Проблемы физики, математики и техники, № 2 (15), 2013

МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ, СОДЕРЖАЩИЕ ЗАДАННУЮ СИСТЕМУ ПЕРЕСТАНОВОЧНЫХ ПОДГРУПП

Т.В. Тихоненко

Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого, Гомель

FINITE GROUPS CONTAINING A GIVEN SYSTEM OF PERMUTABLE SUBGROUPS

T.V. Tihonenko

P.O. Sukhoi Gomel State Technical University, Gomel

Получены признаки нетривиальности разрешимого радикала и критерии непростоты конечной группы, которая содержит заданную систему перестановочных подгрупп.

***Ключевые слова**: конечная группа, перестановочные подгруппы, разрешимый радикал, простая неабелева группа.*

Signs of non-simplicity of a solvable radical and criteria of non-simplicity of a finite group, which contains the given system of permutable subgroups were obtained in this paper.

***Keywords**: finite group, permutable subgroups, solvable radical, nonabelian simple group.*

Введение

Строение конечной группы в значительной степени зависит от наличия в ней заданной системы перестановочных подгрупп. Напомним, что подгруппы A и B группы G называются *перестановочными*, если выполнено равенство $AB = BA$. Подгруппа A группы G называется *перестановочной* или *квазинормальной* в G, если A перестановочна со всеми подгруппами из G. В теории групп важность этого понятия связана прежде всего с тем, что для перестановочных подгрупп A и B их произведение AB само является группой.

В середине прошлого столетия появился ряд работ по теории перестановочных подгрупп, которые определили основные направления развития теории перестановочных подгрупп в последующие годы. Отметим работы О. Оре [1], Н. Ито [2], Р. Майера [3], О. Кегеля [4].

В настоящее время интерес к данной тематике значительно возрос, о чем свидетельствует значительное увеличение числа публикаций. Отметим статью Дж. Бейдлемана и Х. Хайнекена [5]. В серии публикаций А.Н. Скибы рассматривались X-перестановочные подгруппы, где X-некоторое множество элементов группы G. В частности, им было получено обобщение теоремы Шура-Цассенхауза, а также ряд критериев сверхразрешимости конечных групп. Достаточно полную информацию о конечных группах с перестановочными подгруппами можно найти в обзоре [6].

Настоящая работа относится к данному направлению.

1 Обозначения и предварительные результаты

Рассматриваются только конечные группы. Определения и обозначения стандартны, их можно найти в [7]–[8]. Приведем некоторые из них для удобства чтения:

$\pi(G)$ – множество всех простых делителей порядка группы G;

$O_p(G)$ – наибольшая нормальная p-подгруппа группы G;

$O_{2'}(G) = O(G)$ – наибольшая нормальная $2'$-подгруппа группы G;

$S(G)$ – разрешимый радикал группы G, т. е. подгруппа, порожденная всеми разрешимыми нормальными подгруппами группы G;

$Syl_p(G)$ – множество всех силовских p-подгрупп группы G;

$L(G)$ – слой группы G, т. е. наибольшая нормальная полупростая подгруппа группы G;

$F^*(G)$ – обобщенная подгруппами Фиттинга группы G, $F^*(G) = F(G)L(G)$;

$[R]S$ – полупрямое произведение подгрупп R и S, где R является нормальной подгруппой в $[R]S$;

$I(G)$ – множество всех инволюций группы G;

$< T^G >$ – нормальное замыкание подгруппы T в группе G, $<T^G> \trianglelefteq G$.

***Лемма* 1.1** [7, предложение 1.27]. *$C_G(F^*(G)) \subseteq F^*(G)$ для любой группы G. Кроме того, если $F(G) \subseteq H \triangleleft G$ и $C_G(H) \subseteq H$, то $F^*(G) \subseteq H$.*

***Лемма* 1.2.** *Пусть собственная подгруппа H группы G имеет четный порядок. Если H перестановочная со всеми инволюциями группы G, то G не является простой неабелевой группой.*

Доказательство. Пусть G – минимальный контрпример к лемме 1.2. Тогда G – простая неабелева группа. Если все инволюции $I(G)$ содержатся в H, то $H = G$, что невозможно. Следовательно, существует такая инволюция $\tau \in I(G)$, что $\tau \notin H$. Так как $H<\tau^g> = <\tau^g>H$, для всех $g \in G$, то $H \lhd <\tau^G> = G$. Последнее невозможно. Лемма 1.2 доказана.

