

Министерство образования Республики Беларусь

**Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»**

Кафедра «Технология машиностроения»

В. С. Мурашко

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

ПОСОБИЕ

**по курсу «Математическое моделирование
и методы исследования операций» для студентов
специальности 1-53 01 01 «Автоматизация
технологических процессов и производств
(по направлениям)» дневной формы обучения**

Гомель 2018

УДК 519.8(075.8)
ББК 22.18я73
М91

*Рекомендовано научно-методическим советом
машиностроительного факультета ГГТУ им. П. О. Сухого
(протокол № 7 от 05.03.2018 г.)*

Рецензент: доц. каф. «Информатика» ГГТУ им. П. О. Сухого
канд. техн. наук, доц. *Т. А. Трохова*

Мурашко, В. С.
М91 Математическое моделирование технологических задач : пособие по курсу «Математическое моделирование и методы исследования операций» для студентов специальности 1-53 01 01 «Автоматизация технологических процессов и производств (по направлениям)» днев. формы обучения / В. С. Мурашко. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2018. – 136 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: <https://elib.gstu.by>. – Загл. с титул. экрана.

Рассмотрены вопросы разработки и использования математических моделей для описания, исследования и оптимизации процессов в машиностроении.

Для студентов специальности 1-53 01 01 «Автоматизация технологических процессов и производств (по направлениям)» дневной формы обучения.

УДК 519.8(075.8)
ББК 22.18я73

© Учреждение образования «Гомельский
государственный технический университет
имени П. О. Сухого», 2018

Введение

Математическое моделирование технологических процессов является эффективным средством анализа технологии производства на предмет её возможной модернизации. Результаты математического моделирования в совокупности с данными научных исследований позволяют объективно рассматривать решение о необходимости модернизации производства или внедрении нового технологического процесса на предприятии.

Инженер должен уметь практически решать задачи, укладывающиеся в традиционные рамки, а также формулировать и исследовать совершенно новые задачи, требующие применения современных математических методов. В результате его математический кругозор в современных условиях должен постоянно расширяться, а навыки построения и применения математических моделей технологических процессов совершенствоваться.

Хорошую математическую подготовку будущему инженеру, в частности, должна обеспечить дисциплина «Математическое моделирование и методы исследования операций». Данная дисциплина является связующим звеном между общепрофессиональными и специальными дисциплинами.

Настоящее пособие предназначено для студентов специальности 1-53 01 01 «Автоматизация технологических процессов и производств (по направлениям)» и соответствует программе курса «Математическое моделирование и методы исследования операций».

Знания и умения, приобретенные студентами при изучении указанной дисциплины, могут быть использованы при решении различных практических задач технологии машиностроения. С другой стороны, эти знания необходимы при изучении многих других дисциплин, как «Информационные системы в САПР», «Автоматизированные системы ТПП» так как основой различных систем автоматизированного проектирования является их математическое обеспечение, содержащее математические модели различных проектных задач.

В настоящем пособии рассматриваются решения технологических задач, использующих теорию графов, линейного, целочисленного, динамического программирования и транспортных задач.

1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ И ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ В МАШИНОСТРОЕНИИ

1.1 Математическая модель

Под объектами моделирования в машиностроительном производстве следует понимать:

1. Технологические системы (ТС) – участки из универсальных станков, автоматические линии, гибкие производственные системы (ГПС).
2. Технологические процессы (ТП).
3. Физические процессы (ФП) – процессы, протекающие при резании металлов, при функционировании технологического оборудования в упругой системе СПИД и т.д.

Моделирование представляет собой процесс замещения объекта исследования некоторой его моделью и проведение исследований на модели с целью получения необходимой информации об объекте.

Модель – это физический или абстрактный образ объекта, удобный для проведения исследований и позволяющий адекватно отображать интересующие исследователя физические свойства и характеристики объекта.

Различают предметное и абстрактное моделирование [20].

При *предметном моделировании* строят *физическую модель*, которая соответствующим образом отображает основные физические свойства и характеристики моделируемого объекта. При этом модель может иметь иную физическую природу по сравнению с объектом. Если физическая природа модели и объекта совпадают, то моделирование называется *физическими*.

При *абстрактном моделировании* строится абстрактная модель. Такая модель представляет собой математические соотношения, графы, схемы, диаграммы и т. п. Наиболее мощным средством построения абстрактных моделей является математическое моделирование.

Математическое моделирование позволяет посредством известных математических функций, символов и зависимостей описать функционирование технического объекта во внешней среде; определить выходные параметры и характеристики; получить оценку

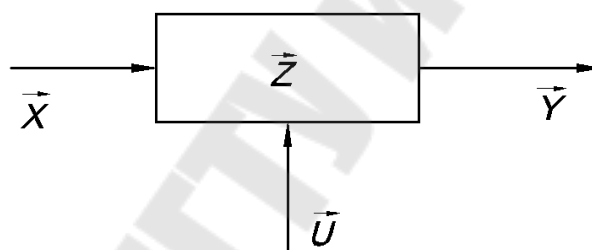
показателей эффективности и качества; осуществить поиск оптимальной структуры и параметров объектов.

Под *математической моделью* понимается совокупность математических объектов и отношений между ними, адекватно отображающих физические свойства объекта.

Математические модели разрабатываются для описания ФП, ТП, ТС; исследования ФП, ТП, ТС; проектирования ТП, ТС; оптимизации в ходе проектирования ТП, ТС и организации работы ТС; построения систем автоматизированного проектирования.

Вид, состав, сложность математической модели зависит от того, какой объект она описывает и для каких целей разработана.

Математическую модель сложной системы (рис. 1.1) можно представить как функциональный оператор Φ , преобразующий пространство вектора входных \vec{X} , внутрисистемных параметров процесса \vec{Z} и управляющих переменных \vec{U} в выходные параметры \vec{Y} .



$$\Phi(\vec{X}, \vec{Z}, \vec{U}) = \vec{Y}$$

Рисунок 1.1 – Объект моделирования

Вид модели и степень ее детализации определяется не только свойствами моделируемого объекта, но и целью, с которой выполняется моделирование. Поэтому процесс разработки модели сложной системы состоит в последовательном анализе и моделировании отдельных ее подсистем с последующим установлением связей между этими подсистемами.

Математическое моделирование – это процесс формирования математической модели и использования ее для анализа и синтеза [20].

1.2 Классификация математических моделей

По отношению ко времени различают *статические и динамические модели*. Первые инвариантны ко времени, а вторые являются функцией времени.

По характеру зависимости выходных параметров от входных модели делятся *на детерминированные и стохастические*. Если существуют функциональные зависимости выходных параметров от входных, то модели являются детерминированными, если эти зависимости неизвестны, а известно лишь математическое описание выходов в виде функции входов, модели называются стохастическими.

По характеру времени динамические модели делятся *на непрерывные и дискретные*. Первые функционируют в непрерывном времени, а вторые – в дискретном. Примером непрерывных детерминированных моделей могут служить дифференциальные или интегро-дифференциальные уравнения; примером дискретных детерминированных моделей – конечные автоматы, дискретных стохастических – вероятностные автоматы.

Основные признаки классификации и типы ММ даны в таблице 1.1 [20].

Таблица 1.1 – Классификация математических моделей

| Признаки классификации | Виды математических моделей |
|-------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|
| 1. Принадлежность к иерархическому уровню | Модели микроуровня Модели макроуровня Модели метауровня |
| 2. Характер отображаемых свойств объекта | Структурные Функциональные |
| 3. Способ представления свойств объекта | Аналитические Алгоритмические Имитационные |
| 4. Способ получения модели | Теоретические Эмпирические |
| 5. Особенности поведения объекта | Детерминированные Вероятностные |

Приведенная классификация математических моделей может быть применена по отношению к любым объектам. Мы рассмотрим особенности различных видов моделей применительно к объектам (процессам) в машиностроении.

Математические модели на микроуровне производственного процесса отражают физические процессы, протекающие, например, при резании металлов. Они описывают процессы на уровне перехода (прохода).

Математические модели на макроуровне производственного процесса описывают технологические процессы.

Математические модели на метауровне производственного процесса описывают технологические системы (участки, цехи, предприятие в целом).

Структурные математические модели предназначены для отображения структурных свойств объектов. Например, в САПР ТП для представления структуры технологического процесса, расцеховки изделий используется структурно-логические модели.

Функциональные математические модели предназначены для отображения информационных, физических, временных процессов, протекающих в работающем оборудовании, в ходе выполнения технологических процессов и т.д.

Аналитические математические модели представляют собой явные математические выражения выходных параметров как функций от параметров входных и внутренних. Это, например, выражения для сил резания.

Пример 1.1. Пусть требуется описать и исследовать процесс резания (точения) с точки зрения действующих сил, которые представим известными в теории резания уравнениями:

$$P_x = C_{PX} t^{X_{px}} s^{Y_{px}} K_{ОБЩ},$$

$$P_y = C_{PY} t^{X_{py}} s^{Y_{py}} K_{ОБЩ},$$

$$P_z = C_{PZ} t^{X_{pz}} s^{Y_{pz}} K_{ОБЩ},$$

где C_p – удельные силы резания; t – глубина резания; s – подача; X, Y – показатели степени, выражающие влияние соответствующего параметра режима резания на силу резания (при точении $X_p \approx 1, Y_p \approx 0,75$); $K_{ОБЩ} = K_M \cdot K_H \dots$ коэффициент, зависящий от свойств обрабатываемого материала, инструментального материала и т.д.

Представленные выше три уравнения – это уже один из вариантов математической модели процесса точения с точки зрения действующих сил. Она, конечно же, простейшая и может служить для описания процесса резания; исследования процесса резания; расчета сил резания.

Наиболее существенная характеристика аналитических моделей заключается в том, что модель не является структурно подобной объекту моделирования. Под структурным подобием здесь понимается однозначное соответствие элементов и связей модели элементам и связям моделируемого объекта.

Аналитическая модель может быть исследована следующим методами:

- *аналитическими*, когда стремятся получить в общем виде зависимости для искомых характеристик;
- *численными*, когда стремятся получить числовые результаты при конкретных начальных данных;
- *качественными*, когда, имея решения в явном виде, можно найти некоторые свойства решения (оценить устойчивость решения).

К аналитическим относятся модели, построенные на основе аппарата *математического программирования, корреляционного, регрессионного анализа*.

Аналитическая модель всегда представляет собой конструкцию, которую можно проанализировать и решить математическими средствами. Так, если используется аппарат математического программирования, то модель состоит в основе своей из целевой функции и системы ограничений на переменные. Целевая функция, как правило, выражает ту характеристику объекта (системы), которую требуется вычислить или оптимизировать. В частности, это может быть производительность технологической системы. Переменные выражают технические характеристики объекта (системы), в том числе варьируемые, ограничения – их допустимые предельные значения.

Аналитические модели являются эффективным инструментом для решения задач оптимизации процессов, протекающих в технологических системах, а также оптимизации и вычисления характеристик самих технологических систем.

Важным моментом является размерность конкретной аналитической модели. Часто для реальных технологических систем

(автоматических линий, гибких производственных систем) размерность их аналитических моделей столь велика, что получение оптимального решения оказывается весьма сложным с вычислительной точки зрения. Для повышения вычислительной эффективности в этом случае используют различные приемы. Один из них связан с разбиением задачи большой размерности на подзадачи меньшей размерности так, чтобы автономные решения подзадач в определенной последовательности давали решение основной задачи. При этом возникают проблемы организации взаимодействия подзадач, которые не всегда оказываются простыми. Другой прием предполагает уменьшение точности вычислений, за счет чего удается сократить время решения задачи.

Алгоритмические математические модели выражают связи между выходными параметрами и параметрами входными и внутренними в виде алгоритма.

Имитационные математические модели – это алгоритмические модели, отражающие развитие процесса (поведение исследуемого объекта) во времени при задании внешних воздействий на процесс (объект). Например, это модели систем массового обслуживания, заданные в алгоритмической форме.

Теоретические математические модели создаются в результате исследования объектов (процессов) на теоретическом уровне. Например, существуют выражения для сил резания, полученные на основе обобщения физических законов. Но они не приемлемы для практического использования, т.к. очень громоздки и не совсем адаптированы к реальным процессам обработки материалов.

Эмпирические математические модели создаются в результате проведения экспериментов (изучения внешних проявлений свойств объекта с помощью измерения его параметров на входе и выходе) и обработки их результатов методами математической статистики.

Детерминированные математические модели описывают поведение объекта с позиций полной определенности в настоящем и будущем. Примеры таких моделей – формулы физических законов, технологические процессы обработки деталей и т.д.

Вероятностные математические модели учитывают влияние случайных факторов на поведение объекта, т.е. оценивают его будущее с позиций вероятности тех или иных событий. Примеры таких моделей – описание ожидаемых длин очередей в системах массового обслуживания, ожидаемых объемов выпуска

сверхплановой продукции производственным участком, точности размеров в партии деталей с учетом явления рассеяния и т.д.

1.3 Требования, предъявляемые к математическим моделям

К математическим моделям предъявляются следующие основные требования [20]:

1. Универсальности.
2. Точности.
3. Адекватности.
4. Экономичности.

Универсальность математической модели характеризует полноту отражения в ней свойств реального объекта. Математическая модель отражает не все, а лишь некоторые свойства реального объекта. Например, формулы для сил резания, которые приведены в примере 1.1, не учитывают температуру окружающего воздуха, влажность, экономические параметры и т.д.

Точность математической модели оценивается степенью совпадения значений выходных параметров реального объекта и значений тех же параметров, рассчитанных с помощью модели.

Пусть отражаемые в математической модели свойства объекта оцениваются вектором выходных параметров $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$, y_{imm} – i -ый параметр, рассчитанный с помощью модели, а y_{id} – истинное значение того же параметра. Тогда относительная погрешность математической модели по i -му параметру будет равна:

$$E_i = \frac{|y_{imm} - y_{id}|}{y_{id}}.$$

По этой формуле рассчитываются погрешности для каждого выходного параметра, в результате получается вектор погрешностей $E = (E_1, E_2, \dots, E_m)$.

В целом для математической модели погрешность оценивается следующим образом:

$$E_{mm} = \max E_i, \quad i = \overline{1, m}.$$

Например, оценим погрешность рассмотренной в примере 1.1 математической модели. Вектор выходных параметров $Y = (P_x, P_y, P_z)$.

Пусть $E_{PX} = E_1 = 0,05$; $E_{PY} = E_2 = 0,07$; $E_{PZ} = E_3 = 0,03$, тогда в целом погрешность математической модели $E_{mm} = \max E_i = 0,07$.

Адекватность математической модели – это ее способность отражать заданные свойства объекта с погрешностью, не выше заданной.

Так как выходные параметры модели являются функцией $Y = F(X, Q)$ от параметров внутренних и входных, то и точность модели зависит от их значений. Адекватность модели имеет место в ограниченной области изменения внутренних и входных параметров. Если обозначить область адекватности как OA , то $OA = \{X, Q \mid E_{mm} \leq \delta\}$, где δ - некоторое заданное число.

Экономичность математической модели характеризуется затратами вычислительных ресурсов на ее реализацию. Если работа с математической моделью осуществляется вручную, то ее экономичность определяется затратами личного времени проектировщика. Если модель используется при автоматизированном проектировании, то затратами машинного времени и памяти компьютера. Так как указанные величины определяются характеристиками конкретного компьютера, то использовать их для оценки экономичности математической модели не корректно. Поэтому, для оценки экономичности самой математической модели используют другие величины:

1. Среднее количество операций, выполняемых при одном обращении к математической модели.
2. Размерность системы уравнений в математической модели.
3. Количество используемых в модели внутренних параметров и т.д.

Требования высокой степени универсальности, точности, широкой области адекватности математической модели, с одной стороны, и высокой ее экономичности, с другой стороны, противоречивы. Поэтому компромиссные решения определяются решаемой задачей.

К математическим моделям предъявляется и целый ряд других требований, среди которых следует выделить следующие:

1. *Вычислимость*, т.е. возможность ручного или с помощью ЭВМ исследования качественных и количественных закономерностей функционирования объекта (системы).
2. *Модульность*, т.е. соответствие конструкций модели структурным составляющим объекта (системы).

3. *Алгоритмизируемость*, т.е. возможность разработки соответствующих алгоритма и программы, реализующей математическую модель на ЭВМ.
4. *Наглядность*, т.е. удобное визуальное восприятие модели.

1.4 Схема процесса компьютерного математического моделирования

На рис. 1.2 приведена общая схема компьютерного математического моделирования.

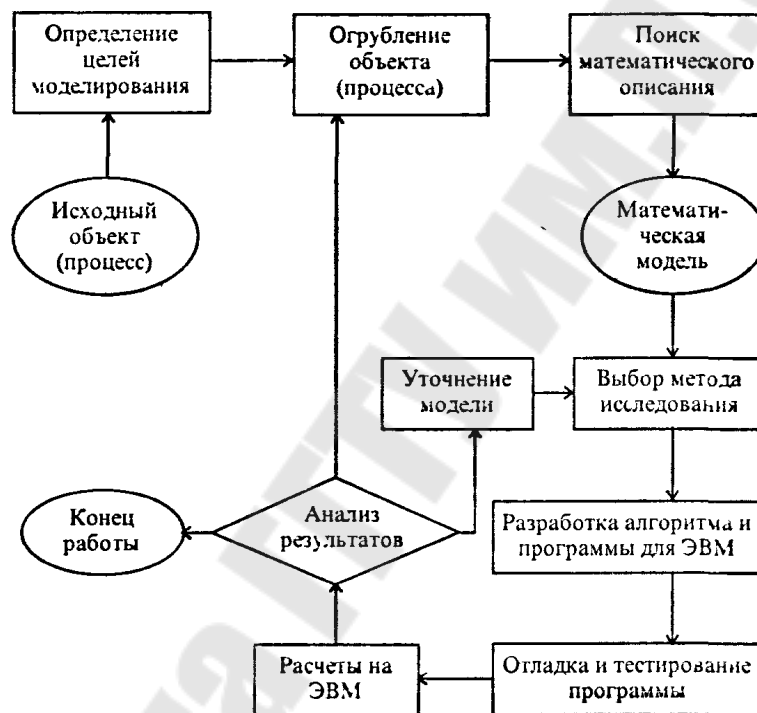


Рисунок 1.2 – Общая схема процесса компьютерного математического моделирования

1.5 Классификация погрешностей результатов

Необходимо понимать, что при решении определенного класса задач методом математического моделирования неизбежны погрешности определяемых результатов, которые по источнику их происхождения можно разбить на четыре группы [13].

Погрешности формализации. Возникают при переходе от объектов оригинала к его физической модели и обусловлены приближенным его соответствия этой модели. Количественную

оценку этих погрешностей в общем случае указать нельзя. Обычно такую оценку получают при экстремальных исследованиях на самих объектах оригинала или их местах.

Погрешности исходных данных связаны с физическими применениями объекта оригинала. При измерениях в технических системах погрешность измерения технических условий обычно 1-5 %, погрешность измерения динамических величин 5-20 %. Это приводит к погрешностям получаемых результатов.

Погрешности вычислительного алгоритма связаны с приближенным решением математических соотношений численными методами. Погрешность вычислительного алгоритма должна быть в 2-5 раз меньше погрешности исходных данных. Следует иметь в виду, что неудачно разработанный алгоритм может привести к тому, что результаты численного решения не будут соответствовать исследуемой математической модели.

Погрешности машинного округления связаны с тем, что в ЭВМ все вычисление выполняются с определенным числом значащих цифр. Эта погрешность зависит от типа и программы. Погрешность машинного вычисления должна быть в 5-10 раз меньше погрешности вычислительного алгоритма.

Таким образом, для получения достоверных результатов при математическом моделировании необходимо глубокое понимание всех существенных особенностей исследуемого объекта, его модели, вычислительных алгоритмов, программы, возможностей вычислительной техники.

Вопросы для самопроверки

1. Что следует понимать под объектами моделирования в машиностроительном производстве?
2. Что такое математическая модель?
3. Чем отличаются друг от друга предметное и абстрактное моделирование?
4. Признаки классификации математических моделей.
5. Перечислите этапы решения задачи методом математического моделирования
6. Перечислите требования к математическим моделям.
7. Назовите погрешности результатов моделирования.

2 ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Вся наша жизнь пронизана проблемами. Каждый человек ежедневно сталкивается с необходимостью принятия решений. Их так много и принимают их так часто, что в большинстве случаев это просто не осознается. Только наиболее важные и трудные решения как-то выделяются и становятся предметом анализа.

При этом основной подход всегда один: собирается точная, надежная и адекватная информация, а затем делается выбор среди возможных решений.

Принятие решений – это важная функция управления, являющаяся умением, которым должен овладеть каждый человек, работающий как в бизнесе так и науке.

Принятие неоптимальных решений в жизненных и производственных ситуациях уменьшает значительную долю возможностей и ресурсов. И чем сложнее ситуация, тем больше потери.

Практическая потребность общества в научных основах принятия решений возникла с развитием науки и техники. Родоначальником теории принятия решений следует считать Ж.Л. Лагранжа. Смысл задачи, которую он решал, заключался в следующем: *сколько земли должен брать на лопату землекоп, чтобы его сменная производительность была наибольшей.*

2.1 Общие положения теории принятия решений

Научно-техническая революция привела к существенным преобразованиям в организационном управлении.

Усложнение технологии и укрупнение производств привело к необходимости применять различные математические расчеты при решении вопросов управления.

Совокупность математических дисциплин, относящихся к организационному управлению, составляют *теорию принятия решений или теорию исследования операций.*

Исследование операций как наука сформировалась и развилась в период второй мировой войны, хотя термин появился раньше – в 1939 году.

Одним из первых трудов в указанной области являются «Математические методы организации и планирования производства»

Л.В. Канторовича, вышедшие в 1939 г., а в зарубежной литературе – изданная в 1947 г. работа Дж. Данцинга, посвященная решению экстремальных линейных задач. В 1975 г. Л.В. Канторович стал лауреатом Нобелевской премии за работы по оптимальному использованию ресурсов в экономике.

1950-е и последующие годы были отмечены широким применением на практике полученных фундаментальных теоретических исследований и связанным с этим переосмыслением потенциальных возможностей теории исследования операций. Важный вклад в развитие новой науки внесли такие видные ученые, как Дж. фон Нейман, Д. Гейл, К. Эрроу, Р. Беллман, Р. Гомори, Е.С. Вентцель, М.К. Гавурин и др.

Первые работы по теории принятия решений были связаны с организацией ПВО Великобритании и вообще с планированием операций по защите страны от вторжения.

После окончания войны специалисты-операционники (так называли специалистов в области исследования операций) стали увольняться из армии. К счастью, в этот период для развития промышленности потребовалось принимать не менее сложные решения, чем в военной области, и эти специалисты были затребованы для решения производственных, экономических задач. И наука «Исследование операций» продолжила свое бурное развитие.

Неразвитое производство мало нуждается в решении задач планирования, принятия наилучших решений, так как решения очевидны. Применение системного подхода для лучшей организации дела в этом случае представляет большие сложности.

На развитом предприятии владелец или лицо, управляющее им, не может самостоятельно принять решения – слишком большое число вопросов надо рассмотреть. Поэтому возникают отделы: производственный, отдел сбыта, финансовый, отдел кадров и пр.

Эти отделы имеют разные цели функционирования, во многом взаимно противоположные.

Производственный отдел хочет, чтобы продукция была однообразной (мало номенклатуры), и, если даже нет сбыта, этот отдел хочет производить продукцию, его цель – как можно больше продукции узкой номенклатуры (чтобы не перенастраивать станки для удешевления продукции).

Отдел сбыта требует широкой номенклатуры продукции (чтобы было легче продать), чтобы были товары, даже редко пользующиеся

спросом (они могут понадобиться все равно). Поэтому этот отдел не возражает против запасов (если и производства нет).

Однако, *финансовый отдел* выступает против запасов, так как это связанные деньги, и его задача минимизировать эти связанные деньги (т.е. деньги в товаре), а это значит минимизировать запасы. Финансовый отдел требует сохранения производства даже, если не идет продажа товара.

Отдел кадров против сохранения производства, если продажа товара не идет, так как это связано с увольнением людей, что является очень неприятной процедурой.

Задача *отдела исследования* заключается в том, чтобы найти правильное решение, которое принесет пользу (выгоду) всей системе в целом (всей фирме в целом), а не отдельным его подразделениям.

Таким образом, исследование операций связано с организацией, управлением системами, т.е. с исследованием оказания влияния на системы с точки зрения повышения их эффективности.

Наука, которая занимается управлением, называется *кибернетикой*.

Теория операций – часть кибернетики. Иногда ее называют *операционной кибернетикой*.

Теория операций имеет синонимы: *теория принятия решений*, анализ операций, оценка операций, *исследование операций*, теория системной оценки, теория системных исследований, теория организационного управления.

Наиболее часто используют названия: теория операций, теория оптимальных решений, теория принятия решений.

2.2 Этапы принятия решений

Принятие решений не является каким-то обособленным, единовременным актом. *Это процесс, протекающий во времени и состоящий из несколько этапов.*

Любой процесс в природе – физический, химический, социальный, мыслительный и т.д., будучи предоставленный сам себе, развивается и протекает по некоторым присущим ему закономерностям. Но на этот процесс воздействуют другие процессы, также как и сам он воздействует на них в силу всеобщей связи явлений в природе, что приводит к отклонениям от первоначального

развития рассматриваемого процесса, т.е. он протекает по более сложным закономерностям.

Все внешние воздействия подразделяются на *случайные и управляющие*.

Случайные воздействия являются следствием взаимодействия рассматриваемых процессов, в то время как *управляющие воздействия* изменяют ход того процесса, на который они направлены, в желаемом направлении.

В связи с этим должен существовать некоторый орган, систематически или по мере необходимости вырабатывающий управляющие воздействия. Такой орган принято называть *системой управления*.

В общем случае под *системой* понимают объективное единство закономерно связанных друг с другом предметов и явлений в природе и обществе.

Характеристики такой системы определяются как характеристиками составляющих систему элементов, так и характеристиками взаимосвязей между ними.

Качество и эффективность работы системы оценивается критерием эффективности, который позволяет оценить достижение желаемой цели.

Проблема принятия решений возникает только тогда, когда существуют затруднения в достижении необходимой цели.

В процессе принятия решений система управления должна располагать ресурсами, обеспечивающими реализацию выбранных управляющих воздействий.

Так, в экономических системах решение, направленное на интенсификацию производства должно сопровождаться выделением дополнительных ресурсов – материальных, финансовых и т.д.

Но система управления и сама затрачивает некоторые ресурсы, процесс выбора решения из множества возможных также связан с определенными затратами.

Ранние теории по принятию решений были основаны на концепции «экономического человека», основным положением которого было то, что *все люди знают альтернативы, имеющиеся в данной ситуации, и все последствия, которые они вызовут*.

Теория экономического человека предполагает, что люди будут вести себя рационально, т.е. выбор будет делаться таким образом, чтобы максимизировать какую-либо ценность.

Естественно, что лицо, принимающее решение не всегда ведет себя рациональным образом, поэтому в теорию экономического человека был внесен *принцип ограниченной рациональности*: «Возможности человеческого ума в формулировании и решении сложных проблем весьма малы по сравнению с размерами проблем. Очень трудно достичь объективно рационального поведения в реальном мире или даже разумного приближения к такой объективной рациональности».

Процесс принятия решения начинается с осознания того состояния или ситуации, в которой находится принимающий решение человек. Этот первый начальный этап можно считать в определенном смысле предварительным, предшествующим процессу решения. Здесь выявляется удовлетворенность или неудовлетворенность тем состоянием, в котором находится система.

На втором этапе формируется желание изменить или сохранить существующее состояние системы определенным образом, т.е. устанавливается цель принятия решения.

Третий этап заключается в определении всех возможных способов или путей достижения цели, перехода в желаемое состояние. Здесь важно в минимальной степени обеспечить полноту возможных решений вплоть до их избыточности. Впоследствии лучше исключить непривлекательное решение, чем пропустить эффективное.

Четвертый этап заключается в выборе из множества возможных решений эффективного, в смысле достижения желаемой цели, с соблюдением при этом некоторых правил выбора. Результатом именно этого этапа является единственное принятое решение. Этот этап является центральным, но он не возможен без первых трех.

Весь процесс принятия решения завершает пятый этап – реализация принятого решения.

Процесс принятия решения можно условно представить схемой, изображенной на рис. 2.1



Рисунок 2.1 – Схема процесса принятия решения

2.3 Общие подходы и рациональные процедуры принятия решений

Процесс принятия решения развивается по спирали. Первой стадией является *предварительное принятие решения*, которое аналогично процессу планирования. Следующей стадией является *превентивное разрешение проблем* – это процесс предвосхищения ситуаций сбоя. И последней стадией является процесс разрешения проблемы, который и позволяет принять окончательное решение.

Проблема – это различия между тем, что должно происходить, и тем, что происходит на самом деле, поэтому она должна быть четко сформулирована.

Для разрешения проблемы может быть предложен следующий подход, основными этапами которого являются:

- формулирование проблемы;
- анализ настоящего состояния дел;
- формулирование цели;

- анализ возможных причин нежелательной ситуации;
- выбор основной причины критической ситуации;
- определение альтернативных решений;
- анализ альтернативных решений;
- принятие решения;
- составление плана действий.

При выборе окончательного решения из множества альтернативных необходимо обратить внимание на психологические аспекты принятия решения, постараться извлечь пользу для достижения личных целей, используя систематический подход, делая акцент на конкретность и ясность поставленных целей.

В настоящее время для принятия решения используется научный подход, который заключается в построении математической модели управляемой системы и последующем ее анализе. Как видно из рисунка 2.1, эта модель занимает центральное место.

Современным научным методом изучения сложных систем является системный анализ, под которым понимается всестороннее, систематизированное, т.е. построенное на основе определенного набора правил, изучение сложного объекта в целом, вместе со всей совокупностью его сложных внешних и внутренних связей, проводимое для выяснения возможностей улучшения функционирования этого объекта.

Укрупненный системный анализ состоит из этапов *постановки задачи, структуризации системы, построения и исследования модели*. Так как не все перечисленные этапы имеют формальный аппарат, то, следовательно, на современном уровне системный анализ не является строгим научным методом, некоторые этапы и задачи выполняются на содержательном уровне, на основе логики, здравого смысла, инженерного опыта и интуиции.

В подходе анализа систем и исследования операций можно выделить следующие пять логических элементов:

- цель или совокупность целей;
- альтернативные средства, при помощи которых можно достичь цели;
- ресурсы, необходимые при использовании каждой системы;
- математическую модель при подходе исследования операций или логическую модель при подходе анализа систем;
- критерий выбора предпочитаемой альтернативы.

Наиболее известными подходами при принятии решений являются следующие.

Эмпирический подход, согласно которому решения могут существовать независимо от конкретных ситуаций. Решения, которые были хороши, могут быть плохи в настоящем времени. Данный подход позволяет изучать методы принятия решений отдельными личностями, накопить определенный опыт.

Подход с точки зрения поведения человека. При принятии того или иного решения должны воедино соединиться существующие и разрабатываемые теории, методы и методика наук о поведении, основанные на здравом смысле понимания людей. Этот подход концентрируется на человеческом аспекте управления – принятия решений. Лицо, принимающее решения, должно сочетать качества ученого и руководителя и поддерживать равновесие между ними с помощью здравого смысла.

Подход с точки зрения социальной системы. При управлении необходимо знать не только индивидуальные аспекты, но и понимать динамику работы группы, рассматривая последнюю с позиции системного подхода, рассматривая отношения и взаимные зависимости разных подзадач в общей задаче.

Существуют два типа систем: закрытые, которые не приспособиваются и не взаимодействуют с окружающей средой, и открытые, которые постоянно взаимодействуют с окружающей средой.

Системы позволяют сохранить общую картину, взаимодействие, но в то же время такой подход не является всеобъемлющим методом объединения разных частей в единое целое. Объединяющими факторами являются ум, рассудительность, а также мастерство.

Подход с точки зрения принятия решения. Он, в основном, ориентируется на системы и позволяет научно описать, рассчитать каждый фактор, которым можно управлять. Однако, существуют решения, которые не могут быть определены качественно и которые нельзя изложить в терминах экономической ценности, например, эстетические решения.

Математический подход, который позволяет дать большой эффект. Математика является инструментом для управления, для принятия решений.

Операционный подход стремится оценить управленческую операцию и использовать любую информацию или теоретические знания, которые дадут наилучшие результаты.

Задачу управления можно рассчитать в трех аспектах: производство, человеческие отношения, администрация.

Одним из универсальных средств решения любых проблем в настоящее время являются математические модели.

В исследовании операций модели описывают поведение систем, включающие во многих случаях в себя коллективы людей, которые ведут себя определенным рациональным образом и могут быть адекватно описаны.

Критерий сравнения альтернатив, называемый также критерием оптимизации или целевой функцией, рассматривается как единственный и очевидный.

При принятии решений необходимо решить ту или иную проблему. Все существующие проблемы подразделяются на три класса:

- хорошо структурированные или количественно сформулированные проблемы, в которых получают численные оценки;
- неструктурированные или качественно выраженные проблемы, в которых количественные зависимости между признаками и характеристиками совершенно неизвестны;
- слабо структурированные или смешанные проблемы, содержащие как количественные, так и качественные элементы, причем последние имеют тенденцию к доминированию.

Методы исследования операций предназначены для хорошо структурированных проблем. Эти методы позволяют принять обоснованное решение в той или иной задаче в зависимости от ее постановки.

Операцией называется мероприятие (система действий), объединенное единым замыслом и направленное на достижение какой-либо цели.

2.4 Основные понятия исследования операций

Целью исследования операций выступает предварительное количественное обоснование решений – определенного выбора зависящих от человека параметров.

Оптимальным называется решение, которое по тем или другим признакам является более предпочтительным, чем другие.

Элементы решения – это параметры, совокупность которых образует решение.

Множеством допустимых решений называются заданные условия, которые четко зафиксированы и не могут быть нарушены.

Показатель эффективности есть количественная мера, позволяющая сравнивать разные решения по эффективности.

Все решения принимаются на основе информации, которой располагает лицо, принимающее решение (ЛПР). Каждая задача в своей постановке должна отражать структуру и динамику знаний ЛПР о множестве допустимых решений и о показателе эффективности.

Задача называется статической, если принятие решения происходит в заранее известном и неизменяющемся информационном состоянии.

Задача называется динамической, если информационные состояния в ходе принятия решения сменяют друг друга.

