

УДК 621.396

**РАСЧЕТ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ  
ЗАРЯДОВ В МНОГОЭЛЕКТРОДНОЙ МОДЕЛИ  
СИСТЕМЫ МОЛНИЕЗАЩИТЫ МЕТОДОМ  
ТЕОРЕМ СЛОЖЕНИЯ**

**В. Т. ЕРОФЕЕНКО**

*Учреждение образования «Белорусский государственный университет», г. Минск*

**Д. В. КОМНАТНЫЙ, Е. В. КОМРАКОВА**

*Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого»,  
Республика Беларусь*

**Ключевые слова:** энергетические системы, молниезащита, электростатическая индукция, вероятность поражения, многоэлектродная система, теоремы сложения.

**Введение**

Разряды атмосферного электричества (молнии) представляют собой значительную опасность для электроэнергетического оборудования, так как могут вызвать его повреждение и стать причиной аварий в энергосистеме. Поэтому большое внимание уделяется разработке оборудования молниезащиты для указанного оборудования, в том числе молниеотводов. При этом необходимо осуществлять расчеты значения электрического заряда, наведенного по индукции полем структурных элементов грозовой тучи на молниеотводах и деталях оборудования. От величины этого заряда зависит вероятность поражения того или иного объекта молнией [1]. Следовательно, при проектировании молниезащиты требуется решать задачу об электростатической индукции в многоэлектродной системе [2]. Electroды в такой системе имеют различную геометрическую форму, поэтому получение численно-аналитического решения поставленной задачи возможно методом теорем сложения [3], [4].

Целью настоящей работы является разработка численно-аналитического метода расчета электрических зарядов, индуцированных в модели электроэнергетического оборудования структурными элементами грозовой тучи, методом теорем сложения.

**Постановка задачи**

Источником электростатического поля на лидерной стадии разряда молнии являются: область положительного заряда грозовой тучи, область отрицательного заряда грозовой тучи, лидер молнии [1], [2], [5]. Так как грозовые тучи находятся на большой высоте порядка единиц километров, то, несмотря на их огромные размеры, заряженные области туч допустимо считать точечными зарядами и полагать, что эти заряды расположены над молниеотводом [5]. По [1] можно считать, что лидер молнии размещается непосредственно над молниеотводом, а по [2] полагать, что значительная часть заряда лидера размещена в его головке. Это позволяет моделировать электростатическое поле лидера как поле точечного заряда.

В настоящее время молниеотводы представляют собой тонкие металлические стержни [1]. Оборудование электрических подстанций снабжается сферическими экранами [6].

Тогда для расчета электростатической индукции в системе молниезащиты может быть применена следующая модель.

В пространстве  $R^3$  с диэлектрической проницаемостью среды  $\epsilon_0$ , в котором введена система координат  $Oxyz$ , рассматривается полупространство  $D_0(-\infty < x, y < \infty, z > 0)$ . В нем размещена электродинамическая система, состоящая из объектов (рис. 1):

$D_1 = \{x^2 + y^2 < r_0^2, 0 < z < h\}$  – заземленный металлический стержень высоты  $h$  и радиуса  $r_0$ ;

$D_2 = \{(x - x_2)^2 + y^2 + (z - z_2)^2 < R^2\}$  – заземленный металлический шар радиуса  $R$  с координатами центра  $(x_2, y_2 = 0, z_2)$ ;  $R < x_2 - r_0, R < z_2$ ;

$D_3 = \{x = 0, y = 0, z = z_0\}$  – точечная область, в которой размещен электрический заряд  $q_0$ , Кл.

