П.С. Шаповалов

УО «Гомельский государственный технический университет
имени П.О. Сухого», Гомель, Беларусь

ОПИСАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЛАЗЕРНЫХ ПУЧКОВ В НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ

Для описания физических нелинейных систем используются системы нелинейных дифференциальных уравнений. Случаи интегрируемых систем крайне редки [1]. Часто для таких систем отсутствуют интегралы движения, что указывает на наличие в динамике сложных (в том числе и хаотических) режимов. Задачи исследования нелинейных осцилляторов часто сводятся к системам Ермакова, для которой существует Ермаков-Левис-Рей-Рейд инвариант [2].

В данной работе задача взаимодействия гауссовых лазерных пучков в средах с кубической нелинейностью с помощи вариационного метода сводится к системе уравнений Ермакова, для которой найден интеграл движения. Распространение взаимодействующих пучков сводится к системе нескольких нелинейных уравнений, имеющих форму и инвариант движения, аналогичный обычной системе Ермакова из двух уравнений. Поэтому данную систему можно рассматривать как обобщение систем Ермакова.

Для описания взаимодействия световых пучков в среде с кубической нелинейностью и квадратичной неоднородностью будем исходить из системы нелинейных параболических уравнений [3], записанных в декартовой системе координат (x, y, z). В данном случае пучки считаются некогерентными поэтому интерференционное взаимодействие света не учитывается.

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2}-2ik_1\frac{\partial U_1}{\partial z}-k_1^2\alpha(x^2+y^2)U_1+k_1^2\beta\left(|U_1|^2+2|U_2|^2\right)U_1=0,\\ \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2}-2ik_2\frac{\partial U_2}{\partial z}-k_2^2\alpha(x^2+y^2)U_2+k_2^2\beta\left(|U_2|^2+2|U_1|^2\right)U_2=0.\end{gathered}\tag{1}$$

Здесь для j-го пучка ($j=1, 2$) U_j – комплексная амплитуда электромагнитного поля на круговой частоте колебаний ω_j, $k_j=\sqrt{\varepsilon_j}\omega_j$ – волновое число, ε_j – линейная диэлектрическая проницаемость среды, α – коэффициент квадратичной неоднородности среды ($\alpha=0$ – среда однородная), β – коэффициент нелинейности. Система (1) описывает взаимодействие лазерных пучков в диапазоне частот, где временна́я дисперсия среды пренебрежимо мала.

Для системы уравнений (1) запишем интеграл действия

$$J=\int_0^z dz\int_{-\infty}^{+\infty}dy\int_{-\infty}^{+\infty}dx\left[\frac{1}{k_1^2}\left(\left|\frac{\partial U_1}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial U_1}{\partial y}\right|^2\right)-\frac{i}{k_1}\left(U_1\frac{\partial U_1^*}{\partial z}-U_1^*\frac{\partial U_1}{\partial z}\right)+\frac{1}{k_2^2}\left(\left|\frac{\partial U_2}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial U_2}{\partial y}\right|^2\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{i}{k_2}\left(U_2\frac{\partial U_2^*}{\partial z}-U_2^*\frac{\partial U_2}{\partial z}\right)+\alpha(x^2+y^2)\left(|U_1|^2+|U_2|^2\right)-\frac{\beta}{2}\left(|U_1|^4+4|U_1|^2|U_2|^2+|U_2|^4\right)\right].$$

Решая систему (1) вариационным методом в классе круговых гауссовых пучков для их радиусов, получим систему уравнений [4]:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2}+\alpha w_1=\left[\frac{4(1-k_1^2\mu_1)w_2}{k_1^2 w_1}-\frac{32\mu_2 w_1/w_2}{\left(w_1/w_2+w_2/w_1\right)^2}\right]\frac{1}{w_1^2 w_2},\\ \frac{\partial^2 w_2}{\partial z^2}+\alpha w_2=\left[\frac{4(1-k_2^2\mu_2)w_1}{k_2^2 w_2}-\frac{32\mu_1 w_2/w_1}{\left(w_1/w_2+w_2/w_1\right)^2}\right]\frac{1}{w_1 w_2^2},\end{gathered}\tag{2}$$

где $i=1, 2$, $\mu_i=\beta P_i/4\pi$, P_i – мощность i-го пучка, w_i – радиус светового пятна кругового пучка. Система (2) представляет собой систему уравнений для двух связанных нелинейных осцилляторов и записана в стандартной ермаковской форме [5]:

$$\ddot{a}+\omega^2 a=f(b/a)/a^2 b,\ \ddot{b}+\omega^2 b=g(a/b)/ab^2.\tag{3}$$

В случае, когда мощности взаимодействующих пучков совпадают ($P_1=P_2$, $\mu_1=\mu_2=\mu$), система (2) относится к классу гамильтоновых систем.