Информационные состояния ЛПР могут по-разному характеризовать его физическое состояние:

если информационное состояние включает в себя единственное физическое состояние, то задача называется определенной;

если информационное состояние содержит несколько физических состояний и ЛПР кроме их множества знает еще и вероятности каждого из этих физических состояний, то задача называется стохастической (частично неопределенной);

если информационное состояние содержит несколько физических состояний, но ЛПР кроме их множества ничего не знает о вероятности каждого из этих физических состояний, то задача называется неопределенной.

2.5 Методология и методы принятия решений

Эффективность управления зависит от комплексного применения многих факторов, в первую очередь от принимаемых решений и их практического воплощения в жизнь. Для того чтобы управленческое решение было действенным и эффективным, нужно соблюсти определенные методологические основы.

Метод – это способ, прием выполнения тех или иных действий.

Все методы принятия управленческих решений можно объединить в три группы: неформальные (эвристические); коллективные; количественные.

Неформальные методы основываются на аналитических способностях и опыте руководителя. Они представляют собой совокупность логических приемов выбора руководителем оптимальных решений путем теоретического (мыслительного) сравнения альтернатив, с учетом накопленного опыта и интуиции. Преимущество неформальных методов заключается в том, что решения, как правило, принимаются оперативно. Недостатком является довольно высокая вероятность ошибок, так как данный метод базируется на интуиции.

Коллективные методы – метод «мозговой атаки», «мозговой штурм» – применяются, как правило, при необходимости принятия экстренного, сложного, многопланового решения в условиях экстремальной ситуации. Они требуют от руководителей твердого мышления, умения излагать предложение конструктивно, коммуникабельно, компетентно. В ходе «мозговой атаки» предлагаются различные альтернативы, часто выходящие за рамки обычных приемов и способов реализации подобных ситуаций. К коллективным методам относятся метод Делфи и метод кингис□.

Метод Делфи (от названия древнегреческого города Дельфы, известного жившими там мудрецами – предсказателями будущего) представляет собой многоуровневое анкетирование. Руководитель объявляет проблему и предоставляет подчиненным возможность формулирования альтернатив. Первый этап формулирования альтернатив проходит без аргументации. После оценки эксперты предлагают подчиненным рассмотреть данный набор альтернатив. На втором этапе сотрудники должны аргументировать свои предложения. После стабилизации оценок опрос прекращается и принимается предложенное экспертами или скорректированное наиболее оптимальное решение.

Метод кингис□ – японская кольцевая система принятия решения, суть которой состоит в том, что на рассмотрение готовится проект новации. Он передается для обсуждения лицам по списку, составленному руководителем. Каждый должен рассмотреть предлагаемый проект и внести в него свои замечания в письменном виде. После этого проводится совещание, на которое приглашаются

сотрудники, чье мнение не совсем понятно либо выходит за рамки обычного решения.

Решения принимаются руководителем на основе экспертных оценок с помощью одного из следующих принципов:

- *принципа большинства голосов*;
- *принципа диктатора* – за основу берется мнение одного лица группы;
- *принципа Курно* – каждый эксперт предлагает свое решение, выбор не должен ущемлять интересов каждого в отдельности;
- *принципа Парето* – эксперты образуют единое целое, одну коалицию;
- *принципа Эджворта* – эксперты разбиваются на несколько групп, каждой из которых невыгодно отменять свое решение. Зная предпочтения коалиций, можно принять оптимальное решение, не нанося ущерба друг другу.

Количественные методы основываются на научно-практическом подходе, предполагающем выбор оптимальных решений путем обработки больших массивов информации.

Классы задач и методы их решения представлены в табл. 2.1.

Таблица 2.1 – Классы задач и методы их решения

| Классы задач | Методы решения |
|--------------------------|-------------------------------|
| Поисковые | Нелинейное программирование |
| Распределенные | Линейное программирование |
| Управление запасами | Теория управления запасами |
| Массовое обслуживание | Теория массового обслуживания |
| Календарное планирование | Теория расписания |
| Состязательные задачи | Теория игр |

Вопросы для самопроверки

1. Укрупненный системный анализ состоит из этапов?
2. Наиболее известными подходами при принятии решений являются следующие?
3. Все существующие проблемы подразделяются на три класса?
4. Все методы принятия управленческих решений можно объединить в три группы?
5. Решения принимаются руководителем на основе экспертных оценок с помощью

3 РЕШЕНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ ТЕОРИИ ГРАФОВ

3.1 Теоретико-множественное определение графов

Теория графов обладает широким разнообразием возможностей ее применения в различных областях знаний.

В последнее время теория графов нашла важные применения в автоматизации управления производством, в календарном и сетевом планировании, при оптимизации размещения производства, в теории массового обслуживания, при рационализации схем перевозок продукции, при наиболее компактной записи и обработке экономической информации и др. Основным объектом этой теории является *граф* [7].

Формально граф G определяется заданием двух множеств X и U и обозначается $G = \{X, U\}$. Элементы множества X называют *вершинами*. Будем их обозначать буквами x_1, x_2, \dots, x_n . Вершины изображают точками плоскости или пространства. Элементами множества U являются пары связанных между собой элементов множества X . Их изображают отрезками кривых или прямых линий. Обозначать их будем буквами u_1, u_2, \dots, u_m . Взаимное расположение, формы и длины упомянутых отрезков значения не имеют. Важно лишь, что они соединяют две данные вершины множества X . Если в паре вершин x_i и x_j указано направление связи, т.е. какая из них является первой, то соединяющий их отрезок u_k называется *дугой*, если же ориентация не указана – *ребром*.

Если в графе G все элементы множества U изображаются дугами, то граф называется *ориентированным (орграфом)*, если ребрами – *неориентированным*. Иногда рассматривают *смешанные графы*, состоящие из дуг и ребер.

Геометрическое изображение графа часто бывает весьма наглядным. Общий вид графа представлен на рис. 3.1, вершины которого заданы множеством $X = \{a, b, c, d, e, g, h\}$, а дуги – $U = \{(a, a), (c, b), (c, d), (c, e), (d, c), (d, d), (g, h)\}$.

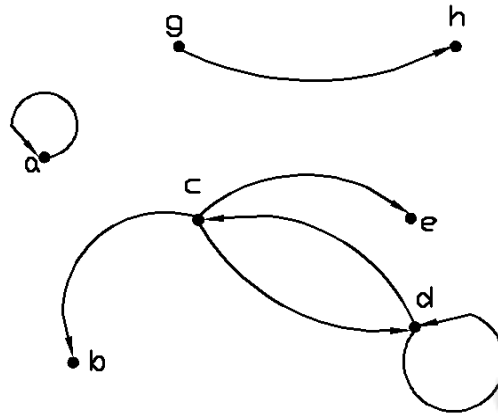


Рисунок 3.1 – Общий вид графа

В приложениях обычно используются графы, в которых множества X и U состоят из конечного числа элементов. Такие графы называют *конечными*.

Иногда бывает удобно дать графу другое определение.

Можно считать, что множество направленных дуг U , соединяющих элементы множества X , отображает это множество само в себя.

Таким образом, *граф G есть пара (X, Γ) , состоящая из множества X и отображения Γ , заданного на этом множестве $G = \{X, \Gamma\}$ [13].*

Так для графа на рис. 3.1 отображение Γ задано следующим образом:

$$\Gamma_a = \{a\}; \quad \Gamma_b = \emptyset;$$

$$\Gamma_c = \{b, d, e\}; \quad \Gamma_d = \{c, d\}; \quad \Gamma_e = \emptyset; \quad \Gamma_g = \{h\}; \quad \Gamma_h = \emptyset.$$

Дуга, соединяющая вершины a и b и направленная от a к b , обозначается $u = (a, b)$.

Путь в орграфе G называется последовательность дуг $\mu = (u_1, \dots, u_k)$, в которой конец каждой предыдущей дуги совпадает с началом последующей.

Путь, проходящей через все вершины и притом только по одному разу, называется *гамильтоновым*.

На рисунке 3.2 представлен орграф, имеющий гамильтонов путь $x_1x_2x_3x_4x_5$.

Путь, содержащий все дуги графа и притом только по одному разу, называется *эйлеровым*.

На рисунке 3.3 представлен орграф с эйлеровым путем $x_1x_2x_3x_1x_4x_3$.

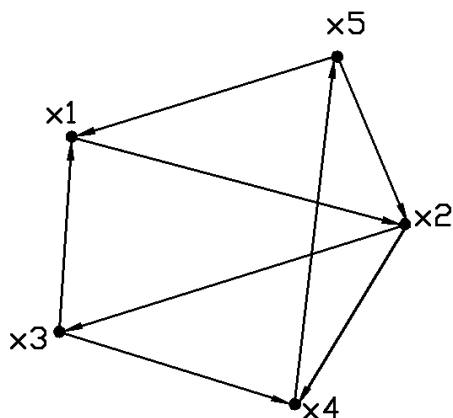


Рисунок 3.2 – Орграф, имеющий гамильтонов путь

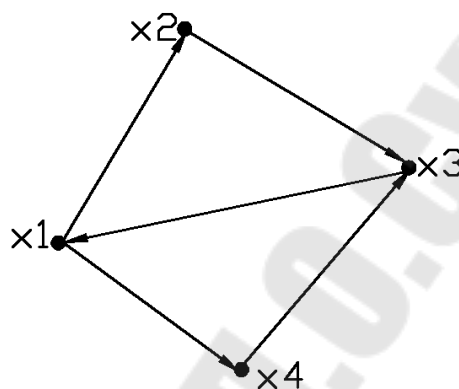


Рисунок – 3.3 Орграф, имеющий эйлеровый путь

Длиной пути $\mu = (u_1, \dots, u_k)$ называется число $l(\mu) = k$, равное числу дуг, составляющих путь μ . Путь может быть *бесконечным* или *конечным*. В случае бесконечного пути полагаем $l(\mu) = \infty$.

Путь, в котором никакая дуга не встречается дважды, называется *простым*.

Контур – это конечный путь $\mu = (x_1, \dots, x_k)$, у которого начальная вершина x_1 совпадает с конечной x_k . При этом контур называется элементарным (гамильтоновым), если все его вершины различны за исключением начальной и конечной, которые совпадают.

На рисунке 3.2 можно выделить, например, контур $x_1x_2x_3x_1$, а также гамильтонов контур $x_1x_2x_3x_4x_5x_1$.

Для неориентированного графа понятия дуга, путь, контур заменяются понятием ребро, цепь, цикл.

Ребро – это отрезок, соединяющий две вершины.

Цепью называется последовательность ребер.

Циклом называется конечная цепь, у которой начальная и конечная вершины совпадают.

Говорят, что *граф связан*, если любые две его вершины можно соединить цепью.

Граф сильно связан, если для любых двух вершин x и y ($x \neq y$) существует путь, идущий из x в y .

Деревом называется конечный связанный неориентированный граф, не имеющий циклов. Начальная вершина называется *корнем* дерева (см. рис.3.4).

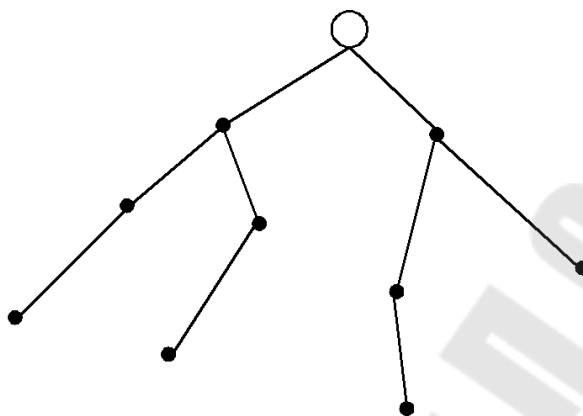


Рисунок 3.4 – Неориентированный граф – дерево

Дерево можно построить, последовательно добавляя ребра в его вершинах. Простейшее дерево состоит из двух вершин, соединенных ребром. Каждый раз, когда мы добавляем еще одно ребро в конце его прибавляется также и вершина. Следовательно, *дерево с n вершинами имеет $n-1$ ребро* [7].

3.2 Матричные способы задания графов

Для задания графов и работы с ними используются матрицы. Особенно удобно использовать матричный эквивалент графа при его исследовании на ЭВМ [13].

Дадим два определения.

Две вершины x и y являются смежными, если они различны и если существует дуга, идущая из x в y .

Дуга u_i называется инцидентной вершине x , если она заходит в эту вершину или исходит из нее.

Обозначим через x_1, x_2, \dots, x_n вершины графа. Введем далее числа

$$s_{i,j} = \begin{cases} -1, & \text{если } u_j \text{ исходит из } x_i \\ 1, & \text{если } u_j \text{ заходит в } x_i \\ 0, & \text{если } u_j \text{ неинцидентна } x_i \end{cases}$$

Матрица $S = [s_{i,j}]$ порядка $n \times m$ называется матрицей инциденций для дуг графа.

В случае неориентированного графа элементами матрицы будут числа 1 и 0 .

Пример 3.1. На рис. 3.5 представлен оргграф, а в таблице 3.1 – матрица инциденций для дуг данного оргграфа.

Таблица 3.1 – Матрица инциденций для дуг оргграфа

| | u1 | u2 | u3 | u4 | u5 | u6 | u7 |
|----|----|----|----|----|----|----|----|
| x1 | -1 | 0 | 0 | 0 | -1 | -1 | 0 |
| x2 | 1 | -1 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 |
| x3 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | -1 |
| x4 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| x5 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 1 |

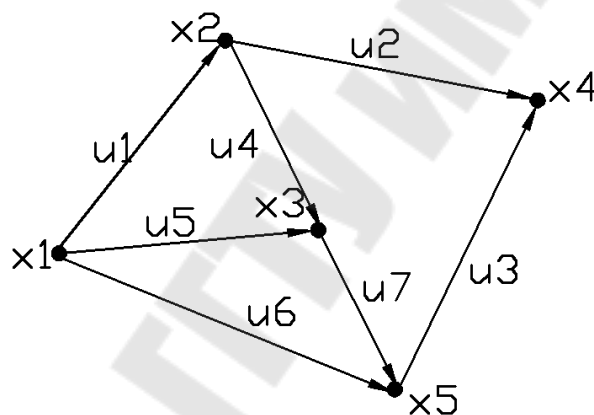


Рисунок 3.5 – Пример 3.1 оргграфа

Пример для неориентированного графа тот же, только на месте числа -1 будут находиться число 1 .

Строки матрицы инциденций называют векторами инциденций.

Как для оргграфов, так и неориентированных графов можно определить матрицу смежности вершин.

Матрица смежности вершин оргграфа G , содержащего n вершин, это квадратная матрица $P = [p_{i,j}]$ n -го порядка, строки и столбцы которой соответствуют вершинам графа G . Элементы $p_{i,j}$ матрицы равны числу дуг, идущих из i -ой вершины в j -ую. Если оргграф не содержит параллельных дуг, то матрица состоит из чисел 1 и 0 .

В случае неориентированного графа ему вместе с ребром (x_i, x_j) принадлежит и ребро (x_j, x_i) , поэтому матрица будет симметричной. Справедливо и обратное утверждение: *любой симметричной матрице с целыми неотрицательными элементами можно поставить в соответствие граф.*

Пример 3.2. Построение матрицы смежности вершин для орграфа (см. рис. 3.6 и табл. 3.2) и неориентированного графа (см. табл. 3.3).

Таблица 3.2 – Матрица смежности вершин орграфа

| | x1 | x2 | x3 | x4 |
|----|----|----|----|----|
| x1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| x2 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| x3 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| x4 | 0 | 1 | 0 | 1 |

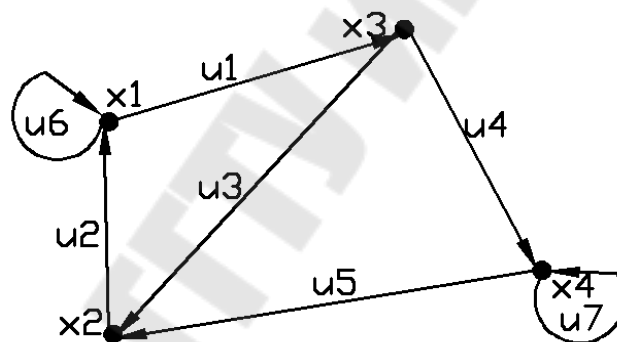


Рисунок 3.6 – Пример 3.2 орграфа

Таблица 3.3 – Матрица смежности вершин неориентированного графа

| | x1 | x2 | x3 | x4 |
|----|----|----|----|----|
| x1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| x2 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| x3 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| x4 | 0 | 1 | 1 | 1 |

По матрице смежности вершин легко определить полустепени захода и исхода вершин, а значит, и степень вершины.

Полустепень захода $P^+(x_i)$ вершины x_i равна сумме элементов i -ого столбца; полустепень исхода $P^-(x_i)$ – сумме элементов i -й строки.

Вычислим полустепени захода и исхода для каждой вершины орграфа (см. рис. 3.6), матрица смежности которого представлена в таблице 3.2, получим таблицу 3.4.

Таблица 3.4 – Матрица смежности вершин орграфа и полустепени заходов и исходов

| | x1 | x2 | x3 | x4 | $P^-(x_i)$ |
|------------|----|----|----|----|------------|
| x1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 2 |
| x2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| x3 | 0 | 1 | 0 | 1 | 2 |
| x4 | 0 | 1 | 0 | 1 | 2 |
| $P^+(x_i)$ | 2 | 2 | 1 | 2 | |

Например, для вершины x_3 : $P^+(x_3)=1$, $P^-(x_3)=2$, так что $P(x_3)=3$.

Граф G можно задать матрицей смежности дуг (ребер). Матрица смежности дуг орграфа – это квадратная матрица $[q_{i,j}]$ m -го порядка (m –число дуг). Строки и столбцы матрицы соответствуют дугам (ребрам) графа. Элементы $q_{i,j}$ равны 1, если дуга u_i непосредственно предшествует дуге u_j , и 0 в остальных случаях.

Матрицей смежности ребер неориентированного графа является матрица m -го порядка (m –число ребер) с элементами $q_{i,j}$, равными 1, если ребра u_i и u_j смежные, и 0 в остальных случаях.

3.3 Упорядочение элементов орграфа. Алгоритм Фалкерсона

Расчеты в задачах, связанных с графами упрощаются, если их элементы упорядочены. Здесь потребуется понятие предшествования вершин.

Говорят, что вершина x_i предшествует вершине x_j , если существует путь из x_i в x_j , тогда x_i называют предшествующей вершине x_j , а x_j – последующей за x_i .

Под упорядочением вершин связного орграфа без контуров понимают такое разбиение его вершин на группы, при котором:

1. Вершины первой группы не имеют предшествующих, а вершины последней – последующих.

2. Вершины любой другой группы не имеют предшествующих в следующей группе.
3. Вершины одной и той же группы дугами не соединяются.

Можно показать, что описанное разбиение всегда возможно [13].

Аналогичным образом вводится понятие *упорядочения дуг*.

В результате упорядочения элементов получают граф, изоморфный данному. *Изоморфны* – содержится одна и та же информация. На рисунке 3.7 а) и б) изображен по существу один и тот же граф.

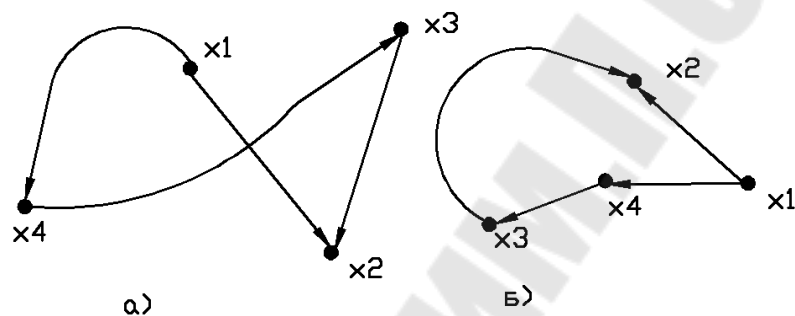


Рисунок 3.7 – Варианты изображения одного и того же орграфа

Упорядочение элементов выполняют графическим или матричным способом. Графический способ упорядочения вершин (*алгоритм Фалкерсона*) состоит из следующих шагов [8].

1. Находят вершины графа, в которые не входит ни одна дуга. Они образуют первую группу. Нумеруют вершины группы в натуральном порядке 1, 2, ... При этом присвоение номеров вершинам внутри группы может быть сделано не единственным образом, что не имеет значения.

2. Мысленно вычеркивают все пронумерованные вершины и дуги, из них выходящие. В получившемся графе найдется по крайней мере одна вершина, в которую не входит ни одна дуга. Этой вершине, входящей во вторую группу, присваивают очередной номер и т. д. Этот шаг повторяют до тех пор, пока все вершины не будут упорядочены (пронумерованы).

Аналогичным образом упорядочивают дуги орграфа. Сначала находят дуги, не имеющие непосредственно предшествующих (они образуют I группу). После вычеркивания дуг I группы в оставшемся графе вновь выделяют дуги, не имеющие непосредственно предшествующих (они образуют II группу). И так до тех пор, пока все

дуги не будут разбиты на группы. В заключение упорядоченным дугам присваивают новые обозначения с индексами 1, 2,...

Пример 3.3. Упорядочить вершины данного графа (см. рис 3.8) и построить изоморфный граф (см. рис. 3.9).

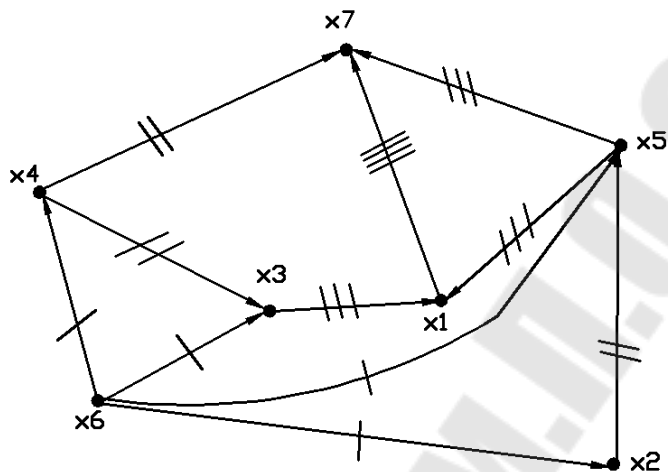


Рисунок 3.8 – Связанный оргграф без контуров

Решение. Анализируя данный граф (рис. 3.8), замечаем, что в вершину x_6 не входит ни одна дуга. Следовательно, x_6 не имеет предшествующих, а потому относим ее к I группе. Больше подобных вершин на графе нет. Исключаем из рассмотрения вершину x_6 и дуги, из нее исходящие (на рис. 3.8, эти дуги отмечены одной черточкой – первое вычеркивание). В оставшемся графе опять находим вершины, в которые не заходит ни одна дуга. Таковыми будут x_2 и x_4 . Они образуют II группу. Выполняем второе вычеркивание и т. д. (см. рис. 3.8).

На рисунке 3.9 для наглядности проведены вертикали, соответствующие группам разбиения, на которых последовательно отмечались точки: сначала x_6 , затем x_2 и x_4 и т. д. В заключение эти точки соединяли дугами так, как на данном графе (см. рис. 3.8), и получили изоморфный граф с упорядоченными вершинами. Остается перенумеровать его вершины в натуральном порядке.

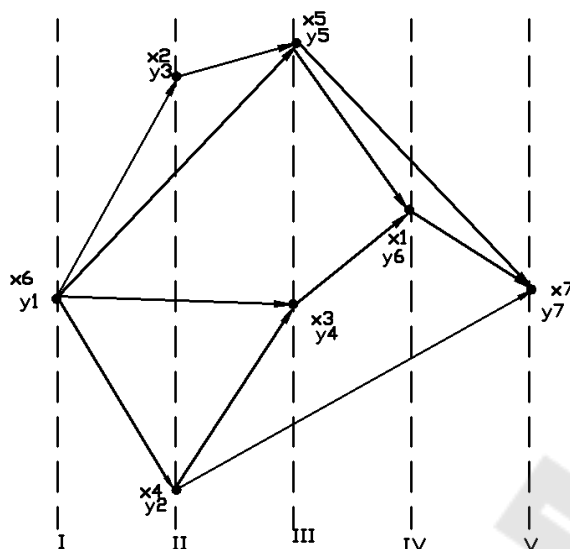


Рисунок 3.9 – Построение изоморфного графа

Рассмотрим матричный способ упорядочения вершин для рисунка 3.8 [13].

Сначала построим матрицу смежности вершин для орграфа (см. рис. 3.8) и вычислим полустепени захода вершин, получим таблицу 3.5.

Таблица 3.5 – Матрица смежности вершин для рисунка 3.8

| | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 |
|------------|----|----|----|----|----|----|----|
| x1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| x2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| x3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| x4 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| x5 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| x6 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| x7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $P^+(x_i)$ | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 0 | 3 |

Обозначим через Vx_1, Vx_2, \dots, Vx_6 векторы, являющиеся строками матрицы смежности. Вычислим компоненты вектора $Vl = Vx_1 + Vx_2 + \dots + Vx_6$ и припишем их внизу к матрице смежности.

В вершину x_6 не заходит ни одна дуга, она образует первую группу. Исключаем в дальнейшем из рассмотрения вершину x_6 и дуги $(x_6, x_4), (x_6, x_3), (x_6, x_2), (x_6, x_5)$. Вычислим компоненты вектора

$V2=V1-Vx6$ и запишем во второй дополнительной строке (см. табл. 3.6). В этой таблице в строке $V2$ появилось два нуля, соответствующие столбцам x_2 и x_4 . Эти нули свидетельствуют о том, что в вершины x_2 и x_4 не заходит ни одна дуга, т.е. вершины x_2 и x_4 не имеют предшествующих в графе без вершины x_6 и дуг (x_6, x_4) , (x_6, x_3) , (x_6, x_2) , (x_6, x_5) . Следовательно, вершины x_2 и x_4 образуют вторую группу (см. табл. 3.6). Затем находим вектор $V3=V2-(Vx2+Vx4)$ с двумя нулевыми компонентами – x_3 и x_5 . Вершины x_3 и x_5 образуют третью группу (см. табл. 3.6). Затем находим вектор $V4=V3-(Vx3+Vx5)$ с одной нулевой компонентой – x_1 . Вершина x_1 образует четвертую группу (см. табл. 3.6).

Затем находим вектор $V5=V4-Vx1$ с одной нулевой компонентой – x_7 (см. табл. 3.6). Вершина x_7 образует последнюю пятую группу.

В результате упорядочения вершин получаем орграф, изоморфный данному (см. рис.3.9).

Если орграф упорядочен правильно и вершины перенумерованы в натуральном порядке, то стрелки всех дуг направлены вправо, а номера начал дуг, меньше номеров их концов.

Таблица 3.6

| | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | Группы |
|----|----|----|----|----|----|----|----|--------|
| x1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | IV |
| x2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | II |
| x3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | III |
| x4 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | II |
| x5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | III |
| x6 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | I |
| x7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | V |
| V1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 0 | 3 | |
| V2 | 2 | 0 | 1 | 0 | 1 | - | 3 | |
| V3 | 2 | - | 0 | - | 0 | - | 2 | |
| V4 | 0 | - | - | - | - | - | 1 | |
| V5 | - | - | - | - | - | - | 0 | |

3.4 Задача о кратчайшем пути

В практических приложениях имеет большое значение задача о нахождении кратчайшего пути между двумя вершинами связанного графа.

Задача о кратчайшем пути на графе в общем виде может быть сформулирована следующим образом.

Дан граф $G = \{X, U\}$. Каждому ребру этого графа приписано некоторое число $l(u) \geq 0$, называемое длиной ребра. В частных случаях $l(u)$ может быть расстоянием между вершинами, соединяемыми ребром u , временем или стоимостью проезда по этому ребру и т.п. При этом любая цепь μ будет характеризоваться длиной

$$l(\mu) = \sum_{u \in \mu} l(u) \quad (3.1)$$

Требуется для двух произвольных вершин a и b графа G найти путь μ_{ab} , причем такой, чтобы его полная длина была наименьшей [13].

3.5 Алгоритмы поиска кратчайшего пути в графе с ребрами единичной и произвольной длины

Сначала рассмотрим правило для решения задачи частного вида, когда длина каждого ребра равна 1.

Общее правило для нахождения кратчайшего пути в графе состоит в том, чтобы каждой вершине x_i приписать индекс λ_i , равный длине кратчайшего пути из данной вершины в конечную вершину [13].

Приписывание индексов в случае графа с ребрами единичной длины производится в следующем порядке.

1. Конечной вершине x_0 приписывается индекс 0.
2. Всем вершинам, из которых идет ребро в конечную вершину, приписывается индекс 1.
3. Всем вершинам, еще не имеющим индексов, из которых идет ребро в вершину с индексом λ_i , приписывается индекс $\lambda_i + 1$.

Этот процесс продолжается до тех пор, пока не будет помечена начальная вершина. По окончании разметки индекс у начальной вершины будет равен длине кратчайшего пути. Сам кратчайший путь

найдем, если будем двигаться из начальной вершины в направлении убывания индексов.

Задача приписывания вершинам графа числовых индексов усложняется, если ребра графа имеют произвольную длину.

Процесс приписывания индексов для такого графа заключается в следующем [13].

1. Каждая вершина x_i помечается индексом λ_i . Первоначально конечной вершине x_0 приписывается индекс $\lambda_0 = 0$. Для остальных вершин предварительно полагаем $\lambda_i = \infty$.
2. Ищем такую дугу (x_i, x_j) , для которой $\lambda_j - \lambda_i > l(x_i, x_j)$, и заменяем индекс λ_j индексом $\lambda'_j = \lambda_i + l(x_i, x_j) < \lambda_j$.

Продолжаем этот процесс замены до тех пор, пока остается хотя бы одна дуга, для которой можно уменьшить λ_j .

Сформулируем правило для нахождения кратчайшего пути.

Пусть $x_n = a$ – начальная вершина с индексом λ_n . Ищем вершину x_{p_1} такую, что $\lambda_{p_n} - \lambda_{p_1} = l(x_{p_n}, x_{p_1})$, и т.д. до тех пор, пока не дойдем до конечной вершины $x_{p_{k+1}} = x_0 = b$. Путь $\mu(x_n, x_{k_1}, x_{k_s}, x_0)$, длина которого равна λ_n , является кратчайшим.

На рисунке 3.10 представлен пример нахождения кратчайшего пути из вершины a в вершину b .

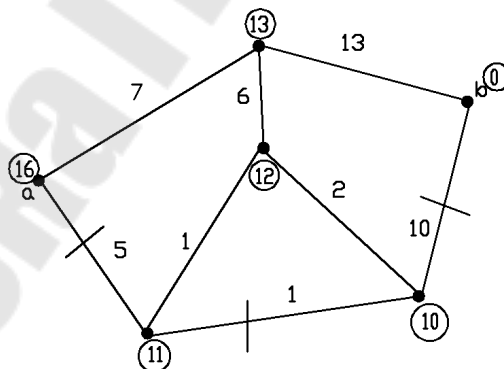


Рисунок 3.10 – Нахождение кратчайшего пути

3.6 Алгоритм поиска длиннейшего пути в графе с ребрами произвольной длины

Алгоритм нахождения длиннейшего пути представляет собой процесс приписывания индексов для вершин графа и заключается в следующем [15].

- 1 Каждая вершина x_i помечается индексом λ_i . Первоначально начальной вершине x_0 приписывается индекс $\lambda_0 = 0$. Для остальных вершин предварительно полагаем $\lambda_i = -\infty$.
- 2 Ищем такую дугу (x_i, x_j) , для которой $\lambda_j - \lambda_i < l(x_i, x_j)$, и заменяем индекс λ_j индексом $\lambda'_j = \lambda_i + l(x_i, x_j) > \lambda_j$.

Продолжаем этот процесс замены до тех пор, пока остается хотя бы одна дуга, для которой можно увеличить λ_j .

Пусть $x_n = b$ – конечная вершина с индексом λ_n . Ищем вершину x_{p_1} , такую, что $\lambda_{p_n} - \lambda_{p_1} = l(x_{p_1}, x_{p_n})$, и т.д. до тех пор, пока не дойдем до начальной вершины $x_{p_{k+1}} = x_0 = a$. Путь $\mu(x_0, \dots, x_{k_s}, \dots, x_{k_1}, x_n)$, длина которого равна λ_n , является длиннейшим.

3.7 Алгоритм поиска тончайшего пути

Тончайшим путем между двумя вершинами графа называется путь минимальной тонкости.

1. Начальной вершине x_0 присваиваем метку $d(x_0) = -\infty$, остальным вершинам x_i – метку $d(x_i) = +\infty$. Начальную вершину окрашиваем.
2. Для каждой неокрашенной вершины x_i , связанной с последней окрашенной вершиной y дугой (y, x_i) пересчитываем ее метку по формуле $d(x_i) = \min(\max(d(y), l(y, x_i)), d(x_i))$.
3. Среди неокрашенных находим вершину x_s с минимальной меткой и окрашиваем ее и ведущую в нее из одной из ранее окрашенных вершин y_r дугу (y_r, x_s) , удовлетворяющую условию $d(x_s) = \max(d(y_r), l(y_r, x_s))$. Если при этом окрашенной оказалась конечная вершина, то задача решена, тонкость искомого пути равна метке конечной вершины, а сам путь изображен на окрашенном дереве. В противном случае переходим к п. 2.

По окончании выполнения алгоритма окрашенные вершины и дуги составят корневое дерево с корнем x_0 , отображающее тончайшие пути из этой вершины во все остальные.

3.8 Формирование технологических операций

Технологической операцией будем называть последовательность *переходов*, выполняемых одним станком. При формировании технологических операций такого типа возникает следующая задача [22].

Дана последовательность переходов P_1, \dots, P_n в обработке некоторой детали. Для каждого перехода заданы варианты выбора станков C_1, \dots, C_m , которые могут его выполнить. Требуется так выбрать станки для выполнения переходов, чтобы число получаемых при этом операций было минимально. На рис. 3.11 приведены пример этой задачи и одно из его решений. Покажем сводимость к задаче КРАТЧАЙШИЙ ПУТЬ.