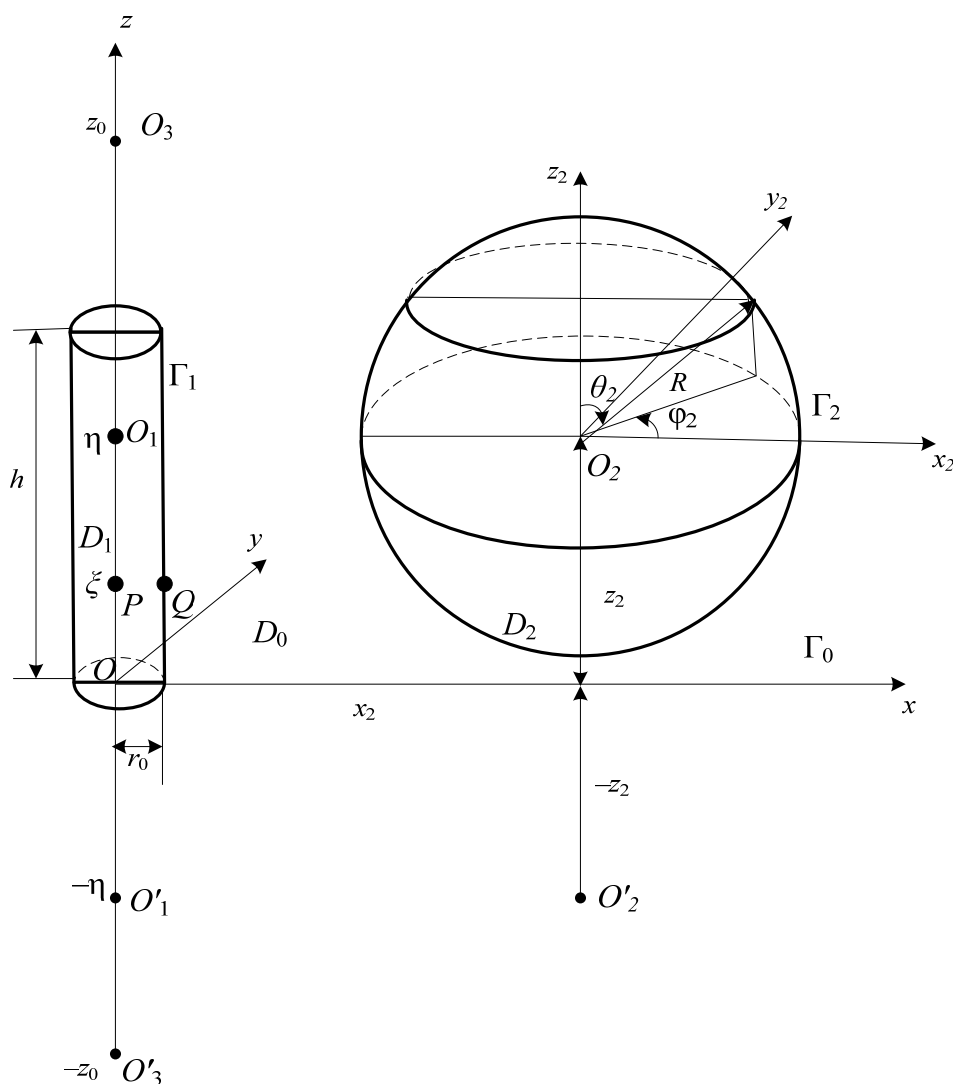


Рис. 1. Электродинамическая система молниезащиты: молниеотвод  $D_1$  и сферический экран  $\Gamma_2$  над поверхностью Земли  $Oxy$  ( $\Gamma_0$ )

Вводятся обозначения: область  $D = D_0 \setminus (\overline{D_1} \cup \overline{D_2})$ ;  $\Gamma_1$  – боковая поверхность стержня  $D_1$ ;  $\Gamma_2$  – поверхность шара  $D_2$ ;  $\Gamma_0$  ( $z = 0$ ) – поверхность Земли, которую допустимо принять плоской. Электростатическое поле в области  $D$  описывается потенциальными функциями:  $u_1$  – потенциал поля индуцированных на стержне зарядов;  $u_2$  –

потенциал поля индуцированных на шаре зарядов;  $u_0$  – потенциал поля точечного заряда (потенциал источника поля),  $u_3$  – потенциал поля индуцированных на поверхности Земли зарядов;  $u = u_1 + u_2 + u_0 + u_3$ ;  $u = u_0 + u_{\text{инд}}$  – суммарный потенциал поля в области  $D$ ;  $u_{\text{инд}} = u_1 + u_2 + u_3$  – суммарный потенциал индуцированных зарядов.

