

УДК 621.833.001.24

**ОБЪЕМ ВПАДИН МЕЖДУ ЭВОЛЬВЕНТНЫМИ  
ЗУБЬЯМИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО КОЛЕСА****Н. И. РОГАЧЕВСКИЙ***Учреждение образования «Белорусско-Российский  
университет», г. Могилев, Республика Беларусь***Ключевые слова:** зуб, профиль, впадина, объем, смазка.**Введение**

Известно, что число узлов трения, смазываемых пластичными смазочными материалами (Литол-24, ЦИАТИМ-201, ЦИАТИМ-221, ВНИИНП-284 и др.), значительно больше, чем жидкими [1]. К таким узлам относятся зубчатые передачи, работающие при окружных скоростях до 4 м/с. При этом пластичный смазочный материал закладывают при сборке в количестве, равном трети объема впадин между зубьями венца колеса. Этот метод смазки применяют в большинстве зубчатых передач систем управления самолетов и вертолетов [1]. Таким же способом смазывают зацепления передач дрелей, перфораторов, смесителей, бытовой техники.

Однако в литературе отсутствуют формулы, определяющие объем впадин между зубьями цилиндрических, конических и червячных колес. Устранение этого пробела является актуальным.

Решению указанной задачи для цилиндрических эвольвентных (наиболее применяемых) зубчатых колес посвящена настоящая работа.

**Методы исследования**

Аналитические зависимости, характеризующие объем впадин между эвольвентными зубьями цилиндрических колес, получены методами геометрии, кинематики и математического анализа.

**Основная часть**

Объем  $V$  впадин между  $z$  зубьями цилиндрического зубчатого колеса равен произведению площади  $S$ , ограниченной торцовыми профилями смежных зубьев и дугой окружности радиусом  $r_a$  вершин зубьев, на длину зуба  $l = \frac{b}{\cos\beta}$  и число зубьев  $z$  (здесь  $b$  – ширина зубчатого венца колеса;  $\beta$  – угол наклона линии зуба):

$$V = Slz.$$

Площадь  $S$  очевидна из рассмотрения рис. 1, на котором показаны торцовые половины зуба и впадины, ограниченные угловым полушагом  $\frac{\pi}{z}$  и дугой радиусом  $r_a$  вершин зубьев. Торцовый профиль половины зуба состоит из участков:  $F_cF$  – половина дуги между зубьями окружности впадин радиусом  $r_f$ ;  $FL$  – переходная кривая;  $LB$  – эвольвента;  $BA$  – половина дуги вершины зуба радиусом  $r_a$ . Общие точки  $F$ ,  $L$ ,  $B$  указанных кривых – особые точки профиля [2], [3]: предельная точка  $F$  впадины,

граничная точка  $L$ , точка  $B$  вершины зуба.  $x_{F_c}$ ,  $x_F$ ,  $x_L$ ,  $x_B$  – проекции на ось  $Ox$  (ось симметрии торцового профиля зуба), соответственно, точек  $F_c$ ,  $F$ ,  $L$ ,  $B$ :

$$S = 2(S_{OKA} - S_{\Delta OF_c} - S_{FF_c} - S_{FL} - S_{LB} - S_{BA}),$$

где  $S_{OKA}$  – площадь сектора  $OKA$ ;  $S_{\Delta OF_c}$  – площадь прямоугольного треугольника  $OF_c x_{F_c}$ ;  $S_{FF_c}$ ,  $S_{FL}$ ,  $S_{LB}$ ,  $S_{BA}$  – площади криволинейных трапеций, ограниченных сверху, соответственно, кривыми  $FF_c$ ,  $FL$ ,  $LB$ ,  $BA$ .