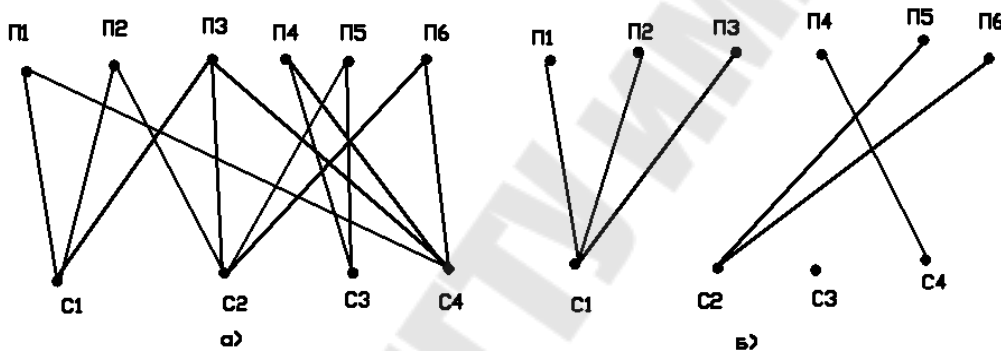


Рисунок 3.11 – Пример задачи формирования технологических операций а) и одного его решения б)

Построим орграф с вершинами s, t и вершинами $v_{i,j}$ для каждого перехода P_j и каждого станка C_i , который может его выполнить. Множество дуг будут составлять дуги $v_{i,j} \rightarrow v_{k,j+1}, s \rightarrow v_{i,1}, v_{i,n} \rightarrow t$, которые следует провести для всех допустимых наборов значений индексов i, j, k . Все дуги вида $v_{i,j} \rightarrow v_{i,j+1}$ нагрузим нулем, остальные – единицей. На рис. 3.12 приведен пример построения орграфа для примера задачи (см. рис. 3.11).

Произвольный путь из истока s в сток t на построенном взвешенном орграфе обладает следующими свойствами:

- промежуточные вершины пути $v_{i_1,1}, v_{i_2,2}, \dots, v_{i_n,n}$ определяют разбиение последовательности переходов на операции, поскольку, i_1, i_2, \dots, i_n это номера станков, которые их выполняют. Причем нет

никакого варианта разбиения, которому не соответствовал бы некоторый путь из s в t ;

б) каждый набор промежуточных вершин, лежащих вдоль неудлиняемых участков пути с нулевой длиной, определяет одну операцию. Такими наборами в приведенном примере будут $\{v_{1,1}, v_{1,2}, v_{1,3}\}$, $\{v_{4,4}\}$, $\{v_{2,5}, v_{2,6}\}$;

в) каждая промежуточная дуга с единичной длиной определяет смену станка. Следовательно, длина пути без единицы равна числу операций.

Из этих свойств вытекает сводимость, поскольку по кратчайшему пути из истока в сток на построенном взвешенном орграфе однозначно находится разбиение последовательности переходов на минимальное число операций [22].

На рисунке 3.12 горизонтальные дуги нагружены нулем, остальные – единицей; жирные дуги обозначают кратчайший путь, соответствующий решению (б) на рисунке 3.11; длина пути без единицы равна числу операций, т.е. трем операциям: операция O_1 включает переходы P_1, P_2, P_3 и выполняется на станке C_1 ; операция O_2 включает переход P_4 и выполняется на станке C_3 ; операция O_3 включает переходы P_5, P_6 и выполняется на станке C_2 .

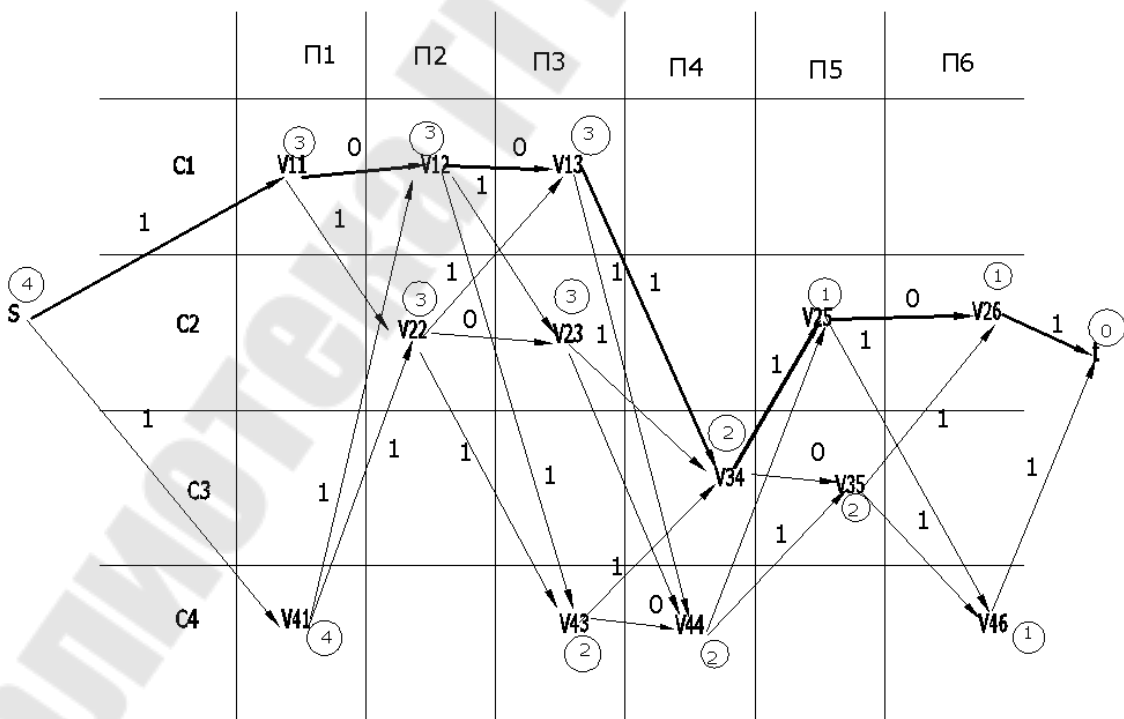


Рисунок 3.12 – Пример формирования технологических операций как поиска Кратчайшего Пути на орграфе

3.9 Балансировка технологического маршрута

Следующая производственная задача, сводимая к задаче поиска пути на графе, возникает при выборе технологических маршрутов обработки деталей в гибкой производственной системе (ГПС).

Пусть на вход некоторой ГПС поступила партия одинаковых деталей для изготовления изделий одной номенклатуры. Задана установленная для этой номенклатуры последовательность технологических операций. Для каждой операции определены допустимые назначения на станки ГПС и время ее выполнения каждым подходящим станком. Время выполнения операции может зависеть от станка, который ее выполняет. Известно время транспортировки детали от одного станка к другому. Требуется так назначить операции на станки, чтобы получаемый при этом технологический маршрут прохождения станков был *сбалансирован* (т. е. длительности обработки и транспортировки детали на всех участках маршрута, по возможности, выравнены). Балансировка технологического маршрута приводит к наиболее равномерной загрузке оборудования ГПС.

Пусть O_1, O_2, \dots, O_n – последовательность операций, а C_1, C_2, \dots, C_m – станки ГПС. Построим орграф с вершинами s, t и вершинами $u_{i,j}, v_{i,j}$ для каждой операции O_j и каждого станка C_i , который может ее выполнить. Вершины соединим дугами $s \rightarrow u_{i,1}, v_{i,n} \rightarrow t, u_{i,j} \rightarrow v_{i,j}, v_{i,j} \rightarrow u_{k,j+1}$ для всех допустимых наборов значений i, j, k .

Все дуги вида $u_{i,j} \rightarrow v_{i,j}$ нагрузим временем выполнения операции O_j станком C_i , все дуги вида $v_{i,j} \rightarrow u_{k,j+1}, i \neq k$, – временем транспортировки от станка C_i к станку C_k , а все дуги вида $s \rightarrow u_{i,1}, v_{i,n} \rightarrow t, v_{i,j} \rightarrow u_{i,j+1}$ – нулем.

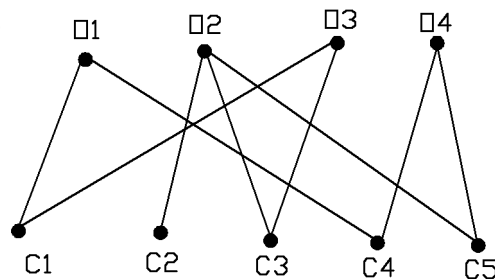


Рисунок 3.13 – Пример допустимых назначений операций на станки

Рассмотрим пример построения орграфа при $n=4$, $m=5$. Допустимые назначения операций на станки определены ребрами двудольного графа на рисунке 3.13, а время выполнения операций подходящими станками и время транспортировки представлены в таблицах 3.7 и 3.8. Клетки, соответствующие недопустимым назначениям операции на станки, не заполнены. На рис. 3.14 изображен соответствующий орграф.

Произвольный путь на построенном орграфе из s в t проходит через промежуточные вершины $u_{i_1,1}, v_{i_1,1}, u_{i_2,2}, v_{i_2,2}, \dots, u_{i_n,n}, v_{i_n,n}$ и обладает следующими свойствами:

а) он определяет вариант допустимого назначения операций на станки, поскольку i_1, i_2, \dots, i_n – это номера станков, которые должны выполнять операции O_1, O_2, \dots, O_n . Причем нет ни одного варианта допустимого назначения операций, которому не соответствовал бы некоторый путь из s в t .

б) соответствующий путь маршрут проходит станки в последовательности $C_{i_1}, C_{i_2}, \dots, C_{i_n}$. Самая длинная дуга пути определяет самый длительный по времени процесс на маршруте. Если такой дугой окажется $u_{i_k,k} \rightarrow v_{i_k,k}$, то самым длительным процессом будет операция O_k , если $v_{i_k,k} \rightarrow u_{i_{k+1},k+1}$ то – транспортировка от станка C_{i_k} к станку $C_{i_{k+1}}$

Сбалансированному маршруту поставим в соответствие путь из s в t с наиболее короткой длиннейшей дугой. Тем самым время наиболее длительного процесса на маршруте мы сделаем по возможности меньше и приблизим его к времени остальных. Такая интерпретация критерия балансировки окончательно сводит исходную задачу к задаче ТОНЧАЙШИЙ ПУТЬ [22].

Таблица 3.7

| | C1 | C2 | C3 | C4 | C5 |
|----|----|----|----|----|----|
| O1 | 3 | | | 4 | |
| O2 | | 2 | 5 | | 6 |
| O3 | 1 | | 4 | | |
| O4 | | | | 5 | 3 |

Таблица 3.8

| | C1 | C2 | C3 | C4 | C5 |
|----|----|----|----|----|----|
| C1 | 0 | 7 | 9 | 5 | 3 |
| C2 | 7 | 0 | 8 | 4 | 4 |
| C3 | 9 | 8 | 0 | 3 | 6 |
| C4 | 3 | 4 | 3 | 0 | 5 |
| C5 | 3 | 4 | 6 | 5 | 0 |

Существуют следующие две модификации задачи балансировки. В первой требуется найти самый производительный, а не сбалансированный маршрут. Самым производительным является маршрут, который деталь проходит за минимальное время. Такая задача, очевидно, сводится к задаче КРАТЧАЙШИЙ ПУТЬ. Во второй модификации задано не время выполнения операций и транспортировки, а их скорость. Такая задача сводится к исходной заменой всех скоростных параметров P на временные $1/P$. Однако можно поступить иначе. Сбалансированным можно считать маршрут, вдоль которого деталь проходит с наибольшей скоростью. Эта скорость будет определяться самым непроизводительным станком или самым низкоскоростным транспортным средством на маршруте. Им будет соответствовать самая короткая дуга на широчайшем пути из s в t , если все нулевые длины дуг в указанном взвешенном орграфе заменить на очень большие (превышающие практически возможные). Отсюда вытекает сводимость второй модификации к задаче ШИРОЧАЙШИЙ ПУТЬ.

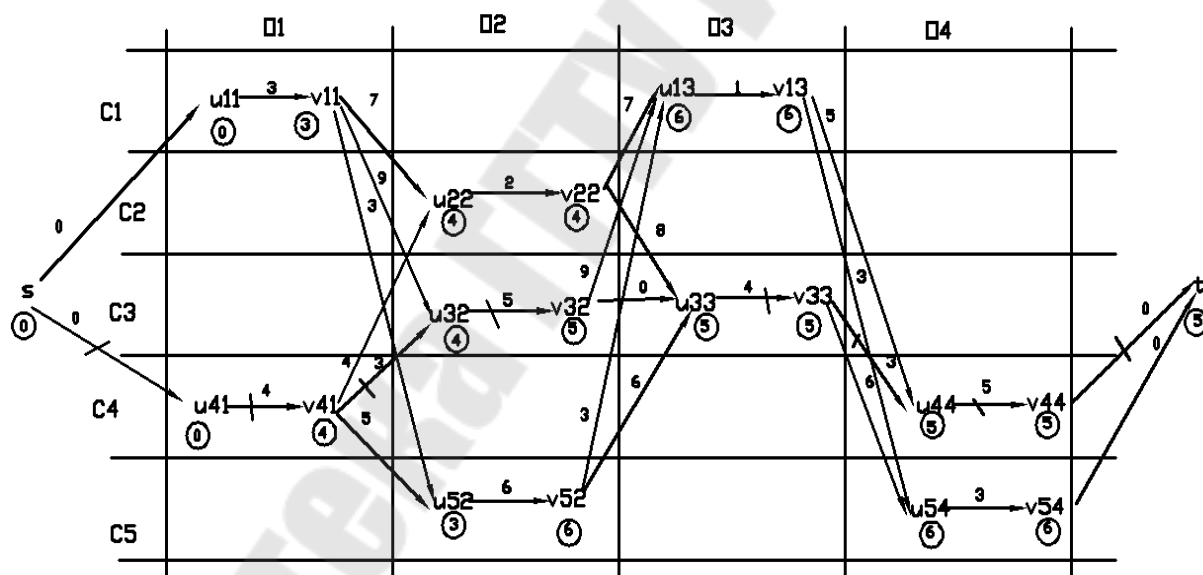


Рисунок 3.14 – Орграф для задачи балансировки с исходными данными на рис.3.13 и табл. 3.7, табл. 3.8

Под вершинами указана толщина тончайшего пути, ведущего к ним из s ; штрих-линией отмечен тончайший путь из s в t с толщиной 5.

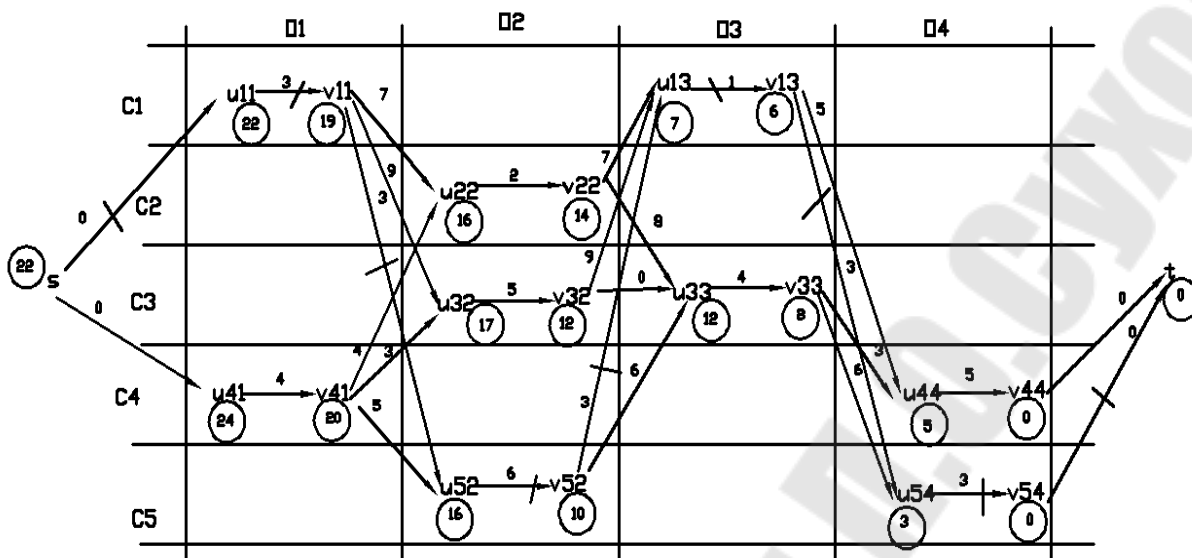


Рисунок 3.15 – Орграф для задачи самый Производительный маршрут с исходными данными на рис.3.13 и табл. 3.7, 3.8

Минимальное время, за которое деталь проходит маршрут, равно $22 - \{O_1 \rightarrow C_1; O_2 \rightarrow C_5; O_3 \rightarrow C_1; O_4 \rightarrow C_5\}$ (см. рис. 3.15).

3.10 Оснащение обрабатывающего центра

Пусть имеется станок типа «обрабатывающий центр», магазин которого может оснащаться инструментами различных типов. Для инструмента каждого типа известно, сколько гнезд он занимает в магазине и каково время его работы. В магазине станка можно размещать несколько экземпляров инструмента одного типа. Требуется так оснастить станок инструментами, чтобы общее время их последовательной работы было максимальным, а емкость магазина была использована полностью [22].

Математическим описанием этой задачи является следующая задача рюкзачного типа.

ЦЕЛОЧИСЛЕННЫЙ РЮКЗАК С ОГРАНИЧЕНИЕМ – РАВЕНСТВОМ. Для положительных целых чисел a_1, a_2, \dots, a_n, b и неотрицательных вещественных чисел c_1, c_2, \dots, c_n найти неотрицательные целые значения переменных x_1, x_2, \dots, x_n , максимизирующие целевую функцию

$$z = c_1x_1 + \dots + c_nx_n$$

при ограничении

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b \quad (3.2)$$

Параметр b можно рассматривать как объем рюкзака, в который можно укладывать предметы n типов, причем по несколько экземпляров каждого типа, а параметры a_j, c_j – как объем и стоимость одного предмета j -го типа. Равенство $x_j = k$ означает, что в рюкзак укладывается k экземпляров предмета j -го типа. Рюкзак нужно упаковать предметами так, чтобы его объем был использован полностью, а стоимость – максимальной. Объем рюкзака можно интерпретировать как объем магазина обрабатывающего центра, предметы – как инструменты с временем работы c_1, \dots, c_n и числами занимаемых гнезд a_1, \dots, a_n соответственно. Сформулированная рюкзачная задача сводится к задаче ДЛИННЕЙШИЙ ПУТЬ.

Без ограничения общности можно считать, что коэффициенты уравнения (2.2) различны. Если же найдутся такие u и v , что $a_u = a_v, c_u \leq c_v$, то переменную x_u можно приравнять нулю, поскольку предметы типа v имеют тот же объем и не меньшую стоимость, чем предметы типа u . Находя все пары u и v с указанным свойством и устраняя переменные x_u , можно добиться того, что коэффициенты при оставшихся переменных будут различны. Полученную таким образом задачу будем называть приведенной.

Ясно, что решение исходной задачи получается из решения приведенной приравниванием нулю устраненных переменных. Для сводимости необходима именно приведенная задача.

Построим орграф с вершинами $0, 1, 2, \dots, b$. Дугу $i \rightarrow k$ проведем всякий раз, когда среди индексов коэффициентов $1, 2, \dots, n$, найдется такой индекс j , что $a_j = k - i$. Поскольку коэффициенты a_1, \dots, a_n различны, для каждой дуги существует единственный такой индекс. Это позволяет нагрузить дуги $i \rightarrow k$ числами c_j .

Рассмотрим пример построения орграфа для задачи:

$$\begin{aligned} z &= 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 6. \end{aligned} \quad (3.3)$$

В ограничении коэффициенты при x_1, x_4 одинаковы. Устраняя x_4 , получаем приведенную задачу:

$$\begin{aligned} z &= 5x_1 + 2x_2 + 4x_3, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 6. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Орграф, соответствующий этой задаче, изображен на рис. 3.16.

Решение задачи находится следующим образом. Для каждого $j=1, 2, \dots, n$ нужно просмотреть данный путь, найти все дуги $v_i \rightarrow v_{i+1}$ со свойством $a_j = v_{i+1} - v_i$ и посчитать их число. Оно – то и равно x_j^π .

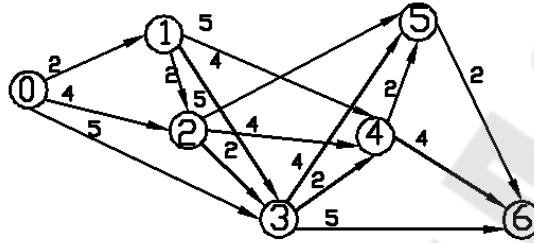


Рисунок 3.16 – Орграф для задачи (3.4)

На рисунке 3.17 длиннейший путь выделен штрих-линией. Ему соответствует решение задачи (3.4): $x_1^* = 0, x_2^* = 4, x_3^* = 1, z^* = 12$.

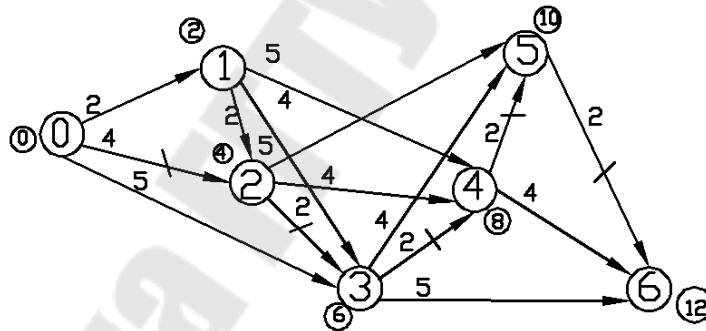


Рисунок 3.17 – Вариант решения 1 для задачи (3.4)

На рис. 3.18 длиннейший путь выделен штрих-линией. Ему соответствует решение задачи (2.4): $x_1^* = 0, x_2^* = 2, x_3^* = 2, z^* = 12$.

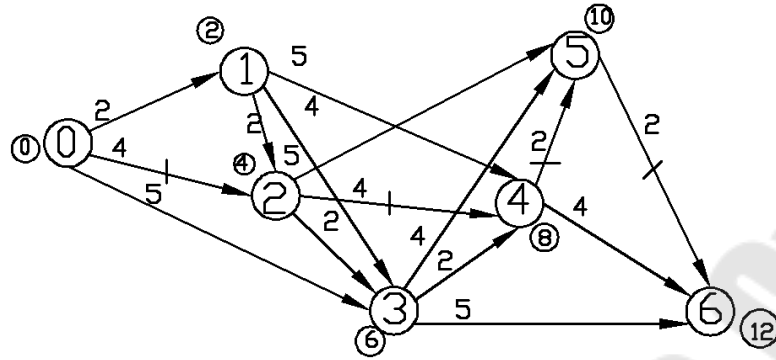


Рисунок 3.18 – Вариант решения 2 для задачи (3.4)

На рис. 3.19 длиннейший путь выделен штрих-линией. Ему соответствует решение задачи (3.4): $x_1^* = 0, x_2^* = 0, x_3^* = 3, z^* = 12$.

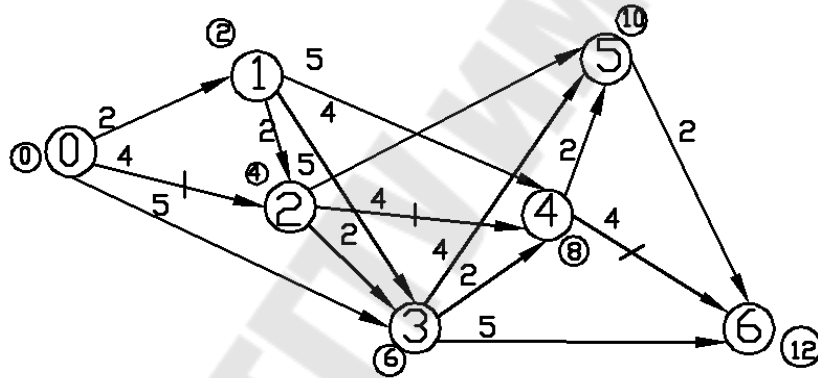


Рисунок 3.19 – Вариант решения 3 для задачи (3.4)

На рисунке 3.20 длиннейший путь выделен штрих-линией. Ему соответствует решение задачи (3.4): $x_1^* = 0, x_2^* = 6, x_3^* = 0, z^* = 12$.

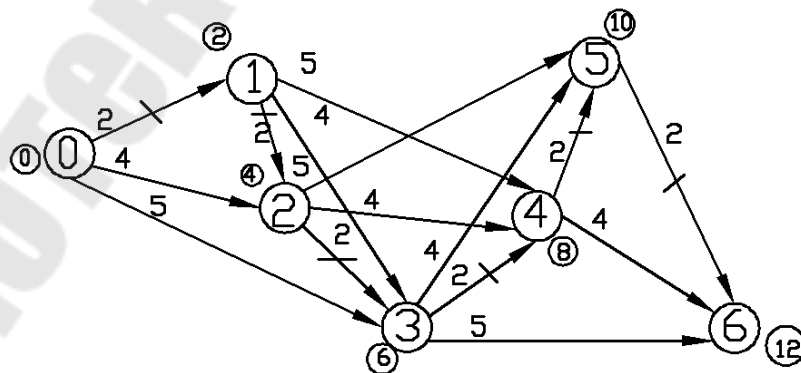


Рисунок 3.20 – Вариант решения 4 для задачи (3.4)

Аналогичная рюкзачная задача, в которой нужно минимизировать z , сводится к задаче КРАТЧАЙШИЙ ПУТЬ. При сводимости нужно лишь изменить правило построения приведенной задачи, устраняя вместо x_u переменную x_v .

В ограничении (3.3) коэффициенты при x_1, x_4 одинаковы. Устраняя x_1 , получаем приведенную задачу:

$$\begin{aligned} z &= 2x_2 + 4x_3 + 3x_4, \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 6. \end{aligned} \quad (3.5)$$

На рисунке 3.21 представлен орграф для задачи (3.5).

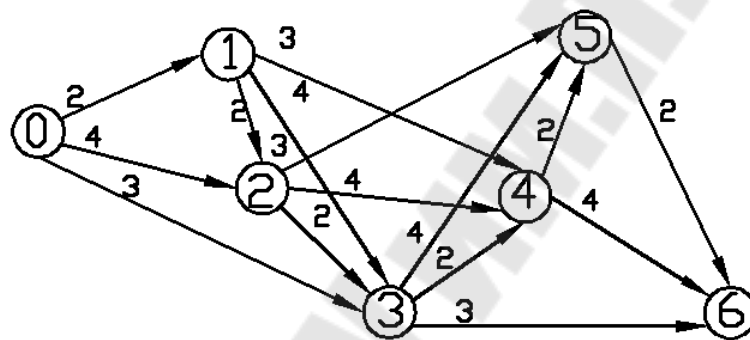


Рисунок 3.21 – Орграф для задачи (3.5)

Для задачи (3.5) есть только один кратчайший путь, проходящий через вершины 0, 3, 6. Ему соответствует решение задачи (3.5): $x_4^* = 2, x_2^* = 0, x_3^* = 0, z^* = 6$ (см. рис. 3.22).

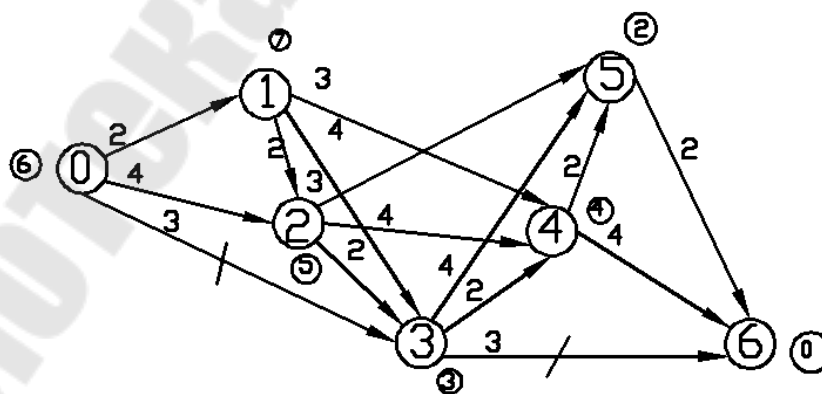


Рисунок 3.22 – Вариант решения 1 для задачи (3.5)

Вопросы для самопроверки

1. Дайте два теоретико-множественных определений графа.
2. Что такое гамильтонов контур, путь?
3. Что такое ребро, цепь, цикл, дерево?
4. Какие матричные способы задания графа вы знаете?
5. Что понимают под упорядочением вершин связного орграфа без контуров?
6. Чем отличается упорядочивание вершин алгоритмом Фалкерсона от матричного способа упорядочивания?
7. Задача о кратчайшем пути.
8. Алгоритм поиска кратчайшего пути в орграфе
9. Алгоритм поиска длиннейшего пути в орграфе.
10. Алгоритм поиска тончайшего пути в орграфе.
11. Правило построения орграфа для задачи «Формирование технологических операций».
12. Как определить количество операций с помощью орграфа в задаче «Формирование технологических операций»?
13. Правило построения орграфа для задачи «Балансировка технологического маршрута».
14. Сформулируйте задачу «Оснащение обрабатывающего центра»
15. Правило построения орграфа для задачи «Оснащение обрабатывающего центра».

4 РЕШЕНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

4.1 Основные понятия линейного программирования

Общая задача математического программирования формулируется следующим образом [7]. Требуется найти значения n переменных x_1, x_2, \dots, x_n , которые удовлетворяют m требованиям и неравенствам:

$$\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \{ \leq, =, \geq \} b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (4.1)$$

и максимизировать (минимизировать) функцию

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (4.2)$$

Условия (4.1) называются *ограничениями*, а функция (4.2) – целевой функцией. Предполагается, что функции φ_i и f известны, b_i – заданные постоянные. Величины m и n между собой не связаны. На переменные могут налагаться условия неотрицательности, целочисленности. Набор чисел $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяющий (4.1) называется *планом* задачи математического программирования. План X задачи (4.1) и (4.2) с неотрицательными компонентами называется *допустимым*. План $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, доставляющий экстремум функции (4.2) называется *оптимальным*.

Если все функции в (4.1) и (4.2) линейны, то задача называется *линейной*, а раздел математического программирования будет называться *линейным программированием*. Его методы широко применяются на промышленных предприятиях: при оптимизации производственной программы; распределении её по цехам; по участкам; по временным интервалам; при ассортиментной загрузке оборудования; в задачах текущего и перспективного технологического планирования; при планировании грузопотоков; при определении плана товарооборота и его распределении; при составлении оптимальных смесей; раскройно-транспортных и производственно-транспортных задач [18].

Если хотя бы одна из функций φ_i или $z(x)$ нелинейны – это раздел *нелинейного программирования*. В промышленности оно используется: при расчете оптимальной партии выпуска деталей; в управлении комплектными поставками и запасами; в распределении ограниченных ресурсов; в оптимизации некоторых показателей производственно-экономической деятельности [18].

Если хотя бы одна из функций φ_i или система ограничений изменяется во времени или целевая функция $z(x)$ имеет оптимальную структуру: $z(x) = \sum_j z_j(x_j)$ или $z(x) = \prod_j z_j(x_j)$, или сам процесс принятия решений имеет многошаговый характер, то такие задачи решаются методом *динамического программирования*. В управлении промышленным предприятием таким методом решаются: задачи текущего и перспективного планирования; управление производством; распределением ограниченных ресурсов; оптимального размещения; замены оборудования [18].

Если на все или некоторые переменные x_j наложено условие дискретности, например, целочисленности, то такой раздел программирования считается *дискретным (целочисленным)*. К такому разделу относятся задачи: выпуска делимой продукции; задачи маршрутизации; задачи управления поставками при заданных транзитных нормах отпуска; размещение производственно-складской структуры [18].

4.2 Формы записи задач линейного программирования

Общей задачей линейного программирования (ОЗЛП), называется задача, в которой требуется максимизировать (минимизировать) функцию:

$$f = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (4.3)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \leq b_i, \quad (i = 1, \dots, m_1), \quad (4.4)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \geq b_i, \quad (i = m_1 + 1, \dots, m_2), \quad (4.5)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = b_i, \quad (i = m_2 + 1, \dots, m), \quad (4.6)$$

$$x_j \geq 0, \quad (j = 1, \dots, n_1), \quad (4.7)$$

$$x_j - \text{произвольное}, \quad (j = n_1 + 1, \dots, n). \quad (4.8)$$

Функция f называется *целевой функцией*. Условия (4.4)-(4.8) называются *ограничениями*. Величины m и n между собой не связаны.

На переменные могут накладываться условия неотрицательности, целочисленности. Набор чисел $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяющий ограничениям (4.4)-(4.8), называется *планом* ОЗЛП. План X задачи (4.3)-(4.8) с неотрицательными компонентами называется *допустимым*. План $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, доставляющий экстремум функции (4.3), называется *оптимальным*.

Если в задаче линейного программирования требуется максимизировать целевую функцию (4.3) при ограничениях (4.4), (4.7) и $m_1 = m$, $n_1 = n$, то задача задана в *симметричной* форме записи. Если в задаче линейного программирования требуется максимизировать целевую функцию (4.3) при ограничениях (4.6), (4.7), когда $m_2 = 0$; $n_1 = n$, то задача задана в *канонической* форме записи.

При использовании тех или иных методов решения задач линейного программирования приходится осуществлять переходы от одной формы записи задачи к другой [3]. Делается это путем следующих математических преобразований:

- неравенства (4.4) путем умножения левых и правых частей на (-1) превращаются в неравенства (4.5) и наоборот;
- если какая-то переменная не подчинена условию неотрицательности (4.7), то ее заменяют разностью двух других переменных. Например, произвольную переменную x_k заменяют на $(x_k' - x_k'')$, где $x_k' \geq 0$ и $x_k'' \geq 0$;
- неравенства (4.4) превращаются в равенства (4.6) путем добавления *дополнительной или балансовой* переменной x_{n+1} ;
- неравенства (4.5) превращаются в равенства (4.6) путем вычитания *дополнительной или балансовой* переменной x_{n+1} ;
- задачу минимизации можно формально заменить задачей максимизации. Минимальное значение функции f равно максимальному значению функции $(-f)$, взятому с противоположным знаком, т.е. $\min f = -\max(-f)$.

4.3 Задача о выборе оптимальных технологий

Пусть для выпуска некоторой однородной продукции можно использовать n , $j = 1, n$ технологий. Для этого требуется m видов исходных ресурсов, заданных b_1, b_2, \dots, b_m ; c_j – стоимость конечной

продукции (в рублях), производимой в единицу времени по j -му технологическому способу; $a_{i,j}$ – расход i -го исходного ресурса в единицу времени по j -му технологическому способу. В качестве неизвестной величины x_j примем время, в течение которого предприятие вырабатывает продукцию по j -му технологическому способу. Пренебрегая временем переналадок, необходимых для перехода от одного технологического способа к другому, получим следующую математическую модель задачи [18].

Максимизировать объем выпуска продукции

$$\max : z(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = b_i, \quad (i = \overline{1, m}),$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

4.4 Задача оптимального использования ресурсов

Имеется m видов ресурсов, заданных вектором $A_0 = (b_1, b_2, \dots, b_m)$. Задана матрица $A = \| a_{i,j} \|$, где $a_{i,j}$ – норма расхода i -го ресурса на единицу j -й продукции ($j = \overline{1, n}$).