Для поля в области  $D$  формулируется краевая задача. Требуется определить распределение потенциала  $u$  в области  $D$ . Для потенциалов справедливо уравнение Лапласа:

$$\Delta u_{\text{инд}} = 0 \text{ в } D. \quad (1)$$

Граничные условия

$$u \Big|_{\Gamma_0} = 0; \quad (2)$$

$$u \Big|_{\Gamma_1} = 0; \quad (3)$$

$$u \Big|_{\Gamma_2} = 0. \quad (4)$$

Условия на бесконечности

$$u_1(M) \rightarrow 0, \quad u_2(M) \rightarrow 0, \quad u_0(M) \rightarrow 0, \quad u_3(M) \rightarrow 0 \quad \text{при } M \rightarrow \infty, \quad (5)$$

где  $M(x, y, z) \in D$ .

На основании решения краевой задачи (1)–(5) требуется вычислить распределение электрических зарядов на поверхностях  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ .

#### Вывод расчетных соотношений, интегральных и алгебраических уравнений

Для решения краевой задачи (1)–(5) искомые потенциалы представляются в виде:

$$u_1(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^h \frac{\tau(\eta)}{r_1} d\eta, \quad (6)$$

где  $\tau(\eta)$  – искомая линейная плотность электрических зарядов стержня, Кл/м;  $r_1 = R_{MO_1} = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - \eta)^2}$  – расстояние между точкой на оси стержня  $O_1(0, 0, \eta)$  и точкой  $M(x, y, z)$  в полупространстве  $D_0$ , вычисленное в глобальной системе координат.

$$u_2(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{Z_{mn} R^{n+1}}{r_2^{n+1}} Y_n^m(\theta_2, \varphi_2), \quad (7)$$

где  $Y_n^m(\theta_2, \varphi_2) = P_n^m(\cos \theta_2) \exp(j\varphi_2)$ ;  $(r_2, \theta_2, \varphi_2)$  – сферические координаты точки  $M$ ;  $P_n^m$  – присоединенная функция Лежандра [4].

$r_2 = R_{MO_2} = \sqrt{(x - x_2)^2 + y^2 + (z - z_2)^2}$  – расстояние между центром шара  $O_2(x_2, 0, z_2)$  и точкой  $M$  в пространстве. Таким образом, потенциал шара представлен в системе сферических координат  $(r_2, \theta_2, \varphi_2)$ , связанных с центром шара  $O_2$ .

$$u_0(M) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 r_3^2}, \quad (8)$$

где  $r_3 = R_{MO_3} = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_0)^2}$  – расстояние между точкой пространства и точкой заряда  $O_3(0, 0, z_3)$ , вычисленное в глобальной системе координат.

Для удовлетворения граничному условию (2) вводятся зеркальные изображения точек  $O_1, O_2, O_3$ :  $O'_1(0, 0, -\eta)$ ,  $O'_2(x_2, 0, -z_2)$ ,  $O'_3(0, 0, -z_0)$ . На основании (6)–(8) отраженные потенциалы

$$u'_1(M) = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^h \frac{\tau(\eta)}{r_1'} d\eta, \quad (9)$$

где  $r_1' = R_{MO'_1} = \sqrt{x^2 + y^2 + (z + \eta)^2}$ .

$$u'_2(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (-1)^{n+m+1} \frac{Z_{mn} R^{n+1}}{(r_2')^{n+1}} Y_n^m(\theta_2', \phi_2'), \quad (10)$$

