

Общероссийский математический портал

В. Н. Семенчук, В. Ф. Велесницкий, Конечные группы с заданными свойствами критических подгрупп, *Сиб. матем. журн.*, 2014, том 55, номер 2, 427–435

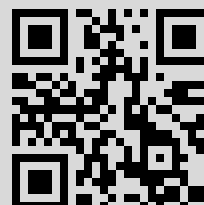
Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 46.56.86.13

29 мая 2018 г., 14:38:41



КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ЗАДАНЫМИ СВОЙСТВАМИ КРИТИЧЕСКИХ ПОДГРУПП

В. Н. Семенчук, В. Ф. Велесницкий

Аннотация. Изучается строение конечных групп, у которых минимальные не \mathfrak{H} -группы (\mathfrak{H} — насыщенная наследственная формация) обобщенно субнормальны. В частности, получено детальное описание строения конечных групп, у которых группы Шмидта \mathfrak{F} -достижимы (\mathfrak{F} — насыщенная наследственная формация с решеточным свойством).

Ключевые слова: формация с решеточным свойством, корадикал, обобщенно субнормальная подгруппа, группа Шмидта, критическая подгруппа.

Введение

Все рассматриваемые в работе группы конечны. Важнейшей задачей теории конечных групп является задача изучения строения конечных групп, которые не принадлежат некоторому классу групп \mathfrak{F} , а все собственные подгруппы которых принадлежат \mathfrak{F} . В настоящее время такие группы называются *минимальными не \mathfrak{F} -группами (критическими группами)*.

Начало исследований критических групп восходит к работе Миллера и Морено [1], в которой изучены минимальные неабелевы группы (группы Миллера — Морено). Следующий важный шаг в данном направлении сделал в 1924 г. О. Ю. Шмидт в работе [2], в которой изучены минимальные ненильпотентные группы (группы Шмидта). Хупперт в [3], а затем Дерк в [4] изучили минимальные несверхразрешимые группы. В [5] В. Н. Семенчуком рассмотрены разрешимые минимальные не \mathfrak{F} -группы для произвольных насыщенных наследственных формаций \mathfrak{F} .

Важность изучения критических групп следует из того факта, что любая конечная группа, не принадлежащая некоторому классу групп \mathfrak{F} , содержит минимальную не \mathfrak{F} -группу. Как показали исследования многих ведущих математиков мира, минимальные не \mathfrak{F} -группы играют важную роль при выяснении строения конечных групп.

В частности, в [6] В. Н. Семенчуком начато исследование строения конечных групп, у которых группы Шмидта субнормальны. Следующий важный шаг в данном направлении был сделан В. С. Монаховым и В. Н. Княгиной в [7]. Полное описание таких групп получено В. А. Ведерниковым в [8].

В теории конечных групп естественным обобщением понятия субнормальности является понятие \mathfrak{F} -достижимости (обобщенной субнормальности), предложенное Кегелем в [9]. Настоящая работа посвящена изучению строения конечных групп, у которых минимальные не \mathfrak{H} -группы (\mathfrak{H} — насыщенная наследственная формация) обобщенно субнормальны. В частности, получено детальное описание строения конечных групп, у которых группы Шмидта \mathfrak{F} -

достижимы (\mathfrak{F} — насыщенная наследственная формация с решеточным свойством).

Предварительные сведения

Необходимые обозначения и определения можно найти в [10]. Напомним лишь некоторые из них.

Если \mathfrak{F} — класс групп и G — группа, то *корадикал* $G^{\mathfrak{F}}$ — пересечение всех нормальных подгрупп N из G таких, что $G/N \in \mathfrak{F}$. *Классом Фиттинга* называется класс \mathfrak{X} , замкнутый относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных \mathfrak{X} -подгрупп. *Гомоморф* — класс групп, замкнутый относительно фактор-групп. *Формация* — класс групп, замкнутый относительно фактор-групп и подпрямых произведений. Формация \mathfrak{F} называется *насыщенной*, если из $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Формация \mathfrak{F} называется *наследственной*, если из $G \in \mathfrak{F}$ и $H \leq G$ вытекает, что $H \in \mathfrak{F}$.

Пусть \mathfrak{F} — произвольная формация. Обозначим через $\pi(\mathfrak{F})$ множество всех простых чисел p , для которых в \mathfrak{F} имеется неединичная p -группа; $G_{\mathfrak{X}}$ — \mathfrak{X} -радикал группы G , т. е. произведение всех нормальных \mathfrak{X} -подгрупп (\mathfrak{X} — некоторый класс групп) группы G .

Пусть \mathfrak{F} и \mathfrak{X} — непустые формации конечных групп. Напомним, что *произведением формаций* называется множество $\mathfrak{F}\mathfrak{X} = \{G \mid G^{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{F}\}$.