Эффективность выпуска единицы j -й продукции характеризуются, например, прибылью p_j . Требуется определить план выпуска продукции $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, максимизирующий прибыль предприятия при заданных ресурсах [18], т.е.

$$\max z = \sum_{j=1}^n p_j x_j \quad (4.9)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \leq b_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (4.10)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (4.11)$$

Часто ассортимент продукции устанавливается вышестоящей организацией, т.е. его объемы должны быть заключены в некоторых границах d_j и D_j :

$$d_j \leq x_j \leq D_j, \quad j = \overline{1, n} \quad (4.12)$$

и (или) удовлетворять условию комплектности для сборки $x_1 : x_2 : \dots : x_n = l_1 : l_2 : \dots : l_n$.

Эти условия можно записать так:

$$l_{j+1}x_j - l_jx_{j+1} = 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (4.13)$$

Условию комплектности могут удовлетворять только некоторые из изготавливаемых продуктов.

Модель задачи оптимального использования ресурсов лежит в основе моделей оптимизации годовой производственной программы предприятия. В простейшем случае задача решается на уровне предприятия или цеха. В модель включаются только ограничения по фонду времени работы оборудования. Сохраняя прежние обозначения, запишем через α_j и c_j соответственно отпускную цену и затраты на единицу j -й продукции. В качестве критерия оптимальности могут быть приняты:

- максимум прибыли

$$\max z1 = \sum_{j=1}^n (\alpha_j - c_j)x_j; \quad (4.14)$$

- минимум затрат на производство

$$\min z2 = \sum_{j=1}^n c_j x_j; \quad (4.15)$$

- максимум выпусков стоимостном выражении

$$\max z3 = \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j; \quad (4.16)$$

- максимум использования оборудования

$$\max z4 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j; \quad (4.17)$$

и другие при ограничениях на фонд времени оборудования (4.10), ассортимент выпуска продукции (4.12) и при условии неотрицательности (4.11).

В более развернутом виде наряду с системой ограничений по фонду времени работы оборудования учитываются ограничения:

- по лимитирующим материалам

$$\sum_{j=1}^n r_{lj} x_j \leq R_l, l = \overline{1, L}, \quad (4.18)$$

где r_{lj} – норма расхода l -го вида материала на выпуск единицы j -ой продукции; R_l – фонд l -го вида материала;

- по затратам труда

$$\sum_{j=1}^n t_{kj} x_j \leq T_k, k = \overline{1, K}, \quad (4.19)$$

где t_{kj} – норма времени, затрачиваемая рабочим k -ой специальности на выпуск единицы j -ой продукции; T_k – фонд времени рабочего k -ой специальности;

- по фонду заработной платы

$$\sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^n f_k t_{kj} x_j \leq F, \quad (4.20)$$

где f_k – стоимость часа труда рабочего k -ой специальности; F – фонд заработной платы рабочих;

- по складским площадям

$$\sum_{j=1}^n s_j x_j \leq S, \quad (4.21)$$

где s_j – норма расхода складской площади за единицу j -ой продукции; S – общий фонд таких площадей;

- по выпуску товарной продукции

$$\sum_{j=1}^n w_j x_j \leq W, \quad (4.22)$$

где W – годовое плановое задание по производству товарной продукции в стоимостном выражении.

Дальнейшее усложнение задач оптимизации производственной программы (4.14-4.22) включают требования расшивки узких мест производства в рамках фонда капитальных вложений, предназначенных на пополнение оборудования. Еще более сложный тип моделей учитывает структуру продукции, технологические способы и т.д.

4.5 Задача о распределении производственной программы

Речь идет о задаче распределении заказов между m ($i = \overline{1, m}$) предприятиями (цехами, станками, исполнителями) с различными производственными и технологическими характеристиками по взаимозаменяемым в смысле выполнения заказов. Требуется составить такой план размещения заказов (загрузки оборудования), при котором задание было бы выполнено, а показатель эффективности достигал экстремального значения.

Сформулируем задачу математически [18]. Пусть на m ($i = \overline{1, m}$) однородных группах оборудования можно изготовить n ($j = \overline{1, n}$) видов продукции. План выпуска каждого вида на определенный период задан набором $x_j, j = \overline{1, n}$. Мощность каждого вида оборудования ограничена и равна b_i . Известна технологическая матрица $A = \| a_{i,j} \|$, где $a_{i,j}$ – число единиц продукции j , выпускаемой в единицу времени на i -м оборудовании.

Пусть $c_{i,j}$ – затраты, связанные с выпуском j -ой продукции на i -м оборудовании; $x_{i,j}$ – неизвестная величина: объем выпуска j -й продукции на i -м оборудовании.

Модель задачи примет вид: целевая функция – минимизация расходов на реализацию всех заказов

$$\min z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{i,j} x_{i,j} \quad (4.23)$$

при ограничениях

- на ресурсы оборудования

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_{i,j} \leq b_i, \quad i = \overline{1, m}; \quad (4.24)$$

- на выпуск продукции

$$\sum_{i=1}^m x_{i,j} = x_j, \quad j = \overline{1, n}; \quad (4.25)$$

- условие неотрицательности

$$x_{i,j} \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (4.26)$$

Задачу (4.23)-(4.26) иногда называют *распределительной*.

Если по некоторым видам продукции допускается превышение плана, то ограничение (4.25) примет вид

$$\sum_{i=1}^m x_{i,j} \geq x_j, \quad j = \overline{1, n_1}.$$

По продукции, заказы на которую принимаются по кооперации, для полной загрузки оборудования, ограничения можно записать так:

$$\sum_{i=1}^m x_{i,j} \leq x_j, \quad j = \overline{n_1 + 1, n_2}.$$

Для продукции, выпуск которой должен соответствовать плану, ограничения таковы:

$$\sum_{i=1}^m x_{i,j} = x_j, \quad j = \overline{n_2 + 1, n}.$$

В качестве целевой функции можно принять:

- максимум прибыли

$$\max z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (\alpha_j - c_{i,j}) x_{i,j},$$

где α_j – отпускная цена j -ой продукции;

- минимум затрат станочного времени

$$\min z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_{i,j}$$

и другие.

Математическая модель задачи о распределении производственной программы в случае выпуска комплектной продукции имеет вид (x – число комплектов, α_j – число единиц j -ой продукции, входящей в комплект)

$\max z = x$ при ограничениях:

- на ресурсы оборудования

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_{i,j} \leq b_i, \quad i = \overline{1, m};$$

- на комплектность продукции

$$\sum_{i=1}^m x_{i,j} \geq \alpha_j x, \quad j = \overline{1, n};$$

- условие неотрицательности

$$x_{i,j} \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}.$$

4.6 Задача загрузки невзаимозаменяемых групп оборудования

Пусть имеется m ($i = \overline{1, m}$) групп оборудования, на котором нужно выпускать n ($j = \overline{1, n}$) видов продукции. Предполагается, что группы оборудования различны. В пределах данной технологии одна и та же продукция на другом оборудовании не производится, т.е. оборудование взаимозаменяется лишь при замене технологического способа производства.

Пусть k ($k = \overline{1, K}$) – номер технологического способа. Обозначим через $a_{i,j}^k$ норму затрат времени на обработку единицы j -ой продукции на i -ом оборудовании по k -му технологическому способу. Пусть b_i – общий полезный фонд времени работы i -ой группы оборудования. Неизвестная величина задачи $x_{j,k}$ – объем продукции j -го вида, вырабатываемой по k -ой технологии; x_j – заданный сверху план j -ой продукции; $c_{j,k}$ – затраты связанные с изготовлением единицы j -ой продукции по k -ой технологии, которые следует минимизировать.

Математическая модель задачи [18]:

$$\min z = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^K c_{j,k} x_{j,k}$$

при ограничениях

- на фонд времени работы каждой группы оборудования

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^K a_{i,j}^k x_{j,k} \leq b_i, \quad i = \overline{1, m};$$

- на выпуск продукции

$$\sum_{k=1}^K x_{j,k} \geq x_j, \quad j = \overline{1, n};$$

- условие неотрицательности

$$x_{j,k} \geq 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, K}.$$

4.7 Задача о смесях

Критерием оптимальности можно принять минимум растрат на исходные материалы. Построим математическую модель задачи [18].

Пусть $a_{i,j}$ – доля i -го ($i = \overline{1, m}$) химического элемента в исходном шихтовом материале j -го ($j = \overline{1, n}$) вида. Обозначим через x_j долю j -го материала, включаемого в состав шихты. Тогда содержание i -го элемента в шихте выбранного состава выразится суммой

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j, \quad i = \overline{1, m}.$$

Однако в результате окислительного процесса содержание некоторых химических элементов в расплаве существенно уменьшается (происходит их угар). В связи с этим в состав расплава следует вводить поправочный коэффициент. Если обозначить величину угара через u_i , то поправочный коэффициент будет равен $(1-u_i)$. Вот почему фактическое содержание химических элементов в расплаве следует находить по формуле

$$\sum_{j=1}^n (1-u_i) a_{i,j} x_j, \quad i = \overline{1, m}.$$

Реальная величина i -го химического элемента в расплаве должна колебаться между нижними b_i и верхними B_i пределами. Обозначим через c_j стоимость единицы j -го исходного материала.

Модель задачи об оптимальном составе шихты принимает вид:

$$\min z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

при ограничениях

- на нижний и верхний уровни содержания в расплаве химического элемента

$$b_i \leq \sum_{j=1}^n (1-u_i) a_{i,j} x_j \leq B_i, \quad i = \overline{1, m};$$

- на комплектность долевого участия исходных материалов

$$\sum_{j=1}^n x_j = 1;$$

- граничные условия, определяемые технологией выплавки и ограниченностью отдельных исходных материалов, таковы

$$0 \leq x_j \leq D_j, \quad j = \overline{1, n}.$$

4.8 Задача о раскрое материалов

Рациональный раскрой промышленных материалов – важный источник экономии ресурсов. Он повышает коэффициент использования материалов. Централизация раскроя на снабженческо-сбытовых базах позволяет сократить ассортимент материалов, что ведет к укреплению заказов. Сущность задачи об оптимальном раскрое состоит в разработке таких технологически допустимых планов раскроя, при котором получается необходимый комплект заготовок, а отходы по площади, весу или стоимости к минимуму.

В настоящее время наиболее изучены вопросы раскроя длинномерных и листовых материалов.

Задача комплектности раскроя формулируется так: на раскрой поступает m , ($i = \overline{1, m}$) материалов в объеме b_i каждого. Требуется изготовить K различных комплектующих изделий в количестве пропорциональных: $l_1 : l_2 : \dots : l_K$. Каждая единица i -го материала может быть раскроена n , ($j = \overline{1, n}$) различными способами. При раскрое единицы i -го материала j -м способом получается $a_{i,j}^k$ единиц k -го изделия. Обозначим через $x_{i,j}$ количество единиц i -го материала, раскраиваемого j -м способом, а количество изготавливаемых комплектов – через x .

Математическая модель задачи имеет вид [18]:

$$\max z = x$$

при ограничениях

- на объем каждого вида материалов

$$\sum_{j=1}^n x_{i,j} \leq b_i, \quad i = \overline{1, m};$$

- условия комплектности

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{i,j}^k x_{i,j} = l_k x, \quad k = \overline{1, K};$$

- условия неотрицательности

$$x_{i,j} \geq 0.$$

В частности, если на раскрой поступает один вид материала в объеме b , то модель примет вид:

$$\max z = x$$

$$\sum_{j=1}^n x_j \leq b,$$

$$\sum_{j=1}^n a_{j,k} x_j = l_k x, k = \overline{1, K},$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, n}.$$

Приведем простейшую модель раскройной задачи в случае критерия – минимум отходов при раскрое. Рассмотрим задачу оптимального раскроя по одному измерению длинномерных материалов (прутков, труб, профильного проката и др.) [18].

Пусть L – длина исходного материала; Δ_i – длина заготовки i -го вида; b_i – нужное количество заготовок i -го вида; $a_{i,j}$ – количество i -го вида, полученного при раскрое единицы исходного материала j -му варианту; c_j – отход при раскрое единицы исходного материала j -му варианту. Неизвестная величина x_j – интенсивность использования j -го варианта, т.е. сколько единиц исходного материала будет раскроена по j -му варианту.

Математическая модель

$$\min z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

при условии получения заготовок в соответствии с ассортиментной программой

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = b_i, i = \overline{1, m},$$

при условии неотрицательности

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, n}.$$

Рассмотрим критерий минимум числа прутков для удовлетворения потребности. Обозначим число прутков через x . Модель примет вид:

- целевая функция – минимум числа единиц раскраиваемого материала

$$\min z = x$$

при ограничениях:

- заявки потребителей удовлетворяются полностью

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = b_i, \quad i = \overline{1, m};$$

- на объем исходного материала, поступившего на раскрой

$$\sum_{i=1}^m \Delta_i \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j + m \sum_{j=1}^n c_j x_j = xL;$$

- условие неотрицательности

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте общую задачу математического программирования.
2. Сформулируйте общую задачу линейного программирования.
3. Формы записи задачи линейного программирования.
4. Как привести общую задачу линейного программирования к каноническому виду?
5. Сформулируйте задачу о раскросе длинномерных материалов.

5 МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ (ЗЛП)

5.1 Графический метод решения ЗЛП

Графический метод используется для решения задач линейного программирования с двумя переменными, заданными в симметричной форме, и многими переменными, заданными в канонической форме (при условии, что они содержат не более двух свободных переменных) [11].

Задачу линейного программирования с двумя переменными можно записать так:

$$\max f = c_1x_1 + c_2x_2 \quad (5.1)$$

$$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 \leq b_1$$

$$\dots\dots\dots (5.2)$$

$$a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 \leq b_m$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \quad (5.3)$$

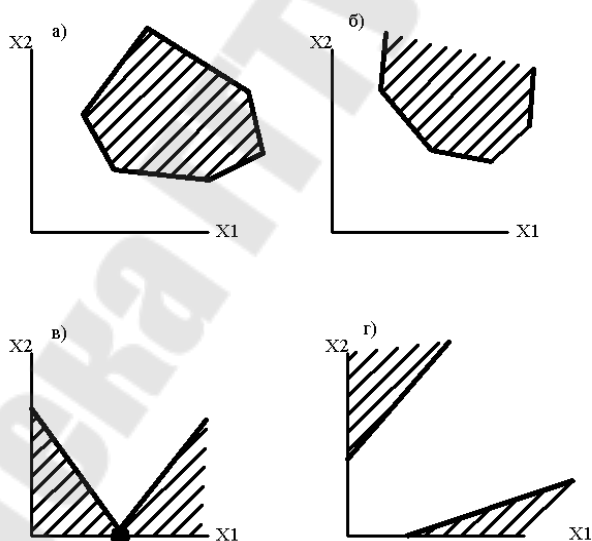


Рисунок 5.1 – Область допустимых решений

Область допустимых решений задачи (5.1)-(5.3) представляет собой либо выпуклый многоугольник (рис. 5.1, а)), либо выпуклую многоугольную область (рис. 5.1, б)), либо единственную точку (рис. 5.1, в)), либо пустое множество (рис. 5.1, г)).

Функция (5.1) представляет собой на плоскости X_1OX_2 семейство параллельных прямых, каждой из которых отвечает определенное

значение f . Перпендикулярный к этим прямым вектор $p=(c_1, c_2)$ указывает направление наискорейшего возрастания функции f (5.1), и задача (5.1)-(5.3) заключается в следующем: *необходимо найти точку допустимой области, через которую проходит прямая семейства f , отвечающая наибольшему значению функции (5.1).*

При решении задачи линейного программирования графическим способом могут встретиться следующие случаи:

- задача имеет единственное решение (рис. 5.2, а));
- задача имеет бесконечное множество решений (рис. 5.2, б));
- функция f не имеет экстремального значения (рис. 5.2, в)).

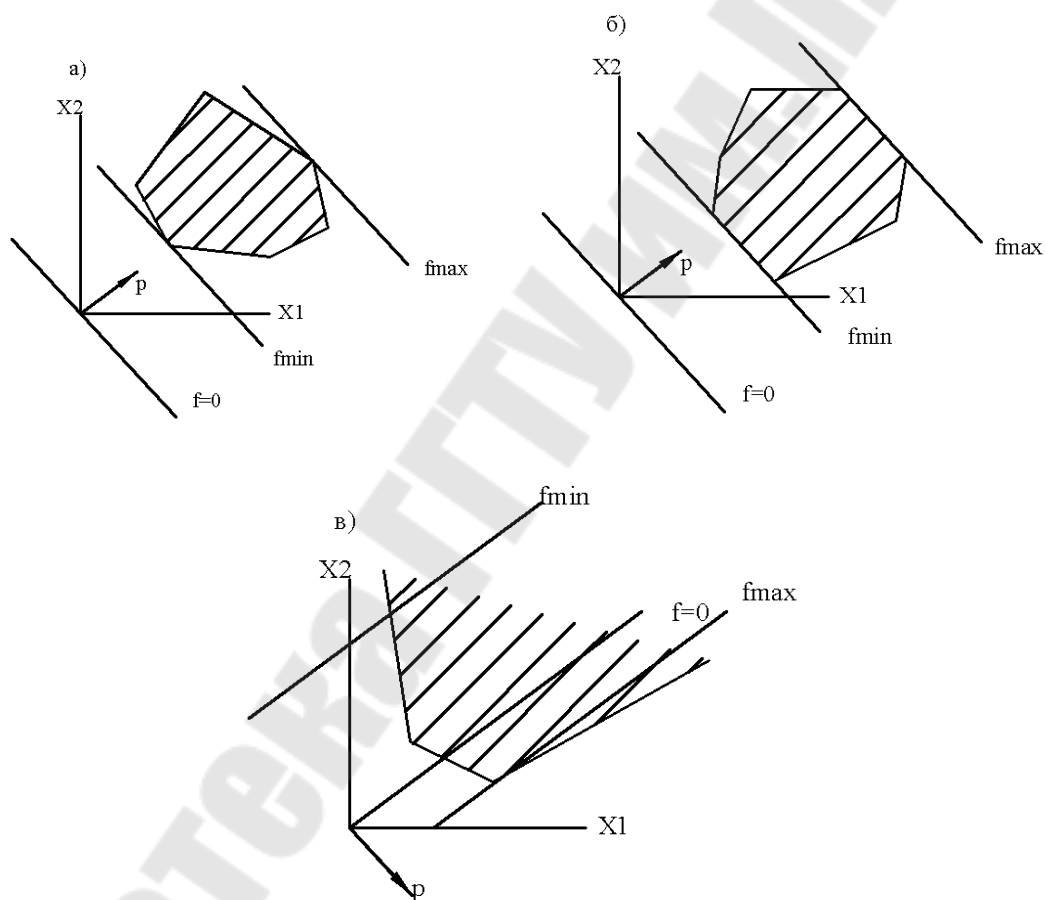


Рисунок 5.2 – Графическое решение ЗЛП

Решение задачи графическим способом проводится в такой последовательности [11]:

- записывают уравнения граничных прямых $a_{k,1}x_1 + a_{k,2}x_2 = b_k$, $k = \overline{1, m}$ и строят их на плоскости X_1OX_2 ;

- определяют полуплоскости, соответствующие исходным ограничениям-неравенствам (5.2). Для этого берут произвольную точку, лежащую по ту или иную сторону от граничной прямой, и ее координаты подставляют в левую часть ограничения-неравенства. Если оно удовлетворяется, то искомой будет полуплоскость, которая содержит выбранную точку; если оно не удовлетворяется, то искомой будет полуплоскость, которой данная точка не принадлежит;
- выделяют область допустимых решений как общую часть $m+2$ полуплоскостей, где m полуплоскостей соответствуют исходным неравенствам (5.2), а 2 полуплоскости – условию неотрицательности переменных ($x_1 \geq 0$ – правая координатная полуплоскость; $x_2 \geq 0$ – верхняя координатная полуплоскость);
- строят вектор-градиент $p = (c_1, c_2)$ целевой функции f и перпендикулярно к нему одну из прямых семейства f , например, $f=0$;
- определяют экстремальную точку многоугольника решений путем параллельного перемещения вспомогательной прямой $f=0$ в направлении вектора p . Это будет наиболее удаленная крайняя точка, в которой прямая f встречается с областью допустимых решений. Если необходимо найти точку, которой соответствует минимальное значение функции f , то вспомогательную прямую перемещают в направлении вектора p до пересечения с первой точкой допустимой области (либо прямую $f=0$ перемещают в направлении вектора $(-p)$);
- вычисляют координаты оптимальной точки и значения функции f .

Если в канонической записи задачи со многими переменными разность между числом переменных n и числом линейно независимых уравнений r равна двум, т.е. $n-r=2$, то задачу можно решать графическим методом. Модель этой задачи преобразуют к симметричной форме. Полученную задачу с двумя переменными решают графически. Найдя координаты оптимума, подставляют их в ограничительные уравнения канонической формы. Решая полученную систему уравнений, определяют и остальные координаты оптимума.

Пример 5.1. Обработка деталей A и B может производиться на трех станках. Причем каждая деталь при ее изготовлении должна последовательно обрабатываться на каждом из станков. Прибыль при

реализации детали A составляет 100 у.е., детали B – 300 у.е. Исходные данные для решения задачи представлены в таблице 5.1. Определить производственную программу, максимизирующую прибыль при условии: деталей A произвести не менее 100 ед., а деталей B – не менее 200 ед.

Таблица 5.1 –Исходные данные

| Станки | Норма времени на обработку детали, ч. | | Время работы станка |
|--------|---------------------------------------|-----|---------------------|
| | A | B | |
| 1 | 0.2 | 0.1 | 100 |
| 2 | 0.1 | 0.2 | 120 |
| 3 | 0.1 | 0.1 | 70 |

Решение. Обозначим через x количество обработанных деталей A ; через y – количество деталей B . Тогда математическая модель задачи примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \max f &= 100x + 300y \\ 0.2x + 0.1y &\leq 100 \\ 0.1x + 0.2y &\leq 120 \\ 0.1x + 0.1y &\leq 70 \\ x &\geq 100 \\ y &\geq 200 \end{aligned}$$

Перейдем от неравенств к равенствам:

$$\begin{aligned} 0.2x + 0.1y &= 100 \\ 0.1x + 0.2y &= 120 \\ 0.1x + 0.1y &= 70 \\ x &= 100 \\ y &= 200 \end{aligned}$$

Это уравнения прямых линий, которые могут быть легко построены по двум точкам:

для первого ограничения –

$$x = 0; \quad y = 1000;$$

$$y = 0; \quad x = 500;$$

для второго ограничения –

$$x = 0; \quad y = 600;$$

$$y = 0; \quad x = 1200;$$

для третьего ограничения –

$$x = 0; \quad y = 700;$$

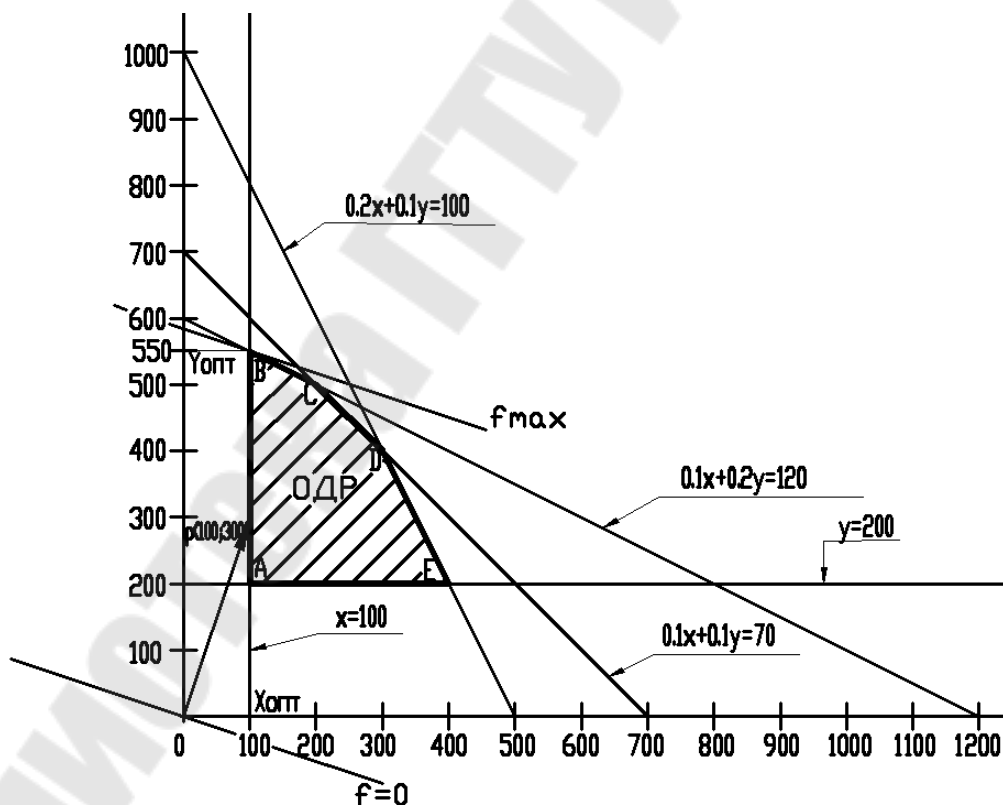
$$y = 0; \quad x = 700;$$

для четвертого и пятого ограничений строятся соответственно вертикальная прямая ($x=100$) и горизонтальная прямая ($y=200$).

Градиент целевой функции – это вектор, характеризующий направление и скорость изменения функции (в данном случае – целевой функции). Он определяется ее частными производными по каждой переменной:

$$p = \text{grad } f = \left\{ \frac{df}{dx}; \frac{df}{dy} \right\} = \{100, 300\}.$$

Линия уровня целевой функции перпендикулярна градиенту. Графическое решение данной задачи приведено на рисунке 5.3.



Область допустимых решений (ОДР) в данном случае образуется пятиугольником $ABCDE$. Ни одна точка внутри его или на его

границе не противоречит ни одному из ограничений. Оптимальное решение находится в одной из вершин пятиугольника. Для нахождения оптимального решения перемещаем линию уровня целевой функции в направлении градиента до крайней точки ОДР. Такой точкой является точка B с координатами: $X_{opt} = 100$; $Y_{opt} = 550$. Значение целевой функции равно $f_{max} = 100 \cdot 100 + 300 \cdot 550 = 175000$ у.е.

Из рисунка видно, что время работы второго станка использовано полностью, а ресурсы времени работы первого и третьего станков оказались в избытке. Количественная оценка избытка времени работы для первого станка равна $100 - (0.2 \cdot 100 + 0.1 \cdot 550) = 25$ часов, а для третьего станка – $700 - (0.1 \cdot 100 + 0.1 \cdot 550) = 5$ часов.

5.2 Решение задач симплексным методом

Симплексный метод (симплекс-метод) является одним из универсальных методов решения ЗЛП, называемый также методом последовательного улучшения плана. Симплекс-метод позволяет вести расчеты вручную и на ЭВМ [1, 3, 6, 7, 8.]

Дана задача линейного программирования в канонической форме:

$$\max f = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (5.4)$$

при условии

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = a_{i,0} \quad (i = \overline{1, m}); \quad (5.5)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}). \quad (5.6)$$

Предположим, что в системе (5.5) $m < n$ и все m уравнений линейно независимы. В этом случае система имеет бесчисленное множество решений. Ее можно разрешить относительно m переменных x_1, x_2, \dots, x_m , если векторы-коэффициенты a_1, a_2, \dots, a_m при этих переменных линейно независимы:

$$x_i = b_{i,0} - \sum_{j=1}^{n-m} b_{i,j} x_{m+j} \quad (i = \overline{1, m}). \quad (5.7)$$

В этом случае x_1, x_2, \dots, x_m – базисные переменные, а $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$ – свободные переменные. Тогда и целевую функцию можно выразить через свободные переменные x_{m+j} .

$$f = b_{0,0} - \sum_{j=1}^{n-m} b_{0,j} x_{m+j}. \quad (5.8)$$

Если все $b_{i,0} > 0$, то план $x_0 = (b_{1,0}; b_{2,0}; b_{m,0}; 0; \dots, 0)$ будет являться опорным и $f(x_0) = b_{0,0}$. Если при этом опорном плане значение целевой функции максимально, то опорный план является оптимальным.

Решение задачи (5.4)-(5.6) симплексным методом складывается из двух этапов:

- 1) нахождение начального опорного плана;
- 2) определение среди опорных планов задачи оптимального.

Решение задачи производится с использованием симплексных таблиц. Симплексная таблица, содержащая ограничения (5.7) и целевую функцию (5.8) имеет вид табл. 5.2.

Таблица 5.2 – Вид симплекс -таблицы

| БП | СЧ | Переменные (БП, СП) | | | | | |
|---------|-----------|---------------------|---------|--------|------------|---------|-------------|
| | | $-x_1$ | \dots | $-x_m$ | $-x_{m+1}$ | \dots | $-x_n$ |
| $x_1 =$ | $b_{1,0}$ | 1 | 0 | 0 | $b_{1,1}$ | \dots | $b_{1,n-m}$ |
| \dots | \dots | 0 | 1 | 0 | \dots | \dots | \dots |
| $x_m =$ | $b_{m,0}$ | 0 | 0 | 1 | $b_{m,1}$ | \dots | $b_{m,n-m}$ |
| $f =$ | $b_{0,0}$ | 0 | 0 | 0 | $b_{0,1}$ | \dots | $b_{0,n-m}$ |

Обозначения в таблице:

- БП – базисные переменные;
- СП – свободные переменные;
- СЧ – свободные члены;
- последняя строка называется f -строкой или строкой целевой функции.

Признаком оптимальности опорного плана является неотрицательность f -строки.

5.3 Симплексное преобразование

Преобразование системы (5.5) к новому базису называется *симплексным преобразованием* [11].

Правило выбора переменных при направленном преобразовании (при переходе от одного опорного плана к другому, более близкому к оптимальному) одного базиса в другой: *в базис вводят переменную x_{m+j} , соответствующую отрицательному элементу f -строки с наибольшей абсолютной величиной.*

Столбец коэффициентов при переменной, включенной в базис, называется *разрешающим*.

Для определения переменной, подлежащей исключению из базиса, составляют отношения свободных членов к положительным элементам разрешающего столбца (такие отношения называются *симплексными*) и находят среди них наименьшее, которое и определяет переменную, исключаемую из базиса. Строка, которой соответствует переменная, исключаемая из базиса, называется *разрешающей*.

Элемент симплекс-таблицы, стоящий на пересечении разрешающей строки и разрешающего столбца, называется *разрешающим*.

Предполагая, что разрешающий элемент выбран, можно сформулировать следующее правило перерасчета элементов симплекс-таблицы при переходе к новому опорному плану:

- разрешающий элемент заменяется обратной величиной;
- остальные элементы разрешающей строки делятся на разрешающий элемент;
- остальные элементы разрешающего столбца делятся на разрешающий элемент и меняют свои знаки;
- прочие элементы вычисляют по формуле :

$$b'_{i,j} = (b_{i,j}b_{k,s} - b_{i,s}b_{k,j}) / b_{k,s} \quad (i = 0, m; i \neq k; j = 0, n - m; j \neq s), \quad (5.9)$$

где $b_{k,s}$ – разрешающий элемент.

При вычислении элементов по формуле (5.9) удобно пользоваться правилом прямоугольника. Элементы, входящие в эту формулу, расположены в вершинах воображаемого «прямоугольника».

$$\begin{array}{cccccccc}
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & b_{i,j} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{i,s} & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & b_{k,j} & \cdot & \cdot & \cdot & \boxed{b_{k,s}} & \cdot
 \end{array}$$

Диагональ этого прямоугольника, на которой расположены разрешающий $b_{k,s}$ и преобразуемый $b_{i,j}$ элементы, называется главной, а другая – побочной. Преобразованный элемент $b'_{i,j}$ равен разности произведений элементов главной и побочной диагоналей, деленной на разрешающий элемент.

Сформированного правила [11] придерживаются независимо от того, в какой вершине прямоугольника расположен разрешающий элемент.

5.4 Нахождение оптимального плана

Если в симплексной таблице, содержащей опорный план, все элементы f -строки (не считая свободного члена) неотрицательны, то данный опорный план является оптимальным [11]. Полученный оптимальный план будет единственным, если все элементы f -строки положительны. Если среди неотрицательных элементов встречается хотя бы один нулевой, то задача имеет бесконечное множество оптимальных планов.

Если хотя бы один элемент f -строки отрицательный, то оптимальный опорный план находят по алгоритму:

- выбирают разрешающий столбец по отрицательному элементу f -строки (если в f -строке отрицательных элементов несколько, то наибольший по абсолютной величине отрицательный элемент укажет на разрешающий элемент);
- разрешающая строка находится по минимальному симплексному отношению;
- делают симплексное преобразование с выбранным разрешающим элементом и получают новый опорный план, который опять проверяют на оптимальность.

Решение проводится до тех пор, пока не будет получен оптимальный план, либо установлена неразрешимость задачи.

Если в f -строке симплексной таблицы, содержащей опорный план, есть хотя бы один отрицательный элемент, а в соответствующем этому элементу столбце нет ни одного

положительного, то целевая функция не ограничена в области допустимых решений, т.е. $f \rightarrow \infty$.

Пример 5.2

Механический завод при изготовлении двух типов деталей использует токарное, фрезерное и сварочное оборудование. При этом обработку каждой детали можно вести двумя различными технологическими способами. Полезный фонд времени работы каждой группы оборудования (в станко-ч), нормы расхода времени при обработке детали на соответствующем оборудовании по данному технологическому способу и прибыль от выпуска единицы детали каждого вида приведены в таблице 5.3. Составить оптимальный план «загрузки оборудования», обеспечивающий заводу максимальную прибыль [18].

Таблица 5.3 – Исходные данные

| Оборудование | Детали | | | | Полезный фонд времени, станко-ч |
|---------------|-------------------------|---|---|---|---------------------------------|
| | 1 | | 2 | | |
| | Технологические способы | | | | |
| | 1 | 2 | 3 | 4 | |
| Фрезерное | 2 | 2 | 3 | 0 | 20 |
| Токарное | 3 | 1 | 1 | 2 | 37 |
| Сварочное | 0 | 1 | 1 | 4 | 30 |
| Прибыль, руб. | 11 | 6 | 9 | 6 | |

Решение. Обозначим через:

- x_1 – количество деталей первого типа, обработанных по 1-му технологическому способу;
- x_2 – количество деталей первого типа, обработанных по 2-му технологическому способу;
- x_3 – количество деталей второго типа, обработанных по 3-му технологическому способу;
- x_4 – количество деталей второго типа, обработанных по 4-му технологическому способу.