Гамильтониан для нее будет равен:

$$H=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_1}{\partial z}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_2}{\partial z}\right)^2+\frac{\alpha\left(w_1^2+w_2^2\right)}{2}+\frac{2(1-k_1^2\mu)}{w_1^2}+\frac{2(1-k_2^2\mu)}{w_2^2}+\frac{16\mu}{w_1^2+w_2^2}. \quad (4)$$

Данное утверждение легко проверить, подставляя (4) в систему:

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2}=-\frac{\partial H}{\partial w_1},\quad \frac{\partial^2 w_2}{\partial z^2}=-\frac{\partial H}{\partial w_2}. \quad (5)$$

Умножая первое уравнения системы (2) на μ_1, а второе уравнения на μ_2, дифференцируя их по z и складывая, получим соотношение

$$\frac{d^3(\mu_1 w_1^2+\mu_2 w_2^2)}{dz^3}+4\alpha\frac{d(\mu_1 w_1^2+\mu_2 w_2^2)}{dz}=0. \quad (6)$$

Общее решение уравнения (6), в случаи однородной среды ($\alpha=0$), имеет вид:

$$\mu_1 w_1^2+\mu_2 w_2^2=C_2 z^2+C_1 z+C_0\ . \quad (6а)$$

Для квадратично неоднородной среды ($\alpha\neq 0$) решение имеет вид:

$$\mu_1 w_1^2+\mu_2 w_2^2=S_2\sin(2\sqrt{\alpha}z)+S_1\cos(2\sqrt{\alpha}z)+S_0\ . \quad (6б)$$

Взаимодействие нескольких пучков, можно формально свести к распространению одного пучка в нелинейной среде, эффективный размер которого равен $w_Э^2=\mu_1 w_1^2+\mu_2 w_2^2$, реальные пучки будут осциллировать вокруг эффективного.

При взаимодействии двух эллиптических гауссовых пучков система уравнений для полуосей светового пятна (w_{xi}, w_{yi}) имеет вид:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 w_{x1}}{\partial z^2}+\alpha w_{x1}&=\left[\frac{4w_{y1}}{k_1^2 w_{x1}}-4\mu_1-\frac{32\mu_2}{\sqrt{\left(1+w_{x2}^2/w_{x1}^2\right)^3\left(1+w_{y2}^2/w_{y1}^2\right)}}\right]\frac{1}{w_{x1}^2 w_{y1}},\\
\frac{\partial^2 w_{y1}}{\partial z^2}+\alpha w_{y1}&=\left[\frac{4w_{x1}}{k_1^2 w_{y1}}-4\mu_1-\frac{32\mu_2}{\sqrt{\left(1+w_{y2}^2/w_{y1}^2\right)^3\left(1+w_{x2}^2/w_{x1}^2\right)}}\right]\frac{1}{w_{x1} w_{y1}^2},\\
\frac{\partial^2 w_{x2}}{\partial z^2}+\alpha w_{x2}&=\left[\frac{4w_{y2}}{k_2^2 w_{x2}}-4\mu_2-\frac{32\mu_1}{\sqrt{\left(1+w_{x1}^2/w_{x2}^2\right)^3\left(1+w_{y1}^2/w_{y2}^2\right)}}\right]\frac{1}{w_{x2}^2 w_{y2}},\\
\frac{\partial^2 w_{y2}}{\partial z^2}+\alpha w_{y2}&=\left[\frac{4w_{x2}}{k_2^2 w_{y2}}-4\mu_2-\frac{32\mu_1}{\sqrt{\left(1+w_{y1}^2/w_{y2}^2\right)^3\left(1+w_{x1}^2/w_{x2}^2\right)}}\right]\frac{1}{w_{x2} w_{y2}^2}\ .
\end{aligned} \quad (7)$$

