пространстве V, и если являются, то найти их размерность:

а) множество векторов, все координаты которых равны между собой;

б) множество векторов, первая координата которых равна 0;

в) множество векторов, сумма координат которых равна 0;

г) множество векторов, сумма координат которых равна 1;

д) множество векторов плоскости, параллельных между собой;

е) множество векторов трехмерного пространства, перпендикулярных данной прямой;

ж) множество векторов плоскости, модули которых не превышают 1;

з) множество векторов плоскости, образующих угол α с заданной прямой.

5.6. Установить, является ли заданное множество квадратных матриц порядка n линейным подпространством в пространстве всех квадратных матриц порядка n, и если является, то найти его размерность:

а) множество матриц с нулевой первой строкой;

б) множество диагональных матриц;
в) множество верхних треугольных матриц;
г) множество симметричных матриц;
д) множество антисимметричных матриц;
е) множество вырожденных матриц.

5.7. Установить, образует ли данное множество функций на произвольном отрезке $[a,b]$ линейное пространство относительно обычных операций сложения и умножения на действительное число λ:

а) множество непрерывных функций;
б) множество дифференцируемых функций;
в) множество интегрируемых функций;
г) множество ограниченных функций;
д) множество функций таких, что $\sup\limits_{[a,b]}|f(x)| \leq 1$;
е) множество неотрицательных функций;
ж) множество функций таких, что $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) = 0$;
з) множество функций таких, что $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) = 1$;
и) множество функций таких, что $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \infty$;
к) множество монотонно возрастающих функций.

5.8. Доказать, что при любом натуральном n данное множество функций образует конечномерное линейное пространство. Найти размерность и указать базис этого пространства:

а) множество многочленов степени $\leq n$;
б) множество четных многочленов степени $\leq n$;
в) множество нечетных многочленов степени $\leq n$;
г) множество тригонометрических многочленов порядка $\leq n$ вида

$$f(t) = a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t + \ldots + a_n \cos t + b_n \sin t;$$

д) множество четных тригонометрических многочленов порядка не выше n;
е) множество нечетных тригонометрических многочленов порядка не выше n;
ж) множество функций вида

$$f(t)=e^{\alpha t}\left(a_0+a_1\cos t+b_1\sin t+\ldots+a_n\cos t+b_n\sin t\right).$$

5.9. Найти размерность и базис линейной оболочки заданной системы столбцов:

а) $\bar{c}_1=\left\|-3\right\|,\qquad \bar{c}_2=\left\|6\right\|;$

б) $\bar{c}_1=\begin{Vmatrix}1\\-1\end{Vmatrix},\qquad \bar{c}_2=\begin{Vmatrix}-1\\6\end{Vmatrix},\quad \bar{c}_3=\begin{Vmatrix}-1\\1\end{Vmatrix};$

в) $\bar{c}_1=\begin{Vmatrix}1\\-1\end{Vmatrix},\qquad \bar{c}_2=\begin{Vmatrix}-1\\1\end{Vmatrix},\quad \bar{c}_3=\begin{Vmatrix}-2\\2\end{Vmatrix};$

г) $\bar{c}_1=\begin{Vmatrix}-3\\2\\0\end{Vmatrix},\qquad \bar{c}_2=\begin{Vmatrix}-3\\6\\-15\end{Vmatrix},\ \bar{c}_3=\begin{Vmatrix}0\\-4\\15\end{Vmatrix}.$

5.10. Найти размерность и базис линейной оболочки системы матриц:

$$A=\begin{Vmatrix}6&9&8\\0&1&6\end{Vmatrix},\quad B=\begin{Vmatrix}2&1&1\\3&0&1\end{Vmatrix},\quad C=\begin{Vmatrix}2&7&6\\-6&1&4\end{Vmatrix}.$$

5.11. Найти размерность и базис линейной оболочки системы многочленов:

$$P_1(t)=(1+t)^3;\quad P_2(t)=t^3;\quad P_3(t)=1;\quad P_4(t)=t+t^2.$$

5.12. Показать, что многочлены $\left\{1,t-2,(t-2)^2,\ldots,(t-2)^5\right\}$ образуют базис в пространстве многочленов степени не выше 5 и найти координаты заданных многочленов в этом базисе:

а) $g(t)=4-t+2t^2-t^5;$

б) $g(t)=3+2t^2-3t^3+4t^4;$

в) $g(t)=7t+2t^2-t^4+2t^5;$

г) $g(t)=4-2t^2+3t^4;$

д) $g(t)=t+5t^3-2t^5.$

5.13. Доказать, что пространство квадратных матриц порядка n является прямой суммой подпространства симметричных и антисимметричных матриц.

5.14. Установить, является ли n-мерное арифметическое пространство $\boldsymbol{R}^n$ прямой суммой продпространства векторов, координаты которых равны между собой, и подпространства векторов, сумма координат которых равна 0.

5.15. Найти размерность и базис суммы и пересечения линейных подпространств, натянутых на системы векторов $\{\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_k\}$ и $\{\overline{b}_1, \overline{b}_2, \ldots, \overline{b}_m\}$:

а) $\overline{a}_1 = \{1{,}3\}$, $\overline{a}_2 = \{2{,}6\}$, $\overline{a}_3 = \{1{,}4\}$;
$\overline{b}_1 = \{-1{,}1\}$, $\overline{b}_2 = \{3{,}-3\}$, $\overline{b}_3 = \{2{,}-2\}$;
б) $\overline{a}_1 = \{4{,}2{,}1\}$, $\overline{a}_2 = \{-3{,}2{,}0\}$, $\overline{a}_3 = \{-1{,}4{,}0\}$;
$\overline{b}_1 = \{-2{,}3{,}1\}$, $\overline{b}_2 = \{5{,}3{,}13\}$, $\overline{b}_3 = \{7{,}0{,}12\}$.

5.16. Найти размерность и базис суммы и пересечения линейных подпространств пространства многочленов степени не выше 3, натянутых на системы многочленов:

$$\left\{1+2t+t^3, 1+t+t^2, t-t^2-t^3\right\} \text{ и } \left\{1+t^2, 1+3t+t^3, 3t-t^2+t^3\right\}.$$

РАЗДЕЛ 6. **Нормированные линейные пространства**

Нормой элемента f линейного пространства V называется действительное число $\| f \|$, удовлетворяющее следующим условиям:

Н1: $\| f \| = 0 \Leftrightarrow f = 0$;

Н2: $\| \lambda f \| = | \lambda | \cdot \| f \|$ для $\forall \lambda \in \boldsymbol{R}(\boldsymbol{C})$;

Н3: $\| f + g \| \le \| f \| + \| g \|$ для $\forall f, g \in V$.

Нормированным линейным пространством называется линейное пространство с введенной в нем нормой $\| \bullet \|$.

Всякое нормированное пространство является метрическим. Метрика вводится по формуле

$$\rho(f, g) = \| f - g \|.$$

Таблица 6.1.

Таблица основных нормированных пространств

Обозначение пространства	Элементы пространств	Формулы для норм
$\boldsymbol{R}_2^n$	$x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$	$\lVert x\rVert=\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}x_k^2}$
$\boldsymbol{R}_1^n$	$x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$	$\lVert x\rVert=\sum\limits_{k=1}^{n}\lvert x_k\rvert$
$\boldsymbol{R}_\infty^n$	$x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$	$\lVert x\rVert=\max\limits_k\lvert x_k\rvert$
$\boldsymbol{R}_2^\infty$	$x=(x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots)$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k^2<\infty$	$\lVert x\rVert=\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k^2}$
$\boldsymbol{R}_1^\infty$	$x=(x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots)$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lvert x_k\rvert<\infty$	$\lVert x\rVert=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lvert x_k\rvert$
$\boldsymbol{R}_\infty^\infty$	$x=(x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots)$, $\lvert x_k\rvert\le M$	$\lVert x\rVert=\sup\limits_k\lvert x_k\rvert$
$\boldsymbol{C}_2[a,b]$	непрерывная на $[a,b]$ функция	$\lVert f(x)\rVert=\sqrt{\int\limits_a^b f^2(x)dx}$
$\boldsymbol{C}_1[a,b]$	непрерывная на $[a,b]$ функция	$\lVert f(x)\rVert=\int\limits_a^b \lvert f(x)\rvert dx$
$\boldsymbol{C}[a,b]$	непрерывная на $[a,b]$ функция	$\lVert f(x)\rVert=\max\lvert f(x)\rvert,\ x\in[a,b]$
$\boldsymbol{D}^n[a,b]$	непрерывная вместе со своими производными до n-го порядка функция	$\lVert f(x)\rVert=\max\limits_{[a,b]}\lvert f^{(k)}(x)\rvert$, $k=\overline{1,n}$.

Задания к разделу 6

6.1. Является ли отображение $f:V\to\boldsymbol{R}^+$ векторного пространства в множество неотрицательных действительных чисел, определенное как $f(x)=\lVert x\rVert$ сюръективным?

