Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 3 (108), 2018

Математика

УДК 519.854

Гарантированная оценка точности для задачи о рюкзаке с выпуклыми монотонными сепарабельными функциями

Н.С. Богданова

Рассмотрена задача дискретной оптимизации – задача о рюкзаке с выпуклыми монотонными сепарабельными функциями. Представлены результаты вывода гарантированной оценки точности градиентного алгоритма, реализованного на аппроксимационной решетке.
Ключевые слова: гарантированная оценка, градиентный алгоритм, задача о рюкзаке, дискретная оптимизация.

The task of the discrete optimization – knapsack problem with convex separable monotonic functions is considered. The results of the finding of the guaranteed assessing the accuracy of the gradient algorithm implemented on the approximation lattice are presented.
Keywords: guaranteed assessing, gradient algorithm, knapsack problem, discrete optimization.

Введение. Модельная задача о рюкзаке относится к числу широко известных задач дискретной оптимизации. Были рассмотрены различные модификации задачи о рюкзаке. В частности, была изучена модель с дробимыми предметами и модель в многомерной постановке. Изучены модели, где булевозначные переменные были заменены переменными, которые принадлежат некоторому множеству неотрицательных целых чисел в ограниченном диапазоне [1]. Значимый вклад для расширения практической применимости рюкзачных моделей дало исследование задачи о рюкзаке с нелинейными критериями, в частности, сепарабельными [2]. Актуальность исследования заключается в широкой распространенности и важности прикладных проблем, формулируемых в рамках задач рюкзачного типа.

Невозможность точного и эффективного решения широких классов задач дискретной оптимизации является одной из важнейших проблем. Достаточно хорошие результаты были получены в результате изучения небольшого класса задач, обладающих специальной структурой и построены более эффективные методы, основанные на изучении особенностей частных подклассов задач. Например, к задачам о покрытии были применимы методы отсечения, последовательностные схемы В.А. Емеличева хорошо применимы при решении задач о размещении, достаточно высокая эффективность метода ветвей и границ достигается при решении задач с ограничениями многократного выбора, градиентные алгоритмы хорошо применимы на матроидах [2].

Для приближенных алгоритмов основной проблемой является получение оценок точности. В работе [2] исследовалась эффективность субоптимальных алгоритмов решения различных случаев задачи рюкзачного типа: линейной $f_i(x_i)=c_ix_i$, с фиксированными доплатами $f_i(x_i)=c_i^{'}x_i+c_i^{''}signx$, выпуклой ($f_i(x_i)$ – дискретно-выпуклые функции). Полученные результаты исследования погрешности градиентных алгоритмов [2]–[5] показывают, что класс задач дискретной оптимизации, у которых градиентный экстремум совпадает с глобальным является не большим. Поэтому исследование оценок точности градиентных алгоритмов является весьма актуальным.

В данной статье выведена гарантированная оценка точности градиентного алгоритма, реализованного на аппроксимационной решетке, для задачи о рюкзаке с выпуклыми монотонными сепарабельными функциями.

Предварительные сведения.

Определение 1. [2] $(D,\ \prec)$ – множество D с заданным на нём частичным порядком $\prec$ (бинарное отношение) называется упорядоченным (сокращённо у-множеством).

Определение 2. [2] Пусть H – у-множество, функция $f : H \to R$ называется порядково-выпуклой на H, если

$$f(y) \le \frac{f(x)+f(z)}{2} \quad \forall\, x,\, y,\, z \in H,\; x \prec y \prec z.$$

Определение 3. [2] Под гарантированной оценкой погрешности алгоритма A приближенного решения задач класса Ψ понимают такое число $\varepsilon \ge 0$, что

$$\frac{f(x^*)-f(x^A)}{f(x^*)-f(0)} \le \varepsilon \qquad (1)$$

или, если $f(0)=0$, то

$$\frac{f(x^A)}{f(x^*)} \ge 1-\varepsilon.$$

Здесь x^A – решение, полученное алгоритмом A.

Гарантированную оценку точности называют достижимой, если неравенство (1) обращается в равенство.

Можно вывести оценку качества градиентных решений, используя следующую методику [2, с. 108]. Пусть f^* – оптимальное значение целевой функции. Ввиду равенства

$$f(x^g)=\sum_{t=1}^{k}\Delta_t$$

нахождение гарантированной оценки точности сводится к вычислению $\min\sum_{t=1}^{k}\Delta_t^{'}$, где

$$\Delta_t^{'}=\frac{\Delta_t}{f^*}.$$

Величины $\Delta_t^{'}$ относительных приращений целевой функции на каждом шаге алгоритма решения удовлетворяют некоторым условиям-неравенствам, которые становятся ограничениями в задаче.