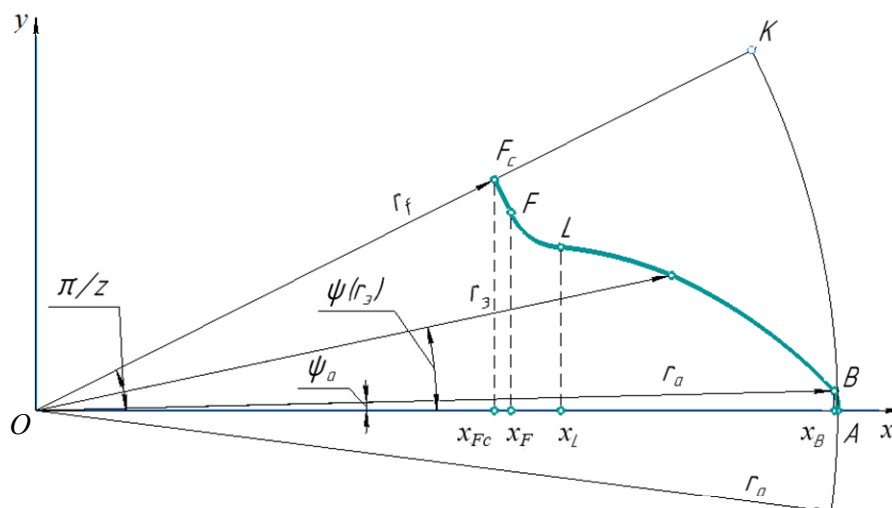


Рис. 1. Расчетная схема торцового профиля половины эвольвентного зуба

Найдем указанные площади. Площадь сектора  $OKA$ , ограниченного угловым полшагом  $\frac{\pi}{z}$  и дугой  $KA$  радиусом  $r_a$ :

$$S_{OKA} = \frac{\pi r_a^2}{2z} = \frac{0,5\pi r_a^2}{z},$$

где

$$r_a = m \left( \frac{0,5z}{\cos\beta + h_a^* + x^* - \delta^*} \right),$$

здесь  $m$  – модуль, мм;  $z$  – число зубьев колеса;  $h_a^*$ ,  $\delta^*$  – коэффициенты, соответственно, высоты головки, уменьшения высоты зуба [4];  $x^*$  – номинальный коэффициент смещения [4],

$$x^* = x - \frac{E_{HS} + T_H}{1000m},$$

где  $x$  – коэффициент смещения;  $E_{HS}$  – наименьшее дополнительное смещение исходного контура по ГОСТ 1643–81, мкм;  $T_H$  – допуск на смещение исходного контура по ГОСТ 1643–81, мкм.

Площадь прямоугольного треугольника  $OF_c x_{Fc}$ :

$$S_{\Delta OF_c} = 0,5r_f \cdot \sin \frac{\pi}{z} r_f \cdot \cos \frac{\pi}{z} = 0,25r_f^2 \cdot \sin \frac{2\pi}{z},$$

где

$$r_f = m \left( \frac{0,5z}{\cos \beta} - h_a^* - c^* + x^* \right),$$

здесь  $c^*$  – коэффициент радиального зазора.

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху кривой  $FF_c$  (дугой радиусом  $r_f$  окружности впадин) [5]:

$$\begin{aligned} S_{FF_c} &= \int_{x_{Fc}}^{x_F} y dx = \int_{x_{Fc}}^{x_F} \sqrt{r_f^2 - x^2} dx = \left( \frac{x}{2} \sqrt{r_f^2 - x^2} + \frac{r_f^2}{2} \arcsin \frac{x}{r_f} \right) \Bigg|_{x_{Fc}}^{x_F} = \\ &= \frac{x_F}{2} \sqrt{r_f^2 - x_F^2} - \frac{x_{Fc}}{2} \sqrt{r_f^2 - x_{Fc}^2} + \frac{r_f^2}{2} \left( \arcsin \frac{x_F}{r_f} - \arcsin \frac{x_{Fc}}{r_f} \right), \end{aligned}$$

где  $x_{Fc}$  и  $x_F$  – соответственно, нижний и верхний пределы интеграла (проекции точек  $F_c$  и  $F$  на ось  $Ox$ ).

Из рассмотрения рис. 1 очевидно, что

$$x_{Fc} = r_f \cdot \cos \frac{\pi}{z}.$$

Координату  $x_F$  точки  $F$  пересечения окружности впадин радиусом  $r_f$  и переходной кривой определяем в следующей последовательности.