6.2. Задают ли метрику на числовой прямой следующие функции:

а) $f(x)=|\operatorname{arctg} x|$;

б) $f(x)=\sqrt{x}$;

в) $f(x)=\sqrt{|x|}$;

г) $f(x)=|x-1|$;

д) $f(x)=\sqrt{x^2}$;

е) $f(x)=5|x|$;

ж) $f(x)=x^2$?

6.3. Пусть E – множество векторов $\overline{a}=\{x,y\}$ на плоскости, заданных своими декартовыми координатами. Задают ли на E норму $\|\overline{a}\|$ следующие функции:

а) $f(\overline{a})=\sqrt{|xy|}$;

б) $f(\overline{a})=|x|+|y|$;

в) $f(\overline{a})=\max\{|x|,|y|\}$;

г) $f(\overline{a})=\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{|xy|}$.

6.4. Пусть P – линейное пространство многочленов с действительными коэффициентами. Можно ли принять за норму на P:

а) модуль значения многочлена в точке 0;

б) сумму модулей коэффициентов многочлена.

6.5. Доказать, что пространство $\boldsymbol{C}[a,b]$ является нормированным.

6.6. Найти норму функции $y=\frac{1}{5}\left(4x^3-x^4\right)$ в пространствах:

а) $\boldsymbol{C}[-1{,}5]$; б) $\boldsymbol{C}_1[-1{,}5]$; в) $\boldsymbol{D}^1[-1{,}5]$.

6.7. Найти норму последовательности $\left\{x_n=\frac{(-1)^n}{n^2}\right\}$ в пространствах: а) $\boldsymbol{R}_2^\infty$; б) $\boldsymbol{R}_1^\infty$; в) $\boldsymbol{R}_\infty^\infty$.

6.8. Показать, что в нормированном пространстве никакая сфера $\|x-a\|=r$ не может быть пустым множеством.

РАЗДЕЛ 7. **Евклидовы пространства. Ортогональность. Процедура Грамма-Шмидта. Гильбертово пространство**

Евклидовым пространством E называется линейное пространство V, наделенное скалярным произведением.

Скалярным произведением называется функционал, действующий из $V \times V$ в $\boldsymbol{R}$, удовлетворяющий следующим свойствам:

1. $\forall x \in V \quad (x, x) \geq 0$, причем $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$;
3. $(x, y) = (y, x)$;
4. $(\lambda x, y) = \lambda (y, x) \quad \forall x, y, z \in V$ и $\lambda \in \boldsymbol{R}$.

Для любых двух элементов f и g евклидова пространства имеет место неравенство Коши-Буняковского:

$$|(f, g)| \leq \sqrt{(f, f)} \cdot \sqrt{(g, g)}.$$

Например, для точек пространства $\boldsymbol{R^n}$ $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ скалярное произведение можно определить как

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

А для непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций ($C_{[a,b]}$ $(a < b)$) скалярное произведение введем по формуле

$$(f, g) = \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx.$$

Любое евклидово пространство является нормированным с нормой

$$\| x \| = \sqrt{(x, x)}.$$

Ортогональными называются два элемента x и y евклидова пространства, если их скалярное произведение равно 0.

Угол между элементами евклидова пространства определяется через равенство

$$\cos \varphi = \frac{(x, y)}{\| x \| \cdot \| y \|}.$$

Ортонормированной называется система ненулевых векторов $\delta = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \in E$, если:

1. $(x_i, x_j) = 0, \quad i \neq j$;
2. $\| x_k \| = 1, \quad k = \overline{1, n}$.

Система ортогональных векторов линейно независима. Для системы ортогональных векторов справедлива теорема Пифагора:

$$\| x + y \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2 .$$

Если в некотором евклидовом пространстве существует линейно-независимая система векторов $\{y_n\}$, тогда ортонормированную систему векторов $\{x_n\}$ можно получить используя процедуру Грамма-Шмидта:

$$q_1 = y_1; \;\; q_2 = y_2 - (y_2, x_1)x_1; \;\; \ldots ; \; q_k = y_k - \sum_{l=1}^{k-1} (y_k, x_l) x_l .$$

$$x_1 = \frac{q_1}{\| q_1 \|}; \;\; x_2 = \frac{q_2}{\| q_2 \|}; \; \ldots ; \; x_k = \frac{q_k}{\| q_k \|}, \; k = 3,4,\ldots .$$

Гильбертовым пространством называется полное евклидово пространство.

Задания к разделу 7

7.1. Пусть $(a, x) = (b, x) \;\; \forall x \in V_e$. Доказать, что $a = b$.

7.2. Является ли евклидовым пространством $\boldsymbol{R}^2$, если паре векторов $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ поставлено в соответствие число:

а) $x_1 y_1 + x_2 y_2$; б) $x_1 x_2 y_1 y_2$;

в) $3x_1 y_1 + 5x_1 y_2 + x_2 y_2$; г) $2x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 3x_2 y_2$.

7.3. Является ли евклидовым пространством $C_{[a,b]}$, если каждой паре функций $f(x)$, $g(x)$ этого пространства поставлено в соответствие число:

а) $\int_a^b f(x) g(x) dx$; б) $\int_a^b p(x) f(x) g(x) dx$.

7. 4. Найти в $C_{[a,b]}$:

а) длину вектора $f(x) = \cos x + \sin x$, если $a = -\pi$, $b = \pi$;

б) $(\sin 2x, \sin 3x)$, $a = -\pi$, $b = \pi$;

в) угол между векторами $f(x) = x$, $g(x) = e^x$, $a = 0$, $b = 1$;

г) угол между векторами $f(x) = \sin x$ и $f(x) = \cos x$, $a = -\pi$, $b = \pi$.

7.5. Являются ли ортогональными в евклидовом пространстве E^3 следующие системы векторов:

а) $(1;1;3)$, $(-1;-2;1)$, $(7;-4;-1)$;

б) $(2;1;-1)$, $(-1;2;0)$, $(0;1;1)$.

7.6. Пронормировать следующие векторы, заданные координатами в ортонормированном базисе:

а) $(0;-3;4)$, б) $(1;1;-2)$, в) $(0;-3;4)$.

7.7. Какие из данных систем векторов являются ортогональными в $C_{[-1;1]}$:

а) $1, x^2$; б) x^2, x^3; в) $1, \sin \pi x, \cos \pi x, \ldots, \sin \pi x, \cos \pi x$.

7.8. В евклидовом пространстве $C_{[-1;1]}$ пронормировать следующие векторы:

а) 1; б) x^3; в) $\cos x$.

7.9. В евклидовом пространстве E^3 даны два ортогональных вектора a и b. Найти вектор c, такой, что a, b, c образуют ортонормированный базис, если:

а) $a = 2i + 3j - k$; $b = -i + j + k$;

б) $a = i - 2j + k$; $b = 5i + 3j + k$.

7.10. В евклидовых пространствах E^3, E^4 по данному базису построить ортонормированный:

а) $f_1 = (1;0;0)$, $f_2 = (0;1;-1)$, $f_3 = (1;1;1)$;

б) $f_1 = (1;2;3)$, $f_2 = (0;3;-2)$, $f_3 = (0;1;-1)$;

в) $f_1 = (1;1;0;0)$, $f_2 = (0;0;1;1)$, $f_3 = (1;0;1;1)$, $f_4 = (0;1;0;-1)$.

7.11. В евклидовом пространстве многочленов степени не выше первой, рассматриваемых на отрезке $[-1;1]$, по данному базису $g_1 = 1$, $g_2 = x$ построить ортонормированный.

РАЗДЕЛ 8. **Ортогональные полиномы**

I. Тригонометрическая система

Рассмотрим гильбертово пространство $L_2[-\pi,\pi]$, т.е. пространство функций с интегрируемым квадратом. Тригонометрическая система функций

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}},\ \ldots\right\}$$

образует полную ортонормированную систему, т.е. ортонормированный базис, в пространстве функций $L_2[-\pi,\pi]$. Соответствующий ряд Фурье имеет вид:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx\,,$$

где

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx$$

и сходится по норме пространства $L_2[-\pi,\pi]$ к функции $f(x)$.

II. Системы многочленов

Рассмотрим совокупность одночленов $\{1, x, x^2,\ldots, x^n,\ldots\}$, определяющую систему всех многочленов. Эта система линейно независима и полная на отрезке $[-1;1]$. Однако, она не ортонормированная, а значит, не образует ортонормированный базис.

Систему многочленов можно ортонормировать по отношению к скалярному произведению пространства $L_2(a,b)$ с весовой функцией $w(x)$:

$$(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)w(x)dx\,.$$

Тогда условие ортонормированности многочленов $\{\varphi_n\}$ в пространстве $L_2(a,b)$ имеет вид:

$$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)w(x)dx=\delta_{nm}\,.$$

Выбирая соответствующую весовую функцию $w(x)$ и проводя процедуру ортогонализации системы одночленов $\{1, x, x^2, ...\}$, мы приходим к следующим системам многочленов (Таблицы 8.1 и 8.2):

Таблица 8.1.