Если \mathfrak{F} — класс групп, то группа называется *минимальной не \mathfrak{F} -группой* (*критической группой*), если она не принадлежит \mathfrak{F} , а любая ее собственная подгруппа принадлежит \mathfrak{F} . Множество всех таких минимальных не \mathfrak{F} -групп обозначается через $M(\mathfrak{F})$. Минимальная нильпотентная группа называется *группой Шмидта*.

Напомним, что группа G называется *p -замкнутой* (*p -нильпотентной*), если ее силовская p -подгруппа (силовское p -дополнение) нормальна в G , и *p -разложимой*, если она одновременно p -замкнута и p -нильпотентна. Если фактор-группа $G/F(G)$ нильпотентна, то группа G называется *метанильпотентной*.

В теории классов конечных групп естественным обобщением понятия субнормальности является понятие \mathfrak{F} -достижимости. Пусть \mathfrak{F} — непустая формация. Подгруппу H называют *\mathfrak{F} -субнормальной в смысле Кегеля* или *\mathfrak{F} -достижимой*, если существует цепь подгрупп

$$G = H_0 \supseteq H_1 \supseteq \dots \supseteq H_m = H$$

такая, что для любого $i = 1, 2, \dots, m$ либо подгруппа H_i нормальна в H_{i-1} , либо $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$.

Очевидно, что любая \mathfrak{M} -достижимая (\mathfrak{M} — класс всех нильпотентных групп) группа субнормальна, и наоборот.

Напомним, что некоторое множество подгрупп \mathfrak{M} конечных групп G образует решетку, если $A \cap B \in \mathfrak{M}$, $\langle A, B \rangle \in \mathfrak{M}$ для любых двух подгрупп A и B из \mathfrak{M} .

Согласно классическому результату Виландта множество всех субнормальных подгрупп в любой конечной группе образует решетку. Кегель [9] и Л. А. Шеметков [10] поставили задачу отыскания новых формаций \mathfrak{F} , обладающих тем свойством, что множество всех \mathfrak{F} -достижимых подгрупп в любой конечной группе образует решетку. В настоящее время такие формации называются *формациями с решеточным свойством*. Полное решение данной задачи о

нахождении насыщенных наследственных формаций с решеточным свойством дано в [11]. В частности, из полученных результатов следует, что формации всех нильпотентных групп \mathfrak{N} , всех p -разложимых групп обладают решеточным свойством.

В следующих леммах приводятся известные свойства обобщенных субнормальных подгрупп, которые сыграли важную роль при доказательстве основных результатов.

Лемма 1. Пусть \mathfrak{F} — непустая формация, H и N — подгруппы группы G , причем N нормальна в G . Тогда

- 1) если H \mathfrak{F} -достижима в G , то HN \mathfrak{F} -достижима в G и HN/N \mathfrak{F} -достижима в G/N ;
- 2) если $N \subseteq H$, то H \mathfrak{F} -достижима в G тогда и только тогда, когда H/N \mathfrak{F} -достижима в G/N .

Лемма 2. Пусть \mathfrak{F} — непустая наследственная формация. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) если H — подгруппа группы G и $G^{\mathfrak{F}} \subseteq H$, то H — \mathfrak{F} -достижимая подгруппа группы G ;
- 2) если H — \mathfrak{F} -достижимая подгруппа группы G , то $H \cap K$ — \mathfrak{F} -достижимая подгруппа K для любой подгруппы K группы G ;
- 3) если H — \mathfrak{F} -достижимая подгруппа группы G , то $H^{\mathfrak{F}}$ — субнормальная подгруппа G ;
- 4) если H — \mathfrak{F} -достижимая подгруппа группы K и K — \mathfrak{F} -достижимая подгруппа группы G , то H — \mathfrak{F} -достижимая подгруппа группы G .

Далее приведем одно из ключевых свойств критических подгрупп.

Лемма 3. Каждая группа G , не принадлежащая некоторому классу групп \mathfrak{X} , содержит по крайней мере одну минимальную не \mathfrak{X} -подгруппу.

Лемма 4. Пусть \mathfrak{F} — наследственная насыщенная формация, $\pi(\mathfrak{F})$ — множество всех простых чисел, любая минимальная не \mathfrak{F} -подгруппа группы G разрешима и \mathfrak{F} -достижима. Тогда в группе G произвольная минимальная нормальная подгруппа принадлежит \mathfrak{F} .

Доказательство. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G . Если N разрешима, то она является p -группой. Поскольку по условию $p \in \pi(\mathfrak{F})$ и \mathfrak{F} — насыщенная формация, то $N \in \mathfrak{F}$.

