УДК 512.542

О КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ, ФАКТОРИЗУЕМЫХ ОБОБЩЕННО СУБНОРМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ

В.Н. Семенчук, В.Ф. Велесницкий

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

ON THE FINITE GROUPS FACTORIZABLE BY GENERALIZED SUBNORMAL SUBGROUPS

V.N. Semenchuk, V.F. Veliasnitski

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Работа посвящена изучению конечных групп, факторизуемых обобщенно субнормальными погруппами.

Ключевые слова: *группа, формация, корадикал, обобщенно субнормальная подгруппа, индекс, группа Шмидта.*

This work is devoted to the study of finite groups factorizable by generalized subnormal subgroups.

Keywords: *group, formation, coradical, generalized subnormal subgroup, index, Schmidt group.*

Введение

Классический результат Фиттинга состоит в том, что класс нильпотентных групп $\mathfrak{N}$ замкнут относительно взятия субнормальных подгрупп и произведений нормальных подгрупп. Формации Фиттинга, т. е. формации $\mathfrak{F}$, замкнутые относительно взятия субнормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп, стали рассматривать с развитием теории формаций. В 1970 году Хоукс поставил проблему об описании разрешимых наследственных формаций Фиттинга. В работе [1] Хоукс дал описание метанильпотентных наследственных формаций Фиттинга. Брайс и Косси в 1972 году [2] доказали, что любая разрешимая наследственная формация Фитинга является насыщенной. В.Н. Семенчуком [3], [4] было получено полное описание разрешимых наследственных формаций Фиттинга. Оказалось, что любую разрешимую наследственную формацию Фиттинга $\mathfrak{F}$ можно получить из формаций всех разрешимых π-групп (для различных множеств π простых чисел) с помощью операций произведения и пересечения формаций.

Развивая подход Хоукса, Л.А. Шеметков в Коуровской тетради [5] поставил следующую проблему.

***Проблема* 1.** *Классифицировать наследственные насыщенные формации $\mathfrak{F}$ с тем свойством, что любая группа $G = AB$, где A и B $\mathfrak{F}$-субнормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы, принадлежит $\mathfrak{F}$.*

В настоящее время такие формации называют сверхрадикальными формациями.

Полное решение данной проблемы, в классе конечных разрешимых групп, было получено В.Н. Семенчуком в работе [6]. В частности, оказалось, что любая разрешимая наследственная сверхрадикальная формация совпадает с формацией вида $\bigcap_{(i,j)\in I}\mathfrak{S}_{\pi_i}\mathfrak{S}_{\pi_j}$, где I – некоторое подмножество из $N \times N$ (N – множество всех натуральных чисел, $\pi_i\pi_j$ – некоторые множества простых чисел).

В настоящей работе получено описание непустых сверхрадикальных формаций $\mathfrak{F}$ с условием, что любая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа является разрешимой. В частности, оказалось, что все такие формации являются композиционными.

Известно, что формация всех сверхразрешимых групп не является формацией Фиттинга, но группы, факторизуемые нормальными сверхразрешимыми подгруппами, индексы которых взаимно просты, являются сверхразрешимыми. В связи с этим проблему Л.А. Шеметкова можно сформулировать следующим образом.

***Проблема* 2.** *Описать наследственные насыщенные формации $\mathfrak{F}$, замкнутые относительно произведения обобщенно субнормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп, индексы которых взаимно просты.*

В настоящей работе в классе конечных разрешимых групп получено полное решение проблемы 2 для произвольных непустых наследственных формаций.

1 Предварительные сведения

Все группы в работе конечны. В дальнейшем нам потребуются следующие определения и обозначения.

Обозначим через π – некоторое множество простых чисел, G_π – класс всех π-групп.

Если $\mathfrak{F}$ – класс групп и G – группа, то корадикал $G^{\mathfrak{F}}$ пересечение всех нормальных подгрупп N из G таких, что $G/N \in \mathfrak{F}$.