Многочлены	**Весовая функция** $w(x)$	**Пространство функций** $L_2(a,b)$	**Многочлены низших степеней**
Лежандра $P_n(x)$	1	$L_2[-1,1]$	$P_0(x)=1,\quad P_1(x)=x,$ $P_2(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2},$ $P_3(x)=\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x,$ $P_4(x)=\frac{35}{8}x^4-\frac{15}{4}x^2+\frac{3}{8}, ...$
Чебышева $T_n(x)$ $\left(T_0^*(x)=\frac{T_0(x)}{\sqrt{\pi}},\ T_n^*(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}T_n(x)\right)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$L_2[-1,1]$	$T_0(x)=1,\quad T_1(x)=x,$ $T_2(x)=2x^2-1,$ $T_3(x)=4x^3-3x,$ $T_4(x)=4x^4-8x^2+1, ...$
Эрмита $H_n(x)$	e^{-x^2}	$L_2(-\infty,+\infty)$	$H_0(x)=1,\quad H_1(x)=2x,$ $H_2(x)=4x^2-2,$ $H_3(x)=8x^3-12x,$ $H_4(x)=16x^4-48x^2+12, ...$
Лагерра $L_n(x)$	e^{-x}	$L_2[0,\infty)$	$L_0(x)=1,\quad L_1(x)=1-x,$ $L_2(x)=1-2x+\frac{1}{2}x^2,$ $L_3(x)=1-3x+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3,$ $L_4(x)=1-4x+3x^3+\frac{1}{24}x^4, ...$

Таблица 8.2.

Многочлены	**Основные формулы**
Лежандра $P_n(x)$	Формула Родрига: $P_n(x)=\frac{1}{n!2^n}\frac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^2-1\right)^n\right]$; $\int\limits_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)dx=\begin{cases}0, & n\neq m,\\ \frac{2}{2n+1}, & n=m.\end{cases}$ $\frac{1}{\sqrt{1+\rho^2-2\rho x}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\rho^n P_n(x)$ - производящая функция.
Чебышева $T_n(x)$	$T_n(x)=\cos(n\arccos x)$; $T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x)$; $\left\{T_0^*(x),T_n^*(x)\right\}=\left\{\frac{T_0(x)}{\sqrt{\pi}};\sqrt{\frac{2}{\pi}}T_n(x),\ (n\geq 1)\right\}$ - ортонормированная система многочленов Чебышева первого рода.
Эрмита $H_n(x)$	$H_n(x)=\frac{1}{\sqrt{n!\,2^n\cdot\sqrt{\pi}}}(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)$; $H_n^*(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)$; $e^{2xt-t^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{H_n^*(x)}{n!}t^n$ - производящая функция.
Лагерра $L_n(x)$	$L_n(x)=\frac{(-1)^n}{n!}e^x\frac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^{-x}\right)$; $(n+1)L_{n+1}(x)+(x-2n-1)L_n(x)+nL_{n-1}(x)=0$; $\frac{e^{\frac{xt}{t-1}}}{1-t}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}L_n(x)\cdot t^n$ - производящая функция.

Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ – некоторая ортонормированная система многочленов в пространстве $L_2(a,b)$. Тогда ***ряд Фурье*** для функции $f(x)$ имеет вид

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\varphi_n,$$

где числа a_n называются ***коэффициентами Фурье*** в пространстве $L_2(a,b)$ и вычисляются по формуле (Таблица 8.3):

$$a_n=\left(f(x),\varphi_n\right)=\int_a^b f(x)\varphi_n(x)w(x)dx.$$

Таблица 8.3.

Многочлены	**Весовая функция** $w(x)$	**Пространство** $L_2(a,b)$	**Ряд Фурье для функции** $f(x)$ **и его коэффициенты в** $L_2(a,b)$
Лежандра $P_n(x)$	1	$L_2[-1,1]$	$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nP_n(x)$, $a_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)P_n(x)dx.$
Чебышева $T_n(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$L_2[-1,1]$	$f(x)=\sum_{0}^{\infty}a_nT_n^*(x)$, $a_n=\int_{-1}^{1}f(x)T_n^*(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$
Эрмита $H_n(x)$	e^{-x^2}	$L_2(-\infty,+\infty)$	$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nH_n(x)$, $a_n=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)H_n(t)e^{-t^2}dt.$
Лагерра $L_n(x)$	e^{-x}	$L_2[0,\infty)$	$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nL_n(x)$, $a_n=\int_{0}^{+\infty}f(t)L_n(t)e^{-t}dt.$

Задания к разделу 8

8.1. Разложить в пространстве $L_2[-\pi,\pi]$ функцию $y=x+\pi$ в тригонометрический ряд Фурье.

8.2. Разложить в пространстве $L_2[-\pi,\pi]$ функцию $y = 2 - x$ в тригонометрический ряд Фурье.

8.3. Ортогонализуя систему одночленов $\{1, x, x^2, ...\}$, построить четыре члена системы многочленов, ортогональных на сегменте $[-1,1]$.

8.4. Получить несколько первых многочленов Лежандра, используя формулу Родрига.

8.5. Получить несколько первых многочленов Лежандра, используя производящую функцию многочленов Лежандра.

8.6. Найти несколько первых членов ряда Фурье относительно системы многочленов Лежандра для функции $f(x) = |x|$ на $[-1,1]$.

8.7. Найти несколько первых членов ряда Фурье относительно системы многочленов Лежандра для функции $f(x) = 1 - x^2$ на $[-1,1]$.

8.8. Ортогонализуя систему одночленов $\{1, x, x^2, ...\}$, построить четыре члена системы многочленов, ортогональных на сегменте $[-1,1]$ с весом $w(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$.

8.9. Найти шесть первых многочленов Чебышева, используя рекуррентную формулу $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$, где $T_n(x) = \cos[n \arccos x]$.

8.10. Доказать ортогональность многочленов Чебышева $T_2(x)$ и $T_3(x)$.

8.11. Для функции $f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0, \\ 1, & 0 < x < 1 \end{cases}$ найти несколько первых членов ряда Фурье относительно системы многочленов Чебышева.

8.12. Для функции $f(x) = \begin{cases} -1, & -1 < x < 0, \\ x, & 0 < x < 1 \end{cases}$ найти несколько первых членов ряда Фурье относительно системы многочленов Чебышева.

8.13. Ортогонализуя одночленов $\{1, x, x^2, ...\}$, построить четыре члена системы многочленов, ортогональных на промежутке $(-\infty, +\infty)$ с весом $w(x) = e^{-x^2}$.

8.14. Получить четыре первых многочлена Эрмита, используя формулу Родрига для многочленов Эрмита.

8.15. Найти несколько первых членов ряда Фурье относительно системы многочленов Эрмита для функции $f(x) = e^{-5x^2}$ при $x \in R$.

8.16. Ортогонализуя одночленов $\{1, x, x^2, ...\}$, построить четыре члена системы многочленов, ортогональных на промежутке $(0, +\infty)$ с весом $w(x) = e^{-x}$.

8.17. Получить четыре первых многочлена Лагерра, используя формулу Родрига для многочленов Лагерра.

8.18. Получить четыре первых многочлена Лагерра, используя производящую функцию многочленов Лагерра.

8.19. Найти несколько первых членов ряда Фурье относительно системы многочленов Эрмита для функции $f(x) = e^{-7x}$ при $x > 0$.

8.20. Найти несколько первых членов ряда Фурье относительно системы многочленов Эрмита для функции $f(x) = xe^{-3x}$ при $x > 0$.

РАЗДЕЛ 9. **Линейные операторы в евклидовых пространствах. Спектр собственных значений линейных операторов. Обратимость**

Пусть V и W два линейных пространства. Всякое отображение A, составляющее каждому элементу $f \in V$ единственный элемент $g = Af \in W$, называется ***оператором***, действующим из V в W.

Линейным называется оператор A, если

1) $A(x + y) = Ax + Ay \quad \forall x, y \in V$;
2) $A(\lambda x) = \lambda Ax, \quad \forall x \in V, \lambda \in \boldsymbol{R}$.

В конечномерном пространстве V линейный оператор задается квадратной матрицей $\left\| a_{ij} \right\|$. И наоборот, всякая квадратная матрица определяет в соответствующем пространстве линейный оператор или линейное преобразование.

Пусть E – комплексное векторное пространство. ***Собственным значением*** оператора A называется комплексное число λ: $\exists u \in E$, $u \neq 0$ такое, что

$$Au = \lambda u . \tag{9.1}$$

Собственным вектором оператора A, соответствующим собственному значению λ называется всякий вектор u, удовлетворяющий соотношению (9.1).