где  $r_2' = R_{MO'_2} = \sqrt{(x - x_2)^2 + y^2 + (z + z_2)^2}$  – расстояние между зеркальным изображением  $O'_2(x_2, 0, -z_2)$  и точкой  $M$  в пространстве;  $(r_2', \theta_2', \phi_2')$  – сферические координаты с началом в точке  $O'_2$ .

$$u'_0(M) = \frac{-q_0}{4\pi\epsilon_0 r_3'}, \quad (11)$$

где  $r_3' = R_{MO'_3} = \sqrt{x^2 + y^2 + (z + z_0)^2}$  – расстояние между точкой пространства  $M$  и зеркальным изображением  $O'_3(0, 0, -z_0)$ .

Потенциалы (9)–(11) определены таким образом, что граничное условие (2) выполнено.

Для удовлетворения граничному условию (3) считается, что функции  $u_2$  и  $u'_2$  мало меняются по сечению стержня. Тогда значения этих функций одинаковы на поверхности и на оси стержня. Граничное условие (3) записывается в виде:

$$u_1(Q) + u'_1(Q) + u_0(Q) + u'_0(Q) + u_2(P) + u'_2(P) = 0, \quad (12)$$

где точка  $Q(r_0, 0, \xi) \in \Gamma_1$ , точка  $P(0, 0, \xi)$  лежит на оси стержня и  $0 \leq \xi \leq h$ .

Потенциал (8) в точке  $Q$  выражается следующим образом:

$$u_0(Q) = k_0 \frac{q_0}{S_0(\xi)}, \quad (13)$$

где  $S_0(\xi) = R_{QO_3} = \sqrt{r_0^2 + (\xi - z_0)^2}$ ;  $k_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ .

Потенциал (11) в точке  $Q$  имеет вид:

$$u'_0(Q) = k_0 \frac{q_0}{S'_0(\xi)}, \quad (14)$$

где  $S'_0(\xi) = R_{QO'_3} = \sqrt{r_0^2 + (\xi + z_0)^2}$ .

Потенциалы (6) и (9) в точке  $Q$  выражаются так:

$$u_1(Q) = k_0 \int_0^h \frac{\tau(\eta)}{S_1(\xi - \eta)} d\eta; \quad (15)$$

$$u'_1(Q) = -k_0 \int_0^h \frac{\tau(\eta)}{S_1(\xi + \eta)} d\eta, \quad (16)$$

где  $S_1(x) = \sqrt{r_0^2 + x^2}$ .

При рассмотрении вектора  $\overrightarrow{O_2P}(-x_2, 0, \xi - z_2)$  получается, что  $r_2 = \sqrt{x_2^2 + (\xi - z_2)^2} = L(\xi)$ ,  $\cos \theta_2 = \frac{\xi - z_2}{L(\xi)}$ ,  $\varphi_2 = \pi$ ,  $\exp(jm\varphi_2) = (-1)^m$ ,  $r'_2 = \sqrt{x_2^2 + (\xi + z_2)^2} = L'(\xi)$ . Тогда потенциалы (7) и (10) в точке  $P$ :

$$u_2(P) = k_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n Z_{mn} G_{mn}(\xi); \quad (17)$$

$$u'_2(P) = k_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n Z_{mn} G'_{mn}(\xi), \quad (18)$$

где  $G_{mn}(\xi) = \frac{(-1)^m (R)^{n+1}}{(L(\xi))^{n+1}} P_n^m \left( \frac{\xi - z_2}{L(\xi)} \right)$ ,  $G'_{mn}(\xi) = \frac{(-1)^{n+1} (R)^{n+1}}{(L'(\xi))^{n+1}} P_n^m \left( \frac{\xi + z_2}{L'(\xi)} \right)$ .