***Лемма* 1.3.** *Пусть собственная подгруппа H группы G имеет нечетный порядок. Если H перестановочна со всеми инволюциями группы G, то* $S(G) \neq 1$.

Доказательство. Пусть группа G – минимальный контрпример к лемме 1.3. Так как H нормализуется любой инволюцией группы G, то группа G не простая. В силу минимальности контрпримера $S(G) = 1$.

Рассмотрим обобщенную подгруппу Фиттинга $F^*(G) = F(G)L(G) = L(G)$ – прямое произведение простых неабелевых подгрупп в группе G. Очевидно, что для всякой инволюции $\tau \in I(F^*(G))$ выполняется включение $\tau \in N_G(H)$. Так как множество всех инволюций из $F^*(G)$ порождает $F^*(G)$, то $F^*(G) \subseteq N_G(H)$. Если $F^*(G) \cap H \neq 1$, то, поскольку H – разрешимая подгруппа, получим, что $S(F^*(G)) \neq 1$, что невозможно. Поэтому $F^*(G) \cap H = 1$ и $H \subseteq C_G(F^*(G))$. Так как $H \nsubseteq F^*(G)$, то $C_G(F^*(G)) \nsubseteq F^*(G)$. Последнее невозможно по лемме 1.1. Полученное противоречие показывает, что $S(G) \neq 1$. Лемма 1.3 доказана.

***Лемма* 1.4** [8, теорема I.5.12]. *Пусть $H \subseteq K \subseteq G$. Тогда:*

1) *если H char K char G, то H char G*;

2) *если H char $K \lhd G$, то $H \lhd G$*.

***Лемма* 1.5** [4, теорема 1]. *Пусть A и B – собственные подгруппы конечной группы G и $G \neq AB$, причем $AB^g = B^gA$ для всех $g \in G$. Тогда A или B содержится в собственном нормальном делителе группы G.*

***Лемма* 1.6.** *Пусть G – конечная группа, не содержащая секций изоморфных группе Судзуки $Sz(q)$. Если H – $3'$-подгруппа группы G, всякая подгруппа которой перестановочна со всякой 3-подгруппой группы G, то* $S(G) \neq 1$.

Доказательство. Пусть G – минимальный контрпример к лемме 1.6. Тогда $S(G) = 1$. Так как простая неабелева группа не содержит подгруппы индекса 3, то по лемме 1.5 G не является простой неабелевой группой.

Рассмотрим минимальную нормальную подгруппу $N = N_1 \times \ldots \times N_k$, где $k \geq 1$, N_i – простые неабелевы группы и $3 \in \pi(N)$. Ясно, что $N \cap H = 1$.

Пусть $T = [N]H$. Если $U \in Syl_3(N)$, то по условию леммы 1.6 существуют подгруппы $[U]H^t$, для всех $t \in T$. Отсюда следует, что $<H^T> \subseteq N_T(U)$ и $<H^T> \trianglelefteq T$.

Если $<H^T> \supset H$, то по тождеству Дедекинда $<H^T> = [(N \cap <H^T>)]H$. Поэтому $N \cap <H^T> = N$. Следовательно, $<H^T> = [N]H = T \subseteq N_T(U)$, откуда получим $U \lhd N$, что невозможно.

Значит $<H^T> = H$ и $T = N \times H$. Получим, что $H \subseteq C_G(N) \lhd G$. Ясно, что $N \cap C_G(N) = 1$. Поскольку $N \lhd G$ и $C_G(N) \lhd G$, то существует подгруппа $N \times C_G(N) \lhd G$.