Вывод гарантированной оценки точности.

Рассмотрим задачу о рюкзаке с монотонными сепарабельными функциями:

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) \to \max, \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x_i) \le b, \qquad (3)$$

$$0 \le x_i \le h_i, \qquad (4)$$

где $f_i(0)=0$, $f_i(x_i)$ – неубывающие функции и $a_i(x_i)$ – линейные функции.

Суть подхода вывода гарантированной оценки точности состоит в том, что приближённое решение задачи (2) – (4) строится на аппроксимационной решетке $Z(\alpha^i)$, где:

$$a_{i+1}=\max\{[\alpha \cdot a_i],\; a_i+1\}. \qquad (5)$$

Узлами такой решетки являются числа $[\alpha^i]$, $\alpha \ge 1$, где $[x]$ обозначает целую часть числа x, i – целые неотрицательные степени числа α [6], [7]. В случае $\alpha = 1$ решетка $Z(\alpha^i)$ совпадает с решеткой Z^n и тогда гарантированная оценка точности равна $\frac{1}{2}$ [2].

Исследуем поведение градиентных алгоритмов для задачи (2)–(4) при $\alpha > 1$. Будем строить приближенное решение на решетке $Z(2^i)$. Градиенты в этом случае вычисляются только для значений x_i, которые являются степенями двойки. Алгоритм, строящий вектор градиентного типа, является полиномиальным.

Определим для каждой переменной $x_i = 1,\; 2,\; ...,\; n$ все возможные значения:

$$s_i^{k_i} = \begin{cases} 0,\ k_i = 0; \\ 2^{k_i-1},\ k_i = 1,\ 2,\ ...,\left[\log_2 h_i\right]; \\ h_i,\ k_i \geq \left[\log_2 h_i\right]+1. \end{cases} \tag{6}$$

Здесь $\left[\log_2 h_i\right]$ – наименьшее целое, не меньше $\log_2 h_i$.

Пусть x^* – оптимальное решение задачи (2)–(4). Для каждого i, $1 \leq i \leq m$ определим такое целое число p_i, что

$$s_i^{p_i-1} \leq x_i^* \leq s_i^{p_i}. \tag{7}$$

Если $x_i^{"} = 0$, то полагаем $p_i = 1$. Пусть

$$\Delta_i(y,x) = \frac{(f_i(y) - f_i(x))}{a_i(y-x)}.$$

В задаче (2)–(4) рассматриваются неубывающие функции, поэтому можно использовать следующую лемму.

Лемма 1. Для неубывающей функции $f_i(x_i)$ и $x^* > 0$ справедливо неравенство

$$\Delta_i(s_i^{p_i},0) \geq \frac{\Delta_i(x^*,0)}{2}.$$

Доказательство: Исходя из соотношения (7) и монотонности функции f_i, выведем следующую цепочку:

$$\Delta_i(s_i^{p_i},0) = \frac{f_i(s_i^{p_i})}{a_i s_i^{p_i}} = \frac{1}{2}\frac{f_i(s_i^{p_i})}{a_i s_i^{p_i}\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{2}\frac{f_i(x_i^*)}{a_i s_i^{p_i-1}} \geq \frac{1}{2}\frac{f_i(x_i^*)}{a_i x_i^*}.$$

Таким образом, получим:

$$\Delta_i(s_i^{p_i},0) \geq \frac{1}{2}\Delta_i(x^*,0).$$

Лемма доказана.

Положим, что направление e_{i_r} движения на шаге *r* градиентного алгоритма выбирается следующим образом

$$i_r = \arg\max_{i \in fes^+(x^r,D)} \nabla_i^+ f(x^r)\beta(i,\ \lambda),$$

где $\beta(i,\ \lambda)$ – коэффициент растяжения градиента.

Введём обобщённый градиент:

$$\Delta_i(x) = \begin{cases} \nabla_i^+ f(x)/\beta_i,\ \text{если } 1 \leq i \leq n,\ 0 \leq x_i \leq h_i, \\ 0,\ \textit{в остальных случаях}. \end{cases}$$

Алгоритм:

1. Пусть $b^0 = b$, $x^0 = (0,\ ...,\ 0)$, $r = 1$, $i = 1,\ ...,\ n$. Определяем индекс i_r, отвечающий максимальной величине $\Delta_i(x^r)$. Если $\Delta_{i_r}(x^r) \leq 0$, то переходим к п. 2. В противном случае полагаем,

$$x^r = x^{r-1} + e_{i_r},$$

$$b^r = b^{r-1} - a_{i_r}.$$

Если $b^r > 0$, то $r = r+1$. Повторяем шаг *r*.