Пусть N неразрешима. Если $N \notin \mathfrak{F}$, то по лемме 3 N содержит минимальную не \mathfrak{F} -подгруппу K . Согласно условию K разрешима и \mathfrak{F} -достижима в G . Очевидно, что $K^{\mathfrak{F}} \neq 1$. По лемме 2 $K^{\mathfrak{F}}$ — субнормальная подгруппа группы G . Очевидно, что $1 \neq K^{\mathfrak{F}} \subseteq F(G)$. Тогда $N \cap F(G)$ — неединичная нормальная подгруппа группы G . Так как N неразрешима, $N \cap F(G)$ — собственная подгруппа N , что невозможно. Лемма доказана. \square

Пусть K — подгруппа группы G . Подгруппа H называется *добавлением к подгруппе K* , если $KH = G$ и $KH_1 \neq G$ для любой подгруппы H_1 из H , отличной от H . Понятно, что любая подгруппа обладает по крайней мере одним добавлением. Следующая лемма характеризует их известное свойство.

Лемма 5. Подгруппа H является добавлением к нормальной подгруппе K в группе G тогда и только тогда, когда $HK = G$ и $H \cap K \subseteq \Phi(H)$.

Лемма 6. Пусть \mathfrak{F} — гомоморф, содержащий все нильпотентные группы, R — подгруппа группы G , порожденная всеми минимальными не \mathfrak{F} -подгруппами группы G . Тогда $G/R \in \mathfrak{F}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $G/R \notin \mathfrak{F}$. Пусть L — добавление к R в G . Согласно лемме 5 $G = RL$ и $R \cap L \subseteq \Phi(L)$. Так как \mathfrak{F} — гомоморф, очевидно, что $L \notin \mathfrak{F}$. По лемме 3 L содержит минимальную не \mathfrak{F} -подгруппу K . Ясно, что $K \subseteq R$. Тогда $K \subseteq R \cap L \subseteq \Phi(L)$. Следовательно, K — нильпотентная группа, и согласно условию $K \in \mathfrak{F}$, что невозможно. Лемма доказана. \square

Напомним также некоторые свойства формаций групп с решеточным свойством, которые получены А. Ф. Васильевым, С. Ф. Каморниковым, В. Н. Семенчуком в [11]. Данные свойства сыграли важнейшую роль при доказательстве основных результатов работы.

Лемма 7 [11]. Пусть \mathfrak{F} — наследственная формация. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) \mathfrak{F} обладает решеточным свойством для \mathfrak{F} -достижимых подгрупп;
- 2) группа $G = \langle A_1, A_2 \rangle$ принадлежит \mathfrak{F} , если A_1, A_2 — \mathfrak{F} -достижимые \mathfrak{F} -подгруппы группы G ;
- 3) \mathfrak{F} — формация Фиттинга и всякая \mathfrak{F} -достижимая \mathfrak{F} -подгруппа группы G содержится в \mathfrak{F} -радикале этой группы.

Лемма 8 [11]. Пусть \mathfrak{F} — насыщенная наследственная формация с решеточным свойством. Тогда любая минимальная не \mathfrak{F} -группа G является группой одного из следующих типов:

- 1) $|G| = p$ — простое число, $p \notin \pi(\mathfrak{F})$;
- 2) G — группа Шмидта;
- 3) $G/\Phi(G)$ — монолитическая группа с неабелевым монолитом $N/\Phi(G)$ такая, что G/N — циклическая примарная группа и $N/\Phi(G) = (G/\Phi(G))^{\mathfrak{F}}$.

Лемма 9. Пусть \mathfrak{F} — насыщенная наследственная формация, содержащая все нильпотентные группы, \mathfrak{H} — формация. Тогда $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ — насыщенная формация.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}\mathfrak{H}$, а тогда $(G/\Phi(G))^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{F}$. Известно, что $(G/\Phi(G))^{\mathfrak{H}} = G^{\mathfrak{H}}\Phi/\Phi(G)$. Тогда $G^{\mathfrak{H}}\Phi(G)/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$. По следствию 4.2.1 из [10] $G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{F}$. Это значит, что $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{H}$. Лемма доказана. \square

Лемма 10. Пусть \mathfrak{F} — наследственная формация с решеточным свойством, \mathfrak{X} — насыщенная наследственная формация такая, что $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{X}$. Пусть в группе G все минимальные не \mathfrak{X} -подгруппы \mathfrak{F} -достижимы. Если N — нормальная подгруппа группы G , то в фактор-группе G/N все минимальные не \mathfrak{X} -подгруппы \mathfrak{F} -достижимы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть K/N — минимальная не \mathfrak{X} -подгруппа группы G/N . Пусть L — добавление к N в K . Согласно лемме 5 $L \cap N \subseteq \Phi(L)$. Так как $K/N = LN/N \simeq L/L \cap N$, то $L/L \cap N$ — минимальная не \mathfrak{X} -подгруппа, а тогда и $L/\Phi(L)$ — минимальная не \mathfrak{X} -подгруппа. Покажем, что L порождается всеми своими минимальными не \mathfrak{X} -подгруппами. Пусть R — подгруппа, порожденная всеми минимальными не \mathfrak{X} -подгруппами из L . Очевидно, что R — нормальная подгруппа из L . Если $R\Phi(L)/\Phi(L)$ — собственная подгруппа из $L/\Phi(L)$, то $R\Phi(L)/\Phi(L) \simeq R/R \cap \Phi(L) \in \mathfrak{X}$ и по следствию 4.2.1 из [10] $R \in \mathfrak{X}$, что невозможно. Итак, $R\Phi(L) = L$. Отсюда следует, что $L = R$. Поскольку формация \mathfrak{F} обладает решеточным свойством, подгруппа, порожденная \mathfrak{F} -достижимыми подгруппами \mathfrak{F} -достижима. Следовательно, L — \mathfrak{F} -достижимая