Торцовые координаты  $x_c$  и  $y_c$  центра окружности, скругляющей вершину производящего контура инструмента, связаны с нормальными координатами  $x_c$  и  $y_{nc}$  этой же точки, найденными из рассмотрения рис. 2, следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} x_c &= m(h_a^* + c^* - \rho_f^* - x^*); \\ y_c &= \frac{y_{nc}}{\cos \beta} = \frac{m}{\cos \beta} \left[ \frac{\pi}{4} + (h_l^* - h_a^*) \operatorname{tg} \alpha + \rho_f^* \cdot \cos \alpha \right], \end{aligned}$$

где  $\rho_f^*$  – коэффициент радиуса кривизны переходной кривой нормального исходного контура, как видно из построения рис. 2 (обозначены: 1 – оси симметрии профилей производящей рейки; 2 – делительная прямая; 3 – начальная прямая в станочном зацеплении), равен:

$$\rho_f^* = \frac{2h_a^* + c^* - h_l^*}{1 - \sin \alpha},$$

где  $h_l^*$  – коэффициент граничной высоты зуба;  $\alpha$  – угол профиля.

Аргумент  $\gamma_F$  определяет точку  $F$ . Для вычисления величины  $\gamma_F$  задаем ряд последовательно уменьшающихся неотрицательных значений независимого аргумента  $\gamma$

(начиная от  $0,5\pi - \alpha_t$ ) и для каждого взятого  $\gamma$ , при котором  $r_t \geq r_b$ , здесь  $\alpha_t$ ,  $r_b$ , соответственно, торцовый угол профиля, радиус основной окружности:

$$\alpha_t = \arctg \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \beta}; \quad r_b = \frac{0,5mz}{\cos \beta} \cos \alpha_t,$$

вычисляем следующие параметры.

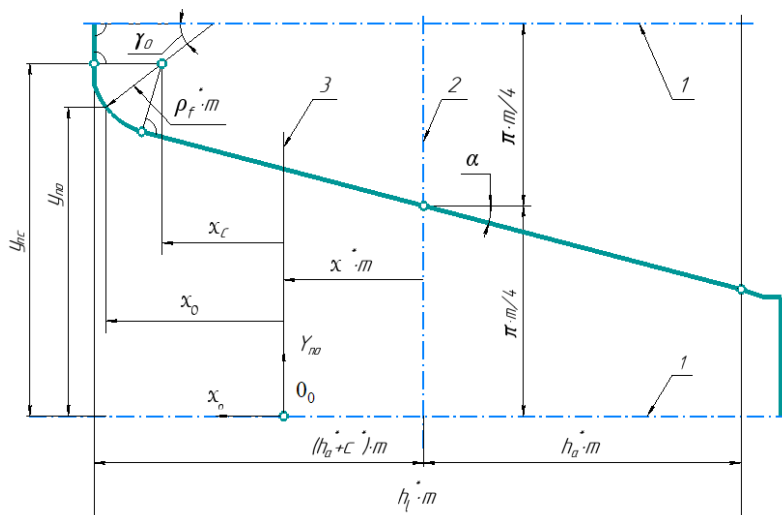


Рис. 2. Схема нормального профиля производящей рейки

Координаты  $x_{t0}$  и  $y_{t0}$  переходной кривой профиля зубьев производящей рейки в торцовой плоскости:

$$\gamma_o = \arctg \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\cos \beta}; \quad (1)$$

$$x_{t0} = x_c + m\rho_f^* \cdot \cos \gamma_o; \quad (2)$$

$$y_{t0} = y_c - \frac{m\rho_f^* \cdot \sin \gamma_o}{\cos \beta}. \quad (3)$$

Угол скатывания рейки  $\varphi$  и координаты  $x_t$  и  $y_t$  переходной кривой профиля зубьев зубчатого колеса в торцовой плоскости:

$$\varphi = \frac{y_{t0} + x_{t0} \cdot \operatorname{tg} \gamma}{r}; \quad (4)$$

$$x_t = (r - x_{t0}) \cos \varphi + x_{t0} \cdot \operatorname{tg} \gamma \cdot \sin \varphi; \quad (5)$$

$$y_t = (r - x_{t0}) \sin \varphi - x_{t0} \cdot \operatorname{tg} \gamma \cdot \cos \varphi, \quad (6)$$