Подстановка (13)–(18) в (12) дает:

$$\int_0^h K(\xi, \eta) \tau(\eta) d\eta + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n Z_{mn} \overline{G}_{mn}(\xi) - F(\xi) = 0, \quad (19)$$

где  $K(\xi, \eta) = \frac{1}{S_1(\xi - \eta)} - \frac{1}{S_1(\xi + \eta)}$ ;  $\overline{G}_{mn}(\xi) = G_{mn}(\xi) + G'_{mn}(\xi)$ ;  $F(\xi) = q_0 \left( \frac{1}{S_0(\xi)} - \frac{1}{S'_0(\xi)} \right)$ .

Граничное условие (4) выражается через потенциальные функции задачи следующим образом:

$$u_0 + u'_0 + u_1 + u'_1 + u_2 + u'_2 \Big|_{r_2 = R} = 0 \quad (20)$$

Чтобы удовлетворить граничному условию (20) необходимо потенциалы (6), (8)–(11) разложить по сферическим функциям в сферической системе координат, связанной с центром шара  $O_2$ . Для преобразования (6), (8), (9), (11) применяется теорема сложения, связывающая гармонические функции в двух системах сферических координат, центры которых сдвинуты произвольным образом в пространстве [3, с. 90]. Для преобразования (10) – теорема сложения [3, с. 91]. Тогда:

$$u_0 = k_0 q_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n b_{mn} r_2^n Y_n^m(\theta_2, \varphi_2), \quad u'_0 = -k_0 q_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n b'_{mn} r_2^n Y_n^m(\theta_2, \varphi_2);$$

$$u_1(M) = k_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \int_0^h \tau(\eta) a_{mn}(\eta) d\eta r_2^n Y_n^m(\theta_2, \varphi_2);$$

$$u_1'(M) = -k_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \int_0^h \tau(\eta) a'_{mn}(\eta) d\eta r_2^n Y_n^m(\theta_2, \varphi_2),$$

$$\text{где } a_{mn}(\eta) = \frac{(-1)^{n+m}}{\left(\sqrt{x_2^2 + (z_2 - \eta)^2}\right)^{n+1}} P_n^{-m} \left( \frac{z_2 - \eta}{\left(\sqrt{x_2^2 + (z_2 - \eta)^2}\right)^{n+1}} \right);$$

$$a'_{mn}(\eta) = \frac{(-1)^{n+m}}{\left(\sqrt{x_2^2 + (z_2 + \eta)^2}\right)^{n+1}} P_n^{-m} \left( \frac{z_2 + \eta}{\left(\sqrt{x_2^2 + (z_2 + \eta)^2}\right)^{n+1}} \right);$$

$$b_{mn}(\eta) = \frac{(-1)^{n+m}}{\left(\sqrt{x_2^2 + (z_2 - z_0)^2}\right)^{n+1}} P_n^{-m} \left( \frac{z_2 - z_0}{\left(\sqrt{x_2^2 + (z_2 - z_0)^2}\right)^{n+1}} \right);$$

$$b'_{mn}(\eta) = \frac{(-1)^{n+m}}{\left(\sqrt{x_2^2 + (z_2 + z_0)^2}\right)^{n+1}} P_n^{-m} \left( \frac{z_2 + z_0}{\left(\sqrt{x_2^2 + (z_2 + z_0)^2}\right)^{n+1}} \right).$$

Разложение потенциала (10) по сферическим функциям имеет вид:

$$u_2' = -k_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (-1)^{s+m} L_{mn} r_2^n Y_n^m(\theta_2, \varphi_2),$$

$$\text{где } L_{mn} = \sum_{s=|m|}^{\infty} Z_{ms} G_{ms}^n \quad G_{ms}^n = \frac{(-1)^{s+n} (n+s)!}{(s-m)! (n+m)!} \frac{R^{s+1}}{(2z_2)^{n+s+1}}.$$

После подстановки преобразованных потенциалов в (20) и приравнивания коэффициентов при сферических гармониках получается система алгебраических уравнений:

$$Z_{mn} = R^n \left( \sum_{s=|m|}^{\infty} Z_{ms} G_{ms}^n + q_0 (b_{mn} - b'_{mn}) + \int_0^h \tau(\eta) (a_{mn}(\eta) - a'_{mn}(\eta)) d\eta \right), \quad (21)$$

где  $n = 0, 1, 2, \dots$ ;  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$ .