2. Если $b^{r-1} \geq 0$, то $x^A = x^{r-1}$. В противном случае в качестве x^A выбираем тот из векторов

$$x^{'} = x^r - x^{r-1},$$

$$x^{"} = x^{r-1},$$

на котором достигается $\max\{f(x^{'}), f(x^{"})\}$.

Суть алгоритма состоит в том, что на каждом шаге в силу (6) происходит расчет градиента для точек $s_i^{k_i}$ и выбирается направление, обеспечивающее максимальный градиент.

Лемма 2. Точка x^r, полученная на шаге r алгоритма, является решением в задаче (2)–(4) при условии, что

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^r = b.$$

Предположим, что r – последний шаг итерационного процесса п.1 алгоритма, тогда по лемме 2 либо в $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^A \le \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le b$ нет точек, удовлетворяющих (5) и (6), либо $\Delta_{i_r}(x^r) \le 0$, то x^A – решение задачи (2) – (4). Если эти условия не выполнены, то $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^r \ge b$, и поэтому x^r – допустимый элемент в задаче (2) – (4) при $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^r = b$. Тогда в силу леммы 2 и (5) справедливо неравенство $f(x^r) \ge f(x^*)$, из которого следует, что

$$f(x^{'}) + f(x^{''}) = f(x^r - x^{r-1}) + f(x^{r-1}) = \alpha \nabla_{i_r}^{+} f(x^{r-1}) + f(x^{r-1}) \ge \alpha f(x^r) - f(x^{r-1}) + f(x^{r-1}) = \alpha f(x^r) \ge \alpha f(x^*).$$

Из полученных рассуждений, получим гарантированную оценку точности алгоритма

$$f(x^A) \ge \frac{(f(x^{'}) + f(x^{''}))}{2} \ge \frac{\alpha}{2} f(x^*).$$

Заключение. В результате проведенных исследований найдена гарантированная оценка точности градиентного алгоритма, реализованного на решетке $Z(\alpha^i)$ при $\alpha > 1$, для задачи о рюкзаке с монотонными сепарабельными функциями. Принцип вывода гарантированной оценки точности может быть использован при построении и обосновании новых субоптимальных алгоритмов для модельных задач дискретной оптимизации.

Литература

1. Пападимитриу, Х.Х. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность / Х.Х. Пападимитриу, К. Стайглиц / пер. с англ. под ред. В. Б. Алексеева. – М. : Мир, 1985. – 510 с.
2. Ковалев, М.М. Матроиды в дискретной оптимизации / М.М. Ковалев. – Изд. 2-е. – М. : Едиториал УРСС, 2003. – 224 с.
3. Ковалев, М.М. Монотонные функции многозадачной логики и суперматроиды / М.М. Ковалев, П.Б. Миланов // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. – 1984. – Т. 24, №5. – С. 786–790.
4. Емеличев, В.А. Оценки градиентных решений в специальных задачах максимизации выпуклых функций на целочисленной решетке / В.А. Емеличев, А.Б. Рамазанов // Известия АН БССР, Сер. физ.-мат. наук. – 1988. – № 6. – С. 20–25.
5. Ефимчик, Н.Е. О погрешности градиентного экстремума строго выпуклой функции дискретного аргумента / Н.Е. Ефимчик, А.Б. Рамазанов // Известия АН Беларуси, Сер. физ.-мат. наук. – 1996. – № 2. – С. 133.
6. Емельянченко, Н.С. Гарантированная оценка точности для модельной задачи о рюкзаке с выпуклыми монотонными сепарабельными функциями / Н.С. Емельянченко // Информационные технологии и системы 2012 (ИТС 2012) : материалы Междунар. науч. конф., Минск, 24 окт. 2012 г. : тез. докл. / Белорус. гос. ун-т информатики и радиоэлектроники ; редкол. : Л.Ю. Шилин (гл. ред.) [и др.]. – Минск, 2012. – С. 304–305.
7. Богданова, Н.С. Задача о рюкзаке с выпуклыми монотонными сепарабельными функциями / Н.С. Богданова // Информационные технологии и системы 2013 (ИТС 2013) : материалы Междунар. науч. конф., Минск, 23 окт. 2013 г. : тез. докл. / Белорус. гос. ун-т информатики и радиоэлектроники ; редкол. : Л.Ю. Шилин (гл. ред.) [и др.]. – Минск, 2013. – С. 244–245.

Гомельский государственный технический
университет им. П.О. Сухого

Поступила в редакцию 12.03.2018