подгруппа группы G . Но тогда по лемме 1 $K = LN$ — \mathfrak{F} -достижимая подгруппа из G . Отсюда по лемме 1 K/N \mathfrak{F} -достижима в G/N . Итак, в G/N все минимальные не \mathfrak{X} -подгруппы \mathfrak{F} -достижимы. Лемма доказана. \square

Следствие 10.1. Пусть \mathfrak{F} — наследственная формация с решеточным свойством. Пусть в группе G все подгруппы Шмидта \mathfrak{F} -достижимы. Если N — нормальная подгруппа группы G , то в фактор-группе G/N все подгруппы Шмидта \mathfrak{F} -достижимы.

Доказательство следует из леммы 10 в том случае, когда $\mathfrak{X} = \mathfrak{N}$.

Лемма 11. Пусть \mathfrak{F} — насыщенная наследственная формация с решеточным свойством, $\pi(\mathfrak{F})$ — множество всех простых чисел и любая минимальная не \mathfrak{F} -группа разрешима. Если в группе G все подгруппы Шмидта \mathfrak{F} -достижимы, то $G/G_{\mathfrak{F}}$ нильпотентна.

Доказательство. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $G = G_{\mathfrak{F}}$ и теорема очевидна. Пусть $G \notin \mathfrak{F}$. Тогда по лемме 3 G содержит минимальную не \mathfrak{F} -группу H . Так как H разрешима, по лемме 8 H либо группа простого порядка, либо группа Шмидта. Поскольку $\pi(\mathfrak{F})$ — множество всех простых чисел и \mathfrak{F} — насыщенная формация, $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F}$. Следовательно, H — группа Шмидта. По условию H \mathfrak{F} -достижима в G . Согласно лемме 2 $1 \neq H^{\mathfrak{F}}$ — субнормальная подгруппа группы G . Очевидно, что $1 \neq F(H^{\mathfrak{F}}) \subseteq F(G)$. Следовательно, G имеет минимальную нормальную разрешимую подгруппу N .

Для доказательства леммы надо показать, что $G \in \mathfrak{FN}$. Доказательство проведем индукцией по порядку группы G . Согласно лемме 10 все группы Шмидта из G/N \mathfrak{F} -достижимы. По индукции $G/N \in \mathfrak{FN}$.

Пусть T — отличная от N минимальная нормальная подгруппа группы G . Как и выше, нетрудно показать, что $G/T \in \mathfrak{FN}$. Так как \mathfrak{FN} — формация, $G \simeq G/T \cap N \in \mathfrak{FN}$; противоречие. Итак, N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G .

Пусть $\Phi(G) \neq 1$. Как и выше, нетрудно показать, что $G/\Phi(G) \in \mathfrak{FN}$. Поскольку \mathfrak{FN} — насыщенная формация, $G \in \mathfrak{FN}$. Итак, $\Phi(G) = 1$. Отсюда следует, что $F(G) = N$ и в G найдется максимальная подгруппа M такая, что $G = NM$, $N \cap M = 1$. Если $M \notin \mathfrak{F}$, то согласно лемме 3 M содержит минимальную не \mathfrak{F} -группу P . Как и выше, согласно лемме 8 нетрудно показать, что P — группа Шмидта. По условию P \mathfrak{F} -достижима в G . С учетом леммы 2 $1 \neq P^{\mathfrak{F}}$ — субнормальная подгруппа группы G . Очевидно, что $1 \neq F(P^{\mathfrak{F}}) \subseteq F(G) = N$, что невозможно. Итак, $M \in \mathfrak{F}$. Если $M \in \mathfrak{N}$, то утверждение леммы очевидно. Пусть $M \neq \mathfrak{N}$, тогда M содержит группу Шмидта. Обозначим через R подгруппу, порожденную всеми группами Шмидта из M . Поскольку по условию все группы Шмидта \mathfrak{F} -достижимы в G и \mathfrak{F} обладает решеточным свойством, R — \mathfrak{F} -достижимая подгруппа группы G . Так как $R \subseteq M \in \mathfrak{F}$ и \mathfrak{F} — наследственная формация, $R \in \mathfrak{F}$. По лемме 7 $R \subseteq G_{\mathfrak{F}}$. По лемме 6 $M/R \in \mathfrak{N}$. Ввиду того, что $G = G_{\mathfrak{F}}M$, имеем $G/G_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F}}M/G_{\mathfrak{F}} \simeq M/M \cap G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{N}$. Лемма доказана. \square