Составим математическую модель задачи:

$$\max : f(x) = 11x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 6x_4$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 20 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 37 \\ x_2 + x_3 + 4x_4 \leq 30 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0.$$

Приведем ее к каноническому виду, т. е. ограничения неравенства заменяем на ограничения равенства:

$$\max : f(x) = 11x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 6x_4$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 20 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_6 = 37 \\ x_2 + x_3 + 4x_4 + x_7 = 30 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0, x_7 \geq 0.$$

Решение ЗЛП разбивается на два этапа:

- на первом этапе находится начальный опорный план или убеждаются в том, что такого плана не существует;
- на втором этапе производится последовательное улучшение плана (базиса).

В нашей системе уравнений ($m=3$) базисные переменные легко определяются. Это – x_5, x_6, x_7 , которые выражаются через x_1, x_2, x_3, x_4 .

Для перехода ко 2-му этапу решения задачи, необходимо систему уравнений записать в таком виде:

$$\begin{cases} x_5 = 20 - (2x_1 + 2x_2 + 3x_3) \\ x_6 = 37 - (3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4) \\ x_7 = 30 - (x_2 + x_3 + 4x_4) \end{cases}$$

Для определения значений базисных переменных x_5, x_6, x_7 необходимо приравнять к нулю свободные переменные x_1, x_2, x_3, x_4 . Полученное таким образом решение называется базисным – $(0, 0, 0, 0, 20, 37, 30)$.

После этого переходим ко второму этапу решения задачи. Рассмотрим симплекс-метод.

После заполнения исходной симплекс-таблицы (табл. 5.4.) начинается подготовка к заполнению второй таблицы. Для этого используется алгоритм симплекс-метода.

Таблица 5.4

| БП | СЧ | БП, СП | | | | | | |
|---------|----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|-----------------|
| | | $-x_1$ | $-x_2$ | $-x_3$ | $-x_4$ | $-x_5$ | $-x_6$ | $-x_7$ |
| $x_5 =$ | 20 | 2 | 2 | 3 | 0 | 1 | 0 | $0 \Rightarrow$ |
| $x_6 =$ | 37 | 3 | 1 | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 |
| $x_7 =$ | 30 | 0 | 1 | 1 | 4 | 0 | 0 | 1 |
| $f =$ | 0 | -11 | -6 | -9 | -6 | 0 | 0 | 0 |

↑

- 1) Проверка базисного решения на оптимальность. Просматриваем знаки коэффициентов функции f (последняя строка таблицы, кроме коэффициентов при свободном члене и базисных переменных). Наличие отрицательных коэффициентов, говорит о том, что исходное решение еще не оптимально.
- 2) Проверяем задачу на наличие решения. Так как под всеми отрицательными коэффициентами целевой функции нет ни одного столбца с неположительными числами, это значит, что задача имеет решение.
- 3) Выбираем из небазисных переменных ту, которая способна при введении ее в базис увеличить значения целевой функции: $\max_{j \in n} \{c_j\}, c_j < 0$. Отмечаем этот столбец ↑, $\boxed{x_1}$
- 4) Определяем, какая из базисных переменных должна будет выведена из базиса. Для этого определяем минимальное частное от деления соответствующих свободных членов и положительных коэффициентов – это переменная x_5 . Эту строку отметим \Rightarrow .
- 5) Вводимую в базис переменную x_1 выражаем через переменную x_5 , выводимую из базиса и небазисные переменные x_2, x_3, x_4 . Для этого составляем новую симплекс- таблицу (табл. 5.5). В ней базис выражается переменными x_1, x_6, x_7 . Делим строку табл. 5.4, отмеченную \Rightarrow , на разрешающий элемент.
- 6) Все остальные базисные переменные x_6, x_7 и целевую функцию выражаем через новые небазисные переменные x_2, x_3, x_4, x_5 , используя правило прямоугольника.

После заполнения табл. 5.5. расчет повторяется с пункта 1), результатами которого будут табл. 5.6 и 5.7.

Таблица 5.5

| БП | СЧ | БП, СП | | | | | | |
|---------|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | | $-x_1$ | $-x_2$ | $-x_3$ | $-x_4$ | $-x_5$ | $-x_6$ | $-x_7$ |
| $x_1 =$ | 10 | 1 | 1 | 3/2 | 0 | 1/2 | 0 | 0 |
| $x_6 =$ | 7 | 0 | -2 | -7/2 | 2 | -3/2 | 1 | 0 ⇒ |
| $x_7 =$ | 30 | 0 | 1 | 1 | 4 | 0 | 0 | 1 |
| $f =$ | 110 | 0 | 5 | 15/2 | -6 | 11/2 | 0 | 0 |

↑

Таблица 5.6

| БП | СЧ | БП, СП | | | | | | |
|---------|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | | $-x_1$ | $-x_2$ | $-x_3$ | $-x_4$ | $-x_5$ | $-x_6$ | $-x_7$ |
| $x_1 =$ | 10 | 1 | 1 | 3/2 | | 1/2 | 0 | 0 |
| $x_4 =$ | 7/2 | 0 | -1 | -7/4 | 1 | -3/4 | 1/2 | 0 |
| $x_7 =$ | 16 | 0 | 5 | 8 | 0 | 3 | -2 | 0 ⇒ |
| $f =$ | 131 | 0 | -1 | -3 | 0 | 1 | 3 | 1 |

↑

Таблица 5.7

| БП | СЧ | БП, СП | | | | | | |
|---------|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | | $-x_1$ | $-x_2$ | $-x_3$ | $-x_4$ | $-x_5$ | $-x_6$ | $-x_7$ |
| $x_1 =$ | 7 | 1 | 1/16 | 0 | 0 | -1/16 | 3/8 | -3/16 |
| $x_4 =$ | 7 | 0 | 3/32 | 0 | 1 | -3/32 | 1/16 | 7/32 |
| $x_3 =$ | 2 | 0 | 5/8 | 1 | 0 | 3/8 | -1/4 | 1/8 |
| $f =$ | 137 | 0 | 7/8 | 0 | 0 | 17/8 | 9/4 | 3/8 |

В таблице 5.7 последняя строка не содержит отрицательных коэффициентов, следовательно, находим оптимальное решение, максимизирующее критерий оптимальности. Решение задачи следующее: $X^{opt} = (7; 0; 2; 7)$, $f_{max} = 11 \cdot 7 + 0 \cdot 6 + 9 \cdot 2 + 6 \cdot 7 = 137$.

Вопросы для самопроверки

1. Как решить графически ЗЛП с двумя переменными?
2. Что такое симплексное преобразование?
3. Как найти начальный опорный план?
4. Как найти оптимальное решение ЗЛП?

6 ДВОЙСТВЕННОСТЬ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

6.1 Понятие двойственности. Связь двойственных задач

Каждой задаче линейного программирования соответствует двойственная задача. Двойственная задача по отношению к исходной задаче строится по следующим правилам [8].

1. Если исходная задача ставится на максимум, то двойственная ставится на минимум и наоборот.
2. Коэффициенты целевой функции исходной задачи становятся правыми частями ограничений двойственной задачи. Правые части ограничений исходной задачи становятся коэффициентами целевой функции двойственной задачи.
3. Если A – матрица коэффициентов исходной задачи, то транспонированная матрица A^T будет матрицей коэффициентов двойственной задачи.
4. В задаче на максимум все ограничения имеют знак $\leq (=)$, а в задаче на минимум все ограничения имеют знак \geq .
5. Число переменных в двойственной задаче равно числу ограничений в исходной задаче. Каждому ограничению исходной задачи соответствует переменная двойственной задачи. Если ограничение исходной задачи имеет знак (\geq), то соответствующая переменная двойственной задачи неотрицательна. Если ограничение имеет знак ($=$), то соответствующая переменная двойственной задачи может принимать положительные и отрицательные значения и наоборот.

В матричном виде двойственные задачи, заданные в симметричной форме, имеют вид

| <u>Прямая задача</u> | <u>Двойственная задача</u> | |
|--------------------------------|--------------------------------|-------|
| $\max_x (c^T, x) = (c^T, x^*)$ | $\min_y (b^T, y) = (b^T, y^*)$ | |
| $A \cdot x \leq b,$ | $A^T \cdot y \geq c,$ | (6.1) |
| $x \geq 0,$ | $y \geq 0,$ | |

где $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $A = \|a_{i,j}\|_{m \times n}$,

$$b = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T, y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T,$$

$$x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^T,$$

$$y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*)^T - \text{оптимальные решения задач.}$$

Переменные (y_1, y_2, \dots, y_n) называются двойственными (или объективно обусловленными) оценками.

Связь двойственных задач представлена в таблице 6.1.

Таблица 6.1 – Связь двойственных задач

| Прямая задача | Двойственная задача |
|-------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|
| $\max \sum_{j=1}^n c_j x_j$ | $\min \sum_{i=1}^m b_i y_i$ |
| $\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \leq b_i, \quad i = \overline{1, m_1}$ | $y_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m_1}$ |
| $\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = b_i, \quad i = \overline{m_1 + 1, m}$ | $y_i - \text{любые}, \quad i = \overline{m_1 + 1, m}$ |
| $x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n_1}$ | $\sum_{i=1}^m a_{i,j} y_i \geq c_j, \quad j = \overline{1, n_1}$ |
| $x_j - \text{любые}, \quad j = \overline{n_1 + 1, n}$ | $\sum_{i=1}^m a_{i,j} y_i = c_j, \quad j = \overline{n_1 + 1, n}$ |

Экономическая интерпретация задач (6.1) следующая. Вектор x – это вектор выпускаемой продукции, y – двойственные оценки ресурсов прямой задачи. Левая часть ограничений двойственной задачи представляет собой оценку затрат на единицу выпускаемой продукции в двойственных ценах.

Прямая задача представляет собой задачу на определение плана, обеспечивающего максимальный выпуск продукции при заданных ценах реализации и ограничениях на ресурсы. Двойственная задача – определение таких оценок ресурсов, в которых стоимость имеющихся ресурсов минимальна, а затраты на производство единицы продукции не меньше цен реализации продукции.

Сформулируем важные теоремы линейного программирования [8].

Первая теорема двойственности. Для взаимно двойственных задач имеет место один из трех случаев:

1. Если существует решение одной задачи, то существует решение и второй задачи. Значения целевых функций на оптимальных решениях обеих задач равны $(c^T, x^*) = (b^T, y^*)$ и на множестве допустимых значений обеих задач выполняется неравенство $(c^T, x) \leq (b^T, y)$. Если на допустимых решениях обеих задач целевые функции равны, то решения оптимальны.

2. Если решение одной задачи неограниченно, то другая задача несовместна.

3. Обе задачи несовместны.

Вторая теорема двойственности. Оптимальные решения двойственных задач удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} y_i \cdot \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j - b_i \right) &= 0, \quad i = \overline{1, m}, \\ x_j \cdot \left(\sum_{i=1}^m a_{i,j} y_i - c_j \right) &= 0, \quad j = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Имеет место и обратное свойство: если допустимые значения переменных x_j, y_i удовлетворяют соотношениям (6.2), то они являются оптимальными решениями обеих задач.

Экономический смысл второй теоремы двойственности состоит в следующем:

1) если оптимальная оценка i -го ресурса не равна нулю ($y_i^* > 0$), то в оптимальном плане этот ресурс используется полностью

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j^* = b_i;$$

2) если в оптимальном плане ресурс не используется полностью

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j^* < b_i, \text{ то его оценка равна нулю } (y_i^* = 0);$$

3) если j -й продукт входит в оптимальный план ($x_j^* > 0$), то в

$$\text{оптимальных оценках ресурсов он неубыточен } \sum_{i=1}^m a_{i,j} y_i^* = c_j;$$

4) если j -й продукт в оптимальных оценках ресурсов убыточен

$$\sum_{i=1}^m a_{i,j} y_i^* > c_j, \text{ то он не входит в оптимальный план } (x_j^* = 0).$$

6.2 Совместное решение двойственных задач

Решение двойственной задачи получается по значению f -строки последней симплексной таблицы прямой задачи следующим образом [7, 8].

1. Устанавливается соответствие между переменными двойственных задач.

2. Значения f -строки свободных x -переменных приравниваются соответствующим значениям u -переменных, остальные значения u -переменных приравниваются к нулю.

Пример 6.1 Найти решение двойственной задачи по решению прямой для примера 5.2.

Решение. По прямой задаче 5.2 составим двойственную задачу. В табл. 6.2 представлена таблица соответствия переменных.

Прямая задача

$$f = 11x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 6x_4 \rightarrow \max$$

$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 20 (+x_5) \leftrightarrow y_1$$

$$3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 37 (+x_6) \leftrightarrow y_2$$

$$x_2 + x_3 + 4x_4 \leq 30 (+x_7) \leftrightarrow y_3$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 7}$$

Двойственная задача

$$g = 20y_1 + 37y_2 + 30y_3 \rightarrow \min$$

$$2y_1 + 3y_2 \geq 11(-y_4) \leftrightarrow x_1$$

$$2y_1 + y_2 + y_3 \geq 6(-y_5) \leftrightarrow x_2$$

$$3y_1 + y_2 + y_3 \geq 9(-y_6) \leftrightarrow x_3$$

$$2y_2 + 4y_3 \geq 6(-y_7) \leftrightarrow x_4$$

$$y_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 7}$$

Таблица 6.2 – Таблица соответствия переменных

| | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | x_7 |
| y_4 | y_5 | y_6 | y_7 | y_1 | y_2 | y_3 |

Заключительная симплекс-таблица прямой задачи представлена в табл. 6.3 (см. также табл. 5.7), из которой можно выписать оптимальный план двойственной задачи (см. табл. 6.4)

Таблица 6.3 – Заключительная симплекс-таблица

| БП | СЧ | БП, СП | | | | | | |
|---------|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | | $-x_1$ | $-x_2$ | $-x_3$ | $-x_4$ | $-x_5$ | $-x_6$ | $-x_7$ |
| $x_1 =$ | 7 | 1 | 1/16 | 0 | 0 | -1/16 | 3/8 | -3/16 |
| $x_4 =$ | 7 | 0 | 3/32 | 0 | 1 | -3/32 | 1/16 | 7/32 |
| $x_3 =$ | 2 | 0 | 5/8 | 1 | 0 | 3/8 | -1/4 | 1/8 |
| $f =$ | 137 | 0 | 7/8 | 0 | 0 | 17/8 | 9/4 | 3/8 |
| | | y_4 | y_5 | y_6 | y_7 | y_1 | y_2 | y_3 |

Таблица 6.4 – Оптимальный план двойственной задачи

| | | | | | | | |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| x | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | x_7 |
| f | 0 | 7/8 | 0 | 0 | 17/8 | 9/4 | 3/8 |
| y | y_4 | y_5 | y_6 | y_7 | y_1 | y_2 | y_3 |

Оптимальный план прямой задачи
 $(x_1^* = 7, x_2^* = 0, x_3^* = 2, x_4^* = 7, x_5^* = x_7^* = x_6^* = 0)$.

Оптимальный план двойственной задачи
 $(y_1^* = 17/8, y_2^* = 9/4, y_3^* = 3/8, y_4^* = 0, y_5^* = 7/8, y_7^* = y_6^* = 0)$. Значение целевой функции прямой и двойственной задач равно $f^* = g^* = 137$.

Экономический смысл оптимального решения двойственных задач представлен в таблице 6.5.

Таблица 6.5

| Оптимальное решение исходной задачи $f \rightarrow \max$ | | | | | | |
|--------------------------------------------------------------|---------|---------|---------|------------------------------|---------|---------|
| Объемы производства деталей | | | | Остатки ресурсов | | |
| x_1^* | x_2^* | x_3^* | x_4^* | x_5^* | x_6^* | x_7^* |
| 7 | 0 | 2 | 7 | 0 | 0 | 0 |
| y_4^* | y_5^* | y_6^* | y_7^* | y_1^* | y_2^* | y_3^* |
| 0 | 7/8 | 0 | 0 | 17/8 | 9/4 | 3/8 |
| Превышение затрат ресурсов над ценой реализации | | | | Двойственные оценки ресурсов | | |
| Оптимальное решение двойственной задачи $g \rightarrow \min$ | | | | | | |

Из таблицы видно, что все ресурсы используются полностью, т.е. являются дефицитными, их остатки равны нулю. Оценки этих ресурсов равны соответственно $y_1^* = 17/8, y_2^* = 9/4, y_3^* = 3/8$. В

оптимальном плане детали первого типа, обработанные по 2-му технологическому способу, не выпускаются $x_2^* = 0$, они являются убыточными, т.к. превышение затрат над ценой у них равно $y_5^* = 7/8$. Детали первого типа, обработанные по 1-му технологическому способу и детали второго типа, обработанные по 1-му и 2-му технологическим способам выпускаются в оптимальном плане $x_1^* = 7$, $x_3^* = 2$, $x_4^* = 7$ и являются неубыточными, превышение затрат над ценой у них $y_4^* = y_7^* = y_6^* = 0$. При реализации оптимального плана предприятие получит максимально возможную прибыль, равную 137 ден. ед.

Вопросы для самопроверки

1. По каким правилам строится двойственная задача по отношению к исходной задаче?
2. Сформулируйте теоремы двойственности.
3. Совместное решение двойственных задач.

7 ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТРАНСПОРТНЫХ ЗАДАЧ ПРИ РЕШЕНИИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

7.1 Типы транспортной задачи

Транспортная задача в общем виде формулируется так [11]. Пусть имеется m пунктов отправления (или пунктов производства) A_1, A_2, \dots, A_m и n пунктов назначения (или пунктов потребления) B_1, B_2, \dots, B_n . Обозначим ресурсы груза в i -м пункте отправления через $a_i, (i = \overline{1, m})$, а потребность каждого j -го пункта потребления через $b_j, (j = \overline{1, n})$. Заданы стоимости перевозки единицы от каждого i -ого пункта отправления до каждого j -го пункта потребления. Требуется определить, какое количество груза $x_{i,j} \geq 0$ необходимо перевезти от каждого i -ого пункта отправления до каждого j -го пункта потребления, чтобы:

- ввезти грузы всех поставщиков;
- удовлетворить всех потребителей;
- достигнуть экстремума целевой функции.

Транспортную задачу условно будем называть таблицей, в которой указаны поставщики, потребители, запасы и потребности грузов, тарифы перевозок единицы груза от i -ого поставщика к j -ому потребителю (табл. 7.1).

Матрица $\|c_{i,j}\|_{m \times n}$ называется *матрицей тарифов* (издержек или транспортных расходов). *Планом* транспортной задачи называется матрица $X = \|x_{i,j}\|_{m \times n}$, где каждое число $x_{i,j}$ обозначает количество единиц груза, которое надо доставить из i -го пункта отправления в j -ый пункт назначения.

Общие суммарные затраты, связанные с реализацией плана перевозок, можно представить целевой функцией:

$$f = c_{1,1}x_{1,1} + c_{1,2}x_{1,2} + \dots + c_{1,n}x_{1,n} + c_{2,1}x_{2,1} + c_{2,2}x_{2,2} + \dots + c_{2,n}x_{2,n} + \dots + c_{m,1}x_{m,1} + c_{m,2}x_{m,2} + \dots + c_{m,n}x_{m,n}. \quad (7.1)$$

Переменные $x_{i,j}$ должны удовлетворять ограничениям по запасам, по потребителям и условиям неотрицательности. В математической записи условие задачи можно представить так:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{i,j} = a_i & (i = 1, \dots, m); \\ \sum_{i=1}^m x_{i,j} = b_j & (j = 1, \dots, n); \end{cases} \quad (7.2)$$

$$x_{i,j} \geq 0 \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n). \quad (7.3)$$

Таким образом, математически транспортная задача ставится следующим образом. Дана система ограничений (7.2) при условии (7.3) и целевая функция (7.1). Требуется среди множества решений системы найти такое неотрицательное решение (план) перевозок, которое минимизирует целевую функцию (7.1).

Таблица 7.1 –Транспортная задача

| Поставщик | Потребитель | | | | Запас груза |
|----------------------------|------------------------|------------------------|-----|------------------------|-------------|
| | B_1 | B_2 | ... | B_n | |
| A_1 | $c_{1,1}$ $x_{1,1}$ | $c_{1,2}$ $x_{1,2}$ | ... | $c_{1,n}$ $x_{1,n}$ | a_1 |
| A_2 | $c_{2,1}$ $x_{2,1}$ | $c_{2,2}$ $x_{2,2}$ | ... | $c_{2,n}$ $x_{2,n}$ | a_2 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| A_m | $c_{m,1}$ $x_{m,1}$ | $c_{m,2}$ $x_{m,2}$ | ... | $c_{m,n}$ $x_{m,n}$ | a_m |
| Потребность в грузе | b_1 | b_2 | ... | b_n | |

Система ограничений (7.2) содержит $m+n$ уравнений с $m \times n$ переменными. Предполагается, что суммарные запасы равны суммарным потребностям, т.е.

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j. \quad (7.4)$$

Различают два типа транспортных задач [7]: *закрытые*, в которых суммарный объем груза поставщиков равен суммарному спросу потребителей, т.е. (7.4) и *открытые*, в которых суммарная производственная мощность поставщиков превышает спрос

потребителей или в которых спрос потребителей больше фактической суммарной мощности поставщиков, т.е.

$$\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j \quad \text{или} \quad \sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j .$$

Равенство (7.4) является необходимым и достаточным условием совместности ограничений задачи.

Для транспортной задачи важное значение имеет теорема о ранге матрицы.

Теорема. Ранг матрицы транспортной задачи на единицу меньше числа уравнений, т.е. $r(A) = m + n - 1$.

С учетом этой теоремы в каждой матрице перевозок опорный план должен содержать не более $m+n-1$ занятых клеток, а остальные свободные.

7.2 Способы нахождения опорного плана транспортной задачи

Существуют различные способы построения опорного плана. Рассмотрим правило «северо-западного угла», правило «минимального элемента», способ аппроксимации Фогеля.

Правило «северо-западного угла» [11]. Будем заполнять таблицу, начиная с левого верхнего (северо-западного) угла, двигаясь далее по строке вправо или по столбцу вниз. Занесем в клетку (1;1) меньшее из чисел a_1 и b_1 , т.е. $x_{1,1} = \min(a_1; b_1)$. Если $a_1 > b_1$, то $x_{1,1} = b_1$, и первый столбец «закрыт» для заполнения остальных его клеток, т.е. $x_{i,1} = 0$ для $i = 2, \dots, m$ (потребности первого потребителя удовлетворены полностью).

Двигаясь далее по первой строке, записываем в соседнюю клетку (1;2) меньшее из чисел $a_1 - b_1, b_2$, т.е. $x_{1,2} = \min(a_1 - b_1; b_2)$.

Если $b_1 > a_1$, то аналогично «закрывается» первая строка, т.е. $x_{1,k} = 0$ для $k = 2, \dots, n$. Переходим к заполнению соседней клетки (2;1), куда заносим $x_{2,1} = \min(a_2; b_1 - a_1)$.

Заполнив клетку (1;2) или (2;1), переходим к заполнению следующей третьей клетки либо по второй строке, либо по второму столбцу. Будем продолжать этот процесс до тех пор, пока на каком-то этапе не исчерпаются ресурсы a_m и потребности b_n . Последняя

заполненная клетка окажется лежащей в последнем n -м столбце и в последней m -ой строке.

Пример 7.1 Определить исходное решение по правилу «северо-западного угла» следующей транспортной задачи (табл. 7.2).

Таблица 7.2 – Исходные данные

| a_i | b_k | 40 | 25 | 20 | 50 |
|-------|-------|----|----|----|----|
| 60 | | 5 | 4 | 1 | 2 |
| 40 | | 4 | 2 | 6 | 3 |
| 35 | | 7 | 3 | 5 | 4 |

Решение. В клетку (1;1) помещаем $x_{1,1} = \min(60; 40) = 40$. Спрос первого потребителя удовлетворен полностью, первый столбец из расчета исключается. Остаток груза от первого поставщика ($60-40=20$ ед.) с учетом потребности второго потребителя помещаем в клетку (1;2), т.е. $x_{1,2} = \min(20; 25) = 20$. В этом случае запас первого поставщика исчерпан, переходим к распределению груза второго поставщика. В клетку (2;2) помещаем необходимое количество груза, т.е. $x_{2,2} = \min(40; 5) = 5$. В этом случае спрос второго потребителя удовлетворен полностью. Второй столбец в расчет не принимается, остаток груза от второго поставщика с учетом спроса третьего потребителя помещаем в клетку (2;3), т.е. $x_{2,3} = \min(35; 20) = 20$. Спрос третьего потребителя удовлетворен полностью. Остаток груза второго поставщика с учетом спроса четвертого потребителя помещаем в клетку (2;4), т.е. $x_{2,4} = \min(15; 50) = 15$. В этом случае запас второго поставщика исчерпан. Переходим к распределению запаса у третьего поставщика. В клетку (3;4) помещаем необходимое количество груза $x_{3,4} = \min(35; 35) = 35$. Получили полное распределение запасов груза.

Если число занятых клеток не удовлетворяет условию $m+n-1$, то план перевозок называют *вырожденным*. В данном случае получен невырожденный план.

$$X_1 = \begin{pmatrix} 40 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 20 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 35 \end{pmatrix}.$$

Этому плану соответствует значение целевой функции $f_1 = 5 \cdot 40 + 4 \cdot 20 + 2 \cdot 5 + 6 \cdot 20 + 3 \cdot 15 + 4 \cdot 35 = 595$.

Правило «минимального элемента» [11]. Сущность состоит в следующем. Распределение груза у поставщиков начинается с клетки, которой соответствует наименьший тариф $c_{i,j}$ из всей матрицы тарифов. В клетку с наименьшим тарифом помещают наименьшее из чисел a_i или b_j . Затем из рассмотрения исключают строку, соответствующую поставщику, запасы которого полностью израсходованы, или столбец, соответствующий потребителю, спрос которого полностью удовлетворен. Может оказаться, что следует исключить строку и столбец одновременно, если полностью израсходованы запасы поставщика и полностью удовлетворен спрос потребителя. Далее из оставшихся строк (столбцов) таблицы снова выбирают наименьший тариф и процесс распределения запасов продолжают до тех пор, пока все они не будут распределены, а спрос удовлетворен.

Пример 7.2. Определить исходное опорное решение по правилу «минимального элемента» транспортной задачи, представленной в таблице 7.2, и сравнить значения целевых функций, полученных по правилам «минимального элемента» и «северо-западного угла».

Решение. Наименьший тариф имеем для клетки (1;3), $c_{1,3} = 1$. Поэтому в данную клетку помещаем количество груза $x_{1,3} = \min(60; 20) = 20$ и исключаем из дальнейшего рассмотрения третий столбец. Снова находим в таблице наименьший тариф $c_{1,4} = c_{2,2} = 2$. Поместим, например, необходимое количество груза в клетку (1;4), $x_{1,4} = \min(60 - 20; 50) = 40$. Исключается из дальнейшего рассмотрения первая строка. Далее в клетку (2;2) помещаем количество груза $x_{2,2} = \min(40; 25) = 25$ и исключаем из дальнейшего рассмотрения второй столбец. В оставшейся матрице тарифов минимальным будет тариф для клеток (2;4), (3;2), $c_{2,4} = c_{3,2} = 3$. Однако второй столбец уже исключен из рассмотрения, поэтому загружаем клетку (2;4), $x_{2,4} = \min(40 - 25; 50 - 40) = 10$, и исключаем из дальнейшего рассмотрения четвертый столбец. Новый наименьший тариф для оставшихся тарифов будет $c_{2,1} = 4$. В клетку (2;1) помещаем количество груза $x_{2,1} = \min(15 - 10; 40) = 5$. Исключаем из дальнейшего рассмотрения вторую клетку.

На последнем этапе выберем единственный невычеркнутый первый столбец и единственную третью строку, для которых имеем общую свободную клетку (3;1) с тарифом $c_{3,1} = 7$. В нее помещаем остаток груза $x_{3,1} = \min(35; 40 - 5) = 35$. В результате полного распределения грузов получим исходное опорное решение

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 & 40 \\ 5 & 25 & 0 & 10 \\ 35 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

для которого значение целевой функции $f_2 = 415$.

Способ аппроксимации Фогеля [6]. В большинстве случаев этот способ дает опорный план, самый близкий к оптимальному.

В основе способа аппроксимации Фогеля лежит концепция штрафов, взимаемых за выбор не самого оптимального с точки зрения транспортных издержек маршрута. Штраф по каждой строке и по каждому столбцу определяется из анализа маршрутов с различными показателями издержек (как разность двух различных уровней транспортных издержек). Первой заполняется клетка матрицы (таблицы), в которой фиксируется самый крупный штраф. После заполнения клетки штрафы пересчитываются и так до тех пор, пока все ресурсы не будут распределены.

Пример 7.3. Определить исходное решение по способу аппроксимации Фогеля для транспортной задачи (табл. 7.2).

Алгоритм метода включает следующие основные этапы.

1. Вычисление разностей в каждой строке и в каждом столбце матрицы (см. табл. 7.3) между наименьшей стоимостью и ближайшей к не величине. Разности по строкам записываются справа в столбце разностей, разности по столбцам – внизу в строке разностей. Например, для строки A_1 разность равна $A_1B_4 - A_1B_3 = 2 - 1 = 1$; для строки A_2 разность равна $A_2B_4 - A_2B_2 = 3 - 2 = 1$ и т.д. Для столбца B_3 разность равна $B_3A_3 - B_3A_1 = 5 - 1 = 4$ и т.д.

2. Поиск из всех разностей как по строкам, так и по столбцам, максимальной. Обведем максимальную разность рамкой. В нашем примере максимальная разность находится в столбце B_3 .

3. Размещение в клетку, где находится наименьшая стоимость (столбец $B_3A_1 = 1$ с наибольшей разностью), максимально возможного количества ресурсов. Оно равно 20, т.е. всей потребности потребителя B_3 . Поскольку все потребности потребителя B_3 удовлетворены,

столбец B_3 исключаем из дальнейших расчетов, для этого отметим все клетки этого столбца точками.

4. Вычисление разностей по столбцам и строкам, не принимая во внимание стоимости в клетках, имеющих ресурсы, и клетках с точкой (исключенную строку или столбец), и определение максимальной разности в строке или столбце (строка $A_1 = 2$).

5. Поиск минимального элемента в строке или столбце с максимальной разностью $A_1B_4 = 2$ и размещение в данную клетку максимального количества ресурса (в нашем примере $\min(60 - 20; 50) = 40$), возвращение к этапу 4) и т.д.

Таблица 7.3

| | B_1 | B_2 | B_3 | B_4 | a_i | Столбцы разностей | | | | |
|---------------------|---------|---------|---------|---------|-------|-------------------|---|---|---|--|
| A_1 | 5 • | 4 • | 1 20 | 2 40 | 60 | 1 | 2 | - | - | |
| A_2 | 4 40 | 2 • | 6 • | 3 • | 40 | 1 | 1 | 1 | - | |
| A_3 | 7 • | 3 25 | 5 • | 4 10 | 35 | 1 | 1 | 1 | | |
| b_j | 40 | 25 | 20 | 50 | | | | | | |
| Строки разностей | 1 | 1 | 4 | 1 | | | | | | |
| | 1 | 1 | - | 1 | | | | | | |
| | 3 | 1 | - | 1 | | | | | | |
| | - | - | - | - | | | | | | |
| | | | | | | | | | | |

В результате полного распределения грузов получим исходное опорное решение

$$X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 & 40 \\ 40 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 10 \end{pmatrix},$$

для которого значение целевой функции $f_3 = 375$.

7.3 Решение транспортной задачи методом потенциалов

Для решения транспортной задачи методом потенциалов необходимо выполнить следующий алгоритм [18].

1. Получить опорный план перевозок по одному из изложенных правил.
2. Вычислить потенциал u_i и v_j соответственно, поставщиков и потребителей, т.е. для $x_{i,j} > 0$ составляется система уравнений:

$$u_i + v_j = c_{i,j}. \quad (7.5)$$

3. Поскольку в системе (7.5) количество уравнений на единицу больше числа неизвестных, то одному неизвестному надо присвоить произвольное значение (обычно 0). Система (7.5) решается последовательно подстановкой полученных значений в следующие уравнения.
4. Вычислить сумму потенциалов (косвенные тарифы) для свободных клеток $u_i + v_j = c'_{i,j}$.
5. Проверить разность $s_{i,j} = c_{i,j} - c'_{i,j} = c_{i,j} - (u_i + v_j)$. Если все разности свободных клеток $s_{i,j} \geq 0$, то полученный план оптимальный. Если хотя бы одна разность $s_{i,j} < 0$, то в число занятых клеток вводят переменную $x_{i,k}$, для которой эта разность минимальна.

Начиная с выбранной клетки матрицы перевозок, строится замкнутый прямоугольный цикл (цепочка) с вершинами в заполненных клетках. Выбранной клетке присваивается знак «+», следующей вершине цикла по (или против) часовой стрелке – знак «-», далее «+», «-», и т.д. по циклу. Данная цепочка знаков обязательно заканчивается знаком «-». Цепочка называется вырожденной, если она состоит из одного элемента. Среди клеток цикла, отмеченных знаком «-», выбирается клетка с наименьшим значением переменной $x_{i,j}$, затем из нагрузки клеток, отмеченных знаком «-», вычитают это значение, а клетки, отмеченных знаком «+», прибавляют это значение.

После этого осуществляется переход к шагу 2.

На рис. 7.1 показаны возможные варианты прямоугольных циклов.

Пример 7.4. Решить транспортную задачу, представленную в таблице 7.2, методом потенциалов.

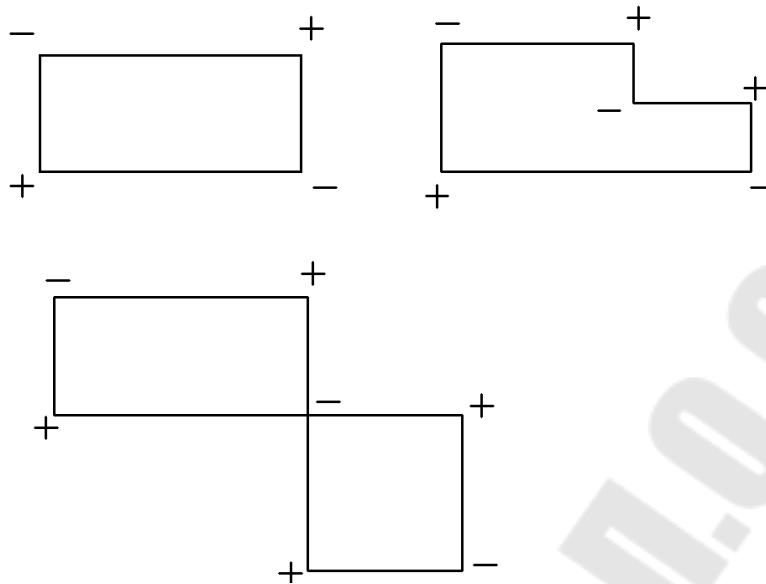


Рисунок 7.1 – Возможные варианты циклов

Решение. Пусть, например, исходное опорное решение получено по правилу «минимального элемента».