Формация – класс групп, замкнутый относительно фактор-групп и подпрямых произведений. Формация называется насыщенной, если $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$, то $G \in \mathfrak{F}$.

Обозначим через $\pi(\mathfrak{F})$ множество всех простых чисел p, для которых в $\mathfrak{F}$ имеется неединичная p-группа.

В теории классов конечных групп естественным обобщением понятия субнормальности является понятие $\mathfrak{F}$-субнормальности.

Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация. Подгруппу H группы G называют $\mathfrak{F}$-субнормальной, если либо $H = G$, либо существует максимальная цепь

$$G = H_0 \supset H_1 \supset \ldots \supset H_{n-1} \supset H_n = H$$

такая, что $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$ для всех $i = 1, 2, ..., n$.

Несколько другое понятие $\mathfrak{F}$-субнормальности введено Кегелем. Фактически оно объединяет понятие субнормальности и $\mathfrak{F}$-субнормальности.

Подгруппу H называют $\mathfrak{F}$-субнормальной в смысле Кегеля или $\mathfrak{F}$-достижимой, если существует цепь подгрупп

$$G = H_0 \supseteq H_1 \supseteq \ldots \supseteq H_{n-1} \supseteq H_n = H$$

такая, что для любого $i = 1, 2, ..., n$ либо подгруппа H_i нормальна в H_{i-1}, либо $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$.

Формация $\mathfrak{F}$ называется $\mathfrak{X}$-сверхрадикальной, если любая группа $G \in \mathfrak{X}$ такая, что $G = AB$, где $A, B \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$-субнормальны в G, принадлежит $\mathfrak{F}$.

Если $\mathfrak{X}$ – класс всех групп, то $\mathfrak{X}$-сверхрадикальная формация является сверхрадикальной.

$G_{\mathfrak{S}}$ – произведение всех нормальных $\mathfrak{S}$-подгрупп (разрешимых подгрупп) группы G.

Формация $\mathfrak{F}$ называется композиционной, если из $G/\Phi(G_{\mathfrak{S}}) \in \mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$.

В следующих леммах приводятся известные свойства обобщенных субнормальных подгрупп, которые сыграли важную роль при доказательстве основных результатов.

***Лемма* 1.1.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая наследственная формация. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если H – подгруппа группы G и $G^{\mathfrak{F}} \subseteq H$, то H – $\mathfrak{F}$-субнормальная ($\mathfrak{F}$-достижимая) подгруппа группы G;*

2) *если H – $\mathfrak{F}$-субнормальная ($\mathfrak{F}$-достижимая) подгруппа группы G, то $H \cap K$ – $\mathfrak{F}$-субнормальная ($\mathfrak{F}$-достижимая) подгруппа K для любой подгруппы K группы G;*

3) *если H – $\mathfrak{F}$-субнормальная ($\mathfrak{F}$-достижимая) подгруппа группы K и K – $\mathfrak{F}$-субнормальная ($\mathfrak{F}$-достижимая) подгруппа группы G, то H – $\mathfrak{F}$-субнормальная ($\mathfrak{F}$-достижимая) подгруппа группы G;*

4) *если H_1 и H_2 – $\mathfrak{F}$-субнормальные ($\mathfrak{F}$-достижимые) подгруппы группы G, то $H_1 \cap H_2$ – $\mathfrak{F}$-субнормальная ($\mathfrak{F}$-достижимая) подгруппа группы G;*

5) *если все композиционные факторы группы G принадлежат формации $\mathfrak{F}$, то каждая субнормальная подгруппа группы G $\mathfrak{F}$-субнормальна в G;*

6) *если H – $\mathfrak{F}$-субнормальная ($\mathfrak{F}$-достижимая) подгруппа группы G, то H^x $\mathfrak{F}$-субнормальна ($\mathfrak{F}$-достижима) в G для любых $x \in G$.*