Лемма 12. Пусть \mathfrak{F} — насыщенная наследственная формация с решеточным свойством. Если в группе G выполняется условие $G^{\mathfrak{F}} \subseteq G_{\mathfrak{F}}$, то для любых подгрупп H , содержащих $G_{\mathfrak{F}}$, следует, что $H_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F}}$.

Доказательство. Пусть H — подгруппа группы G такая, что $G_{\mathfrak{F}} \subseteq H$. Покажем, что $G_{\mathfrak{F}} = H_{\mathfrak{F}}$. Предположим противное. Тогда в $H_{\mathfrak{F}}$ найдется силовская p -подгруппа P такая, что $P \not\subseteq G_{\mathfrak{F}}$.

Рассмотрим подгруппу $G_{\mathfrak{F}}P$. Так как $G^{\mathfrak{F}} \subseteq G_{\mathfrak{F}}P$, по лемме 2 $G_{\mathfrak{F}}P$ \mathfrak{F} -достижима в G . Поскольку $G_{\mathfrak{F}}P \in \mathfrak{F}$ и \mathfrak{F} — наследственная формация, P \mathfrak{F} -достижима в $G_{\mathfrak{F}}P$. По лемме 1 P — \mathfrak{F} -достижимая в G . Так как $P \in \mathfrak{F}$, по лемме 8 $P \subseteq G_{\mathfrak{F}}$; противоречие. Лемма доказана. \square

Лемма 13 [12]. Пусть \mathfrak{F} — непустая наследственная формация с решеточным свойством. Если группа Шмидта $H = [H_p]H_q$, где $|H_q| = q$, принадлежит \mathfrak{F} , то формация \mathfrak{F} содержит любую группу $G = [G_p]G_q$, где G_q — циклическая подгруппа.

Основные результаты

Теорема 1. Пусть \mathfrak{F} — насыщенная наследственная формация с решеточным свойством, $\pi(\mathfrak{F})$ — множество всех простых чисел и любая минимальная не \mathfrak{F} -группа разрешима. Если в группе G все подгруппы Шмидта \mathfrak{F} -достижимы, то $G/G_{\mathfrak{F}}$ абелева.

Доказательство. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $G = G_{\mathfrak{F}}$ и теорема очевидна. Пусть $G \notin \mathfrak{F}$. Тогда по лемме 3 G содержит минимальную не \mathfrak{F} -группу H . Так как H разрешима, по лемме 8 H либо группа простого порядка, либо группа Шмидта. Поскольку $\pi(\mathfrak{F})$ — множество всех простых чисел и \mathfrak{F} — насыщенная формация, $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F}$. Следовательно, H — группа Шмидта. По условию H разрешима и \mathfrak{F} -достижима в G . Согласно лемме 2 $1 \neq H^{\mathfrak{F}}$ — субнормальная подгруппа группы G . Очевидно, что $1 \neq F(H^{\mathfrak{F}}) \subseteq F(G)$. Следовательно, G имеет минимальную нормальную разрешимую подгруппу N .

Пусть \mathfrak{U} — формация всех абелевых групп. Тогда для доказательства теоремы надо доказать, что $G \in \mathfrak{FU}$. Доказательство проведем индукцией по порядку группы G . Рассмотрим фактор-группу G/N . Согласно следствию 10.1 из леммы 10 в G/N все подгруппы Шмидта \mathfrak{F} -достижимы. Следовательно, по индукции $G/N \in \mathfrak{FU}$. Если группа G имеет минимальную нормальную подгруппу T , отличную от N , то, как и выше, получаем, что $G/T \in \mathfrak{FU}$. Так как \mathfrak{FU} — формация, $G \simeq G/N \cap T \in \mathfrak{FU}$.

Если $\Phi(G) \neq 1$, то по индукции $G/\Phi(G) \in \mathfrak{FU}$. Поскольку \mathfrak{F} — наследственная формация, содержащая все нильпотентные группы, по лемме 9 \mathfrak{FU} — насыщенная формация. Отсюда $G \in \mathfrak{FU}$. Итак, группа G содержит единственную минимальную нормальную подгруппу N , причем N разрешима и $\Phi(G) = 1$. Следовательно, $F(G) = N$ — p -группа. Так как \mathfrak{F} — насыщенная формация и $\pi(\mathfrak{F})$ — множество всех простых чисел, $N \in \mathfrak{F}$. Отсюда $N \subseteq G_{\mathfrak{F}}$. По лемме 11 $G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{N}$. Пусть L — добавление к $G_{\mathfrak{F}}$ в G . Тогда по лемме 5 $G = G_{\mathfrak{F}}L$ и $G_{\mathfrak{F}} \cap L \subseteq \Phi(L)$. Отсюда получаем, что

$$G/G_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F}}L/G_{\mathfrak{F}} \simeq L/G_{\mathfrak{F}} \cap L \in \mathfrak{N}.$$

Следовательно, $L/\Phi(L) \in \mathfrak{N}$. Это значит, что $L \in \mathfrak{N}$.