Итак, имеем опорное решение, представленное таблице 7.4.

Таблица 7.4 –Опорное решение

| | 40 | 25 | 20 | 50 | u_i |
|-------|-----------|----------|---------|---------|-------|
| 60 | 5 | 4 | 1 20 | 2 40 | 0 |
| 40 | 4 5 | -2 25 | 6 | 3 10 | 1 |
| 35 | 7 - 35 | 3 + | 5 | 4 | 4 |
| v_j | 3 | 1 | 1 | 2 | |

Полученный план невырожденный (см. табл. 7.4). Число занятых клеток удовлетворяет условию $r=3+4-1=7$. Для определения потенциалов поставщиков и потребителей будем иметь шесть уравнений:

$$u_1 + v_3 = 1; u_1 + v_4 = 2; u_2 + v_1 = 4; u_2 + v_2 = 2; u_2 + v_4 = 3; u_3 + v_1 = 7.$$

Поскольку число уравнений на единицу меньше числа неизвестных, одно из неизвестных оказывается свободным и может принимать любое числовое значение. Положим, например, $u_1 = 0$.

Тогда все остальные потенциалы для данного опорного решения определяются однозначно, а именно: $u_1 = 0$; $v_4 = 2$; $u_2 = 1$; $v_2 = 1$; $v_1 = 3$; $v_3 = 1$; $u_3 = 4$.

Найденные потенциалы поставщиков и потребителей указаны справа и внизу (табл. 7.4). Расчет их можно производить непосредственно в таблице, не решая систему уравнений. Очевидно, неизвестный потенциал поставщика (потребителя) определяется разностью между тарифом занятой клетки и известным потенциалом поставщика (потребителя) – строки (столбца), на пересечении которых расположена занятая клетка.

Определим разности для свободных клеток $s_{i,j}$ по формуле: $s_{i,j} = c_{i,j} - (u_i + v_j)$. Получаем, $s_{1,1} = 5 - (0 + 3) = 2$; $s_{1,2} = 4 - (0 + 1) = 3$; $s_{2,3} = 6 - (1 + 1) = 4$; $s_{3,2} = 3 - (4 + 1) = -2$; $s_{3,3} = 5 - (4 + 1) = 0$; $s_{3,4} = 4 - (4 + 2) = -2$.

Полученный план не является оптимальным, так как среди разности $s_{i,j}$ имеются отрицательные: $s_{3,2} = s_{3,4} = -2$. Получены две перспективные (потенциальные) клетки с одинаковой оценкой. Загрузим, например, клетку (3;2). В таком случае для нее строится замкнутый цикл, который включает клетки: (3;2), (3;1), (2;1), (2;2). В свободной клетке указанного цикла условно запишем знак плюс, в следующей клетке (по часовой стрелке или против часовой стрелке) – минус, а в следующей плюс и т.д. В отрицательных вершинах цикла выбираем наименьшее количество груза $\min(25;35)=25$ ед., т.е. $x_{3,2} = 25$ ед. Чтобы общий баланс цикла не изменился, необходимо в клетки цикла со знаком плюс прибавить 25 ед. груза, а из клеток со знаком минус вычесть столько же единиц. Новый опорный план приведен в таблице 7.5.

Он невырожденный. Потенциалы поставщиков и потребителей представлены в таблице 7.5. Найдем разности $s_{i,j}$ для свободных клеток: $s_{1,1} = 5 - (0 + 3) = 2$; $s_{2,2} = 1 - (1 + 1) = 0$; $s_{1,2} = 4 - (0 + 1) = 3$; $s_{2,3} = 6 - (1 + 1) = 4$; $s_{3,3} = 5 - (4 + 1) = 0$; $s_{3,4} = 4 - (4 + 2) = -2$.

План, представленный таблице 7.5, еще не оптимальный, разность $s_{3,4} = -2$. За счет загрузки клетки (3;4), план можно улучшить. Замкнутый цикл для клетки (3;4) виден из таблице 7.5. После смещения 10 ед. груза получаем новый опорный план (таблица

7.6). Он вырожденный. Число занятых клеток не удовлетворяет условию $r = 3 + 4 - 1 = 7$. Число занятых клеток равно 5.

Таблица 7.5 – Новый опорный план

| | 40 | 25 | 20 | 50 | u_i |
|-------|--------------|---------|---------|--------------|-------|
| 60 | 5 | 4 | 1 20 | 2 40 | 0 |
| 40 | + 4 30 | 2 | 6 | - 3 10 | 1 |
| 35 | 7 - 10 | 3 25 | 5 | + 4 | 4 |
| v_j | 3 | 1 | 1 | 2 | |

Таблица 7.6 – Оптимальный план

| | 40 | 25 | 20 | 50 | |
|----|---------|---------|---------|---------|---|
| 60 | 5 | 4 | 1 20 | 2 40 | 0 |
| 40 | 4 40 | 2 | 6 | 3 | 1 |
| 35 | 7 | 3 25 | 5 | 4 10 | 4 |
| | 3 | 1 | 1 | 2 | |

Поместим нуль, например в клетку (2;2) и будем считать эту клетку занятой. Очевидно, загрузка данной клетки не приводит к образованию замкнутого цикла из занятых клеток.

Потенциалы поставщиков и потребителей для плана, представленного в таблице 7.6, определены в этой же таблице. Полученный план (см. таблицу 7.6) является оптимальным, так как он не содержит ни одной отрицательной разности $s_{i,j}$.

Следует отметить, что полученный оптимальный план не единственный. Так, возьмем разность, равную нулю для клетки (2;4). За счет загрузки этой клетки, значение целевой функции для плана не изменится (таблица 7.6), однако структура плана будет иная.

7.4 Задача о назначениях

Рассмотрим задачу нахождения наилучшего способа назначения людей на работу, при котором будет достигнуто максимальная суммарная производительность [18]. Задача может быть интерпретирована в различных вариантах. Например, под видами работ, можно понимать различные изделия, строительные площадки и т.д. Работы могут выполняться станками, механизмами, приспособлениями.

Рассмотрим простейший вариант задачи о назначениях.

Пусть имеется n видов работ A_1, \dots, A_n и m механизмов B_1, \dots, B_m , производительность которых $c_{i,j}$. Требуется определить оптимальное назначение людей на работы, при котором будет достигнута максимальная суммарная производительность.

При такой интерпретации задачи важно, чтобы одновременно на каждый вид работы было назначено только одно лицо.

Рассмотрим случай, когда количество работ равно числу лиц, занятых их выполнением, т.е. $n=m$. Положим,

$$x_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } i - \text{ое лицо назначено } j - \text{ую работу} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}. \quad (7.6)$$

Так как каждое лицо можно назначать только на один вид работы, то

$$\sum_{j=1}^n x_{i,j} = 1 \quad (i = 1, \dots, n). \quad (7.7)$$

Так как каждая работа предназначена только для одного лица, то

$$\sum_{i=1}^n x_{i,j} = 1 \quad (j = 1, \dots, n). \quad (7.8)$$

Суммарная производительность выразится так:

$$f = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{i,j} x_{i,j}. \quad (7.9)$$

Итак, математически задача о назначениях формулируется в следующем виде. Даны системы ограничений (7.7) и (7.8) при условии (7.6). Требуется найти переменные $x_{i,j}$, удовлетворяющие (7.7) и (7.8) и обращающие целевую функцию (7.9) в максимум.

7.5 Алгоритм решения задачи о назначениях венгерским методом

Прежде чем приступить к алгоритму, необходимо привести подготовительный этап. Заменяем задачу максимума (7.9) задачей минимума.

$$f' = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c'_{i,j} x_{i,j}, \quad \text{где } c'_{i,j} = l_j - c_{i,j}$$
$$l_j = \max\{c_{i,j}\} \quad i = 1, \dots, n.$$

Основной принцип венгерского метода – оптимальность решения задачи о назначении не нарушается при уменьшении (увеличении) строки (столбца) на одну и ту же величину d_i (d_j).

Решение считается оптимальным, если все измененные искусственные затраты $c'_{i,j} \geq 0$ ($i, j = 1, \dots, n$) и можно отыскать такой набор $x_{i,j}$, что $F' = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c'_{i,j} x_{i,j} = \min$.

Алгоритм метода включает следующие основные этапы [18].

1. Получение нулей в каждой строке, для чего необходимо найти наименьший элемент в каждой строке d_i и вычесть его из всех ее элементов. Получаем новую таблицу. Аналогично делается для каждого столбца. Получаем новую таблицу.
2. Поиск оптимального решения. Для поиска оптимального решения необходимо рассмотреть сначала одну из строк таблицы, имеющую меньше нулей. Отметить точкой один из нулей этой строки и зачеркнуть все остальные нули этой строки и того столбца, в которых находится этот нуль. Аналогичные операции последовательно проводят для всех строк. Если назначения, которые получены при всех нулях, отмеченных точкой, являются полными (т.е. число нулей, отмеченных точкой, равно n), то решение является оптимальным. В противном случае следует переходить к следующему этапу.
3. Поиск минимального набора строк и столбцов, содержащих нули. Для этого необходимо отметить точкой:
 - а) все строки, в которых не имеется ни одного отмеченного точкой нуля;
 - б) все столбцы, содержащие перечеркнутый нуль, хотя бы в одной из отмеченных точкой строк;

в) все строки, содержащие отмеченные точкой нули, хотя бы в одном из отмеченных точкой столбцов.

Действия б) и в) повторяются поочередно до тех пор, пока есть что отмечать. После этого необходимо зачеркнуть каждую непомяченную строку и каждый помеченный столбец. Цель этого этапа – провести минимальное число горизонтальных и вертикальных прямых, пересекающих по крайней мере, один раз все нули.

4. Перестановка некоторых нулей. Взять наименьшее число из тех клеток, через которые не проведены прямые. Вычесть его из каждого числа не вычеркнутых столбцов и прибавить к каждому числу вычеркнутых строк. Получим новую таблицу.

Эта операция не изменяет оптимального решения, после чего весь цикл начинается с этапа 2 и продолжается до получения оптимального решения.

Пример 7.5. Пусть для монтажа четырех объектов ($n=4$) требуется четыре крана. Нужно так распределить краны по объектам, чтобы суммарное время на монтаж этих объектов было минимально. В нашем случае $c_{i,j}$ – это затраты времени A_i -го крана при монтаже объекта B_j . Исходные данные представлены в таблице 7.7.

Таблица 7.7 – Исходные данные

| A_i | B_j | | | | a_i | d_i |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | B_1 | B_2 | B_3 | B_4 | | |
| A_1 | 3 | 7 | 5 | 8 | 1 | 3 |
| A_2 | 2 | 4 | 4 | 5 | 1 | 2 |
| A_3 | 4 | 7 | 2 | 8 | 1 | 2 |
| A_4 | 9 | 7 | 3 | 8 | 1 | 3 |
| b_j | 1 | 1 | 1 | 1 | | |

где d_i – минимальный элемент строки.

Решение

- 1) Получение нулей в каждой строке таблицы 7.7.

Таблица 7.8 – Приведение по строкам

| A_i | B_j | | | | a_i |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | B_1 | B_2 | B_3 | B_4 | |
| A_1 | 0 | 4 | 2 | 5 | 1 |
| A_2 | 0 | 2 | 2 | 3 | 1 |
| A_3 | 2 | 5 | 0 | 6 | 1 |
| A_4 | 6 | 4 | 0 | 5 | 1 |
| b_j | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| d_j | 0 | 2 | 0 | 3 | |

Получение нулей в каждом столбце таблицы 7. – таблица 7.9

Таблица 7.9 – Приведение по столбцам

| A_i | B_j | | | | a_i |
|---------------|-------|-------|---------------|-------|-------|
| | B_1 | B_2 | $B_3 \bullet$ | B_4 | |
| A_1 | 0 • | 2 | 2 | 2 | 1 |
| A_2 | ∅ | 0 • | 2 | ∅ | 1 |
| $A_3 \bullet$ | 2 | 3 | 0 • | 3 | 1 |
| $A_4 \bullet$ | 6 | 2 | ∅ | 2 | 1 |
| b_j | 1 | 1 | 1 | 1 | |

2) Поиск оптимального решения. Если число $0 \bullet = n$, то решение оптимально. У нас нет, значит переходим к следующему пункту.

3) Поиск минимального набора строк и столбцов, содержащих нули.

а) отметить строки, в которых не имеется ни одного отмеченного точкой нуля – строка 4;

б) все столбцы, содержащие перечеркнутый нуль, хотя бы в одном из отмеченных точкой строк – столбец 3;

в) все строки, содержащие отмеченные точкой нули, хотя бы в одном из отмеченных точкой столбцов – строка 3;

Действия б) и в) повторяются поочередно до тех пор, пока есть что отмечать.

4) Перестановка некоторых нулей. Взять наименьшее число из тех клеток, которые не проведены прямыми – у нас это число 2. Вычтись его из каждого числа невычеркнутых столбцов и прибавить к каждому числу вычеркнутых строк (таблица 7.10).

В нашем случае число нулей, отмеченных точкой, равно 4. Следовательно, назначение является полным, а план – оптимальным.

$$Z = c_{1,1} + c_{2,2} + c_{3,3} + c_{4,4} = 3 + 4 + 2 + 8 = 17.$$

Таблица 7.10

Оптимальное решение

| A_i | B_j | | | | a_i |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | B_1 | B_2 | B_3 | B_4 | |
| A_1 | 0• | 2 | 4 | 2 | 1 |
| A_2 | ∅ | 0• | 4 | ∅ | 1 |
| A_3 | ∅ | 1 | 0• | 1 | 1 |
| A_4 | 4 | ∅ | ∅ | 0• | 1 |
| b_j | 1 | 1 | 1 | 1 | |

7.6 Задача оптимального закрепления за станками операций по обработке деталей

Пусть на предприятии имеется m видов станков, максимальное время работы которых соответственно a_i ($i = 1, 2, \dots, m$) часов. Каждый из станков может выполнять n видов операций. Суммарное время выполнения каждой операции соответственно равно b_j ($j = 1, 2, \dots, n$) часов. Известно производительность ($C_{i,j}$) i -го станка при выполнении j -ой операции. Определить, сколько времени и на какой операции нужно использовать каждый из станков, чтобы обработать максимальное количество деталей [10].

Для составления математической модели обозначим через $x_{i,j}$ ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) время, которое i -й станок должен работать на j -й операции. Тогда количество деталей, обработанных на i -м станке, равно $C_{i,j}x_{i,j}$. Количество деталей, обработанных на

всех станках, можно выразить функцией $Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{i,j}x_{i,j}$. Так как

максимально возможное время работы i -го станка ограничено (значением a_i), то получим $\sum_{j=1}^n x_{i,j} = a_i, i = 1, 2, \dots, m$, если

максимальное время работы станков используется полностью, или $\sum_{j=1}^n x_{i,j} \leq a_i$, $i = 1, 2, \dots, m$, если это время используется не полностью.

С другой стороны, время отведенное на j -ю операцию, равно b_j часов, поэтому $\sum_{i=1}^m x_{i,j} = b_j$, $j = 1, 2, \dots, n$. Из условия следует, что

общее время станков, т.е. $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{i,j} = \sum_{i=1}^m a_i$, и времени, необходимого

на выполнение всех операций, т.е. $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{i,j} = \sum_{j=1}^n b_j$. Отсюда следует,

$$\text{что } \sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j.$$

Таким образом, необходимо найти максимальное значение линейной функции $Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{i,j} x_{i,j}$ при ограничениях

$$\sum_{j=1}^n x_{i,j} = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad x_{ij} \geq 0,$$

$$\sum_{i=1}^m x_{i,j} = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n).$$

Эту задачу можно решить методом потенциалов, рассмотренным выше.

7.7 Задачи размещения с учетом транспортных и производственных затрат

При решении такого рода задач используется открытая модель транспортной задачи.

Задача 7.1. Несколько предприятий выпускают однородную продукцию, объем производства которой необходимо сократить и перейти к выпуску другой продукции, причем себестоимость единицы продукции на каждом предприятии различна. Определить, на каких предприятиях следует провести сокращение, чтобы суммарные расходы на производство и транспортировку продукции, выпускаемой после сокращения, были минимальными [10].

Пусть $(C'_{i,j}) (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$ – матрица стоимостей перевозок единицы продукции от i -го поставщика к j -му потребителю, а C_i – стоимость производства единицы продукции i -го поставщика. Тогда, очевидно $(C_{i,j}) = (C'_{i,j} + C_i)$ – матрица стоимостей рассматриваемой задачи.

Уменьшим на необходимую величину объем потребностей реальных потребителей и введем фиктивным потребителя, объем потребностей которого равен производственному сокращению. В результате избыток продукции будет закреплен за фиктивным потребителем. Предприятия, прикрепленные к фиктивному потребителю, и должны сократить объем производства.

Задача 7.2. Для удовлетворения потребностей в некоторой однородной продукции необходимо разместить предприятия таким образом, чтобы суммарные затраты на доставку сырья, производство продукции и ее транспортировку были минимальными [10].

Задачу решим в два этапа. Определим сначала затраты на транспортировку сырья и производство продукции в намеченных пунктах производства, число которых выберем заведомо большим, чем количество предприятий. Для этого построим открытую модель, в которой поставщики – возможные пункты добычи сырья, а потребители – намеченные пункты производства. После этого вновь построим открытую модель, причем поставщиками будут возможные пункты производства, а потребителями – возможные пункты потребления готовой продукции, которая решается по критерию минимума суммарных затрат на производство, транспортировку сырья и готовой продукции. В результате находим наиболее выгодный вариант размещения предприятий по производству продукции с точки зрения общих затрат на транспортировку и производство.

Вопросы для самопроверки

1. Какие типы транспортных задач бывают?
2. Какие методы знаете для определения опорный плана?
3. В чем суть метода потенциалов?
4. Сформулируйте постановку задачи о назначениях?
5. Как найти оптимальный план задачи о назначениях с помощью венгерского метода?
6. Как осуществить оптимальное закрепление за станками операций по обработке деталей?

8 ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ (ЗЛЦП)

8.1 Постановка ЗЛЦП

На практике часто встречаются задачи с требованием целочисленности всех или части переменных, получивших соответственно название *задач целочисленного* или *частично целочисленного программирования*. В целочисленном программировании переменные изменяются не непрерывно, а принимают некоторые фиксированные (целые) значения.

Задача целочисленного линейного программирования (ЗЦЛП) ставится так [1, 3, 7, 8]: найти план $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$, при котором максимизируется (минимизируется) значение целевой функции

$$f = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (8.1)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \{ \leq, =, \geq \} a_{i,0} \quad (i = 1, \dots, m), \quad (8.2)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n), \quad (8.3)$$

$$x_j - \text{целые числа.} \quad (8.4)$$

8.2 Классификация методов целочисленной оптимизации

Методы целочисленной оптимизации можно разделить на три основных группы [7]:

1. методы отсечения;
2. комбинаторные методы;
3. приближенные методы.

Задачи целочисленного программирования подразделяются на линейные и нелинейные, статические и динамические, детерминированные и стохастические и т.д.

Как мы уже знаем, экстремум для задач линейного программирования достигается в крайней точке выпуклого множества или в точке, которая является выпуклой комбинацией крайних точек. Для целочисленного программирования точкой оптимума может быть любая точка области допустимых решений. Поэтому методы решения

задач линейного программирования в рассмотренном ранее виде не пригодны.

Для решения задач целочисленного (особенно нелинейного) программирования используются *комбинаторные методы*. Это методы направленного частичного перебора допустимых планов.

Трудности машинной реализации точных методов решения задач целочисленного программирования привели к появлению различного рода *приближенных методов*, построенных на использовании особенностей конкретной задачи. Здесь наметилось два направления: 1) разработка детерминированных эвристических алгоритмов, использующих специфику задачи; 2) применение случайного поиска в сочетании с локальной оптимизацией.

8.3 Алгоритм Р. Гомори решения задачи линейного целочисленного программирования

Сущность *методов отсечения* состоит в том, что сначала задача решается без условия целочисленности. Если полученный план будет целочисленным, то задача решена. В противном случае к ограничениям задачи добавляется новое ограничение, обладающее следующими свойствами [7]:

- оно должно быть линейным;
- должно отсекал найденный оптимальный нецелочисленный план;
- не должно отсекал ни одного целочисленного плана.

Дополнительное ограничение, обладающее указанными свойствами, называется *правильным отсечением*.

Затем полученная задача решается с учетом нового ограничения. После этого в случае необходимости добавляется еще одно ограничение и т.д.

Геометрически добавление каждого линейного ограничения отвечает проведению гиперплоскости, которая отсекает от многогранника планов некоторую его часть вместе с оптимальной точкой с нецелыми координатами, но не затрагивает ни одной из целочисленных точек этого многогранника.

Р. Гомори разработал алгоритм решения ЗЦЛП (8.1)-(8.4), использующий симплексную процедуру. Гомори предложил простой способ построения правильного отсечения [7, 8, 14].

Предположим, что в результате решения симплекс-методом канонической ЗЛП (8.1)-(8.3) получен оптимальный план $(b_{1,0}; \dots; b_{k,0}; \dots; b_{m,0}; 0; \dots; 0)$, в котором, например, $b_{k,0}$ – нецелая компонента. В таком случае можно доказать, что неравенство

$$\{b_{k,m+1}\}x_{m+1} + \dots + \{b_{k,n}\}x_n \geq \{b_{k,0}\}, \quad (8.5)$$

сформированное по x_k -строке, обладает всеми свойствами правильного отсечения.

В неравенстве (8.5) присутствует символ $\{\dots\}$, означающий дробную часть числа. Дробной частью $\{a\}$ числа a называют разность между этим числом и его целой частью $[a]$, т.е. наибольшим целым, не превосходящим a .

Для решения ЗЦЛП (8.1)-(8.4) можно использовать следующий алгоритм.

1. Симплекс-методом решить ЗЛП (8.1)-(8.3). Если все компоненты оптимального плана целые, то он является оптимальным и для ЗЦЛП (8.1)-(8.4). Если ЗЛП (8.1)-(8.3) неразрешима, то и ЗЦЛП (8.1)-(8.4) также неразрешима. Если среди компонент оптимального плана есть нецелые, то перейти к п. 2.
2. Среди нецелых компонент выбрать компоненту с наибольшей дробной частью и по соответствующей строке симплекс-таблицы, содержащей нецелочисленный оптимальный план, сформировать правильное отсечение (8.5).
3. Неравенство (8.5) введением дополнительной неотрицательной целочисленной переменной преобразовать в эквивалентное уравнение и включить его в симплекс-таблицу с нецелочисленным оптимальным планом.
4. Полученную расширенную ЗЛП решить симплекс-методом. Если полученный оптимальный план будет целочисленным, то ЗЦЛП (8.1)-(8.4) решена. В противном случае вернуться к п. 2 алгоритма.

Если задача разрешима в целых числах, то после конечного числа итераций оптимальный целочисленный план будет найден.

Если в процессе решения появится строка с нецелым свободным членом и целыми остальными коэффициентами, то соответствующее уравнение не имеет решения в целых числах. В таком случае и данная задача не имеет целочисленного оптимального плана.

Пример 8.1. Найти максимальное значение целевой функции

$$f = 2x_1 + 3x_2$$

при ограничениях

$$3x_1 + 5x_2 \leq 60;$$

$$3x_1 + 4x_2 \leq 34;$$

$$x_2 \leq 8;$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1, x_2 - \text{целые числа.}$$

Решение. Приведем задачу к каноническому виду:

$$\max f = 2x_1 + 3x_2$$

$$3x_1 + 5x_2 + x_3 = 60;$$

$$3x_1 + 4x_2 + x_4 = 34;$$

$$x_2 + x_5 = 8.$$

Начальный базисный план

$$x_3 = 60 - (3x_1 + 5x_2)$$

$$x_4 = 34 - (3x_1 + 4x_2)$$

$$x_5 = 8 - x_2$$

$$БП = (x_3, x_4, x_5), \quad СП = (x_1, x_2)$$

$$X_{нач} = (0, 0, 60, 34, 8)$$

Решим задачу симплекс-методом (см табл. 8.1-8.3).

Таблица 8.1 – Первая симплекс-таблица

| БП | СЧ | $-x_1$ | $-x_2$ | $-x_3$ | $-x_4$ | $-x_5$ |
|--------|----|--------|--------|--------|--------|-----------------|
| x_3 | 60 | 3 | 5 | 1 | 0 | 0 |
| x_4 | 34 | 3 | 4 | 0 | 1 | 0 |
| x_5 | 8 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 \Rightarrow |
| $f(x)$ | 0 | -2 | -3 | 0 | 0 | 0 |

$$\max \{ |-2|; |-3| \} = 3; \quad \min \left\{ \frac{60}{5}; \frac{34}{4}; \frac{8}{1} \right\} = 8.$$

Таблица 8.2 – Вторая симплекс-таблица

| БП | СЧ | $-x_1$ | $-x_2$ | $-x_3$ | $-x_4$ | $-x_5$ |
|--------|----|--------|--------|--------|--------|------------------|
| x_3 | 20 | 3 | 0 | 1 | 0 | -5 |
| x_4 | 2 | 3 | 0 | 0 | 1 | -4 \Rightarrow |
| x_2 | 8 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| $f(x)$ | 24 | -2 | 0 | 0 | 0 | 3 |

$$\max \{ |-2| \} = 2; \quad \min \left\{ \frac{20}{3}; \frac{2}{3} \right\} = \frac{2}{3}.$$

Таблица 8.3 – Третья симплекс-таблица

| БП | СЧ | $-x_1$ | $-x_2$ | $-x_3$ | $-x_4$ | $-x_5$ |
|--------|-----------------|--------|--------|--------|---------------|----------------|
| x_3 | 18 | 0 | 0 | 1 | -1 | -1 |
| x_1 | $\frac{2}{3}$ | 1 | 0 | 0 | $\frac{1}{3}$ | $-\frac{4}{3}$ |
| x_2 | 8 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| $f(x)$ | $25\frac{1}{3}$ | 0 | 0 | 0 | 2 | $\frac{1}{3}$ |

Решая задачу симплекс-методом, получаем оптимальный план (табл. 8.3): $x^* = \left(\frac{2}{3}; 8; 18; 0; 0 \right)$ со значением целевой функции

$$f_{\max} = 25\frac{1}{3}.$$

Однако полученный план не удовлетворяет условию целочисленности. По строке переменной x_1 , получившей нецелочисленное значение в оптимальном плане, составляем дополнительное ограничение:

$$\left\{ \frac{1}{3} \right\} x_4 + \left\{ -\frac{4}{3} \right\} x_5 \geq \left\{ \frac{2}{3} \right\} \quad \text{или} \quad \frac{1}{3} x_4 + \frac{2}{3} x_5 \geq \frac{2}{3}.$$

Вводя дополнительную целочисленную переменную $x_6 \geq 0$, получаем

$$\frac{1}{3} x_4 + \frac{2}{3} x_5 - x_6 = \frac{2}{3}; \quad 0 = \frac{2}{3} - \left(\frac{1}{3} x_4 + \frac{2}{3} x_5 - x_6 \right).$$

Составляем симплекс-таблицу расширенной задачи (таблица 8.4).

Таблица 8.4 – Расширенная симплекс-таблица

| БП | СЧ | $-x_1$ | $-x_2$ | $-x_3$ | $-x_4$ | $-x_5$ | $-x_6$ |
|--------|-----------------|--------|--------|--------|--------|--------|------------------|
| x_3 | 18 | 0 | 0 | 1 | -1 | -1 | 0 |
| x_1 | 2/3 | 1 | 0 | 0 | 1/3 | -4/3 | 0 |
| x_2 | 8 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 2/3 | 0 | 0 | 0 | 1/3 | 2/3 | -1 \Rightarrow |
| $f(x)$ | $25\frac{1}{3}$ | 0 | 0 | 0 | 2 | 1/3 | 0 |

↑

$$\min \left\{ \frac{2}{3} / \frac{2}{3}; \frac{8}{1} \right\} = 1$$

Таблица 8.5 – Вторая расширенная симплекс-таблица

| БП | СЧ | $-x_1$ | $-x_2$ | $-x_3$ | $-x_4$ | $-x_5$ | $-x_6$ |
|--------|----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| x_3 | 19 | 0 | 0 | 1 | -1/2 | 0 | -2/3 |
| x_1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | -2 |
| x_2 | 7 | 0 | 1 | 0 | -1/2 | 0 | 3/2 |
| x_5 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 | 1 | -3/2 |
| $f(x)$ | 25 | 0 | 0 | 0 | 1/2 | 0 | 1/2 |

Повторив процесс решения симплексным методом применительно к расширенной задаче, получим оптимальный целочисленный план (таблица 8.5) $x^* = (2; 7; 19; 0; 1; 0)$, $f_{\max} = 25$.

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте задачу целочисленного программирования.
2. Сущность метода отсечения.
3. Алгоритм Р. Гомори решения задачи целочисленного программирования.

9 ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ ПРИ РЕШЕНИИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

9.1 Метод ветвей и границ

Метод ветвей и границ – один из наиболее эффективных решений различных задач комбинаторного типа [7].

Пусть задана конечная область, в которой требуется найти набор переменных $X \in G$, доставляющих максимум целевой функции $f(X)$. Во многих случаях можно определить верхнюю границу $f(X)$ на множестве планов G . Обозначим ее через $\varphi(G)$, т.е. $f(X) \leq \varphi(G)$. Разобьем G на несколько непересекающихся подмножеств G_1, G_2, \dots, G_k , т.е. разветвим множество G . На каждом из подмножеств оценим сверху функцию $f(X)$, т.е. определим числа $\varphi(G_1), \varphi(G_2), \dots, \varphi(G_k)$. Если удастся найти некоторый набор переменных $X^0 \in G_p$, для которого $f(X^0) = \varphi(G_p) \geq \varphi(G_i)$, $i = \overline{1, k}$, то X^0 – оптимальное решение исходной задачи. Если такой план не обнаружен, то продолжим процесс разбиения, начиная с подмножества с самой высокой оценкой и т.д. Так как множество всех допустимых планов предполагается конечным, то после конечного числа шагов будет найден оптимальный план.

В случае задачи линейного целочисленного программирования верхнюю границу находят решением соответствующей задачи с отброшенным условием целочисленности. Ветвление производится последовательным включением в условия дополнительных ограничений.

9.2 Математическая модель задачи о коммивояжере

Коммивояжер должен посетить каждый из n городов только один раз и вернуться в исходный пункт. Его маршрут должен минимизировать суммарную длину пройденного пути [11].

Для некоторых пар (i, j) непосредственный переход от i к j может быть запрещен. В этом случае элемент матрицы C полагается равным бесконечности. В других случаях требуют, чтобы определенная дуга обязательно входила в маршрут.

На каждом шаге описываемого алгоритма задача включает n городов, причем из n шагов маршрута k шагов могут быть уже

установлены и нужно выбрать оптимальным образом из оставшихся $n-k$ шагов.

Формализуем задачу. Введем неизвестные величины:

$$x_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если коммивояжер из города } i \text{ переезжает в город } j; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (9.1)$$

Пусть $C = \|c_{i,j}\|$ матрица расстояний между городами. Тогда

$$f = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{i,j} x_{i,j} \quad (9.2)$$

есть длина маршрута для выбранного плана переездов. На матрицу $X = \|x_{i,j}\|$ неизвестных должны быть наложены ограничения:

$$\sum_{i=1}^n x_{i,j} = 1, \quad j = \overline{1, n}, \quad (9.3)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{i,j} = 1, \quad i = \overline{1, n}. \quad (9.4)$$

Система ограничений (9.3) обеспечивает построение маршрута, при котором коммивояжер въезжает в каждый город только раз, а система ограничений (9.4) – маршрута, когда он выезжает из каждого города только раз. Эти ограничения недостаточны, так как среди допускаемых ими решений имеются маршруты, не образующие полный цикл, включающий все города.

Устранение подциклов достигается при добавлении системы ограничений:

$$u_i - u_j + nx_{i,j} \leq n - 1, \quad i, j = \overline{1, n}, \quad i \neq j, \quad (9.5)$$

где переменные u могут принимать произвольные вещественные значения.

Задача о коммивояжере в математической постановке эквивалентна задаче упорядочения конечного числа работ на машине при учете потерь от переналадок.

Для задачи упорядочения каждая работа соответствует городу, а длительность настройки – расстоянию между городами. Матрица C может быть и несимметричной, так как длительность настройки при переходе от работы i к работе j , как правило, отлична от длительности настройки при переходе от j к i .

9.3 Алгоритм Литтла для решения задачи о коммивояжере

Алгоритм Литтла для решения задачи о коммивояжере можно сформулировать в виде следующих правил [8, 11].

1. Находим в каждой строке матрицы $C = \|c_{i,j}\|$ минимальный элемент $u_i = \min_j c_{i,j}$ и вычитаем его из всех элементов соответствующей строки. Получим матрицу, приведенную по строкам, с элементами $c'_{i,j} = c_{i,j} - \min_j c_{i,j}$.

2. Если в матрице C' , приведенной по строкам, окажутся столбцы, не содержащие нуля, то ее приводим по столбцам. Для этого в каждом столбце матрицы C' выбираем минимальный элемент $v_j, j = 1, \dots, n$ и вычитаем его из всех элементов соответствующего столбца. Получим матрицу $C'' = \|c_{i,j} - \min_j c_{i,j} - \min_i c'_{i,j}\|$, каждая строка и каждый столбец которой содержит хотя бы один ноль. Такая матрица называется приведенной по строкам и столбцам.

3. Суммируем элементы u_i и v_j , получим константу приведения

$$\gamma = \sum_{i=1}^n u_i + \sum_{j=1}^n v_j, \text{ которая будет нижней границей множества всех}$$

допустимых гамильтоновых контуров, т.е. $\gamma = \varphi(G^0) \leq f(X)$.

Примечание. Контур – это конечный путь, у которого начальная вершина совпадает с конечной. При этом контур называется элементарным (гамильтоновым), если все его вершины различны, за исключением начальной и конечной, которые совпадают).