В конечномерных пространствах уравнение (9.1) эквивалентно системе линейных уравнений

$$\left(A - \lambda I\right)u = 0, \tag{9.2}$$

где I – единичная матрица.

Для того, чтобы система (9.2) имела ненулевые решения, она должна быть вырожденной, а значит

$\det\left(A - \lambda I\right) = 0$ – ***характеристическое уравнение***.

Это уравнение имеет n корней.

Каждому собственному вектору соответствует единственное собственное значение, но существует бесконечное множество векторов для заданного собственного значения.

Резольвентой линейного оператора A называется оператор $A_\lambda = \left(A - \lambda I\right)^{-1}$. Значения λ, для которых A_λ определен и однозначен, называются ***регулярными точками*** A. Множество всех чисел λ, которые не являются регулярными, называются ***спектром*** A.

Множество всех собственных значений A, которые являются подмножеством спектра A, называется ***точечным спектром***.

Для конечномерных пространств спектр линейного оператора A состоит только из точечного спектра.

Оператор B, определенный на $\mathcal{R}(A)$ называется ***обратным*** к A оператором, если выполняются условия:

$ABX = X \quad \forall x \in \mathcal{R}(A)$, $\mathcal{R}(A)$ – область значений;

$BAX = X \quad \forall x \in D(A)$, $D(A)$ – область определения.

Обратимым называется оператор, который имеет обратный. Обратный оператору A обозначается A^{-1}.

Задания к разделу 9

9.1. Является ли линейным оператор $f: E^2 \to E^2$, если $\forall x \in E$ $f(x) = 3i + j$.

9.2. Может ли линейный оператор перевести пару ненулевых коллинеарных векторов в пару неколлинеарных?

9.3. Каков геометрический смысл условий линейности оператора

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2), \quad f(\lambda x) = \lambda \cdot f(x).$$

9.4. Является ли линейным каждый из операторов $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, заданный следующим образом: $\forall \alpha \in \boldsymbol{R}$

а) $f(\alpha) = 3\alpha$; б) $f(\alpha) = 2^{\alpha}$; в) $f(\alpha) = 2\alpha + 5$;

г) $f(\alpha) = \alpha^3$; д) $f(\alpha) = \dfrac{\alpha}{5}$.

9.5. Является ли линейным оператор f, переводящий всякий вектор $x(\alpha_1, \alpha_2)$ в вектор y, заданный координатами в том же базисе, если:

а) $y(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2)$; б) $y(\alpha_1; \alpha_1 \cdot \alpha_2)$;

в) $y(2\alpha_1 + 3\alpha_2, \alpha_2)$; г) $y(1, \alpha_1 + \alpha_2)$; д) $y(\alpha_1^3; \alpha_2^2)$.

9.6. Является ли линейным оператор $f: E_3 \to E_3$, если $\forall x \in E$:

а) $f(x) = |x| i$; б) $f(x) = 2i + 3j - k$;

в) $f(x) = (i, x) \cdot x$; г) $f(x) = (i, x) \cdot j$;

д) $f(x) = (a, x) \cdot a$, где a – фиксированный вектор этого пространства;

е) $f(x) = [a, x]$; ж) $f(x) = \lambda \cdot x$, $\lambda \in \boldsymbol{R}$;

з) $f(x) = x + a$, $a \in E_3$.

9.7. Является ли линейным оператор $f: R_{n\times n} \to R_{n\times n}$, если $\forall A \in \boldsymbol{R}_{n\times n}$:

а) $f(A) = E + A$, E – единичная матрица;

б) $f(A) = \alpha \cdot A$ $(\alpha \in \boldsymbol{R})$;

в) $f(A) = A^2$; г) $f(A) = A^T$;

д) $f(A)=A\cdot B$, где B – фиксированная квадратная матрица порядка n.

9.8. Дан оператор f, переводящий каждый вектор X в вектор $f(x)=(\text{Пр}_{ox}X)\cdot a$, где a – фиксированный вектор пространства E_3. Доказать, что оператор f является линейным. Найти матрицу этого оператора в базисе i, j, k, если:

а) $a=3i+2j+k$; б) $a=i-3j-2k$.

9.9. Даны координаты вектора X и матрица A линейного оператора f. Найти координаты вектора $y=f(x)$, если:

а) $X=(2;-1;3)$; $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 2 & 3 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$ б) $X=i$; $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

9.10. В некотором базисе пространства V задана матрица A линейного оператора. Вычислить, существует ли оператор, обратный данному, и если существует, найти его матрицу в том же базисе, если:

а) $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 5\\ 0 & 0 & 4\\ 3 & 1 & 7\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 4\\ 2 & 0 & 3\\ 1 & 0 & -5\end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 3\\ 1 & 1 & 2\\ 3 & -2 & 5\end{pmatrix}$; г) $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 7\\ 2 & 3 & 4\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

9.11. Дать геометрическую интерпретацию собственного вектора линейного оператора $f: E_3 \to E_3$.

9.12. Пусть X_1, X_2 – неколлинеарные собственные векторы линейного оператора f с собственными значениями соответственно λ_1 и λ_2 ($\lambda_1 \neq \lambda_2$). Является ли вектор X_1+X_2 собственным вектором оператора f?

9.13. Пользуясь определением, установить, какие из данных векторов являются собственными векторами оператора f, и найти их собственные значения, если:

а) $A=\begin{pmatrix}2&3\\0&3\end{pmatrix}$, $X_1=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$, $X_2=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$, $X_3=\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}-3&11&7\\0&5&-4\\0&1&-1\end{pmatrix}$, $X_1=\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}$, $X_2=\begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix}$, $X_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix}5&9&7\\0&3&-2\\0&2&-1\end{pmatrix}$, $X_1=\begin{pmatrix}-4\\1\\1\end{pmatrix}$, $X_2=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$, $X_3=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

9.14. Найти характеристическое уравнение и спектр линейного оператора, заданного матрицей A в некотором базисе, если:

а) $A=\begin{pmatrix}1&-2\\1&4\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}3&1\\1&3\end{pmatrix}$; в) $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&0&0\\2&-7&3\end{pmatrix}$;

г) $A=\begin{pmatrix}0&3&0\\1&-2&0\\0&2&1\end{pmatrix}$; д) $A=\begin{pmatrix}4&1&5\\0&4&2\\0&0&5\end{pmatrix}$.

9.15. Найти собственные векторы линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей A, если:

а) $A=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}3&-1\\2&0\end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix}4&0&5\\7&-2&9\\3&0&6\end{pmatrix}$; г) $A=\begin{pmatrix}4&-1&-1\\1&2&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}$;

д) $A=\begin{bmatrix}2&1&0\\-1&2&0\\3&1&4\end{bmatrix}$; е) $A=\begin{bmatrix}6&-2&-1\\-1&5&-1\\1&-2&4\end{bmatrix}$.

РАЗДЕЛ 10. **Задача Штурма-Лиувилля**

Для функции $u(x)$ рассмотрим дифференциальное уравнение вида:

$$L u + \lambda w(x) u = 0, \qquad a \le x \le b, \tag{10.1}$$

с граничными условиями:

$$a_1 u(a) + a_2 u'(a) = 0, \qquad b_1 u(b) + b_2 u'(b) = 0.$$

Здесь $L = \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right] + q(x)$ - ***оператор Штурма-Лиувилля***, λ-параметр, $a_1^2 + a_2^2 > 0$, $b_1^2 + b_2^2 > 0$, функции $p(x)$, $q(x)$, $w(x)$ и $p'(x)$ непрерывны на $[a,b]$, а функции $q(x)$ и $w(x)$ – положительны.

Задача решения дифференциального уравнения (10.1) при заданных граничных условиях называется ***задачей Штурма-Лиувилля***. Значения параметра λ, при которых существует нетривиальное решение задачи (1) называются ***собственными значениями*** задачи Штурма-Лиувилля, а сами нетривиальные решения называются ***собственными функциями*** задачи Штурма-Лиувилля.

- Оператор Штурма-Лиувилля является самосопряженным.
- Собственные значения системы Штурма-Лиувилля действительны.
- Собственные функции для различных собственных значений системы Штурма-Лиувилля ортогональны по отношению к скалярному произведению с весовой функцией $w(x)$.

Наиболее часто встречаются на практике задачи Штурма-Лиувилля, решениями которых являются специальные функции и многочлены.

1. ***Дифференциальное уравнение Лежандра***:

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1 - x^2\right)\frac{du}{dx}\right] + \lambda u = 0, \ -1 \le x \le 1.$$

Здесь $p(x) = 1 - x^2$, $q(x) = 0$, $w(x) = 1$. Собственные функции этого уравнения есть полиномы Лежандра:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2 - 1\right)^n,$$

соответствующие собственным значениям $\lambda_n = n(n+1)$, $n = 1,2,3, \ldots$.