Покажем, что $|G : G_{\mathfrak{F}}|$ не делится на p . Предположим противное. Рассмотрим подгруппу $A = G_{\mathfrak{F}}G_p$. Очевидно, что $G_{\mathfrak{F}} \subset G_{\mathfrak{F}}G_p = A$. По лемме 12 $A_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F}}$, значит, $A \notin \mathfrak{F}$. Тогда по лемме 3 A содержит минимальную не \mathfrak{F} -группу H . Так как H разрешима, по лемме 8 H — группа Шмидта. Согласно условию H \mathfrak{F} -достижима в G . Отсюда $1 \neq F(H^{\mathfrak{F}}) \subseteq F(G)$. Стало быть, $H^{\mathfrak{F}}$ — p -группа. Следовательно, $H = [H_p]H_q$. Очевидно, что $H_q \subseteq G_{\mathfrak{F}}$. Рассмотрим подгруппу $H \cap G_{\mathfrak{F}}$. Если $H \cap G_{\mathfrak{F}}$ — собственная подгруппа H , то $H \cap G_{\mathfrak{F}}$ нормальна в H и нильпотентна. Тогда H_q нормальна в H , что невозможно. Итак,

$H \cap G_{\mathfrak{F}} = H$. Так как $G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$ и \mathfrak{F} — наследственная формация, $H \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Итак, $|G : G_{\mathfrak{F}}|$ не делится на p .

Покажем, что $G_{\mathfrak{F}}$ — холлова подгруппа группы G . Предположим противное. Тогда найдется простое число $q \neq p$ такое, что $q \in \pi(G_{\mathfrak{F}})$ и $|G : G_{\mathfrak{F}}|$ делится на q . Рассмотрим подгруппу $B = G_{\mathfrak{F}}G_q$. Согласно лемме 12 нетрудно показать, что $B \notin \mathfrak{F}$. Тогда по лемме 3 B содержит минимальную не \mathfrak{F} -подгруппу H . По лемме 8 H — группа Шмидта. По условию H \mathfrak{F} -достижима в G . По лемме 2 $1 \neq H^{\mathfrak{F}} = 1$ — субнормальная подгруппа группы G , тогда $1 \neq F(H^{\mathfrak{F}}) \subseteq F(G)$. Следовательно, $H^{\mathfrak{F}} = 1$ — p -группа, и $H = [H_p]H_q$. Так как $q \in \pi(G_{\mathfrak{F}})$, то $G_{\mathfrak{F}}$ содержит подгруппу Q порядка q . Рассмотрим ненильпотентную подгруппу NQ в группе $G_{\mathfrak{F}}$. Пусть K — подгруппа Шмидта в группе NQ . Тогда $K = [K_p]K_q$. Так как $G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$ и \mathfrak{F} — наследственная формация, $K \in \mathfrak{F}$. По лемме 13 $H \in \mathfrak{F}$; противоречие. Итак, $G_{\mathfrak{F}}$ — холлова подгруппа группы G .

По теореме Шура $G = G_{\mathfrak{F}}L$, причем в силу леммы 11 L нильпотентна в G . Применяя индукцию, получим, что $L = G_q$ — минимальная неабелева группа.

Итак, $G = [G_{\mathfrak{F}}]G_q$, где G_q — минимальная неабелева группа. При этом группа G имеет единственную минимальную нормальную p -подгруппу N и $C_G(N) = N = F(G)$.

Так как $G \notin \mathfrak{F}$, в G существует минимальная не \mathfrak{F} -группа H . Очевидно, что $q \in \pi(H)$. По лемме 8 H — группа Шмидта. Покажем, что $\pi(H) = \{p, q\}$. Пусть $\pi(H) = \{r, q\}$, где $r \neq p$. Поскольку H \mathfrak{F} -достижима, по лемме 2 $H^{\mathfrak{F}} = 1$ — субнормальная подгруппа группы G . В таком случае получаем $1 \neq F(H^{\mathfrak{F}}) \subseteq F(G) = N$, что невозможно. Итак, $H = [H_p]H_q$.