Если $(|C_G(N)|, 3) = 3$ и поскольку $H \subseteq C_G(N)$, то в силу минимальности контрпримера $S(C_G(N)) \neq 1$, значит $S(G) \neq 1$.

Пусть $(|C_G(N)|, 3) = 1$. Если $C_G(N)$ – неразрешимая подгруппа, то она содержит секцию, которая является простой неабелевой группой порядка взаимно простого с 3. Значит, эта секция изоморфна группе Судзуки, что противоречит условию леммы 1.6. Поэтому $C_G(N)$ – разрешимая нормальная подгруппа группы G и $S(G) \neq 1$. Лемма 1.6 доказана.

***Лемма* 1.7** [9, лемма 1.6]. *Пусть G – конечная группа. A, B – π-группы и для любого элемента $g \in G$ выполняется $AB^g = B^gA$. Тогда либо $O_\pi(G) \neq 1$, либо $S(G) \neq 1$, либо существуют две разрешимые минимальные нормальные подгруппы в группе G.*

2 Основные результаты

В данной работе получены и доказаны следующие результаты.

***Теорема* 2.1.** *Пусть G – группа четного порядка и собственная подгруппа H группы G имеет нечетный порядок. Если подгруппа H перестановочна с любой 2-подгруппой группы G, то $H \subseteq O(G)$.*

Доказательство. Пусть G – минимальный контрпример к теореме 2.1. По лемме 1.3 $S(G) \neq 1$. Обозначим через N минимальную нормальную подгруппу группы G.

Пусть $N = Z_p \times \ldots \times Z_p$, где p – нечетное число. Если $H \subseteq N$, то, поскольку G – минимальный контрпример к теореме 2.1, получим, $H \subseteq O(G)$ и теорема 2.1 верна. Значит, $H \nsubseteq N$. Рассмотрим фактор-группу G/N. По индукции $HN/N \subseteq O(G/N)$. Перейдя к полным прообразам, получим, что $H \subseteq O(G)$.

Следовательно, $N = Z_2 \times \ldots \times Z_2$. Поскольку подгруппа H перестановочна с любой 2-подгруппой группы G, то получим, что $NH = N \times H$. Тогда $H \subseteq C_G(N)$.

Пусть $C_G(N) \neq G$. Тогда $H \subseteq O(C_G(N))$ char $C_G(N) \lhd G$ и по лемме 1.4 $O(C_G(N)) \lhd G$, следовательно, $H \leq O(G)$. Пусть $C_G(N) = G$. Тогда $N \leq Z(G)$. Если N – силовская 2-подгруппа в G, то $G = N \times O(G)$. Тогда подгруппа $H \subseteq O(G)$. Значит, подгруппа N не совпадет с силовской 2-подгруппой группы G.

Рассмотрим фактор-группу G/N. По индукции фактор-группа $HN/N \subseteq O(G/N)$. Перейдя к полным прообразам, получим, что $H \subseteq O(G)$. Теорема 2.1 доказана.

***Теорема* 2.2.** *Пусть собственная подгруппа H конечной группы G имеет четный порядок. Если H перестановочна со всеми инволюциями из некоторого класса сопряженности, то G не является простой неабелевой группой.*

Доказательство. Пусть G – минимальный контрпример к теореме 2.2. Тогда G – простая неабелева группа. Пусть τ – некоторая инволюция из класса сопряженности. Если $\tau \in H$, то $\tau \in N_G(H)$. Если $\tau \notin H$, то поскольку

$$<\tau>H = H<\tau> = L,$$

получим, что $L = [H]<\tau>$ и $\tau \in N_G(H)$. Следовательно, для любого $g \in G$ $<\tau^G> \subseteq N_G(H)$ и поскольку G – простая группа, следовательно, $G = <\tau^G> \subseteq N_G(H)$, получим, что $H \lhd G$. Последнее невозможно. Теорема 2.2 доказана.