где  $r$  – радиус делительной окружности зубчатого колеса,

$$r = \frac{0,5mz}{\cos \beta}.$$

Эти уравнения устанавливают связь между координатами любой точки  $T_0$  торцового профиля переходной кривой зуба производящей рейки  $x_{t0}, y_{t0}$  и координатами соответствующей точки  $T$  торцового профиля переходной кривой обрабатываемого зуба  $x_t, y_t$ , которая вытекает из построения рис. 3. На рис. 3 показана подвижная система координат  $x_{t0}O_0y_{t0}$ , связанная с производящей рейкой. Начало координат  $O_0$  лежит на начальной прямой производящей рейки. Ось  $O_0y_{t0}$  направлена по начальной прямой. Ось  $O_0x_{t0}$  является осью симметрии впадины между зубьями производящей рейки.  $\gamma$  – угол между осью  $O_0x_{t0}$  и нормалью к профилю производящей рейки в точке  $T_0$ .  $x_tO_t y_t$  – система неподвижных осей, связанная с обрабатываемым зубчатым колесом. Начало координат  $O$  совпадает с центром торцового профиля зубчатого колеса.  $Ox_t$  является осью симметрии обрабатываемого зуба.  $M$  – точка пересечения нормали к профилю производящей рейки с начальной прямой рейки. В начальный момент движения обкатки производящей рейки оси  $Ox_t$  и  $O_0x_{t0}$  направлены по одной прямой, т. е. точка  $O_0$  находится в точке  $P_t$ . Уравнение (4) выводится из математической записи равенства длины отрезка прямой  $O_0M$  и длины дуги  $P_tM$  делительной окружности. Точка  $T_0$  соприкасается с точкой  $T$  тогда, когда точка  $M$  касается делительной окружности заготовки в процессе качения по ней начальной прямой рейки. Проецируя точку  $T$  на оси  $Ox_t$  и  $Oy_t$ , получаем выражения (5) и (6).

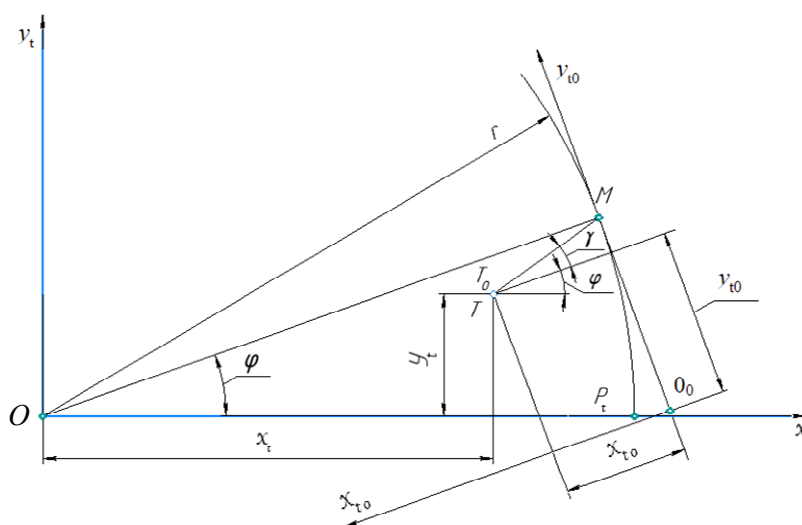


Рис. 3. Схема установления связи между координатами  $x_{t0}, y_{t0}$  и  $x_t, y_t$

Торцовый профиль переходной кривой обрабатываемого зуба в полярной системе координат:

$$r_t = \sqrt{x_t^2 + y_t^2},$$

$$\psi_t = \arctg \frac{y_t}{x_t}.$$

Условие, определяющее точку  $F$  пересечения окружности впадин радиусом  $r_f$  и переходной кривой:

$$\Delta r = r_t - r_f. \tag{7}$$

Уравнение (7) вытекает из построения рис. 4, на нем показан торцовый профиль зуба рассматриваемого зубчатого колеса.  $x_t O y_t$  – система координат, связанная с зубчатым колесом. Начало координат  $O$  помещено в центре торцового сечения зубчатого колеса. Ось  $Ox_t$  является осью симметрии зуба.  $x_t$ ,  $y_t$  и  $r_t$ ,  $\psi_t$  – декартовы и полярные координаты точки на переходной кривой профиля зуба зубчатого колеса в торцовой плоскости. Рассматриваем разность радиуса  $r_t$  окружности точек переходной кривой профиля зуба и радиуса  $r_f$  окружности впадин, ее характеризует уравнение (7). Указанные радиусы совпадают в точке  $F$ , имея общий для них радиус-вектор  $r_F$ , т. е.  $\Delta r = 0$ .