2. ***Присоединенное уравнение Лежандра:***

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\frac{du}{dx}\right]-\frac{m^2u}{1-x^2}+\lambda u=0,\ -1\le x\le 1.$$

Здесь $p(x)=1-x^2$, $q(x)=-\dfrac{m^2}{1-x^2}$, $w(x)=1$. Собственным значениям $\lambda_n=n(n+1)$, $n=1,2,3,\ldots$ соответствуют собственные функции:

$$P_n^m(x)=\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dx^m}P_n(x),\ n>m,$$

которые называются присоединенными многочленами Лежандра.

3. ***Уравнение Чебышева:***

$$\sqrt{1-x^2}\,\frac{d}{dx}\left[\sqrt{1-x^2}\,\frac{du}{dx}\right]+\lambda u=0,\ -1\le x\le 1.$$

Здесь $p(x)=\sqrt{1-x^2}$, $q(x)=0$, $w(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Собственным значениям $\lambda=n^2$ соответствуют собственные функции $T_n(x)=\cos(n\arccos x)$ – многочлены Чебышева.

4. ***Уравнение Эрмита:***

$$e^{x^2}\frac{d}{dx}\left[e^{-x^2}\frac{du}{dx}\right]+\lambda u=0,\ -\infty<x<\infty.$$

Здесь $p(x)=e^{-x^2}$, $q(x)=0$, $w(x)=e^{-x^2}$. Собственным значениям $\lambda_n=2n$ соответствуют собственные функции – многочлены Эрмита:

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right).$$

5. ***Уравнение Лагерра:***

$$e^x\frac{d}{dx}\left[xe^{-x}\frac{du}{dx}\right]+\lambda u=0,\ 0<x<\infty.$$

Здесь $p(x)=xe^{-x}$, $q(x)=0$, $w(x)=e^{-x}$. Собственным значениям $\lambda=n$ соответствуют собственные функции – многочлены Лагерра:

$$L_n(x)=\frac{1}{n!}e^x\frac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^{-x}\right)=\sum_{k=1}^{n}C_n^k\frac{x^k}{k!}.$$

6. ***Присоединенное уравнение Лагерра:***

$$x^{-\alpha}e^x\frac{d}{dx}\left[x^{\alpha+1}e^{-x}\frac{du}{dx}\right]+\lambda u=0,\ 0\le x\le\infty.$$

Здесь $p(x)=x^{\alpha+1}e^{-x}$, $q(x)=0$, $w(x)=x^{\alpha}e^{-x}$, α – натуральный параметр ($\alpha\in\mathbb{N}$). Собственным значениям $\lambda_n=n-\alpha$ соответствуют собственные функции – присоединенные многочлены Лагерра

$$L_n^{\alpha}(x)=(-1)^n\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}}\left[L_{n+\alpha}(x)\right]=\frac{e^x x^{-\alpha}}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x}x^{n+\alpha}\right).$$

Задания к разделу 10

Определить собственные функции и собственные значения задачи:

10.1. $u''+\lambda u=0$, $u(0)=0$, $u(l)=0$.

10.2. $u''+\lambda u=0$, $u'(0)=0$, $u'(l)=0$.

10.3. $u''+\lambda u=0$, $u'(0)=0$, $u(l)=0$.

10.4. $u''+\lambda u=0$, $u'(0)=0$, $u'(l)+\beta u(l)=0$, $\beta>0$.

10.5. $(xu')'+\lambda\frac{u}{x}=0$, $u(1)=0$, $u'(2)=0$.

10.6. $(xu')'+\lambda\frac{u}{x}=0$, $u(1)=0$, $u(2)=0$.

РАЗДЕЛ 11. **Метод Фурье для решения уравнений математической физики**

Уравнения математической физики – это класс дифференциальных уравнений в частных производных, которые возникают при описании физических явлений. Эти уравнения, как правило, являются линейными дифференциальными уравнениями 2-го порядка в частных производных.

Один из наиболее универсальных подходов к анализу и исследованию дифференциальных уравнений в частных производных – ***метод Фурье***.

Суть метода заключается в разделении переменных. А именно:

1) искомая функция, зависящая от нескольких переменных, ищется в виде произведения функций, которые в свою очередь зависят только от одной переменной.

2) После подстановки этого произведения функций в исходное уравнение получается система из нескольких однородных дифференциальных уравнений и краевых условий. Такая система представляет собой совокупность задач Штурма-Лиувилля.

3) Искомое решение представляется в виде ряда по собственным функциям решаемых задач.

Основные ДУ в трехмерном пространстве.

1. ***Уравнение Лапласа:*** $\nabla^2 u = 0$, где $\nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2} \equiv \Delta$ – оператор Лапласа.

2. ***Уравнение Пуассона:*** $\nabla^2 u = -f(x, y, z)$.

3. ***Неоднородное волновое уравнение:*** $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla^2 u = -f(x, y, z)$.

Это уравнение описывает колебание струны, мембраны, акустические явления в жидкостях, продольные колебания балок, электромагнитные волны в области, где нет источников.

4. ***Неоднородное уравнение распространения тепла:***

$$\frac{\partial u}{\partial t^2} - \nabla^2 u = f(x, y, z).$$

Задания к разделу 11

11.1. Найти методом Фурье решение уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $0 < x < l$, $t > 0$, удовлетворяющее следующим граничным и начальным условиям: $u(0,t) = u'_x(l,t) = 0$; $u(x,0) = \sin\frac{3\pi x}{2l}$; $u'_t(x,0) = \sin\frac{\pi x}{2l}$.

11.2. Найти методом Фурье решение уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, $0 < x < l$, $t > 0$, удовлетворяющее следующим граничным и начальным условиям: $u(0,t) = u(l,t) = 0$, $u(x,0) = -\sin\frac{5\pi x}{2l}$, $u'_t(x,0) = 0$.

11.3. Найти методом Фурье решение уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, $0 < x < l$, $t > 0$, удовлетворяющее следующим граничным и начальным условиям: $u'_x(0,t) = u'_x(l,t) = 0$, $u(x,0) = 10\cos 9x$.

11.4. Решить методом Фурье задачу о малых продольных колебаниях стержня длины l, один конец которого закреплен, а другой свободен. Плотность стержня равна ρ_0, а коэффициент упругости - k_0.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a^2 = \frac{k_0}{\rho_0}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = 0, \quad u(x,0) = \sin\frac{3\pi}{2l}x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sin\frac{\pi}{2l}x. \end{cases}$$

11.5. Решить методом Фурье задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0, \quad u(x,0) = 1 + \cos 3x. \end{cases}$$

11.6. Решить методом Фурье задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad u(x,0) = 4\sin\dfrac{2\pi}{l}x. \end{cases}$$

11.7. Найти отклонение $u(x,t)$ закрепленной на концах $x = 0$ и $x = l$ однородной струны от положения равновесия, если в начальный момент струна имела форму параболы с вершиной в точке $x = l/2$ и отклонением от положения равновесия h, а начальные скорости отсутствовали:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \dfrac{4hx(l-x)}{l^2}, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0. \end{cases}$$

11.8. На концах однородного изотропного стержня длины l поддерживается нулевая температура. Предполагая, что стенки стержня теплоизолированы от окружающей среды, найти закон распределения температуры в стержне, если известно: $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u(x,0) = u_0 \dfrac{x(l-x)}{l^2}$, *где* $u_0 = const.$

11.9. Найти решение для уравнения теплопроводности $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 16\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u(x,0) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x \le 1, \\ 2 - x, & 1 < x \le 2, \end{cases}$ $u(0,t) = u(2,t) = 0.$

РАЗДЕЛ 12. **Функции Бесселя**

Функции Бесселя чаще всего встречаются при решении дифференциальных уравнений в частных производных методом разделения переменных, а также при вычислении некоторых определенных интегралов.

Уравнение вида

$$x^2 u'' + xu' + (x^2 - \nu^2)u = 0, \qquad (12.1)$$

где ν – параметр уравнения, называется ***уравнением Бесселя***, а всякое решение этого уравнения, не равное тождественно нулю, называется ***цилиндрической функцией***.

После деления на x уравнение (12.1) можно привести к форме Штурма-Лиувилля. Добавляя однородные граничные условия, получаем следующую задачу Штурма-Лиувилля:

$$-\frac{d}{dx}\left[x\frac{du}{dx}\right]+\frac{\nu^2}{x}u=\lambda xu, \quad 0<x<a,$$

$$u(x)=O(x^\gamma) \quad при \quad x\to 0, \qquad \alpha u(a)+\beta u'(a)=0,$$

где $\gamma=\min(\nu,1), \quad \alpha\ge 0, \beta\ge 0, \alpha+\beta>\nu$.

Очевидно, здесь $p(x)=x, \quad q(x)=-\dfrac{\nu^2}{x}, \quad w(x)=x$.