Для поверхностной плотности заряда на поверхности сферы  $\Gamma_2$  с учетом (18) справедлива формула

$$\sigma_2(\theta_2, \varphi_2) = -\varepsilon_0 \left. \frac{\partial u}{\partial r_2} \right|_{r_2 = R}. \quad (22)$$

Потенциал в окрестности области  $D_2$  определяется на основании (7) и преобразованных потенциалов (6), (8)–(11):

$$u(r_2, \theta_2, \varphi_2) = k_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[ Z_{mn} \left( \frac{R}{r_2} \right)^{n+1} - r_2^n \left( L_{mn} + q_0 (b_{mn} - b'_{mn}) + \int_0^h \tau(\eta) (a_{mn}(\eta) - a'_{mn}(\eta)) d\eta \right) \right] Y_n^m.$$

После подстановки потенциала в (22), дифференцирования и последующего интегрирования по поверхности сферы получается, что индуцированный электрический заряд сферы  $q_2 = RZ_{00}$ . Индуцированный заряд на молниеотводе очевидно

$$q_1 = \int_0^h \tau(\eta) d\eta.$$

### Метод последовательных приближений

Система уравнений (19) и (21) является совокупностью интегрального уравнения первого рода и бесконечной системы алгебраических уравнений с неизвестной функцией  $\tau(\eta)$  и с неизвестными коэффициентами  $Z_{mn}$ ,  $n = 0, 1, 2 \dots$ . Для ее решения применим метод последовательных приближений. Для численного решения интегральное уравнение первого рода (19) сводится к системе линейных алгебраических уравнений. Тогда метод последовательных приближений можно представить в следующей форме

$$Z_{mn}^{(k)} = R^n \sum_{s=|m|}^{N_0} Z_{ms}^{(k)} G_{ms}^n + R^n \left( q_0 (b_{mn} - b'_{mn}) + \int_0^h \tau^{(k)}(\eta) (a_{mn}(\eta) - a'_{mn}(\eta)) d\eta \right),$$

$$\sum_{i=1}^N \tau^{(k+1)}(\eta_i) \int_{\eta_{i-1}}^{\eta_i} K(\xi_j, \eta) d\eta = - \sum_{n=0}^{N_0} \sum_{m=-n}^n Z_{mn}^{(k)} \bar{G}_{mn}(\xi_j) + F(\xi_j), \quad (23)$$

$$n = 0, 1, 2 \dots N_0; m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm n,$$

где  $k$  – номер итерации;  $i, j$  – номера дискретизации соответствующих координат,  $N_0$  – число удерживаемых в рядах слагаемых,  $I = 1, 2, \dots N$ ;  $j = 1, 2, \dots N$ .

Нулевое приближение  $\tau^{(0)} = 0$ ,  $Z_{mn}^{(0)} = 0$ .

### Вычислительный эксперимент

Решение интегрального уравнения первого рода типа (19) и соответствующей системы линейных алгебраических уравнений из (23) в [7] предлагается производить наиболее простым методом саморегуляризации. При этом точки наблюдения задаются в методе саморегуляризации по соотношению  $\xi_k = \frac{\eta_{k-1} + \eta_k}{2}$ , что обеспечивает сходимость решения.