Таким образом наибольшее значение  $\gamma$ , при котором получают  $\Delta r = 0$ , и есть искомая величина  $\gamma_F$ .

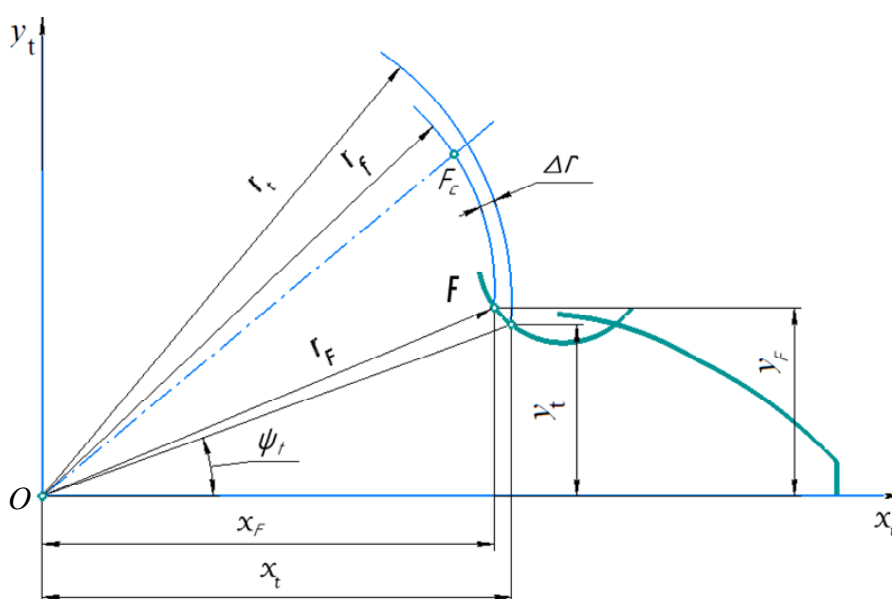


Рис. 4. Расчетная схема определения точки пересечения окружности впадин и переходной кривой

При  $\gamma = \gamma_F$  соответствующие функции аргумента  $\gamma$  снабжаем индексом  $F$ , т. е. получаем искомые декартовы  $x_F$ ,  $y_F$  и полярные  $r_F$ ,  $\psi_F$  координаты точки  $F$ .

Площадь  $S_{FL}$  криволинейной трапеции, ограниченной сверху кривой  $FL$  (переходной кривой торцового профиля зуба):

$$S_{FL} = \int_{x_F}^{x_L} y(x) dx,$$

где  $x_F$  и  $x_L$  – соответственно, нижний и верхний пределы интеграла (проекции точек  $F$  и  $L$  на ось  $Ox$ ).

Определяем координату  $x_L$  точки  $L$  пересечения переходной кривой и эвольвенты профиля зуба (граничной точки) по алгоритму работы [2].

Функцию  $y = y(x)$ , описывающую переходную кривую торцового профиля зуба, с целью ее интегрирования в явном виде получить не удастся. Поэтому интегрируем ее приближенно, используя формулу трапеций [6]:

$$S_{FL} = \int_{x_F}^{x_L} y(x)dx \approx h \left\{ \frac{[y(x_F) + y(x_L)]}{2} + y(x_1) + y(x_2) + y(x_3) + y(x_4) + y(x_5) \right\},$$

где  $h = \frac{x_L - x_F}{6}$ ;  $x_1 = x_F + h$ ;  $x_2 = x_F + 2h$ ;  $x_3 = x_F + 3h$ ;  $x_4 = x_F + 4h$ ;  $x_5 = x_F + 5h$ .

Значения функций  $y(x_F)$  и  $y(x_L)$  вычислили ранее при определении границ интегрирования  $x_F$  (см. выше) и  $x_L$  (по алгоритму работы [2]).

Значение  $y(x_1)$  определяем следующим образом. В уравнении (5) присваиваем  $x_t = x_1$ , решаем его совместно с равенствами (2), (3) и (1), вычисляя  $\gamma_0$ , после чего находим значение  $y(x_1) = y_t$  из равенства (6). Указанную процедуру повторяем при  $x_t = x_2 \dots x_5$ , определяя, соответственно,  $y(x_2) \dots y(x_5)$ .