***Лемма* 1.2.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация, H и N – подгруппы группы G, причем N нормальна в G. Тогда:*

1) *если H $\mathfrak{F}$-субнормальна ($\mathfrak{F}$-достижима) в G, то HN $\mathfrak{F}$-субнормальна ($\mathfrak{F}$-достижима) в G и HN/N $\mathfrak{F}$-субнормальна ($\mathfrak{F}$-достижима) в G/N;*

2) *если $N \subseteq H$, то H $\mathfrak{F}$-субнормальна ($\mathfrak{F}$-достижима) в G тогда и только тогда, когда H/N $\mathfrak{F}$-субнормальна ($\mathfrak{F}$-достижима) в G/N.*

***Лемма* 1.3.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – формация всех сверхразрешимых групп и H – подгруппа разрешимой группы G. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) *H – $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G;*

2) *H обладает максимальной цепью $H = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_{n-1} \subset H_n = G$ такой, что $|H_i : H_{i-1}|$ – простые числа, для любого $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Пусть $\mathfrak{F}$ – некоторый класс групп. Напомним, что группа G называется минимальной не $\mathfrak{F}$-группой, если G не принадлежит $\mathfrak{F}$, а любая её собственная подгруппа принадлежит $\mathfrak{F}$. Множество всех таких групп мы будем обозначать $M(\mathfrak{F})$.

Минимальная не $\mathfrak{F}$-группа также называется критической группой.

Важную роль при доказательстве основных результатов работы (теорема 2.3, теорема 2.4) играет следующая лемма.

***Лемма* 1.4.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация, G – разрешимая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа, тогда $G^{\mathfrak{F}}$ – p-группа.*

Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}$ – класс всех нильпотентных групп. Минимальную ненильпотентную группу называют группой Шмидта.

В следующей лемме приведем основные свойства группы Шмидта.

***Лемма* 1.5.** Пусть G – группа Шмидта. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) *G – разрешимая бипримарная группа;*

2) *$G = [G_p]G_q$, где $G^{\mathfrak{F}} = G_p$ и G_q – циклическая группа.*

Приведем в виде леммы основные свойства минимальных несверхразрешимых групп.

***Лемма* 1.6.** *Пусть G – минимальная несверхразрешимая группа. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *G разрешима и $|\pi(G)| \leq 3$;*

2) *G имеет единственную неединичную нормальную силовскую подгруппу P;*

3) *$G = [P]S$, где $S / S \cap \Phi(G)$ – либо примарная циклическая, либо группа Миллера–Морено.*

В леммах 1.7 и 1.8 получены важные свойства $\mathfrak{S}$-сверхрадикальных формаций.

***Лемма* 1.7.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая наследственная $\mathfrak{S}$-сверхрадикальная формация. Тогда $\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})} \subseteq \mathfrak{F}$.*

***Лемма* 1.8.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая наследственная $\mathfrak{S}$-сверхрадикальная формация. Если группа Шмидта $H = [H_p]H_q$, где $|H_q| = q$, принадлежит $\mathfrak{F}$, то формация $\mathfrak{F}$ содержит любую группу $G = [G_p]G_q$, где G_q – циклическая группа.*

2 Основные результаты

***Теорема* 2.1.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая наследственная $\mathfrak{S}$-сверхрадикальная формация. Тогда любая разрешимая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа – либо группа простого порядка, либо группа Шмидта.*

***Теорема* 2.2.** *Любая непустая наследственная сверхрадикальная формация $\mathfrak{F}$, у которой $M(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{S}$, является композиционной.*

Напомним, что формация $\mathfrak{F}$ называется формацией Шеметкова, если любая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа – либо группа простого порядка, либо группа Шмидта.

В следующей теореме было получено полное описание непустых наследственных $\mathfrak{S}$-сверхрадикальных формаций, критические группы которых разрешимы.