***Теорема* 2.3.** *Пусть G – конечная группа и $\pi = \{p, q\}$, где $p, q \in \pi(G)$, $p \neq q$. Если в группе G любая p-группа перестановочна с любой q-группой, то $S(G / O_{\pi'}(G)) \neq 1$.*

Доказательство. Пусть G – минимальный контрпример к теореме 2.3. Тогда $S(G/O_{\pi'}(G)) = 1$. Если $O_{\pi'}(G) \neq 1$, то рассмотрим факторгруппу $G/O_{\pi'}(G)$, которая удовлетворяет условиям теоремы 2.3, следовательно, $S(G / O_{\pi'}(G)) \neq 1$, что невозможно в силу минимальности контрпримера. Поэтому $O_{\pi'}(G) = 1$.

Пусть $O_p(G) \neq 1$. Тогда

$$S(G / O_{\pi'}(G)) = S(G) \neq 1$$

и теорема 2.3 верна. Таким образом,

$$O_p(G) = O_q(G) = 1.$$

Так как $S_pS_q^g = S_q^gS_p \neq G$ для всех $g \in G$, то по лемме 1.5 группа G не является простой неабелевой группой и любая ее нормальная подгруппа имеет порядок, который делится на p или q. Пусть M – минимальная нормальная подгруппа в группе G. Тогда $M = M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_k$, где M_i – изоморфные простые неабелевы группы.

Пусть $(|M|, p) = p$, $(|M|, q) = q$. В этом случае подгруппа M удовлетворяет условиям теоремы 2.3 и поэтому $S(M / O_{\pi'}(M)) \neq 1$. Так как $O_{\pi'}(M)$ char $M \lhd G$, то по лемме 1.4 $O_{\pi'}(M) \lhd G$ и $O_{\pi'}(M) \subseteq O_{\pi'}(G) = 1$. Следовательно, $S(M) \neq 1$, что невозможно.

Пусть $(|M|, p) = p$, $(|M|, q) = 1$. Рассмотрим $a \in G$, $|a| = q$. Обозначим $L = M<a>$. Если $L \neq G$, то подгруппа L удовлетворяет условиям теоремы 2.3 и $S(L / O_{\pi'}(L)) \neq 1$. Отсюда не трудно заключить, что $L = M \times <a>$ и $a \in C_G(M) \lhd G$. Таким образом, $C_G(M)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.3 и $S(C_G(M) / O_{\pi'}(C_G(M))) \neq 1$, , что невозможно.

Поэтому $L = G$ и $G = [(M_1 \times \ldots \times M_k)]<a>$. Если $k > 1$, то $G = [(M_1 \times M_1^a \times \ldots \times M_1^{a^{q-1}})]<a>$. Обозначим $P \in Syl_p(M_1)$. Так как $P<a> = <a>P = T$, то $P = P^a \subseteq M_1$, что невозможно.

Таким образом, M – простая неабелева группа. Пусть $P \in Syl_p(M)$, тогда для любого элемента $g \in G$ существует подгруппа $[P]<a^g>$. Следовательно, $<a^G> = G \subseteq N_G(P)$ и $P \lhd G$, что невозможно. Теорема 2.3 доказана.

***Теорема* 2.4.** *Пусть G – конечная группа, не содержащая секций изоморфных группе Судзуки $Sz(q)$. Если H – $3'$-подгруппа группы G, всякая подгруппа которой перестановочна со всякой 3-подгруппой группы G, то $H \subseteq S(G)$.*

Доказательство. По лемме 1.6, $S(G) \neq 1$. Пусть G – минимальный контрпример к теореме 2.4 и N – минимальная нормальная разрешимая подгруппа в группе G. Очевидно, что $H \not\subseteq N$. Рассмотрим подгруппу NH, где $N = Z_r \times \ldots \times Z_r$.

Пусть $r = 3$ и $\bar{G} = G/N$. Если $(|\bar{G}|, 3) = 3$, то в силу минимальности контрпримера $\bar{H} \subseteq S(\bar{G})$. Следовательно, $H \subseteq S(G)$. Значит, $\bar{G}$ – $3'$-группа, следовательно, $N \in Syl_3(G)$ и $\bar{G}$ – разрешимая группа, поэтому $H \subseteq S(G)$.