Площадь  $S_{LB}$  криволинейной трапеции, ограниченной сверху кривой  $LB$  (эвольвентой торцового профиля зуба):

$$S_{LB} = \int_{x_L}^{x_B} y(x)dx,$$

где  $x_B$  – верхний предел интеграла (проекция на ось  $Ox$  точки  $B$  пересечения эвольвенты и дуги радиусом  $r_a$  окружности вершин зубьев). Координата  $x_B$  очевидна из рассмотрения рис. 1:

$$x_B = r_a \cdot \cos \psi_a,$$

где  $\psi_a$  – половина угловой толщины вершины зуба [4],

$$\psi_a = \frac{2\pi + 2x^* \cdot \operatorname{tg} \alpha}{z} + \operatorname{tg} \alpha_t - \alpha_t - \operatorname{tg} \alpha_a + \alpha_a,$$

здесь  $\alpha_a$  – угол профиля эвольвенты в точке  $B$  на вершине зуба,

$$\alpha_a = \arccos \frac{r_b}{r_a}.$$

Уравнение эвольвенты в явном виде  $y = f(x)$  получить невозможно. Поэтому будем использовать параметрические уравнения этой кривой, очевидные из рассмотрения рис. 5:

$$x = r_b [\nu \cdot \sin(\nu - \psi_b) + \cos(\nu - \psi_b)]; \quad (8)$$

$$y = r_b [\nu \cdot \cos(\nu - \psi_b) - \sin(\nu - \psi_b)], \quad (9)$$

где  $\psi_b$  – половина основной угловой толщины зуба [4],

$$\psi_b = \frac{\frac{\pi}{2} + 2x^* \cdot \operatorname{tg} \alpha}{z} + \operatorname{tg} \alpha_t - \alpha_t.$$

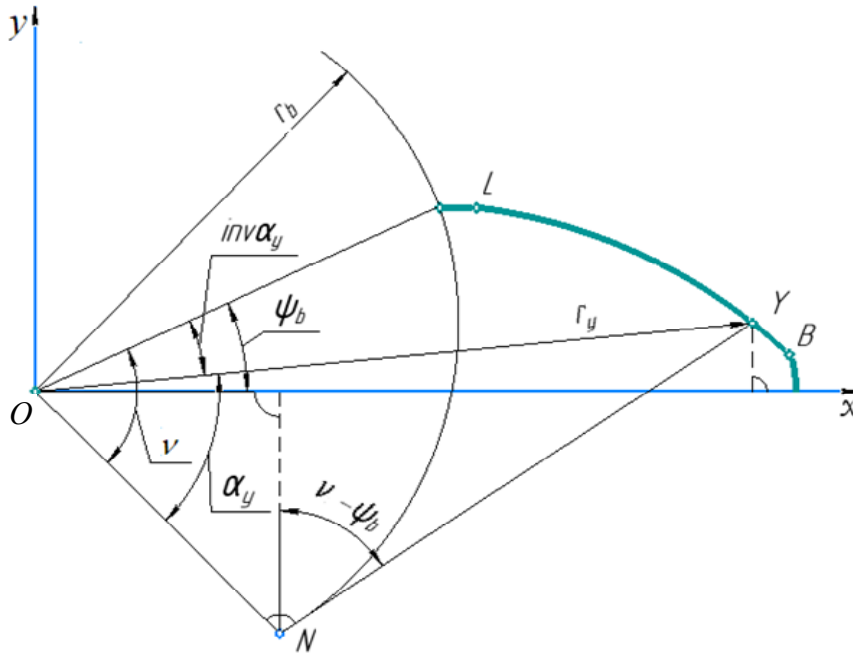


Рис. 5. Схема установления параметрических уравнений эвольвенты зуба

Площадь  $S_{LB}$  криволинейной трапеции, ограниченной сверху кривой  $LB$  (эвольвентой торцового профиля зуба, описанной указанными выше параметрическими уравнениями), выражается формулой [7]:

$$S_{LB} = \int_{\lambda}^{\mu} y(v)x'(v)dv, \quad (10)$$

где  $\lambda$  и  $\mu$  – соответственно, нижний и верхний пределы интеграла (границы угла  $v$  при  $r_y = r_L$  и  $r_y = r_B$ , см. рис. 5).