Размеры объектов задачи приняты по данным литературных источников [1], [6]:  $h = 30$  м,  $r_0 = 0,01$  м,  $R = 1$  м,  $x_2 = 5$  м,  $z_2 = 4$  м. Точечный заряд принят равным заряду положительно заряженного центра облака, а именно  $q_0 = 24$  Кл; высота его над поверхностью Земли  $z_0 = 6000$  м [5]. Для оценки числа слагаемых в рядах, входящих в состав системы (23), использованы неравенства:

$$\left( \frac{R}{l_1} \right)^N < 10^{-5}, \quad \left( \frac{R}{l_2} \right)^N < 10^{-5}, \quad \left( \frac{R}{z_2} \right)^N < 10^{-5}, \quad (24)$$

где  $l_1$  – расстояние между центром шара и точечным зарядом, м;  $l_2$  – расстояние между центром шара и стержнем, м. Оценка по соотношению (24) показывает, что для получения корректного решения достаточно удерживать восемь слагаемых в первых суммах каждого ряда ( $N_0 = 8$ ). Промежуток интегрирования разделялся на 80 участков ( $N = 80$ ).

Вычисление присоединенных функций Лежандра осуществлялось по преобразованной с помощью биннома Ньютона формуле, которая справедлива для положительных и отрицательных  $m$  [8]:

$$P_n^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^n n!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} (x^2-1)^n. \quad (25)$$

Расчет коэффициентов и решение системы (23) осуществлялось при помощи программ компьютерной математики. На рис. 2 и 3 показано изменение значений индуцированных зарядов стержня и шара в зависимости от числа итераций  $k$ .