Чаще всего параметр уравнения ν есть целое число. В этом случае собственными функциями задачи являются ***функции Бесселя*** $J_\nu(\mu_k,x)$, соответствующие собственным значениям

$$\lambda_k=\mu_k^2, \quad k=1,2,3,\ldots,$$

где $a\mu_k$ – положительные нули функции Бесселя $J_\nu(t)$, т.е. $J_\nu(a\mu_k)=0$.

Дифференциальный оператор Бесселя имеет вид

$$Lu=-\frac{d}{dx}\left[x\frac{du}{dx}\right]+\frac{\nu^2}{x}u.$$

Он положительно определен, а его собственные функции образуют полную ортогональную систему в пространстве $L^2([0,a])$ относительно скалярного произведения с весовой функцией $w(x)=x$.

Для целочисленного параметра $\nu=n$ функция Бесселя $J_n(x)$ раскладывается в степенной ряд вида:

$$J_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}.$$

При этом справедливы также соотношения:

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x);$$

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x); \qquad J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2J'_n(x).$$

Разложение Фурье-Бесселя для функции $f(x)$ имеет вид:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k J_n(\mu_k x),$$

где коэффициент разложения вычисляется по формуле

$$c_k = \frac{2}{a^2 \left[J_{n+1}(\mu_n a) \right]} \int_0^a f(x) J_n(\mu_n x) x dx.$$

Нули функций Бесселя затабулированы и их можно найти в соответствующих справочниках.

Задания к разделу 12

Записать общее решение уравнения

12.1. $x^2 u'' + xu' + \left(x^2 - \frac{1}{4} \right) u = 0.$

12.2. $x^2 u'' + xu' + \left(4x^2 - \frac{9}{25} \right) u = 0.$

12.3. $x^2 u'' + xu' + \left(3x^2 - 4 \right) u = 0.$

12.4. Найти решение уравнения Бесселя $u'' + \frac{1}{x} u' + u = 0,$ удовлетворяющее начальным условиям: $u'(0) = 0,$ $u(0) = 2.$

12.5. Найти решение уравнения Бесселя $xu'' + u' + xu = 0,$ удовлетворяющее начальным условиям: $u'(0) = 0,$ $u(0) = 1.$

12.6. Показать, что $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n J_{2n+1}(t) = \frac{1}{2} \sin t.$

12.7. Показать, что $J_0(t) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(t) = 1.$

РАЗДЕЛ 13. **Интеграл Фурье. Преобразование Фурье**

Если $f(x)$ – абсолютно интегрируемая на всей числовой оси функция, т. е. функция, удовлетворяющая условию

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx < +\infty,$$

то ее ***интеграл Фурье*** имеет вид:

$$\int_0^{+\infty} [a(\lambda)\cos\lambda x + b(\lambda)\sin\lambda x]d\lambda, \qquad (13.1)$$

где введены обозначения

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda t dt, \quad b(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\lambda t dt. \qquad (13.2)$$

Интеграл Фурье (13.1) равен $f(x)$ в каждой точке непрерывности функции $f(x)$.

В случае, когда функция $f(x)$ четная, коэффициенты (13.2) имеют вид:

$$a(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(t)\cos\lambda t dt, \quad b(\lambda) = 0.$$

В случае нечетной функции $f(x)$:

$$a(\lambda) = 0, \quad b(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(t)\sin\lambda t dt.$$

Преобразованием Фурье функции $f(x)$ будем называть функцию $g(\lambda) = F[f(x)]$, определенную формулой

$$g(\lambda) = F[f(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\lambda x}dx.$$

Обратное преобразование Фурье имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda.$$

В зависимости от того, является ли $f(x)$ четной или нечетной, ее преобразование Фурье записывается в различной форме.

1) $f(x)$ – четная, тогда

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(\cos\lambda x + i\sin\lambda x)dx = 2\int_{0}^{+\infty} f(x)\cos\lambda x dx.$$

Этот интеграл известен как ***косинус-преобразование Фурье***.

2) $f(x)$ – нечетная, тогда

$$g(\lambda) = 2i\int_{0}^{+\infty} f(x)\sin\lambda x dx$$ – ***синус-преобразование Фурье***.

Преобразование Фурье можно использовать при решении уравнения теплопроводности. Применение преобразования Фурье к решению дифференциальных уравнений основано на том факте, что оно преобразует операцию дифференцирования в операцию умножения на независимую переменную.

Некоторые свойства преобразования Фурье:

I. Преобразование Фурье $F[f(x)]$ абсолютно интегрируемой функции $f(x)$ есть ограниченная непрерывная функция, которая стремится к нулю при $|\lambda| \to \infty$.

II. Если $f^{(k-1)}(x)$ непрерывна на каждом конечном интервале и $f, ..., f^{(k)} \in L_1(-\infty; \infty)$, то $F[f^{(k)}(x)] = (i\lambda)^k F[f(x)]$.

III. Если функции $f(x)$, $xf(x), \ldots, x^k f(x)$ абсолютно интегрируемы, то $\dfrac{d^k}{d\lambda^k} F[f(x)] = F[(-ix)^k f(x)]$.

Задания к разделу 13

Представить интегралом Фурье следующие функции:

13.1. $f(x) = \begin{cases} 2 + |x|, & |x| \le 4, \\ 0, & |x| > 4. \end{cases}$

13.2. $f(x) = \begin{cases} 1 - |x|/a, & \text{если } |x| \le a, \\ 0, & \text{если } |x| > a. \end{cases}$

13.3. $f(x) = \begin{cases} 2 - x^2, & |x| \le 2, \\ 0, & |x| > 2. \end{cases}$

13.4. $f(x)=\begin{cases}\cos x, & |x|\le \dfrac{\pi}{2},\\ 0, & |x|>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$

13.5. $f(x)=\begin{cases}\sin\omega x, & \text{если } |x|\le 2\pi n/\omega,\\ 0, & \text{если } |x|>2\pi n/\omega, \quad n\in N, \omega>0.\end{cases}$

13.6. $f(x)=1/(x^2+a^2), \quad a\ne 0.$

Найти преобразование Фурье функции $f(x)$, если:

13.7. $f(x)=\begin{cases}e^{5x}, & |x|\le 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$

13.8. $f(x)=\begin{cases}(x+1)e^{-2x}, & |x|\le 2,\\ 0, & |x|>2.\end{cases}$

13.9. $f(x)=\begin{cases}2-x^2, & \text{если } |x|\le 1,\\ 1, & \text{если } 1<|x|<2,\\ 0, & \text{если } |x|\ge 2.\end{cases}$

13.10. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+2x+2}.$

13.11. $f(x)=x^2e^{-\gamma|x|}, \quad \gamma>0.$

13.12. $f(x)=e^{-ax^2}.$

13.13. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x^2+2x+2}\right).$

13.14. $f(x)=\dfrac{d^3}{dx^3}\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right).$

13.15. $f(x)=x^2e^{-|x|}.$

13.16. $f(x)=e^{-x^2/2}\cos ax.$

13.17. $f(x)=\dfrac{d^2}{dx^2}\left(xe^{-|x|}\right).$

13.18. Пусть $f(y)=F[f(x)]$. Доказать, что

$F[e^{iax}f(x)]=f(y-a),\ a\in R$.

РАЗДЕЛ 14. **Дискретное преобразование Лапласа. Решение разностных уравнений**

Пусть $f(t)$ – комплекснозначная функция действительного аргумента *f*, определенного для $t\ge 0$.

Рассмотрим числовую последовательность $a_n=f(n)$ ($n=1,2,...$), которую будем называть ***решетчатой (ступенчатой) функцией***. При этом функция $f(t)$ называется ***порождающей функцией***. Аргумент решетчатой функции принимает только целые значения, причем при $n<0$, $f(n)\equiv 0$, и её график имеет вид, представленный на рис. 14.1.