Величины  $\lambda$  и  $\mu$  определяем методом последовательных приближений [8] из уравнений:

$$x_L = r_b [\lambda \cdot \sin(\lambda - \psi_b) + \cos(\lambda - \psi_b)];$$

$$x_B = r_b [\mu \cdot \sin(\mu - \psi_b) + \cos(\mu - \psi_b)].$$

Подставляя в равенство (7) вместо  $y(v)$  зависимость (6), а вместо  $x'(v)dv$  выражение, полученное от дифференцирования по  $dv$  функции (5):

$$x'(v)dv = r_b v \cdot \cos(v - \psi_b)dv,$$

после интегрирования по частям алгебраических и тригонометрических преобразований получаем:

$$S_{LB} = \frac{r_b^2}{2} \left\{ \frac{\mu^3}{3} + \mu \cdot \cos[2(\mu - \psi_b)] + 0,5(\mu^2 - 1) \sin[2(\mu - \psi_b)] - \frac{\lambda^3}{3} - \lambda \cdot \cos[2(\lambda - \psi_b)] - 0,5(\lambda^2 - 1) \sin[2(\lambda - \psi_b)] \right\}.$$



Площадь  $S_{BA}$  криволинейной трапеции, ограниченной кривой  $BA$  (дугой радиусом  $r_a$  окружности вершин зубьев) [5]:

$$\begin{aligned} S_{BA} &= \int_{x_B}^{x_A} y dx = \int_{x_B}^{x_A} \sqrt{r_a^2 - x^2} dx = \left( \frac{x}{2} \sqrt{r_a^2 - x^2} + \frac{r_a^2}{2} \arcsin \frac{x}{r_a} \right) \Bigg|_{x_B}^{x_A} = \\ &= \frac{x_A}{2} \sqrt{r_a^2 - x_A^2} - \frac{x_B}{2} \sqrt{r_a^2 - x_B^2} + \frac{r_a^2}{2} \left( \arcsin \frac{x_A}{r_a} - \arcsin \frac{x_B}{r_a} \right) = \\ &= \frac{r_a^2}{2} \left( \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{x_B}{r_a} \right) - \frac{x_B}{2} \sqrt{r_a^2 - x_B^2}, \end{aligned}$$

где  $x_B$  и  $x_A$  – соответственно, нижний и верхний пределы интеграла (проекции точек  $B$  и  $A$  на ось  $Ox$  (рис. 1)). Из рассмотрения рис. 1 очевидно, что  $x_A = r_a$ .

### Заключение

Предложенный алгоритм расчета определяет достоверные значения объема впадин между зубьями венца колеса. Последнее позволяет закладывать правильный объем пластичного смазочного материала при сборке передачи, а значит – повысить качество ее работы.

### Литература

1. Детали машин и основы конструирования : учеб. для вузов / Г. И. Рощин [и др.] ; под ред. Г. И. Рощина, Е. А. Самойлова. – М. : Дрофа, 2006. – 415 с.
2. Рогачевский, Н. И. Параметры особых точек профиля эвольвентных зубьев / Н. И. Рогачевский // Вестн. Гомел. гос. техн. ун-та им. П. О. Сухого. – 2010. – № 2. – С. 3–8.
3. Цилиндрические эвольвентные зубчатые передачи внешнего зацепления. Расчет геометрии : справ. пособие / И. А. Болотовский [и др.]. – М. : Машиностроение, 1974. – 160 с.
4. Андожский, В. Д. Теория определения размера по роликам / В. Д. Андожский, Н. И. Рогачевский. – Могилев. машиностр. ин-т. – Могилев, 1981. – 75 с. : ил. – Библиогр. : 6 назв. – Деп. в БелНИИНТИ 23.05.81, № 302.
5. Воднев, В. Т. Основные математические формулы : справочник / В. Т. Воднев, А. Ф. Наумович, Н. Ф. Наумович ; под ред. Ю. С. Богданова. – Минск : Выш. шк., 1988. – 269 с.
6. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 1 / Н. С. Пискунов. – М. : Наука, 1978. – 456 с. : ил.
7. Сухая, Т. А. Задачи по высшей математике : учеб. пособие / Т. А. Сухая, В. Ф. Бубнов. – Минск : Выш. шк., 1993. – 416 с.
8. Гусак, А. А. Справочник по высшей математике / А. А. Гусак, Г. М. Гусак. – Минск : Навука і тэхніка, 1991. – 480 с.

Получено 04.09.2018 г.