4. Находим степени нулей для приведенной по строкам и столбцам матрицы. Для этого мысленно нули в матрице заменяем на ∞ и находим сумму минимальных элементов строки и столбца, соответствующих этому нулю. Записываем ее в правом верхнем углу клетки:

$$\theta_{i,j} = \min_{j' \neq j} c_{i,j'} + \min_{i' \neq i} c_{i',j}$$

5. Выбираем дугу (i_0, j_0) , для которой степень нулевого элемента достигает максимального значения

$$\theta_{i_0, j_0} = \max_{c_{i,j}''} \theta_{i,j}.$$

6. Разбиваем множество всех гамильтоновых контуров G^0 на два подмножества G_{i_0, j_0}^1 и G_{i_0, j_0}^1 . Подмножество G_{i_0, j_0}^1 гамильтоновых контуров содержит дугу (i_0, j_0) , а G_{i_0, j_0}^1 – ее не содержит. Для получения матрицы контуров G_{i_0, j_0}^1 , включающих дугу (i_0, j_0) , вычеркиваем в матрице C'' строку i_0 и столбец j_0 . Чтобы не допустить образования негамильтонова контура, заменяем симметричный элемент (j_0, i_0) на ∞ .
7. Приводим матрицу гамильтоновых контуров G_{i_0, j_0}^1 . Пусть h_{i_0, j_0}^1 – константа ее приведения. Тогда нижняя граница множества G_{i_0, j_0}^1 определяется так: $\varphi(G_{i_0, j_0}^1) = \gamma + h_{i_0, j_0}^1$.
8. Находим множество гамильтоновых контуров G_{i_0, j_0}^1 , не включающих дугу (i_0, j_0) . Исключение дуги (i_0, j_0) достигается заменой элемента c_{i_0, j_0}'' в матрице C'' на ∞ .
9. Делаем приведение матрицы гамильтоновых контуров G_{i_0, j_0}^1 . Пусть h_{i_0, j_0}^1 – константа ее приведения. Нижняя граница множества G_{i_0, j_0}^1 установится так: $\varphi(G_{i_0, j_0}^1) = \gamma + h_{i_0, j_0}^1$.
10. Сравниваем нижние границы подмножества гамильтоновых контуров G_{i_0, j_0}^1 и G_{i_0, j_0}^1 . Если $\varphi(G_{i_0, j_0}^1) < \varphi(G_{i_0, j_0}^1)$, то дальнейшему ветвлению в первую очередь подлежит подмножество G_{i_0, j_0}^1 . Если $\varphi(G_{i_0, j_0}^1) > \varphi(G_{i_0, j_0}^1)$, то разбиению подлежит подмножество G_{i_0, j_0}^1 и т.д. Процесс разбиения множеств на подмножества сопровождается построением дерева ветвления.
11. Если в результате ветвления получаем размерность сокращенной матрицы 2×2 , то определяем полученный ветвлением гамильтонов контур и его длину (рекорд).
12. Сравниваем длину гамильтонова контура с нижними границами оборванных ветвей. Если длина контура не превышает их нижних границ, то задача решена. В противном случае развиваем ветви

подмножеств с нижней границей, меньшей полученного контура, до тех пор, пока не получим маршрут с меньшей длиной или не убедимся, что такого не существует.

Пример 9.1 Решить задачу о коммивояжере для матрицы расстояний, представленной в таблице 9.1.

Таблица 9.1 – Матрица расстояний G^0

| $i \setminus j$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | u_i |
|-----------------|----------|----------|----------|----------|----------|-------|
| 1 | ∞ | 30 | 40 | 15 | 6 | 6 |
| 2 | 10 | ∞ | 18 | 7 | 9 | 7 |
| 3 | 20 | 30 | ∞ | 1 | 10 | 1 |
| 4 | 25 | 10 | 35 | ∞ | 5 | 5 |
| 5 | 9 | 8 | 7 | 6 | ∞ | 6 |

Решение

1. Справа к табл. 9.1 присоединим столбец u_i , в котором записываем минимальные элементы строк. Вычитаем элементы u_i из соответствующих элементов матрицы C , получим матрицу приведенную по строкам (табл. 9.2).

Таблица 9.2 – Матрица приведенная по строкам

| $i \setminus j$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-----------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1 | ∞ | 24 | 34 | 9 | 0 |
| 2 | 3 | ∞ | 11 | 0 | 2 |
| 3 | 19 | 29 | ∞ | 0 | 9 |
| 4 | 20 | 5 | 30 | ∞ | 0 |
| 5 | 3 | 2 | 1 | 0 | ∞ |
| v_j | 3 | 2 | 1 | 0 | 0 |

2. Внизу матрицы таблицы 9.2 присоединяем строку v_j , в которой записываем минимальные элементы столбцов. Вычитаем элементы v_j из соответствующих столбцов матрицы C' (табл. 9.3).
3. Вычислим константу приведения

$$\gamma = \sum_{i=1}^5 u_i + \sum_{j=1}^5 v_j = 25 + 6 = 31.$$

Нижней границей множества всех гамильтоновых контуров будет число $\gamma = 31 = \varphi(G^0) \leq f(X)$.

Таблица 9.3 – Матрица, приведенная по строкам и столбцам \tilde{G}^0

| $i \setminus j$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-----------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1 | ∞ | 22 | 33 | 9 | 0^9 |
| 2 | 0^0 | ∞ | 10 | 0^0 | 2 |
| 3 | 16 | 27 | ∞ | 0^9 | 9 |
| 4 | 17 | 3 | 29 | ∞ | 0^3 |
| 5 | 0^0 | 0^3 | 0^{10} | 0^0 | ∞ |

- Находим степени нулей полностью приведенной матрицы табл. 9.3. Для этого мысленно заменяем в ней нули на ∞ и устанавливаем сумму минимальных элементов соответствующей строки и столбца. Степени нулей записаны в правых верхних углах клеток, для которых $c''_{i,j} = 0$.
- Определяем максимальную степень нуля. Она равна 10 и соответствует клетке (5; 3). Таким образом, претендентом на включение в гамильтонов контур является дуга (5, 3).
- Разбиваем множество всех гамильтоновых контуров G^0 на два $G_{5,3}^1$ и $G_{5,3}^1$. Матрицу $G_{5,3}^1$ с дугой (5, 3) получаем из табл. 9.3 путем вычеркивания строки 5 и столбца 3. Чтобы не допустить образования негамильтонова контура, заменяем элемент (3, 5) на ∞ (табл. 9.4).

Таблица 9.4 – Матрица $G_{5,3}^1$ с дугой (5, 3)

| $i \setminus j$ | 1 | 2 | 4 | 5 | u_i |
|-----------------|----------|----------|----------|----------|-------|
| 1 | ∞ | 22 | 9 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | ∞ | 0 | 2 | 0 |
| 3 | 16 | 27 | 0 | ∞ | 0 |
| 4 | 17 | 3 | ∞ | 0 | 0 |
| v_j | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 |

- Матрицу гамильтоновых контуров $G_{5,3}^1$ получим из таблицы 9.3 путем замены элемента $c''_{5,3}$ на ∞ (табл. 9.5).

Таблица 9.5 – Матрица гамильтоновых контуров $G_{5,3}^1$

| | | | | | | |
|-----------------|----------|----------|----------|----------|----------|-------|
| $i \setminus j$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | u_i |
| 1 | ∞ | 22 | 33 | 9 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | ∞ | 10 | 0 | 2 | 0 |
| 3 | 16 | 27 | ∞ | 0^9 | 9 | 0 |
| 4 | 17 | 3 | 29 | ∞ | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | ∞ | 0 | ∞ | 0 |
| v_j | 0 | 0 | 10 | 0 | 0 | |

8. Делаем дополнительное приведение матрицы контуров $G_{5,3}^1$: $h_{5,3}^1=3$ (табл. 9.6). Нижняя граница множества $G_{5,3}^1$ равна $\varphi(G_{5,3}^1)=31+3=34$.
9. Находим константу приведения для множества контуров $G_{5,3}^1$: $h_{5,3}^1=10$. Следовательно, нижняя граница $\varphi(G_{5,3}^1)=31+10=41$.

Таблица 9.6 – Матрица, приведенная по строкам и столбцам $G_{5,3}^1$

| | | | | |
|-----------------|----------|----------|----------|----------|
| $i \setminus j$ | 1 | 2 | 4 | 5 |
| 1 | ∞ | 19 | 9 | 0^9 |
| 2 | 0^{16} | ∞ | 0^0 | 2 |
| 3 | 16 | 24 | 0^{16} | ∞ |
| 4 | 17 | 0^{19} | ∞ | 0^0 |

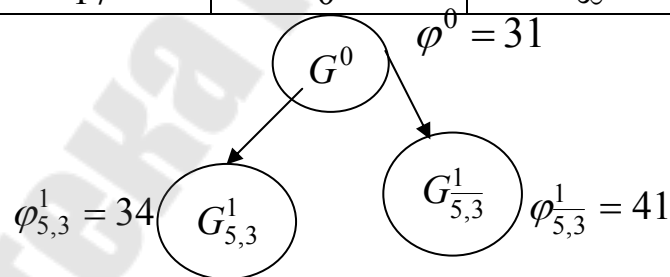


Рисунок 9.1 – Ветвление по дуге (5, 3)

10. Сравниваем нижние границы подмножеств $G_{5,3}^1$ и $G_{5,3}^1$. Так как $\varphi(G_{5,3}^1)=34 < \varphi(G_{5,3}^1)=41$, то дальнейшему ветвлению подвергаем множество $G_{5,3}^1$ (табл. 9.4). На рис. 9.1 представлено ветвление по дуге (5, 3). Переходим к ветвлению подмножества $G_{5,3}^1$. Его приведенная матрица представлена в таблице 9.6.

Узнаем степени нулей этой матрицы (табл. 9.6). Претендентом на включение в гамильтонов контур будет дуга (4, 2). Разбиваем множество $G_{5,3}^1$ на два подмножества $G_{4,2}^2$ и $G_{4,2}^2$ (табл. 9.7 и 9.8).

Определяем константы приведения этих матриц: $h_{4,2}^2 = 0$, $h_{4,2}^2 = 19$. Следовательно, $\varphi(G_{4,2}^2) = 34$, $\varphi(G_{4,2}^2) = 53$. На рис. 9.2 представлено ветвление с использованием дуги (4, 2). Так как $\varphi(G_{4,2}^2) < \varphi(G_{4,2}^2)$, то ветвлению подлежит подмножество $G_{4,2}^2$ (табл. 9.7).

Таблица 9.7 – $G_{4,2}^2$

| $i \setminus j$ | 1 | 4 | 5 | u_i |
|-----------------|----------|----------|----------|-------|
| 1 | ∞ | 9 | 0^{11} | 0 |
| 2 | 0^{18} | ∞ | 2 | 0 |
| 3 | 16 | 0^{25} | ∞ | 0 |
| v_j | 0 | 0 | 0 | 0 |

Таблица 9.8 – $G_{4,2}^1$

| $i \setminus j$ | 1 | 2 | 4 | 5 | u_i |
|-----------------|----------|----------|----------|----------|-------|
| 1 | ∞ | 19 | 9 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | ∞ | 0 | 2 | 0 |
| 3 | 16 | 24 | 0 | ∞ | 0 |
| 4 | 17 | ∞ | ∞ | 0 | 0 |
| v_j | 0 | 19 | 0 | 0 | |

Вычислим степени нулей матрицы. Претендентом к включению в гамильтонов контур станет дуга (3, 4). Разбиваем множество $G_{4,2}^2$ на подмножества $G_{3,4}^3$ и $G_{3,4}^3$ (табл. 9.9 и 9.10). Очевидно, $\varphi(G_{3,4}^3) = 34$, $\varphi(G_{3,4}^3) = 34 + 25 = 59$. Следовательно, ветвлению нужно подвергнуть подмножество $G_{3,4}^3$. Но его матрица имеет размерность 2×2 . Поэтому в гамильтонов контур следует включить дуги, соответствующие в матрице подмножества $G_{3,4}^3$ нулевым элементам, т.е. дуги (1, 5), (2, 1).

Таблица 9.9 – $G_{3,4}^3$

| $i \setminus j$ | 1 | 5 | u_i |
|-----------------|----------|---|-------|
| 1 | ∞ | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 2 | 0 |
| v_j | 0 | 0 | |

Таблица 9.10 – $G_{3,4}^3$

| $i \setminus j$ | 1 | 4 | 5 | u_i |
|-----------------|----------|----------|----------|-------|
| 1 | ∞ | 9 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | ∞ | 2 | 0 |
| 4 | 17 | ∞ | ∞ | 16 |
| v_j | 0 | 9 | 0 | |

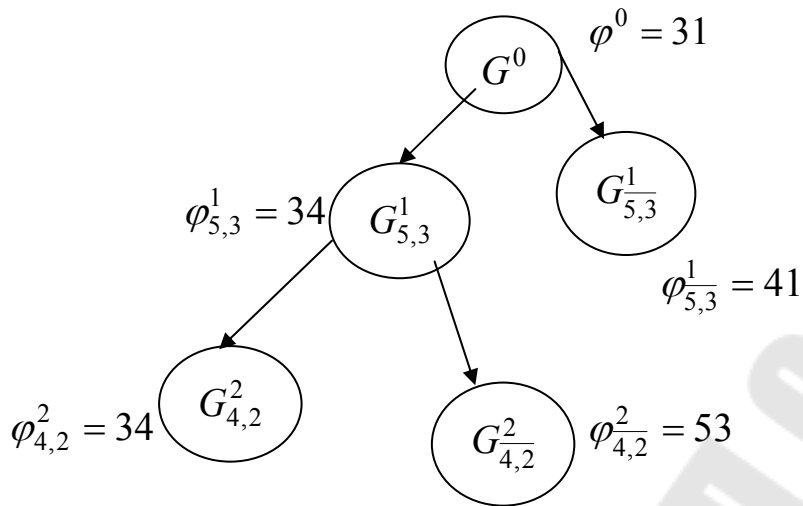


Рисунок 9.2 – Ветвление по дуге (4,2)

На рисунке. 9.3 представлено дерево ветвлений.

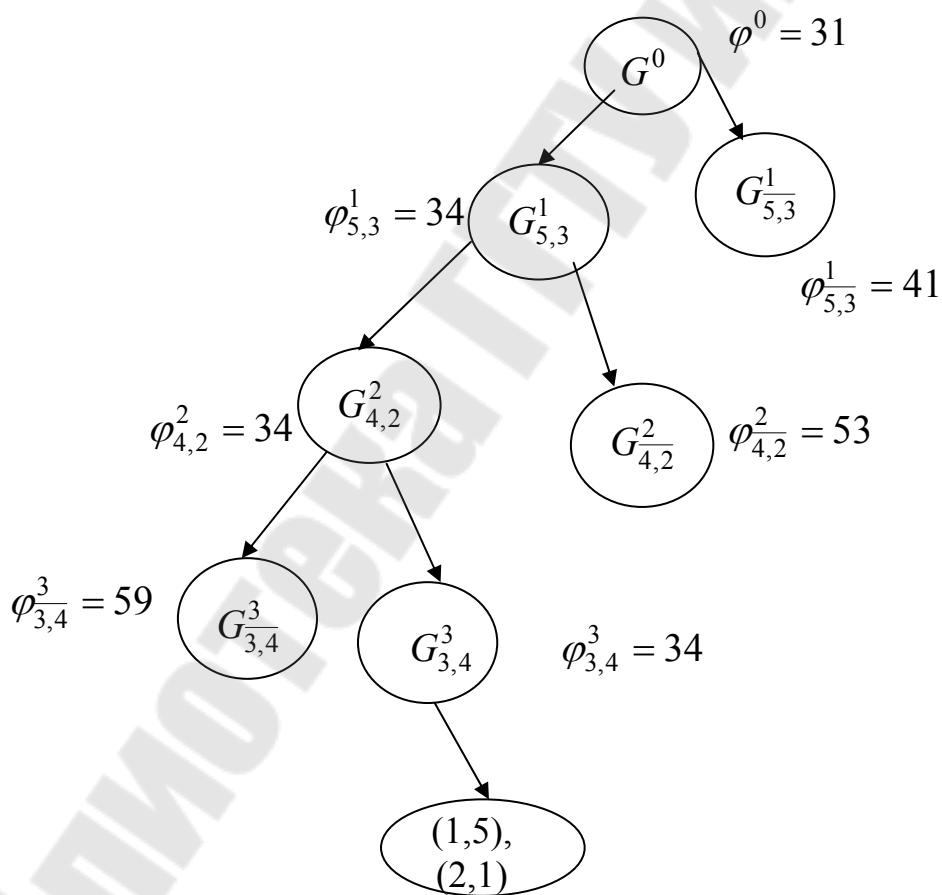


Рисунок 9.3 – Дерево ветвлений

Определим полученный гамильтонов контур. В него вошли дуги $\{(5,3), (4,2), (3,4), (1,5), (2,1)\}$. Длина контура равна $c_{5,3} + c_{3,4} + c_{4,2} + c_{2,1} + c_{1,5} = 7 + 10 + 1 + 6 + 10 = 34$.

Так как границы оборванных ветвей больше длины контура $5 - 3 - 4 - 2 - 1 - 5$, то этот контур имеет наименьшую длину. На рисунке 9.4 представлен замкнутый маршрут минимальной длины.

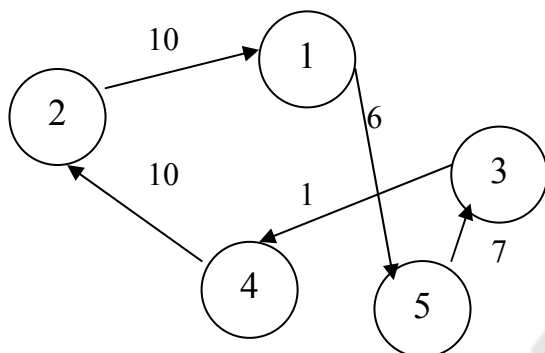


Рисунок 9.4 – Замкнутый маршрут минимальной длины

9.4 Решение задачи о коммивояжере на максимум

В случае решения задачи на максимум [18] ее легко свести к алгоритму Литтла для решения задачи коммивояжера на минимум. Для этого поступают так. Найдем максимальный элемент в каждом столбце

$$l_j = \max_i c_{i,j}.$$

Построим матрицу

$$\tilde{c}_{i,j} = \max_i c_{i,j} - c_{i,j}.$$

Как и в задаче о назначениях, $\tilde{F} = \sum_{j=1}^n l_j - F$, т.е. \tilde{F} достигает

минимума для того же плана, для которого F достигает максимума.

Прежде всего, припишем символ ∞ всем элементам матрицы, для которых в графе нет дуги. Затем решим задачу коммивояжера на

минимум с матрицей $\tilde{C} = \|\tilde{c}_{i,j}\| = \left\| \max_i c_{i,j} - c_{i,j} \right\|$.

9.5 Задача о коммивояжере с заданным началом и минимальным путем

В ряде случаев начальная вершина графа задана. Коммивояжеру нужно обойти все города, отправляясь из наперед заданного города, побывав в каждом из них только один раз, но не обязательно возвращаться обратно. При этом нужно затратить минимальное время. Путь проходит через все вершины графа, но он не замкнут. Если его начало не совпадает с концом, то такой путь называется гамильтоновым. Таким образом, задача сводится к нахождению гамильтонова пути с фиксированным началом [18].

Для ее решения можно воспользоваться алгоритмом Литтла. На главную диагональ следует поставить символ ∞ . В столбце же, соответствующем заданному началу, заменить все элементы, кроме диагонального, нулями. Далее нужно действовать по алгоритму Литтла.

Если же нужно найти минимальный гамильтонов путь с нефиксированным началом, то следует ввести нулевую вершину s , соединив ее с остальными вершинами графа дугами с нулевой длиной. Найти алгоритмом Литтла минимальный гамильтонов контур полученного графа. Исключив затем вершину s , получим искомый путь.

Если не существует гамильтонова пути, исходящего из заданной вершины, то при вычислениях нижняя граница одного из подмножества окажется равной ∞ .

9.6 Решение задачи о коммивояжере методом «ближайшего соседа»

Существует несколько точных методов решения задачи коммивояжера: ветвей и границ, динамического программирования. Методом ветвей и границ с использованием современных ЭВМ можно решать задачи коммивояжера для $n \leq 40$, динамического программирования – для $n \leq 17$

В связи с малой эффективностью точных методов получили широкое распространение эвристические методы. В настоящее время существует более ста приближенных методов решения задачи коммивояжера, среди которых прост метод ближайшего соседа. Он реализует требование включать в искомый замкнутый контур

вершину, ближайшую к только что найденной. Алгоритм «ближайшего соседа» [8] состоит в последовательном добавлении к начальной вершине ближайшей к ней и т.д. Метод очень прост, однако степень приближения к оптимальному решению зависит от выбора начальной точки. Поэтому алгоритм целесообразно применять, начиная с каждой вершины, и затем выбрать замкнутый контур, наименьшей длины. Отметим, что если ближайший сосед для некоторой вершины уже вошел в контур, то берется следующая по близости вершина и т.д.

На обширном статистическом материале показано, что с увеличением n ошибка решения убывает. Поэтому при $n \leq 40$ можно применять точные методы, при $n > 40$ – приближенные типа «ближайшего соседа».

Пример 9.2. Решить задачу (см. табл. 9.1) методом «ближайшего соседа».

Начнем с первой вершины. Ближайшей к ней является пятая вершина: $\min c_{1,j} = 6$. Процесс нахождения минимального контура целесообразно сопровождать построением дерева ветвления. Если ближайшая вершина уже попала в контур, то блокируем ее и переходим к следующей по степени близости. Ближайшей к пятой вершине является четвертая, а к четвертой – пятая. Но она уже вошла в контур, поэтому блокируем ее и находим следующую по близости вершину – вторую, и т.д. дерево ветвлений, начиная с первой вершины, представлено на рисунке 9.5а.

Для начала с других вершин соответствующие деревья представлены на рисунках 9.5б-д.

В результате получим

$$\min \{f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4), f(x_5)\} = \min \{60, 69, 64, 69, 67\} = 60.$$

Таким образом, минимальным контуром, найденным способом «ближайшего соседа» является контур $\Gamma_1 = \{1-5-4-2-4-1\}$, $f(\Gamma_1) = 60$. В примере 9.1 было найдено точное решение методом ветвей и границ: $\Gamma^* = \{1-5-3-4-2-1\}$, $f(\Gamma^*) = 34$. Как видно, ошибка значительна.

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте задачу о коммивояжере.
2. Как решить задачу коммивояжера алгоритм Литтла?
3. Как решить задачу о коммивояжере на максимум?
4. Как решить задачу о коммивояжере с заданным началом и минимальным путем?

5. Как решить задачу о коммивояжера методом «ближайшего соседа»?
6. Оптимальная планировка оборудования на поточной линии.

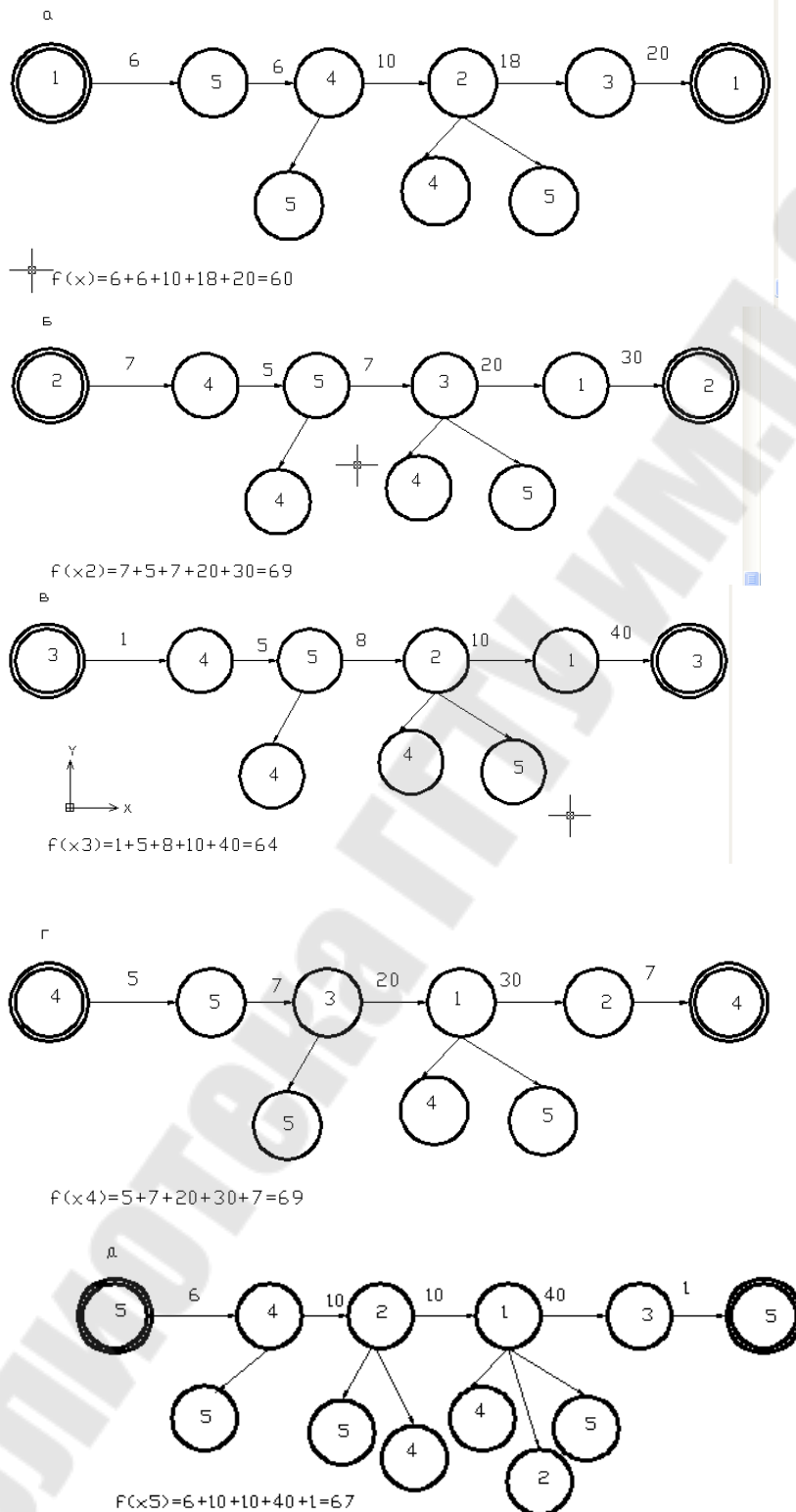


Рисунок 9.5 – Деревья ветвлений «ближайшего соседа»

10 ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ПРИ РЕШЕНИИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

10.1 Функциональные уравнения Беллмана

Пусть некоторый управляемый процесс находится в первоначальном состоянии S_0 , которое характеризуется вектором $S_0 = (S_{0,1}; \dots; S_{0,n})$. Множество всех первоначальных состояний определяет \tilde{S}_0 . С течением времени процесс меняется и переходит в конечное состояние $S_N = (S_{N,1}; \dots; S_{N,n})$. Множество всех конечных состояний – \tilde{S}_N . Процесс перехода из состояния S_0 в S_N распадается на N этапов. Причем если процесс находится на i -м этапе в состоянии S_i , то состояние его S_{i+1} на следующем $(i+1)$ -м этапе определяется не только вектором состояний $S_i = (S_{i,1}; \dots; S_{i,n})$, но и решением U_i , которое принято на i -м этапе. Исходя из этого, вектор состояний следующего этапа можно представить как $S_{i+1} = W(S_i, U_i)$. Решение же на каждом этапе выбирается из множества \tilde{U}_i возможных решений и определяет значение целевой функции $f(S_i)$. Целевую функцию $f(S)$ представим в виде суммы функций $W(S_i, U_i)$, значения которых получаются на каждом этапе при переходе из состояния S_i в состояние S_{i+1} :

$$f(S) = \sum_{i=0}^{N-1} W(S_i, U_i). \quad (10.1)$$

Тогда задача динамического программирования состоит в том, чтобы из множества возможных решений \tilde{U} найти такое решение U^* , которое позволит перевести процесс из первоначального состояния S_0 в конечное состояние S_N так, что целевая функция (10.1) будет принимать экстремальное значение при выполнении условий $S_{i+1} = W(S_i, U_i); S_i \in \tilde{S}_i; U_i \in \tilde{U}_i$ ($i=1, \dots, N-1$).

При решении задача динамического программирования разбивается на ряд более простых задач (естественным образом или искусственно). На каждом этапе решается одна из этих задач, причем выбор оптимального решения производится с учетом будущего, т.е.,

оптимизируя процесс на каждом этапе, нельзя забывать о всех последующих этапах.

Последний этап ($N=1$)-й не зависит от будущего, поэтому на данном этапе выбирают решение, позволяющее получить экстремальное значение целевой функции $f_1(S_1)$. Чтобы найти оптимальное решение на N -м этапе, необходимо знать состояние системы на $(N-1)$ -м этапе. Так как состояние процесса на $(N-1)$ -м этапе неизвестно, делают различные предположения о возможных состояниях процесса $S_{N-1,1}, \dots, S_{N-1,m}$ на этом этапе, и для каждого предположения выбирают оптимальное решение $U_{N,1}^*, \dots, U_{N,m}^*$ на N -м этапе. Таким образом, оптимальное решение на N -м этапе найдено. Затем, учитывая уже полученное оптимальное решение на этапе, получают оптимальное решение на $(N-1)$ -м этапе и т.д. В результате приходят к первоначальному состоянию S_0 процесса.

Для первого этапа предположений о возможных состояниях процесса не делают, так как, состояние S_0 известно. Оптимальное решение первого этапа находят исходя из полученного оптимального решения на втором этапе. Оптимальное решение для всего процесса определяют, просматривая полученные оптимальные решения на всех этапах (от S_0 до S_N).

Основным методом решения задач динамического программирования является метод функциональных уравнений Беллмана [7]. Для каждой конкретной задачи динамического программирования функциональное уравнение имеет свой вид, характеризующийся видом функции W и величинами S, U . Функциональное уравнение задачи динамического программирования можно записать и в общем виде. Так как решение задач динамического программирования проводится от конца к началу, функциональное уравнение для последнего этапа ($N=1$) имеет вид

$$f_1(S_{N-1}) = \underset{U_{N-1}}{extr}[W_{N-1}(S_{N-1}, U_{N-1}) + f_0(S_N)], \quad (10.2)$$

где $f_0(S_N)$ – экстремальное значение целевой функции за нуль этапов, начиная с конечного состояния $S_N \in \tilde{S}_N$. Так как за пределами конечного состояния S_N процесс не рассматривается, то $f_0(S_N) = 0$.

Функциональное уравнение для N -го этапа запишется так

$$f_N(S_0) = \underset{U_0}{extr}[W_0(S_0, U_0) + f_{N-1}(S_1)], \quad (10.3)$$

где $f_N(S_0)$ является экстремальным значением критерия (целевой функции) за все N этапов процесса, начиная с состояния S_0 ; $f_{N-1}(S_1)$ – экстремальное значение критерия за $(N-1)$ этапов, начиная с состояния S_0 ; $W_0(S_0, U_0)$ – величина критерия, полученная на N -м этапе, начиная с состояния S_0 , в результате принятого решения U_0 .

Задача динамического программирования методом функциональных уравнений Беллмана решается в такой последовательности [7]:

- записывают функциональное уравнение (10.2) для конечного состояния процесса (этапа $N=1$). Так как $f_0(S_N) = 0$, то уравнение будет иметь вид $f_1(S_{N-1}) = \underset{U_{N-1}}{extr}[W_{N-1}(S_{N-1}, U_{N-1})]$.

Рассматривают набор фиксированных состояний $S_{n-1} \in \tilde{S}_{N-1}$ и решений $U_{N-1} \in \tilde{U}_{N-1}$ и отвечающих им значений W_{N-1} . Среди решений выбирают такое U_{N-1}^* , которое обеспечивает $extr[W_{N-1}(S_{N-1}^*, U_{N-1}^*)]$;

- переходят к следующему, предпоследнему этапу ($N=2$). Функциональное уравнение для данного этапа записывают в виде $f_2(S_{N-2}) = \underset{U_{N-2}}{extr}[W_{N-2}(S_{N-2}, U_{N-2}) + f_1(S_{N-1})]$. Для каждого возможного состояния S_{N-2} находят значение W_{N-2} в зависимости от допустимого решения U_{N-2} . Затем сравнивают суммы $W_{N-2} + f_1$ (в которых учтены полученные значения $f_1(S_{N-1})$ последнего этапа) и определяют экстремальную сумму для каждого состояния S_{N-2} и соответствующее условное оптимальное решение U_{N-2}^* , т.е. определяют U_{N-2}^* , при котором функция $f_2(S_{N-2}^*)$ принимает экстремальное значение. Аналогично переходят к следующим этапам ($N=3, N=4$ и т.д.) до этапа $N=N$;
- записывают функциональное уравнение (10.3) для первого этапа $N=N$. На данном этапе предположения о возможных состояниях процесса не делают, так как первоначальное состояние известно S_0 . Для этого состояния следует определить оптимальное решение с учетом всех полученных условно-оптимальных решений второго этапа;

- проходят весь процесс в прямом направлении от S_0 до S_N и определяют оптимальное решение U^* для всего процесса (всей задачи), которое придает целевой функции $f_N(U_N^*)$ экстремальное значение.

10.2 Решение задачи коммивояжера методом динамического программирования

Решение задачи коммивояжера методом динамического программирования было предложено Беллманом, Хелдом и Кэрпом. Опубликованный ими алгоритм является более общим, чем метод ветвей и границ, и применим к более широкому классу задач упорядочивания. Однако трудности, связанные с объемом и временем вычислений при этом алгоритме, появляются для задач менее громоздких, чем при решении методом ветвей и границ.

Перейдем к изложению метода [5]. Предположим, что решается задача коммивояжера для n городов с матрицей расстояний C . Без потери общности выберем некоторый город s_0 в качестве исходного. После этого разобьем все множество городов на четыре непересекающиеся подмножества:

1. $\{s_0\}$ – множество, состоящее только из одного исходного города;
2. $\{s_i\}$ – множество, состоящее только из одного города (не исходного);
3. $\{S_k\}$ – множество, состоящее из k городов, за исключением $\{s_0\}$ и $\{s_i\}$;
4. $\{S_{n-k-2}\}$ – множество оставшихся $(n-k-2)$ городов.

Пусть далее, известен оптимальный порядок прохождения городов, начинающийся и заканчивающийся городом $\{s_0\}$. Тогда можно выбрать город $\{s_0\}$ и подмножество $\{S_k\}$, состоящее из k городов, таким образом, что этот оптимальный маршрут начинается в $\{s_0\}$ и проходит через множество $\{S_{n-k-2}\}$, затем через $\{s_i\}$, после чего, пройдя множество городов $\{S_k\}$, оканчивается в $\{s_i\}$.