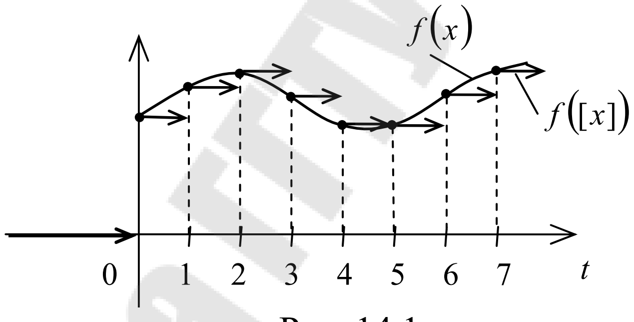

Рис. 14.1

Дискретным преобразованием Лапласа (изображением) решетчатой функции f_n называется комплекснозначная функция $D\{f_n\}$ комплексного переменного *p*, которая определяется как

$$D\{f_n\}=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-np}f_n\,. \tag{14.1}$$

Если выполнить замену $z=e^p$,то ряд (14.1) примет вид

$$F^*(z)=\sum_{n=0}^{\infty}f_nz^{-n}\equiv z\{f_n\}. \tag{14.2}$$

Такой переход от функции $f(n)$ к функции $F^*(z)$ по формуле (14.2) называется ***z-преобразованием*** (Таблица 14.1).

z-преобразование будем обозначать как $f_n \doteq F^*(z)$

Таблица 14.1

Таблица соответствия для z-преобразований

№п/п	f_n	$F^*(z)$
1	1	$\frac{z}{z-1}$
2	$(-1)^n$	$\frac{z}{z+1}$
3	n	$\frac{z}{(z-1)^2}$
4	n^2	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
5	a^n	$\frac{z}{z-a}$
6	na^{n-1}	$\frac{z}{(z-a)^2}$
7	C_n^k	$\frac{z}{(z-1)^{k+1}}$
8	$a^n \sin n\tau$	$\frac{az\sin\tau}{z^2-2az\cos\tau+a^2}$
9	$a^n \cos n\tau$	$\frac{z(z-a\cos\tau)}{z^2-2az\cos\tau+a^2}$
10	$a^n \operatorname{sh} n\tau$	$\frac{az\operatorname{sh}\tau}{z^2-2az\operatorname{ch}\tau+a^2}$
11	$a^n \operatorname{ch} n\tau$	$\frac{z(z-a\operatorname{ch}\tau)}{z^2-2az\operatorname{ch}\tau+a^2}$
12	$T_n(x)=\cos(n\arccos x)$	$\frac{z(z-x)}{z^2-2xz+1}$
13	$\frac{a^n}{n!}$	$e^{a/z}$

Некоторые свойства z-преобразования

I. ***Линейность.*** Если $f_n \stackrel{\bullet}{-} F^*(z)$ и $g_n \stackrel{\bullet}{-} G^*(z)$, то для любых комплексных постоянных α и β

$$\alpha f(n)+\beta g(n) \stackrel{\bullet}{-} \alpha F^*(n)+\beta G^*(n).$$

II. ***Теорема запаздывания*** (первая теорема смещения).

Если $f_n \stackrel{\bullet}{-} F^*(z)$, то для любого целого $k>0$ справедливо преобразование

$$f_{n-k} \stackrel{\bullet}{-} z^{-k}F^*(z),\ k=1,2,...$$

III. ***Теорема опережения*** (вторая теорема смещения).

Если $f_n \stackrel{\bullet}{-} F^*(z)$, то для любого целого $k>0$ справедливо преобразование

$$f_{n+k} \stackrel{\bullet}{-} z^k\left[F^*(z)-\sum_{m=0}^{k-1} f_m z^{-m}\right].$$

IV. ***Дифференцирование изображения***. Справедливо соотношение

$$\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!}f_n \stackrel{\bullet}{-} (-z)^k\cdot\frac{d^k}{dz^k}F^*(z),\quad k=1,2,\dots .$$

В частности, $n\,f_n \stackrel{\bullet}{-} -z[F^*(z)]'$, $\quad n(n+1)f_n \stackrel{\bullet}{-} -z^2[F^*(z)]''$.

V. ***Изображение суммы.*** Если $f_n \stackrel{\bullet}{-} F^*(z)$, то $\sum\limits_{m=0}^{n-1} f_m \stackrel{\bullet}{-} \dfrac{1}{z-1}F^*(z)$.

VI. ***Теорема подобия.*** Если $f_n \stackrel{\bullet}{-} F^*(z)$, то справедливо соотношение

$$\alpha^{-n}f_n \stackrel{\bullet}{-} F^*(\alpha z),\quad \text{где } \alpha\neq 0.$$

VII. ***Теорема о свертке оригиналов - последовательностей***.

Пусть $f_n \stackrel{\bullet}{-} F^*(z)$, $g_n \stackrel{\bullet}{-} G^*(z)$, тогда справедливо соотношение

$$\sum_{m=0}^{n} f_m g_{n-m} \stackrel{\bullet}{-} F^*(z)G^*(z).$$

Для того, чтобы по известному изображению $F^*(z)$ найти оригинал f_n, можно:

1) воспользоваться таблицей, после разбиения дроби $F^*(z)$ на сумму простейших дробей;

2) в случае, когда $F^*(z)$ есть правильная рациональная дробь относительно z, функцию f_n можно найти по формуле

$$f_n = \sum_{i=1}^{k} \underset{z_i}{res}\left(F^*(z) z^{n-1}\right),$$

где сумма берется по всем полюсам функции $F^*(z)$.

Решение разностных уравнений

Разностью первого порядка решетчатой функции f_n называется величина, обозначаемая как Δf_n и равная $\Delta f_n = f_{n+1} - f_n$.

Разностью второго порядка $\Delta^2 f_n$ называется величина, определяемая как $\Delta^2 f_n = \Delta f_{n+1} - \Delta f_n$.

Разностью k-го порядка $\Delta^k f_n$ называется величина

$$\Delta^k f_n = \Delta^{k-1} f_{n+1} - \Delta^{k-1} f_n.$$

$$\Delta^k f_n = \sum_{m=0}^{k} (-1)^m C_k^m f_{n+k-m}, \quad \text{где} \quad C_k^m = \frac{k!}{m!(k-m)!}.$$

Теорема (о z-преобразовании разности). Пусть $f_n \risingdotseq F^*(z)$. Тогда z-преобразования разностей равны

$$\Delta f_n = f_{n+1} \risingdotseq (z-1)F^*(z) - z f_0,$$

$$\Delta^k f_n = f_{n+k} \risingdotseq (z-1)^k F^*(z) - z \sum_{m=0}^{k-1} (z-1)^{k-m-1} \left(\Delta^m f_0\right).$$

Разностным уравнением k***-го порядка*** называется уравнение вида

$$F\left(n, f(n), \Delta f(n), \ldots, \Delta^k f(n)\right) = 0$$

или

$$F(n, f_n, f_{n+1}, \ldots, f_{n+k}) = 0,$$

где $f(n) \equiv f_n$ – решетчатая функция.

Рассмотрим процедуру решения линейного неоднородного разностного уравнения:

$$a_0 x_{n+k} + a_1 x_{n+k-1} + \ldots + a_k x_n = \varphi(n).$$

1) Применяем к обеим частям уравнения дискретное преобразование Лапласа

$$x_n \doteq X^*(z), \qquad \varphi(n) \doteq \Phi^*(z)$$

и учитывая, что

$$x_{n+1} \doteq z\left(X^*(z) - x_0\right) - z,$$

$$x_{n+2} \doteq z^2\left(X^*(z) - x_0 - x_1 z^{-1}\right),$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

получим линейное алгебраическое уравнение относительно изображения $X^*(z)$.

2) Разрешив полученное уравнение относительно $X^*(z)$, возвращаемся назад к оригиналу–последовательности. Общее решение будет содержать неопределенные константы $x_0, x_1, \ldots x_{k-1}$, которые фиксируются, исходя из начальных условий.

Задания к разделу 14

Пользуясь определением, найти изображение $F^*(z)$ для следующих функций:

14.1. $f_n = e^{-n}$.

14.2. $f_n = e^{\alpha n}$.

14.3. $f_n = n^2$.

Используя свойства дискретного преобразования Лапласа, найти изображения следующих функций:

14.4. $f_n = \cos an$.

14.5. $f_n = \operatorname{sh} n$.

14.6. $f_n = (n+2)^2$.

14.7. $f_n = n^2 e^{2n}$.

Пользуясь теоремой об изображении суммы, найти сумму:

14.8. $\sum\limits_{m=0}^{n-1} m^2.$

14.9. $\sum\limits_{m=0}^{n-1} m\cos am.$

Найти оригиналы для следующих изображений:

14.10. $F^*(z) = \dfrac{z}{(z-3)^2}.$

14.11. $F^*(z) = \dfrac{z}{z^2+1}.$

С помощью дискретного преобразования Лапласа решить линейные разностные уравнения:

14.12. $x_{n+1} - 2x_n = 0, \qquad x_0 = 1.$

14.13. $x_{n+2} + 2x_{n+1} + x_n = 0, \qquad x_0 = 1, \quad x_1 = 0.$

14.14. $x_{n+2} - 16x_n = (-1)^n, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = 0.$

14.15. $x_{n+3} + 3x_{n+2} + 3x_{n+1} + x_n = 0, \qquad x_0 = x_1 = 0, \quad x_2 = 1.$

14.16. $x_{n+2} - 8x_{n+1} + 16x_n = n, \quad x_0 = 1, \quad x_1 = 0.$

14.17. $x_{n+2} - 4x_n = 4^n, \qquad x_0 = x_1 = 1.$

14.18. $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 9x_n = n3^n, \qquad x_0 = 0, \quad x_1 = 0.$

РАЗДЕЛ 15. **Вариационное исчисление**

Если каждой функции $y(x)$ из некоторого множества поставлено в соответствие некоторое число J, то говорят, что на этом множестве задан ***функционал*** $J(y) = J[y]$.