***Теорема* 2.3.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая наследственная формация. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) *$\mathfrak{F}$ – $\mathfrak{S}$-сверхрадикальная формация и $M(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{S}$;*

2) *$\mathfrak{F}$ – формация Шеметкова.*

В случае, когда $\mathfrak{F}$ – насыщенная наследственная формация, получаем основной результат работы [6].

В следующей теореме получено решение проблемы 2 для произвольных непустых наследственных формаций.

***Теорема* 2.4.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая наследственная формация, тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) *формация $\mathfrak{F}$ содержит любую разрешимую группу $G = AB$, где A и B – $\mathfrak{F}$-субнормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы и индексы $|G:A|$, $|G:B|$ взаимно просты;*

2) *любая разрешимая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа одного из следующих типов*: а) *G – группа простого порядка q, где $q \notin \pi(\mathfrak{F})$*; б) *$G$ – бипримарная p-замкнутая группа ($p \in \pi(G)$), $G_p = G^{\mathfrak{F}}$ и $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$*; в) *$G$ – p-группа, где $p \in \pi(\mathfrak{F})$.*

***Следствие* 2.1.** *Бипримарная группа G сверхразрешима тогда и только тогда, когда любая её силовская подгруппа H обладает максимальной цепью $H = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_{n-1} \subset H_n = G$ такой, что $|H_i : H_{i-1}|$ – простые числа для любого $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Очевидно, что любая сверхрадикальная формация $\mathfrak{F}$ содержит любую группу $G = AB$, где A, B $\mathfrak{F}$-субнормальны в G и имеют взаимно простые индексы в G. Следующий пример показывает, что обратное утверждение неверно.

Пример. Пусть $\mathfrak{F}$ – формация всех сверхразрешимых групп, а $\mathfrak{G}_\pi$ – формация всех π-групп, где $\pi = \{p, q\}$, p и q – различные простые числа. Рассмотрим формацию $\mathfrak{X} = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_\pi$. Очевидно, что любая минимальная не $\mathfrak{X}$-группа является либо группой простого порядка, либо бипримарной минимальной несверхразрешимой группой. Согласно лемме 1.6 она является p-замкнутой группой. Тогда из теоремы 2.4 следует, что формация $\mathfrak{X}$ содержит любую группу $G = AB$, где A и B – $\mathfrak{X}$-субнормальные $\mathfrak{X}$-подгруппы, индексы которых взаимно просты.

С другой стороны формация $\mathfrak{X}$ не является сверхрадикальной. Это следует из того факта, что для любой сверхрадикальной формации $\mathfrak{H}$ любая минимальная не $\mathfrak{H}$-группа – либо группа Шмидта, либо группа простого порядка.

Заметим, что теоремы 2.3 и 2.4 справедливы, если в их условиях понятие $\mathfrak{F}$-субнормальности заменить на понятие $\mathfrak{F}$-достижимости.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hawkes, T.* On Fitting formations / T. Hawkes // Math. Z. – 1970. – Vol. 117. – P. 177–182.

2. *Bryce, R.A.* Fitting formations of finite soluble groups / R.A. Bryce, J. Cossey // Math. Z. – 1972. – Bd. 127, № 3. – S. 217–233.

3. *Семенчук, В.Н.* Разрешимые тотально локальные формации / В.Н. Семенчук // Сибир. мат. журн. – 1995. – Т. 36, № 4. – С. 861–872.

4. *Семенчук, В.Н.* О разрешимых тотально локальных формациях / В.Н. Семенчук // Вопросы алгебры. – 1997. – № 11. – С. 109–115.

5. Коуровская тетрадь (нерешенные вопросы теории групп) // Институт математики СО АН СССР. – Новосибирск, С. 1992. – 172

6. *Семенчук, В.Н.* Разрешимые $\mathfrak{F}$-радикальные формации / В.Н. Семенчук // Матем. заметки. – 1996. – Т. 59, № 2. – С. 261–266.

Поступила в редакцию 16.03.12.