Пусть $r \neq 3$. Очевидно, что $(|\bar{G}|, 3) = 3$. Как было показано выше, $H \subseteq S(G)$. Теорема 2.4 доказана.

Отметим следующий результат о группах с факторизациями.

Предложение. *Пусть $G = AB$, где $(|A|,|B|)=1$, $2 \in \pi(A)$. Если всякая силовская подгруппа группы A перестановочна с любой силовской подгруппой группы B, то $B \subseteq S(G)$.*

Доказательство. Пусть G – минимальный контрпример. Очевидно, что $S(G) = 1$. Рассмотрим $A_r \in Syl_r(A)$, $B_s \in Syl_s(B)$. Пусть $g \in G$, тогда $g = ba$ для некоторого $b \in B$ и $a \in A$. Покажем, что $A_rB_S^g = B_S^gA_r$. Имеют место следующие равенства:

$$A_rB_S^g = A_rB_S^{ba} = \left(A_r^{a^{-1}}B_S^b\right)^a = \left(B_S^bA_r^{a^{-1}}\right)^a =$$

$$= B_S^{ba}A_r = B_S^gA_r.$$

Таким образом, $A_rB_S^g = B_S^gA_r$.

Обозначим $\pi = \{r, s\}$. Из леммы 1.7 следует, что либо $O_\pi(G) \neq 1$, либо $S(G) \neq 1$, либо группа G содержит две различные минимальные нормальные подгруппы. Следовательно, группа G содержит собственную минимальную нормальную подгруппу N, которая является неразрешимой. Так как $N = (N \cap A)(N \cap B)$, то подгруппа N удовлетворяет условиям предложения. Если $N \cap B \neq 1$, то, в силу минимальности контрпримера, $N \cap B \leq S(N)$, что невозможно. Поэтому $N = N \cap A$ и можно считать, что $G=[A]B$, где B – силовская p-подгруппа группы G. Очевидно, нормальное замыкание $<B^G>=G$. Пусть S – некоторая силовская r-подгруппа группы A. По условию предложения $N_G(S)$ содержит $<B^G>=G$. Поэтому подгруппа S нормальна в G. Так как $S(G)=1$, то это невозможно. Полученное противоречие доказывает предложение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ore, O.* Contributions in the theory of groups of finite order / O. Ore // Duke Math. J. – 1939. – Vol. 5. – P. 431–460.

2. *Ito, N.* Uder die Quasinormalteiler vor endlichen Gruppen / N. Ito, J. Szep // Act. Sci. Math. – 1962. – Vol. 23 – P. 169–170.

3. *Maier, R.* The embedding of permutable subgroups in finite groups / R. Maier, P. Schmid // Math. Z. – 1973. – Vol. 131. – P. 269–272.

4. *Kegel, O.* Porodukte nilpotentner Gruppen / O. Kegel // Arch. Math. – 1961. – Vol. 12. – P. 90–93.

5. *Beidleman, J.C.* Mutually permutable subgroups and group classes / J.C. Beidleman, H. Heineken // Arch. Math. – 2005. – Vol. 85. – P. 18–30.

6. *Skiba, A.N.* Finite groups with given systems of generalized permutable subgroups / A.N. Skiba // Известия Гомельского госуниверситета им. Ф. Скорины. – 2006. – № 3 (36). – С. 12–31.

7. *Горенстейн, Д.* Конечные простые группы. Введение в их классификацию / Д. Горенстейн. – М. : Мир, 1985.

8. *Huppert, B.* Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin-Heidelberg-New York : Springer, 1967.

9. *Казарин, Л.С.* Признаки непростоты факторизуемых групп / Л.С. Казарин // Изв. АН СССР. – 1980. – Т. 44, № 2. – С. 288–308.

Поступила в редакцию 21.03.13.