Основная задача вариационного исчисления – исследование функционалов на экстремум и отыскание тех функций, на которых этот экстремум достигается, например:

1. Из всех кривых плоскости, соединяющих точки A и B, найти ту, которая имеет наименьшую длину.

2. Из всех линий найти ту, по которой материальная точка быстрее всего соскальзывает под действием силы тяжести из точки A в точку B (задача о брахистохроне).

Простейшая задача вариационного исчисления

Рассмотрим функционал

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y')dx, \tag{15.1}$$

где $F(x, y, y')$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция.

Граничные точки допустимых кривых (рис. 15.1) будем считать закрепленными:

$$y(a) = A,\ y(b) = B. \tag{15.2}$$

Простейшая задача вариационного исчисления ставится так: среди всех функций $y(x)$ ($y(x) \in C^2[a;b]$) и удовлетворяющих условиям (15.2), найти ту, которая доставляет экстремум функционалу (15.1). Эта кривая удовлетворяет ***уравнению Эйлера***:

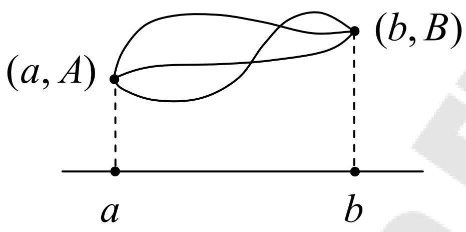

Рис. 15.1

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0. \tag{15.3}$$

Здесь

$$F_y = \frac{\partial F}{\partial y};\ F_{y'} = \frac{\partial F}{\partial y'}.$$

Решения (интегральные кривые) уравнения Эйлера называются ***экстремалями***.

Итак, ***граничная задача***, которой должна удовлетворять функция $y(x)$, доставляющая экстремум функционалу (15.1) с граничными условиями (15.2), выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} F_y - \dfrac{d}{dx}F_{y'} = 0 \\ y(a) = A, \quad y(b) = B. \end{cases}$$

Данная краевая задача может иметь единственное решение, может иметь множество решений или не иметь ни одного.

Частные случаи уравнения Эйлера:

1. F не зависит от y': $F = F(x, y)$.

Уравнение Эйлера (15.3) в этом случае принимает вид:

$$F_y(x, y) = 0.$$

Это уравнение является алгебраическим и определяет одну или конечное число кривых, которые могут и не удовлетворять граничным условиям.

2. F зависит лишь от y': $F = F(y)$.

В этом случае экстремалями является семейство прямых линий

$$y = C_1 x + C_2,$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, определяемые из граничных условий (2).

Задания к разделу 15

В следующих примерах найти расстояния между данными кривыми на указанных интервалах.

15.1. $f_1(x) = xe^{-x}, \quad f_2(x) = 0, \quad [0,2].$

15.2. $f_1(x) = \sin 2x, \quad f_2(x) = \sin x, \quad [0, \pi/2].$

15.3. $f_1(x) = x, \quad f_2(x) = \ln x, \quad [e^{-1}, e].$

Найти экстремали следующих функционалов:

15.4. $J[y] = \int\limits_{-1}^{0} (12xy - y'^2)dx; \quad y(-1) = 1, \quad y(0) = 0.$

15.5. $J[y] = \int\limits_{0}^{\pi} (-y^2 + y'^2 + 4y\cos 3x)dx; \;\; y(0) = 0; \;\; y(\pi) = 1.$

15.6. $J[y] = \int\limits_{0}^{1} (y^2 - y'^2 - ye^{2x})dx; \;\; y(0) = 0; \;\; y(1) = 1.$

15.7. $J[y] = \int\limits_{0}^{\pi/2} (y^2 + 4y'^2 - 2y\sin 3x)dx; \;\; y(0) = 0; \;\; y(\pi/2) = 1.$

15.8. $J[y]=\int\limits_0^1(6y^2+4y'^2-y)e^{8x}dx$; $y(0)=0$; $y(1)=1$.

15.9. $J[y]=\int\limits_1^2(y'^2+2yy'+y^2)dx$; $y(1)=1$, $y(2)=0$.

15.10. $J[y]=\int\limits_1^2(4y\cos x+y'^2-y^2)dx$; $y(0)=0$, $y(\pi)=0$.

15.11. $J[y]=\int\limits_0^1(y'^2-y^2-y)e^{2x}dx$; $y(0)=0$, $y(1)=e^{-1}$.

15.12. $J[y]=\int\limits_1^e(xy'^2+yy')dx$; $y(1)=0$, $y(e)=1$.

15.13. $J[y]=\int\limits_0^1(x+y'^2)dx$; $y(0)=1$, $y(1)=2$.

15.14. $J[y]=\int\limits_a^b(xy'+y'^2)dx$.

15.15. $J[y]=\int\limits_0^\pi(y'^2-y^2)dx$; $y(0)=1$, $y(\pi)=-1$.

15.16. $J[y]=\int\limits_0^1(2e^y-y^2)dx$; $y(0)=1$, $y(1)=e$.

15.17. *Задача о положении равновесия тяжелой однородной нити под действием силы тяжести.* Среди всех плоских линий длины l, концы которых лежат в заданных точках $M_0(x_0,y_0)$ и $M_1(x_1,y_1)$, найти ту, у которой ордината центра тяжести минимальна.

Найти экстремали в следующих изопериметрических задачах.

15.18. $J[y]=\int\limits_0^1(x^2+y'^2(x))dx$; $y(0)=0$, $y(1)=0$.

при условии $\int\limits_0^1 y^2(x)dx=2$.

15.19. Найти минимум интеграла $J[y]=\int\limits_0^\pi y'^2(x)dx$ при условии $\int\limits_0^\pi y^2(x)dx=1$, $y(0)=y(\pi)=0$.

15.20. Найти кратчайшее расстояние между точками $A(1,0,-1)$ и $B(1,0,1)$, лежащими на поверхности $x+y+z=0$.

15.21. Найти расстояние между параболой $y = x^2$ и прямой $x - y = 5$.

15.22. Найти расстояние от точки $A(0,0)$ до кривой $y = \frac{2}{x}$ $(x > 0)$.

15.23. Найти кратчайшее расстояние от точки $A(1,0)$ до эллипса $4x^2 + 9y^2 = 36$.

15.24. Найти кратчайшее расстояние от точки $A(-1,5)$ до параболы $y^2 = x$.

15.25. Найти кратчайшее расстояние от точки $M(0,0,3)$ до поверхности $z = x^2 + y^2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабич, А. А. Специальные математические методы и функции: учеб.-метод. пособие по одноим. дисциплине для студентов специальности 1-36 04 02 «Промышленная электроника» днев. и заоч. форм обучения / А. А. Бабич, Л. Д. Корсун, А. В. Емелин. – Гомель: ГГТУ им. П. О. Сухого, 2010. – 195 с.
2. Бабич, А. А. Метод. указания к контрол. заданиям по одноим. курсу Специальные математические методы и функции: для студентов специальности 1-36 04 02 «Промышленная электроника» заоч. формы обучения / А. А. Бабич, Л. Д. Корсун, А. В. Емелин. – Гомель: ГГТУ им. П. О. Сухого, 2011. – 53 с.
3. Деч, Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и z-преобразования / Г. Деч. – М.: Наука, 1971. – 288 с.
4. Краснов, М. Л. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. Учеб. пособие для втузов / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко. - М.: Наука, 1981. – 302с.
5. Краснов, М. Л. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям: Учеб. пособие для втузов / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко. - М.: Наука, 1981.
6. Ефимов, А. В. Сборник задач по математике для втузов: Учебное пособие / В. А. Болгов, А. В. Ефимов, А. Ф. Каракулин и др./ под ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича. – М.: Наука, 1986. – Ч.2. Специальные разделы математического анализа. – 386 с.
7. Ефимов, А. В. Сборник задач по математике для втузов. : Учебное пособие / Э. А. Вуколов, А. В. Ефимов, В. Н. Земсков и др./ под. Ред. А. В. Ефимова. – М. : Наука, 1990. – Ч.4. Методы оптимизации. Уравнения в частных производных. Интегральные уравнения – 304 с.
8. Коллатц, Л. Задачи на собственные значения с техническими приложениями / Л. Коллатц. – М.: Наука, 1968. – 504 с.

Бабич Александр Антонович
Емелин Анатолий Владимирович
Корсун Лидия Дмитриевна

СПЕЦИАЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И ФУНКЦИИ

Учебно-методическое пособие по одноименной дисциплине для студентов специальности 1-36 04 02 «Промышленная электроника» дневной формы обучения

Подписано к размещению в электронную библиотеку
ГГТУ им. П. О. Сухого в качестве электронного
учебно-методического документа 12.
Рег. № 69Е.
http://www.gstu.by