Рассмотрим подгруппу $K = NG_q$. Если K — собственная подгруппа группы G , то по индукции $K/K_{\mathfrak{F}}$ абелева. Покажем, что $K_{\mathfrak{F}} = N$. Пусть $N \subseteq K_{\mathfrak{F}}$. Тогда в $K_{\mathfrak{F}}$ найдется подгруппа Q такая, что $|Q| = q$. Если NQ нильпотентна, то $Q \subseteq C_G(N) = N$, что невозможно. Итак, поскольку NQ ненильпотентна, она содержит группу Шмидта $T = [T_p]Q$. Очевидно, что $T \subseteq K_{\mathfrak{F}}$. Так как \mathfrak{F} — наследственная формация и $K_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$, то $T \in \mathfrak{F}$. Но тогда по лемме 13 $H \in \mathfrak{F}$, что невозможно. Итак, $K_{\mathfrak{F}} = N$. Так как $K/K_{\mathfrak{F}} = K/N$ абелева, G_q абелева, что невозможно. Итак, $G = [N]G_q$.

Предположим, что Q — подгруппа простого порядка из центра $L = G_q$. Если Q действует приводимо на N , то по теореме Машке $N = N_1 \times N^*$, где N_1 — минимальная нормальная подгруппа группы N . Отсюда следует, что существуют две минимальные нормальные подгруппы N_1 и N_2 в группе NQ , где $N_2 \subseteq N^*$. Рассмотрим подгруппу $[N_i]Q$. Если $[N_i]Q$ ненильпотентна, то очевидно, что произведение N_iQ является группой Шмидта.

Допустим, что $N_i \times Q$ нильпотентна. В таком случае $G_q \subseteq \langle N_i, G_q \rangle \subseteq C_G(Q)$. Поскольку G_q — максимальная подгруппа группы G , то $G = C_G(Q)$. Так как группа G примитивна, $Q \subseteq (G_q)_G = 1$; противоречие. Итак, $[N_i]Q$ — группа Шмидта, где $i = 1, 2$.

Поскольку по условию подгруппа N_iQ \mathfrak{F} -достижима в G и формация \mathfrak{F} обладает решеточным свойством, $N_1Q \cap N_2Q = Q$ \mathfrak{F} -достижима в G . Если $N_iQ \in \mathfrak{F}$, то по лемме 13 формация \mathfrak{F} содержит группу H ; противоречие. Итак, $N_iQ \notin \mathfrak{F}$, $i = 1, 2$. Поскольку Q \mathfrak{F} -достижима в N_iQ ($i = 1, 2$), как и выше, нетрудно показать, что это невозможно. Так как $Q \subseteq \Phi(G_q)$, то все максимальные подгруппы из G_q действуют неприводимо на N . По лемме 4.1 из [10] все собственные подгруппы в G_q циклические. Ввиду того, что G_q — минимальная неабелева группа, из теоремы 51 в [13] следует, что G_q — группа кватернионов.

Значит, $q = 2$, и по свойствам группы Шмидта NQ получаем, что $|N| = p$. Но G/N — циклическая группа порядка, делящего $p - 1$, и G_q циклическая. Теорема доказана. \square

Следствие 1.1. Пусть \mathfrak{F} — формация всех p -разложимых групп. Если в группе G все подгруппы Шмидта \mathfrak{F} -достижимы, то $G/G_{\mathfrak{F}}$ абелева.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из доказанной выше теоремы и того факта, что формация всех p -разложимых групп обладает решеточным свойством.

Из данной теоремы вытекает известный результат В. С. Монахова и В. Н. Княгиной из [7].

Следствие 1.2. Если в группе G все подгруппы Шмидта субнормальны, то фактор-группа $G/F(G)$ абелева.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из теоремы 1 и того факта, что формация всех нильпотентных групп обладает решеточным свойством.

Теорема 2. Пусть \mathfrak{H} — насыщенная наследственная формация, содержащая \mathfrak{N} , \mathfrak{F} — насыщенная наследственная формация с решеточным свойством, причем $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$. Если все минимальные не \mathfrak{H} -подгруппы группы G разрешимы и \mathfrak{F} -достижимы в G , то $G/F(G) \in \mathfrak{H}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G — группа наименьшего порядка, для которой теорема неверна. Очевидно, что $G \notin \mathfrak{H}$. Согласно лемме 3 G содержит минимальную не \mathfrak{H} -группу H . По условию H разрешима. Из \mathfrak{F} -достижимости H в G и леммы 2 следует, что $H^{\mathfrak{F}}$ — субнормальная подгруппа в G . Так как $H \notin \mathfrak{H}$, то и $H \notin \mathfrak{F}$, тогда $H^{\mathfrak{F}} \neq 1$. Поскольку $H^{\mathfrak{F}}$ разрешима, $F(H^{\mathfrak{F}}) \neq 1$. Очевидно, что $F(H^{\mathfrak{F}}) \subseteq F(G)$. Итак, в G найдется минимальная нормальная разрешимая подгруппа N , причем N — p -группа.