Для системы уравнений (7), аналогично как и для системы уравнений (2), при одинаковых мощностях пучков ($\mu_1=\mu_2=\mu$) получим инвариант по форме близкой гамильтониану (4).

$$H=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_{x1}}{\partial z}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_{y1}}{\partial z}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_{x2}}{\partial z}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_{y2}}{\partial z}\right)^2+\frac{\alpha\left(w_{x1}^2+w_{y1}^2\right)}{2}+\frac{\alpha\left(w_{x2}^2+w_{y2}^2\right)}{2}+$$

$$+\frac{2}{k_1^2}\left(\frac{1}{w_{x1}^2}+\frac{1}{w_{y1}^2}\right)+\frac{2}{k_2^2}\left(\frac{1}{w_{x2}^2}+\frac{1}{w_{y2}^2}\right)-\frac{4\mu}{w_{x1}w_{y1}}-\frac{4\mu}{w_{x2}w_{y2}}+\frac{16\mu}{\sqrt{\left(w_{x1}^2+w_{x2}^2\right)\left(w_{y1}^2+w_{y2}^2\right)}}$$

Систему уравнений (7) можно рассматривать как обобщение систем Ермакова на случай многомерных нелинейных осцилляторов. Такие системы должны подчиняться тем же закономерностям, что и классические системы Ермакова, т.е. они должны быть разрешимы.

Умножая первое второе уравнения системы (7) на μ_1, а третье и четвертое уравнения на μ_2, дифференцируя их по z и складывая, получим соотношение

$$\frac{d^3\left(\mu_1\left(w_{x1}^2+w_{y1}^2\right)+\mu_2\left(w_{x2}^2+w_{y2}^2\right)\right)}{dz^3}+4\alpha\frac{d\left(\mu_1\left(w_{x1}^2+w_{y1}^2\right)+\mu_2\left(w_{x2}^2+w_{y2}^2\right)\right)}{dz}=0. \qquad (8)$$

Общее решение уравнения (8), в случаи однородной среды ($\alpha=0$), имеет вид:

$$\mu_1\left(w_{x1}^2+w_{y1}^2\right)+\mu_2\left(w_{x2}^2+w_{y2}^2\right)=C_2z^2+C_1z+C_0\,. \qquad (8a)$$

Для квадратично неоднородной среды ($\alpha\neq 0$) решение имеет вид:

$$\mu_1\left(w_{x1}^2+w_{y1}^2\right)+\mu_2\left(w_{x2}^2+w_{y2}^2\right)=S_2\sin(2\sqrt{\alpha}z)+S_1\cos(2\sqrt{\alpha}z)+S_0\,. \qquad (8б)$$

Постоянные интегрирования находятся из граничных условий. Осцилляции реальных пучков, относительно эффективного размера $w_э^2=\mu_1\left(w_{x1}^2+w_{y1}^2\right)+\mu_2\left(w_{x2}^2+w_{y2}^2\right)$, можно изучить с помощью построения фазовой поверхности уравнения.

Литература

1. Лихтенберг, А. Регулярная и стохастическая динамика / А. Лихтенберг, М. Либерман. − М.: Мир, 1985. − 529 с.

2. Haas, F. Dynamical symmetries and the Ermakov invariant / F. Haas, J. Goedert // Phis. Lett. A. – 2001. – Vol. 279. – P. 181−188.

3. Гончаренко, А.М. О взаимодействии круговых гауссовых пучков света в нелинейных средах / А.М. Гончаренко, П.С. Шаповалов // Доклады НАНБ. – 2003. – Т. 47. − № 2. – С. 66−68.

4. Шаповалов, П.С. О нелинейном взаимодействии соосных гауссовых пучков света в неоднородной среде / П.С. Шаповалов, Е.А. Ермолаев // Известия НАНБ Сер. Физ.-мат. наук – 2006. − № 1. − С. 81−85.

5. Беркович, Л.М. Факторизация и преобразования дифференциальных уравнений / Л.М. Беркович. − М.: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. − 464 с.