Теперь рассмотрим только ту часть маршрута, которая связывает $\{s_i\}$ и $\{s_0\}$ с промежуточным посещением городов $\{S_k\}$. Заметим, что для этого участка нам известен наикратчайший путь. Если бы это не так, то, не изменяя части маршрута до города $\{s_i\}$ можно было бы

найти лучший путь его завершения и, следовательно, наикратчайший путь целиком. Но это невозможно, поскольку противоречит исходному предположению, что оптимальный маршрут известен.

Пусть $f(s_i; \{S_k\})$ – длина наикратчайшего пути от $\{s_i\}$ к $\{s_0\}$ с промежуточным посещением множества $\{S_k\}$. Заметим, что при $k=0$ $f(s_i; \{\emptyset\}) = c_{i,0}$ есть элемент матрицы C . Если $k=n-1$ и $\{s_i\}$ совпадает с началом движения, то $f(s_0; \{S_{n-1}\})$ является длиной оптимального маршрута исходной задачи. Идея метода динамического программирования состоит в том, чтобы, начиная с $k=0$, шаг за шагом увеличивать k . При этом, начав с s_i , маршрут проходит в обратном порядке до s_0 и тем самым находится оптимальное решение.

Для рассматриваемой задачи основное функциональное уравнение динамического программирования имеет вид

$$f(s_i; \{S_k\}) = \min_{c_j \in \{C_k\}} [c_{i,j} + f(s_j; \{S_k\} - \{s_j\})].$$

Это уравнение показывает, что для того, чтобы найти лучший путь, начинающийся в s_i и завершающийся в s_0 с промежуточным посещением k городов, нужно выбрать наикратчайший из k возможных путей, начинающихся переходом из s_i в один из k и затем проходящий кратчайшим образом в s_0 с промежуточным посещением $(k-1)$ других. Любой из этих k вариантов, в свою очередь, представляет собой наикратчайший из $(k-1)$ возможных путей в соответствии с приведенным ранее уравнением. В конце концов достигается точка, в которой правая часть уравнения, представляет собой просто элемент C .

Пример 10.1 Для данной матрицы переналадки станков решить задачу о коммивояжере с помощью функциональных уравнений

$$c = \begin{pmatrix} \infty & 30 & 40 & 15 & 6 \\ 10 & \infty & 18 & 7 & 9 \\ 20 & 30 & \infty & 1 & 10 \\ 25 & 10 & 35 & \infty & 5 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & \infty \end{pmatrix}.$$

Решение. На нулевом шаге ищется решение для четырех вариантов при $k=0$.

0-й шаг. $k=0$

$$\underline{f(s_1, \emptyset) = c_{1,5} = 6}$$

$$f(s_2, \emptyset) = c_{2,5} = 9$$

$$f(s_3, \emptyset) = c_{3,5} = 10$$

$$f(s_4, \emptyset) = c_{4,5} = 5$$

На первом шаге при $k=1$ решения выражаются через известные решения при $k=0$.

1-й шаг. $k=1$

$$f(s_1, \{s_2\}) = c_{1,2} + f(s_2, \emptyset) = 30 + 9 = 39$$

$$f(s_1, \{s_3\}) = c_{1,3} + f(s_3, \emptyset) = 40 + 10 = 50$$

$$f(s_1, \{s_4\}) = c_{1,4} + f(s_4, \emptyset) = 15 + 5 = 20$$

$$\underline{f(s_2, \{s_1\}) = c_{2,1} + f(s_1, \emptyset) = 10 + 6 = 16}$$

$$f(s_2, \{s_3\}) = c_{2,3} + f(s_3, \emptyset) = 18 + 10 = 28$$

$$f(s_2, \{s_4\}) = c_{2,4} + f(s_4, \emptyset) = 7 + 5 = 12$$

$$f(s_3, \{s_1\}) = c_{3,1} + f(s_1, \emptyset) = 20 + 6 = 26$$

$$f(s_3, \{s_2\}) = c_{3,2} + f(s_2, \emptyset) = 30 + 9 = 39$$

$$f(s_3, \{s_4\}) = c_{3,4} + f(s_4, \emptyset) = 1 + 5 = 6$$

$$f(s_4, \{s_1\}) = c_{4,1} + f(s_1, \emptyset) = 25 + 6 = 31$$

$$f(s_4, \{s_3\}) = c_{4,3} + f(s_3, \emptyset) = 35 + 10 = 45$$

$$f(s_4, \{s_2\}) = c_{4,2} + f(s_2, \emptyset) = 10 + 9 = 19$$

На втором шаге решения при $k=2$ выражаются через известные решения при $k=1$.

2-й шаг. $k=2$

$$f(s_1, \{s_2, s_3\}) = \min[c_{1,2} + f(s_2, \{s_3\}), c_{1,3} + f(s_3, \{s_2\})] = \min[30 + 28, 40 + 39] = 58$$

$$f(s_1, \{s_2, s_4\}) = \min[c_{1,2} + f(s_2, \{s_4\}), c_{1,4} + f(s_4, \{s_2\})] = \min[30 + 12, 15 + 19] = 34$$

$$f(s_1, \{s_3, s_4\}) = \min[c_{1,3} + f(s_3, \{s_4\}), c_{1,4} + f(s_4, \{s_3\})] = \min[40 + 6, 15 + 45] = 46$$

$$f(s_2, \{s_1, s_3\}) = \min[c_{2,1} + f(s_1, \{s_3\}), c_{2,3} + f(s_3, \{s_1\})] = \min[10 + 50, 18 + 26] = 44$$

$$f(s_2, \{s_1, s_4\}) = \min[c_{2,1} + f(s_1, \{s_4\}), c_{2,4} + f(s_4, \{s_1\})] = \min[10 + 20, 7 + 31] = 30$$

$$f(s_2, \{s_3, s_4\}) = \min[c_{2,3} + f(s_3, \{s_4\}), c_{2,4} + f(s_4, \{s_3\})] = \min[18 + 6, 7 + 45] = 24$$

$$f(s_3, \{s_1, s_2\}) = \min[c_{3,1} + f(s_1, \{s_2\}), c_{3,2} + f(s_2, \{s_1\})] = \min[20 + 39, 30 + 16] = 46$$

$$f(s_3, \{s_1, s_4\}) = \min[c_{3,1} + f(s_1, \{s_4\}), c_{3,4} + f(s_4, \{s_1\})] = \min[20 + 20, 1 + 31] = 32$$

$$f(s_3, \{s_2, s_4\}) = \min[c_{3,2} + f(s_2, \{s_4\}), c_{3,4} + f(s_4, \{s_2\})] = \min[30 + 12, 1 + 19] = 20$$

$$\underline{f(s_4, \{s_1, s_2\}) = \min[c_{4,1} + f(s_1, \{s_2\}), c_{4,2} + f(s_2, \{s_1\})] = \min[25 + 39, 10 + 16] = 26}$$

$$f(s_4, \{s_1, s_3\}) = \min[c_{4,1} + f(s_1, \{s_3\}), c_{4,3} + f(s_3, \{s_1\})] = \min[25+50, 35+26] = 61$$

$$f(s_4, \{s_2, s_3\}) = \min[c_{4,2} + f(s_2, \{s_3\}), c_{4,3} + f(s_3, \{s_2\})] = \min[10+28, 35+39] = 38$$

Переходим к третьему шагу, использующему каждое из решений второго шага.

Шаг третьей ($k=3$).

$$f(s_1, \{s_2, s_3, s_4\}) = \min(c_{1,2} + f(s_2, \{s_3, s_4\}); c_{1,3} + f(s_3, \{s_2, s_4\}); c_{1,4} + f(s_4, \{s_2, s_3\})) = \min(30+24; 40+20; 15+38) = 53$$

$$f(s_2, \{s_1, s_3, s_4\}) = \min(c_{2,1} + f(s_1, \{s_3, s_4\}); c_{2,3} + f(s_3, \{s_1, s_4\}); c_{2,4} + f(s_4, \{s_1, s_3\})) = \min(10+46; 18+32; 7+61) = 50$$

$$f(s_3, \{s_1, s_2, s_4\}) = \min(c_{3,1} + f(s_1, \{s_2, s_4\}); c_{3,2} + f(s_2, \{s_1, s_4\}); \underline{c_{3,4} + f(s_4, \{s_1, s_2\})}) = \min(20+34; 30+30; 1+26) = 27$$

$$f(s_4, \{s_1, s_2, s_3\}) = \min(c_{4,1} + f(s_1, \{s_2, s_3\}); c_{4,2} + f(s_2, \{s_1, s_3\}); c_{4,3} + f(s_3, \{s_1, s_2\})) = \min(25+58; 10+44; 35+46) = 54$$

Наконец, на четвертом шаге получаем решение исходной задачи.

Шаг четвертый ($k=4$).

$$f(s_5, \{s_1, s_2, s_3, s_4\}) = \min(c_{5,1} + f(s_1, \{s_2, s_3, s_4\}); c_{5,2} + f(s_2, \{s_1, s_3, s_4\}); \underline{c_{5,3} + f(s_3, \{s_1, s_2, s_4\})}; c_{5,4} + f(s_4, \{s_1, s_2, s_3\})) = \min(9+53; 50+8; 27+7; 54+6) = 34$$

Итак, значение целевой функции $f(x)=34$. Сам маршрут найдем, если будем двигаться в обратном направлении с четвертого шаге к нулевому, проходя по минимальному значению (выделено жирным подчеркиванием). На рисунке 10.1 представлен гамильтонов контур данной задачи.

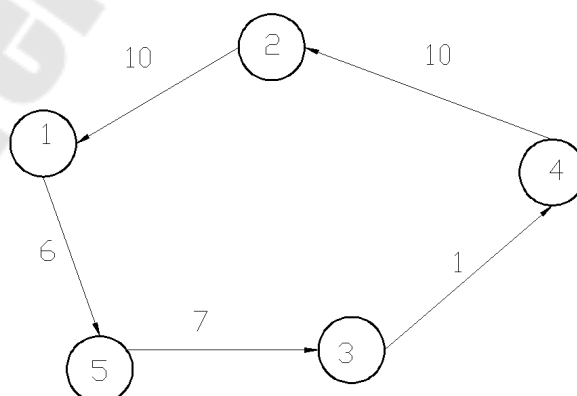


Рис. 10.1 – Гамильтонов контур

10.3 Перевозка грузов с минимальными затратами

Пример 10.2. Требуется перевести груз из пункта 1 в пункт 14. На рисунке 10.2 показана сеть дорог и стоимости перевозки единицы груза между отдельными пунктами сети (проставлены у соответствующих ребер). Необходимо определить маршрут доставки груза из пункта 1 в пункт 14, которому соответствуют наименьшие затраты [8, 17].

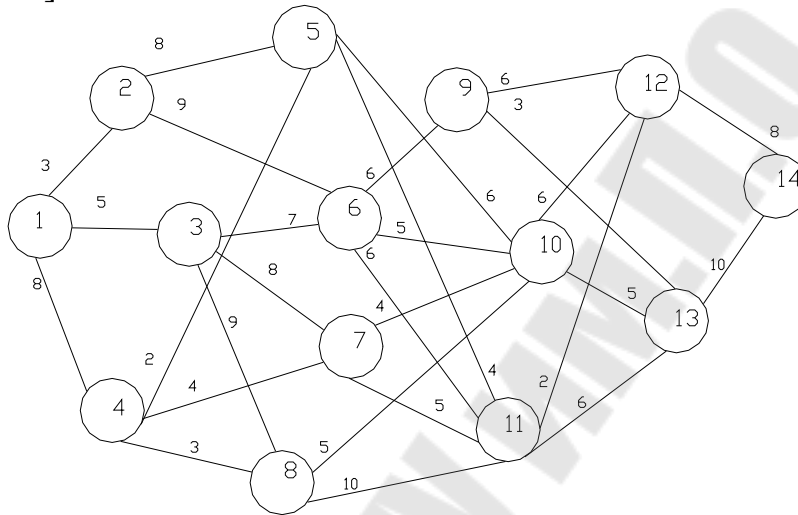


Рисунок 10.2 – Сеть дорог

Решение. Весь процесс доставки груза из пункта 1 в пункт 14 разбиваем на этапы.

- на первом этапе транспорт с грузом из пункта 1 перемещается непосредственно в пункты 2, 3, 4;
- на втором этапе из пунктов 2; 3; 4 – в пункты 5; 6; 7; 8;
- на третьем этапе – из пунктов 5; 6; 7; 8 – в пункты 9; 10; 11;
- на четвертом этапе – из пунктов 9; 10; 11 – в пункты 12; 13;
- на пятом этапе – из пунктов 12; 13 – в пункт 14.

Введем обозначения: N – номер этапа ($N = 1; \dots; 5$); i – пункт, из которого осуществляются перевозки ($i = 1, \dots, 13$); j – пункт, в который доставляется груз ($j = 2, \dots, 14$); $c_{i,j}$ – стоимость перевозки груза из пункта i в пункт j ; $f_N(i)$ минимальные затраты на перевозку груза из пункта i в конечный, если до конечного пункта осталось N этапов.

Запишем функциональное уравнение для последнего этапа ($N=1$):

$$f_1(i) = \min[c_{i,j} + f_0(14)] = \min(c_{i,j}).$$

В пункт 14 груз может быть доставлен из пункта 12, или из пункта 13, поэтому вычисляем: $f_1(12) = c_{1,2} + f_0(14) = 8 + 0 = 8$ и $f_1(13) = c_{1,3} + f_0(14) = 10 + 0 = 10$.

Для предпоследнего этапа ($N=2$) функциональное уравнение имеет вид: $f_2(i) = \min[c_{i,j} + f_1(j)]$. Рассматриваем все возможные исходы третьего этапа (груз оказался в одном из пунктов 9; 10; 11).

1. Предположим, что груз оказался в пункте 10. Из этого пункта далее можно следовать либо через пункт 12, либо через пункт 13, и

$$f_2(9) = \min[c_{9,12} + f_1(12); c_{9,13} + f_1(13)] = \min[6 + 8; 3 + 10] = 13.$$

Значит, условно оптимальный путь из пункта 9 в пункт 14 проходит через пункт 13, при этом минимальные затраты составляют 13.

2. Если груз оказался в пункте 10, то $f_2(10) = \min[c_{10,12} + f_1(12); c_{10,13} + f_1(13)] = \min[6 + 8; 5 + 10] = 14$, условно-оптимальный маршрут для пунктов 10-12-14 с минимальными затратами, равными 14 ед.

3. Для пункта 11, получаем $f_2(11) = \min[c_{11,12} + f_1(12); c_{11,13} + f_1(13)] = \min[2 + 8; 6 + 10] = 10$, т.е. для этого пункта условно-оптимальным будет маршрут 11-12-14 и затраты составят 10 ед.

Переходим к третьему этапу ($N=3$). Чтобы получить условно-оптимальное решение на этом этапе, рассматриваем все возможные исходы четвертого этапа (после этого этапа груз может оказаться в одном из пунктов 5; 6; 7; 8).

1. Для пункта 5 получаем

$$f_3(5) = \min[c_{5,j} + f_2(j)] = \min[6 + 14; 4 + 10] = 14, \text{ условно-оптимальный маршрут для этого пункта будет } 5-11-12-14.$$

2. Для пункта 6 записываем

$$f_3(6) = \min[c_{6,j} + f_2(j)] = \min[6 + 13; 5 + 14; 6 + 10] = 16, \text{ и находим условно-оптимальный маршрут } 6-11-12-14.$$

3. Для пункта 7 получаем

$$f_3(7) = \min[c_{7,j} + f_2(j)] = \min[4 + 14; 5 + 10] = 15, \text{ а условно-оптимальный маршрут будет } 7-10-12-14.$$

4. Для пункта 8 получаем

$$f_3(8) = \min[c_{8,j} + f_2(j)] = \min[5 + 14; 10 + 10] = 19, \text{ а условно-оптимальный маршрут для пункта 8 будет } 8-10-12-14.$$

Рассматриваем четвертый этап ($N=4$). После первого этапа ($N=5$) груз мог оказаться только в одном из пунктов 2; 3; 4.

1. Для пункта 2 получаем $f_4(2) = \min(8 + 14; 9 + 16) = 22$.
2. Для пункта 3 получаем $f_4(3) = \min(7 + 16; 8 + 15; 9 + 19) = 23$.
3. Для пункта 4 получаем $f_4(4) = \min(2 + 14; 4 + 15; 3 + 19) = 16$.

Это показывает, что для пункта 2 оптимальным будет маршрут 2-5-11-12-14 (затраты 22 ед.), для пункта 4 маршрут – 4-5-11-12-14 (затраты 16 ед.), для пункта 3 маршрут – 3-6-10-12-14 (затраты 23 ед.).

Наконец, переходим к первому этапу ($N=5$). Вычисляем $f_5(1) = \min(3 + 22; 5 + 23; 8 + 16) = 24$. Оптимальным в этом случае будет маршрут 1-4-5-11-12-14, при этом затраты окажутся минимальными (24 ед.).

Найденное решение позволяет установить не только оптимальный маршрут доставки груза из пункта 1 в пункт 14, но и всю структуру оптимальных маршрутов относительно конечного пункта для данной сети дорог (рисунок 10.3).

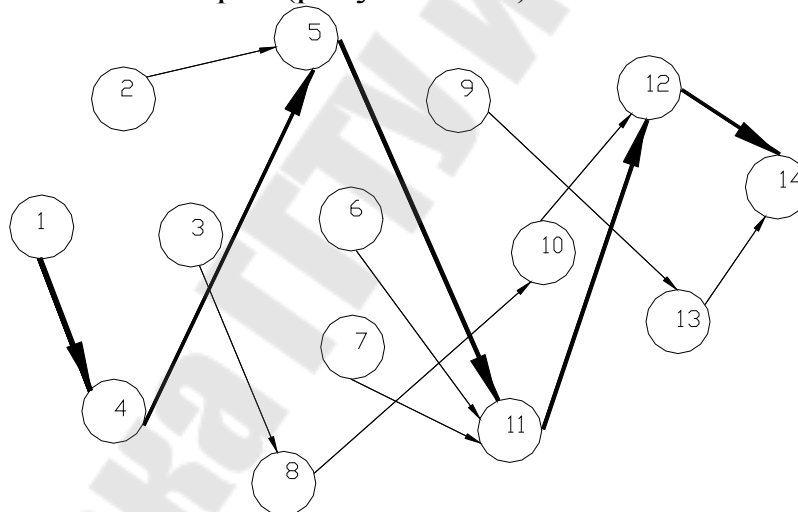


Рисунок 10.3 – Кратчайший маршрут доставки груза

10.4 Распределение денежных средств между предприятиями

Пример 10.3. Пусть между четырьмя предприятиями распределяются 100 тыс. руб. Значения $r_i(x)$ прироста выпуска продукции на предприятиях в зависимости от выделенной суммы x приведены в таблице 10.1.

В соответствии с вычислительной схемой метода динамического программирования условная оптимизация начинается с оптимизации одношагового процесса (последнего шага) [7, 9]. В данной задаче

этому будет отвечать случай выделения имеющихся средств на долю одного предприятия (пусть им будет, например, предприятия $N=1$).

Таблица 10.1 – Значения $r_i(x)$ прироста выпуска продукции

| Средства c , тыс. руб. | Номер предприятия | | | |
|--------------------------|--------------------------------------------------------|----------|----------|----------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 |
| | Прирост продукции на предприятиях $r_i(x)$, тыс. руб. | | | |
| | $r_1(x)$ | $r_2(x)$ | $r_3(x)$ | $r_4(x)$ |
| 20 | 10 | 12 | 11 | 16 |
| 40 | 31 | 26 | 36 | 37 |
| 60 | 42 | 36 | 45 | 46 |
| 80 | 62 | 54 | 60 | 63 |
| 100 | 76 | 78 | 77 | 80 |

Для одного предприятия функциональное уравнение имеет вид:

$$f_1(y_{n-1}) = \max_{0 \leq x < y_{n-1}} [r_1(x)]. \quad (10.4)$$

В соответствии с этим уравнением и в зависимости от начальной суммы c получаем с учетом таблицы 10.1 значения $f_1(c)$ (табл. 10.2).

Таблица 10.2 – Значения $f_1(c)$

| $x_1^*(c)$ | $f_1(c)$ |
|------------|----------|
| 20 | 10 |
| 40 | 31 |
| 60 | 42 |
| 80 | 62 |
| 100 | 76 |

Оптимизируем теперь двухшаговый процесс с учетом оптимизации одношагового. В условиях рассматриваемой задачи это означает, что средства вкладываются в два предприятия: $N=1$ и $N=2$. Функциональное уравнение для этого оптимизации:

$$f_2(c) = \max_{0 \leq x \leq c} [r_2(x) + f_1(c - x)]. \quad (10.5)$$

На данном этапе надо найти значения функции (10.5) для всех допустимых комбинаций c и x . Для упрощения расчетов значения x будем принимать кратными 20 тыс. руб. Чтобы упорядочить

вычисления и придать записям большую наглядность, составляем таблицу. Данному этапу расчетов соответствует табл. 10.3. Для каждого значения начальной суммы c распределяемых средств предусмотрена строка, а для каждого возможного значения распределяемой суммы x – столбец. Некоторые клетки таблицы останутся незаполненными, так как они соответствуют недопустимым сочетаниям c и x .

Таблица 10.3 – Результат двухшагового процесса

| $c \backslash x$ | 0 | 20 | 40 | 60 | 80 | 100 | $f_2(c)$ | $x_2^*(c)$ |
|------------------|------|-------|-------|-------|-------|------|----------|------------|
| 20 | 0+10 | 12+0 | | | | | 12 | 20 |
| 40 | 0+31 | 12+10 | 26+0 | | | | 31 | 0 |
| 60 | 0+42 | 12+31 | 26+10 | 36+0 | | | 43 | 20 |
| 80 | 0+62 | 12+42 | 26+31 | 36+10 | 54+0 | | 62 | 0 |
| 100 | 0+72 | 12+62 | 26+42 | 36+31 | 54+10 | 78+0 | 78 | 100 |

В каждую клетку будем вписывать значения суммы $r_2(x) + f_1(c - x)$. При этом первое слагаемое берем из табл. 10.1, а второе – из табл. 10.2. В двух последних столбцах табл. 10.3 проставлены: максимальный по строке прирост продукции (столбец $f_2(c)$) и соответствующая ей оптимальная сумма средств, выделенная второму предприятию (столбец $x_2^*(c)$).

Расчет значений $f_3(c)$, соответствующий оптимизации трехшагового процесса приведен в таблице 10.4. Здесь использована формула:

$$f_3(c) = \max_{0 \leq x \leq c} [r_3(x) + f_2(c - x)].$$

Первые слагаемые табл. 10.4 взяты из табл. 10.1, вторые – из табл. 10.3.

Аналогично находятся значения $f_4(c)$. Соответствующая таблица не приводится, рекомендуется ее составить самостоятельно, а результаты сравнить с данными табл. 10.5, полученной из расчетных таблиц, начиная с табл. 10.1.

Таблица 10.4

Расчет значений оптимизации трехшагового процесса

| $c \backslash x$ | 0 | 20 | 40 | 60 | 80 | 100 | $f_3(c)$ | $x_3^*(c)$ |
|------------------|------|-------|-------|-------|-------|------|----------|------------|
| 20 | 0+12 | 11+0 | | | | | 12 | 0 |
| 40 | 0+31 | 11+12 | 36+0 | | | | 36 | 40 |
| 60 | 0+31 | 11+31 | 36+12 | 45+0 | | | 48 | 40 |
| 80 | 0+62 | 11+43 | 36+31 | 45+12 | 60+0 | | 67 | 40 |
| 100 | 0+78 | 11+62 | 36+43 | 45+31 | 60+12 | 77+0 | 79 | 40 |

Таблица 10.5 – Сводная таблица расчетов

| c | $x_1^*(c)$ | $f_1(c)$ | $x_2^*(c)$ | $f_2(c)$ | $x_3^*(c)$ | $f_3(c)$ | $x_4^*(c)$ | $f_4(c)$ |
|-----|------------|----------|------------|----------|------------|----------|------------|----------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 20 | 20 | 10 | 20 | 12 | 0 | 12 | 20 | 16 |
| 40 | 40 | 31 | 0 | 31 | 40 | 36 | 40 | 37 |
| 60 | 60 | 42 | 20 | 43 | 40 | 48 | 20 | 52 |
| 80 | 80 | 62 | 0 | 62 | 40 | 67 | 40 | 73 |
| 100 | 100 | 76 | 100 | 78 | 40 | 79 | 40 | 85 |

Из последней строки табл. 10.5 видно, что наибольший прирост $f_4(c)$ продукции на четырех предприятиях при распределении между ними 100 тыс. руб. ($c=100$) составляет 85 тыс. руб. ($f_4(100)=85$). При этом четвертому предприятию должно быть выделено 40 тыс. руб. ($x_4^*(100)=40$), а остальным трем – $100-40=60$ тыс. руб. Оптимальное распределение этих 60 тыс. руб. ($c=60$) между тремя предприятиями обеспечит общий прирост продукции на сумму 48 тыс. руб. ($f_3(60)=48$) при условии, что третьему предприятию будет выделено 40 тыс. руб. ($x_3^*(60)=40$), остальным двум $60-40=20$ тыс. руб. Оставшиеся 20 тыс. руб. при оптимальном распределении между двумя предприятиями дадут прирост продукции на сумму 12 тыс. руб. ($f_2(20)=12$). При этом второму предприятию надо ассигновать 20 тыс. руб., а на долю первого останется $20-20=0$ руб., т.е. $x_1^*=0$. Итак, максимальный прирост выпуска продукции на четырех предприятиях при распределении между ними 100 тыс. руб. составит 85 тыс. руб. и будет получен, если первому предприятию средств не выделять, второму выделить 20 тыс. руб., а третьему и четвертому – по 40 тыс. руб. Это основной результат решения задачи.

Литература

1. Вентцель Е.С. Исследование операций: задачи, принципы, методология. – М.: Наука, 1980. – 208 с.
2. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Прикладные задачи теории вероятностей. – М.: Радио и связь, 1983. – 416 с.
3. Волков И. К., Загоруйко Е. А. Исследование операций: Учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. – 436 с.
4. Климович Ф.Ф., Присевко А.Ф. Математическое моделирование технологических задач в машиностроении: Учебно-методическое пособие по лабораторным работам для студентов машиностроительных специальностей высших учебных заведений. – Мн.: БГПА, 2000. – 88с.
5. Конвей Р.В., Максвелл В.Л., Миллер Л.В. Теория расписаний. – М.: Наука, 1975. – 360 с.
6. Кудрявцев Е.М. Исследование операций в задачах, алгоритмах программах. – М.: Радио и связь, 1984. – 184 с.
7. Кузнецов А.В., Холод Н.И. Математическое программирование: учеб. – 2-ое изд., перераб. и доп. – Минск: Выш. шк., 2001. – 351 с.
8. Кузнецов А.В., Сакович В.А., Холод Н.И. Высшая математика. Математическое программирование: учеб. пособие для эконом. спец. вузов. – Минск: Выш. шк., 1994. – 221 с.
9. Кузнецов А.В., Холод Н.И., Костевич Л.С. Руководство к решению задач по математическому программированию: Учеб. пособие/ Под общ. ред. А.В. Кузнецова. – 2-ое изд., перераб. и доп. – Мн.: Выш. шк., 2001. – 448 с.
10. Кузнецов Ю. И., Кузубов В. И, Волощенко А.В. Математическое программирование: Учеб. пособие. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. школа, 1980. – 300 с.
11. Мурашко В.С. Практическое пособие к выполнению лабораторных работ по курсу «Математическое моделирование технологических задач в машиностроении» для студ. спец. Т03.01.01 – «Технология машиностроения». – Гомель: ГГТУ им. П.О. Сухого, 1999. – 60с.
12. Мурашко В.С. Основы систем автоматизированного проектирования: прак. рук. к контрольным работам по одному курсу для студентов заоч. отд-ния специальностей 36 01 01 «Технология машиностроения» и 36 01 03 «Технологическое

- оборудование машиностроительного производства». – Гомель: ГГТУ им. П.О. Сухого, 2004. – 36 с.
13. Мурашко, В. С. Математическое моделирование и алгоритмизация инженерных задач: учебное пособие для вузов / В. С. Мурашко. - Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2012 – 225 с.
 14. Мурашко, В. С. Математическое моделирование и алгоритмизация инженерных задач: лабораторный практикум для вузов / В. С. Мурашко. – Гомель: ГГТУ им. П. О. Сухого, 2012 – 151 с.
 15. Просветов Г. И. Дискретная математика: задачи и решения: Учеб. пособие. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. – 222 с.
 16. Пляскин И.И. Оптимизация технических решений в машиностроении. – Москва: Машиностроение, 1982. – 176 с.
 17. Сборник задач и упражнений по высшей математике: Математическое программирование: Учеб. пособие / Под общ. ред. Кузнецова А.В., Рутковского Р.А. – 2-ое изд., перераб. и доп. – Мн.: Выш. шк., 2002. – 447 с.
 18. Сакович В.А. Исследование операций (детерминированные методы): Справочное пособие. – Мн.: Выш. шк., 1985. – 256с.
 19. Солонин И. С. Математическая статистика в технологии машиностроения. – М.: Машиностроение, 1972. – 216с.
 20. Тарасик В.П. Математическое моделирование технических систем: Учебник для вузов.- Мн.: Дизайн ПРО, 1998. – 640 с.
 21. Таха Х. Введение в исследование операций. – 7-е изд. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. – 912 с.
 22. Тимковский В.Г. Дискретная математика в мире станков и деталей – Москва: Наука, 1992 – 145 с.

Содержание

| | |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Введение | 3 |
| 1 Основные понятия математического моделирования и исследования операций в машиностроении | 4 |
| 1.1 Математическая модель | 4 |
| 1.2 Классификация математических моделей | 6 |
| 1.3 Требования, предъявляемые к математическим моделям | 10 |
| 1.4 Схема процесса компьютерного математического моделирования | 12 |
| 1.5 Классификация погрешностей результатов | 12 |
| 2 Основы теории принятия решений | 14 |
| 2.1 Общие положения теории принятия решений | 14 |
| 2.2 Этапы принятия решений | 16 |
| 2.3 Общие подходы и рациональные процедуры принятия решений | 19 |
| 2.4 Основные понятия исследования операций | 22 |
| 2.5 Методология и методы принятия решений | 23 |
| 3 Решение технологических задач с помощью теории графов | 26 |
| 3.1 Теоретико-множественное определение графов | 26 |
| 3.2 Матричные способы задания графов | 29 |
| 3.3 Упорядочение элементов орграфа. Алгоритм Фалкерсона | 32 |
| 3.4 Задача о кратчайшем пути | 37 |
| 3.5 Алгоритмы поиска кратчайшего пути в графе с ребрами единичной и произвольной длины | 37 |
| 3.6 Алгоритм поиска длиннейшего пути в графе с ребрами произвольной длины | 38 |
| 3.7 Алгоритм поиска тончайшего пути | 39 |
| 3.8 Формирование технологических операций | 40 |
| 3.9 Балансировка технологического маршрута | 42 |
| 3.10 Оснащение обрабатывающего центра | 45 |
| 4 Решение технологических задач с помощью линейного программирования | 51 |
| 4.1 Основные понятия линейного программирования | 51 |
| 4.2 Формы записи задач линейного программирования | 52 |
| 4.3 Задача о выборе оптимальных технологий | 53 |
| 4.4 Задача оптимального использования ресурсов | 54 |
| 4.5 Задача о распределении производственной программы | 57 |
| 4.6 Задача загрузки невзаимозаменяемых групп оборудования | 59 |
| 4.7 Задача о смесях | 59 |
| 4.8 Задача о раскрое материалов | 61 |
| 5 Методы решения задачи линейного программирования (ЗЛП) | 64 |

| | |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 5.1 Графический метод решения ЗЛП | 64 |
| 5.2 Решение задач симплексным методом | 69 |
| 5.3 Симплексное преобразование | 71 |
| 5.4 Нахождение оптимального плана | 72 |
| 6 Двойственность задач линейного программирования | 77 |
| 6.1 Понятие двойственности. Связь двойственных задач | 77 |
| 6.2 Совместное решение двойственных задач | 80 |
| 7 Использование транспортных задач при решении технологических задач | 83 |
| 7.1 Типы транспортной задачи | 83 |
| 7.2 Способы нахождения опорного плана транспортной задачи | 85 |
| 7.3 Решение транспортной задачи методом потенциалов | 89 |
| 7.4 Задача о назначениях | 94 |
| 7.5 Алгоритм решения задачи о назначениях венгерским методом | 95 |
| 7.6 Задача оптимального закрепления за станками операций по обработке деталей | 98 |
| 7.7 Задачи размещения с учетом транспортных и производственных затрат | 99 |
| 8 Задачи линейного целочисленного программирования (ЗЛЦП) | 101 |
| 8.1 Постановка ЗЛЦП | 101 |
| 8.2 Классификация методов целочисленной оптимизации | 101 |
| 8.3 Алгоритм Р. Гомори решения задачи линейного целочисленного программирования | 102 |
| 9 Использование метода ветвей и границ при решении технологических задач | 107 |
| 9.1 Метод ветвей и границ | 107 |
| 9.2 Математическая модель задачи о коммивояжере | 107 |
| 9.3 Алгоритм Литтла для решения задачи о коммивояжере | 109 |
| 9.4 Решение задачи о коммивояжере на максимум | 116 |
| 9.5 Задача о коммивояжере с заданным началом и минимальным путем | 117 |
| 9.6 Решение задачи о коммивояжера методом «ближайшего соседа» | 117 |
| 10 Использование динамического программирования при решении технологических задач | 120 |
| 10.1 Функциональные уравнения Беллмана | 120 |
| 10.2 Решение задачи коммивояжера методом динамического программирования | 123 |
| 10.3 Перевозка грузов с минимальными затратами | 127 |
| 10.4 Распределение денежных средств между предприятиями | 129 |
| Литература | 133 |

Мурашко Валентина Семеновна

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ЗАДАЧ**

Пособие

**по курсу «Математическое моделирование
и методы исследования операций» для студентов
специальности 1-53 01 01 «Автоматизация
технологических процессов и производств
(по направлениям)» дневной формы обучения**

Подписано к размещению в электронную библиотеку
ГГТУ им. П. О. Сухого в качестве электронного
учебно-методического документа 07.12.18.

Рег. № 22Е.
<http://www.gstu.by>