Для доказательства теоремы надо показать, что $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{H}$. Доказательство проведем индукцией по порядку группы G . Рассмотрим фактор-группу G/N . Согласно лемме 9 условия теоремы в G/N выполняются, а следовательно, по индукции $G/N \in \mathfrak{N}\mathfrak{H}$. Предположим, что G содержит минимальную нормальную подгруппу T , отличную от N . Тогда, как и выше, получаем, что $G/T \in \mathfrak{N}\mathfrak{H}$. Так $\mathfrak{N}\mathfrak{H}$ — формация, $G \simeq G/T \cap N \in \mathfrak{N}\mathfrak{H}$; противоречие. Итак, N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G .

Пусть $\Phi(G) \neq 1$. По индукции $G/\Phi(G) \in \mathfrak{N}\mathfrak{H}$. Поскольку $\mathfrak{N}\mathfrak{H}$ — насыщенная формация, $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{H}$. Итак, $\Phi(G) = 1$. Это значит, что $N = F(G)$. Тогда в G найдется максимальная подгруппа M такая, что $G = NM$, $N \cap M = 1$. Если $M \in \mathfrak{H}$, то $G/N \in \mathfrak{H}$. Отсюда $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{H}$. Следовательно, $M \notin \mathfrak{H}$, и в M найдется минимальная не \mathfrak{H} -группа A . Как и выше, легко показать, что $1 \neq F(A^{\mathfrak{F}}) \subseteq F(G)$. Стало быть, $M \cap F(G) \neq 1$, что невозможно. Теорема доказана. \square

Следствие 2.1. Пусть \mathfrak{F} — насыщенная наследственная формация с решеточным свойством и $\pi(\mathfrak{F})$ — множество всех простых чисел. Если в группе G все подгруппы Шмидта \mathfrak{F} -достижимы, то $G/F(G) \in \mathfrak{F}$.

Следствие 2.2. Если в группе G все минимальные не \mathfrak{F} -подгруппы \mathfrak{F} -достижимы (\mathfrak{F} — класс всех p -разложимых групп), то $G/F(G)$ p -разложима.

Следствие 2.3. Пусть \mathfrak{F} — насыщенная наследственная формация с решеточным свойством. Если все минимальные не \mathfrak{F} -подгруппы группы G разрешимы и \mathfrak{F} -достижимы в G , то $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{F}$.

Из этой теоремы также следуют известные результаты В. Н. Семенчука, полученные в [6].

Следствие 2.4. Если в группе G все минимальные несверхразрешимые группы субнормальны, то $G/F(G)$ сверхразрешима.

Следствие 2.5. Если в группе G все подгруппы Шмидта субнормальны, то G метанильпотентна.

ЛИТЕРАТУРА

1. Miller G. A. Nonabelian groups in which every subgroup is abelian // Trans. Amer. Math. Soc. 1903. V. 4. P. 398–404.
2. Шмидт О. Ю. Группы, все подгруппы которых специальные // Мат. сб. 1924. Т. 31, № 3. С. 366–372.
3. Huppert B. Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen // Math. Z. 1954. Bd 60. S. 409–434.
4. Döerk K. Minimal nicht Uberauflosbare, endliche Gruppen // Math. Z. 1966. Bd 91. S. 198–205.
5. Семенчук В. Н. Минимальные не \mathfrak{F} -группы // Алгебра и логика. 1979. Т. 18, № 3. С. 348–382.
6. Семенчук В. Н. Конечные группы с системой минимальных не \mathfrak{F} -подгрупп // Подгрупповое строение конечных групп. Минск: Наука и техника, 1981. С. 138–149.
7. Княгина В. Н., Монахов В. С. О конечных группах с некоторыми субнормальными подгруппами Шмидта // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 6. С. 1316–1322.
8. Ведерников В. А. Конечные группы с субнормальными подгруппами Шмидта // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, № 6. С. 669–687.
9. Kegel O. H. Untergruppenverbände endlicher Gruppen, die Subnormalteilerverband echt enthalten // Arch. Math. 1978. V. 30. P. 225–228.
10. Шеметков Л. А. Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.
11. Васильев А. Ф., Каморников С. Ф., Монахов В. С. О решетках подгрупп конечных групп // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические системы. Киев: Ин-т математики Акад. Украины, 1993. С. 27–54.
12. Велесницкий В. Ф., Семенчук В. Н. Об одной проблеме Л. А. Шеметкова // Укр. мат. журн. 2012. Т. 64., № 9. С. 1282–1288.
13. Huppert B. Endliche Gruppen. I. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1967.

Статья поступила 2 июля 2013 г.

Семенчук Владимир Николаевич, Велесницкий Василий Федорович
Гомельский университет им. Ф. Скорины,
ул. Советская, 104, Гомель 246019, Беларусь
kolenchukova@gsu.by, velogos@rambler.ru