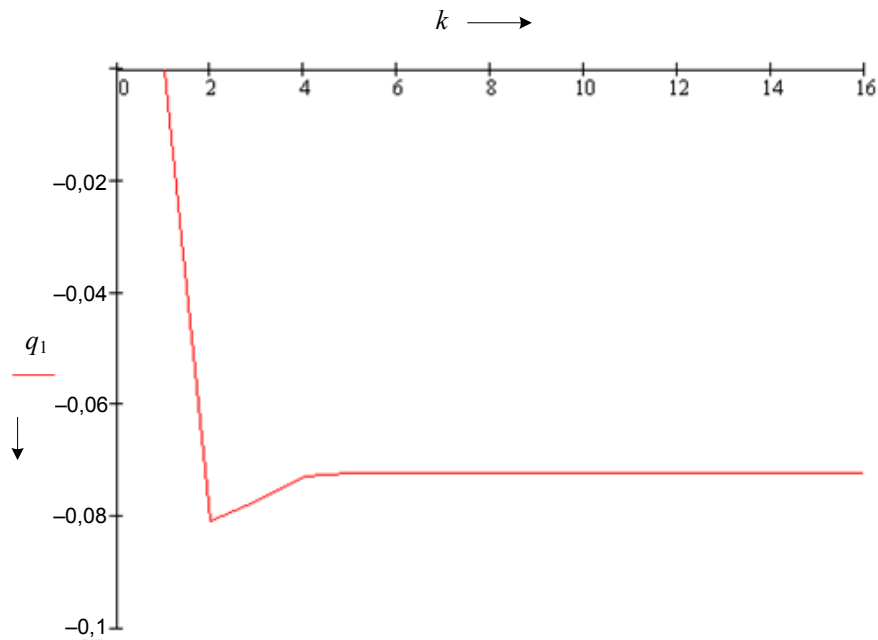


Рис. 2. Изменение заряда стержня в процессе итераций

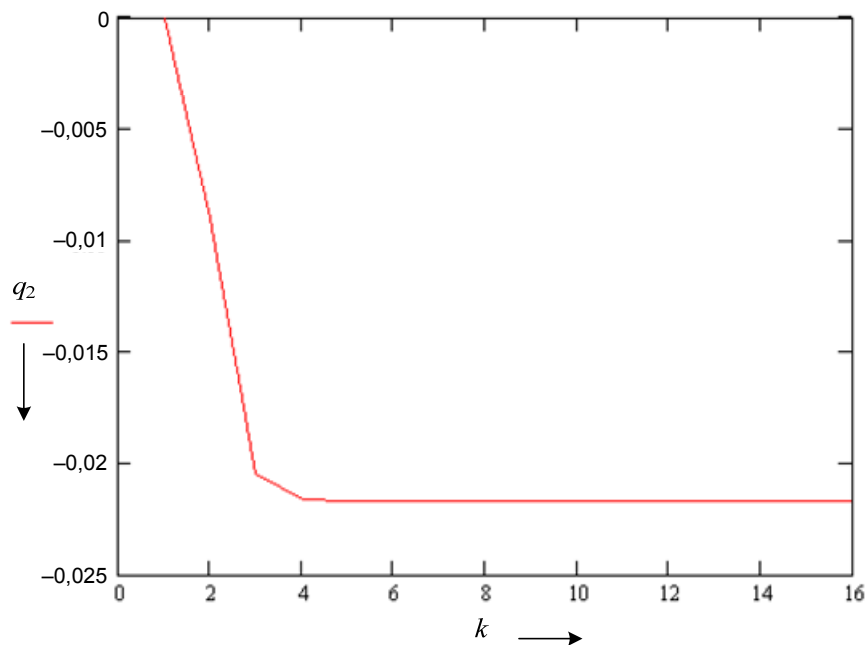


Рис. 3. Изменение заряда шара в процессе итераций



Анализ графиков показывает, что при выполнении итераций результат расчета заряда устанавливается на фиксированном значении. Графики процесса итераций не имеют значительных ленгмюровских колебаний, следовательно, саморегуляризация осуществляется. Индуцированные заряды имеют отрицательный знак, что соответствует физическим представлениям. Заряд на стержне-молниеотводе ( $q_1 = -0,07$  Кл) больше, чем на защищаемом объекте-шаре ( $q_2 = -0,022$  Кл). Следовательно, метод последовательных приближений позволяет получить решение поставленной в статье задачи.

### Заключение

Результаты вычислительного эксперимента позволяют сделать вывод, что расчет электростатической индукции в модельной системе молниезащиты может быть выполнен путем сведения краевой задачи электростатики к совокупности интегрального уравнения первого рода и бесконечной системы алгебраических уравнений. Эта совокупность может быть решена методом последовательных приближений и методом саморегуляризации. Метод теорем сложения дает возможность получить расчетные уравнения для системы, включающей граничные поверхности правильной геометрической формы.

С помощью рассмотренной модельной системы можно решать актуальные практические задачи моделирования процессов в устройствах молниезащиты энергетических установок на стадии лидерного разряда молнии, вычислять величины индуцированных зарядов на элементах системы. Это является исходными данными для оценки эффективности молниезащиты.

Таким образом, допустимо считать, что метод теорем сложения может найти широкое применение в проектировании объектов электроэнергетики и техники высоких напряжений.

### Литература

1. Александров, Г. И. Молния и молниезащита / Г. И. Александров. – М. : Наука, 2008. – 274 с.
2. Базелян, Э. М. Физика молнии и молниезащиты / Э. М. Базелян, Ю. П. Райзер. – М. : Физматлит, 2001. – 320 с.
3. Ерофеев, В. Т. Теоремы сложения / В. Т. Ерофеев. – Минск : Наука и техника, 1989. – 254 с.
4. Ерофеев, В. Т. Аналитическое моделирование в электродинамике / В. Т. Ерофеев, И. С. Козловская. – М. : ЛИБРОКОМ, 2014. – 304 с.
5. Drabkin, M. M. Interaction between lightning channel and CTS / M. M. Drabkin // 1999 IEEE international symposium on Electromagnetic compatibility / IEEE. – N. Y. : IEEE Publishing Service, 1999. – P. 643–645.
6. Александров, Г. И. Изоляция электрических аппаратов высокого напряжения / Г. И. Александров, В. И. Иванов. – М. : Энергоатомиздат, 1994. – 207 с.
7. Дмитриев, В. И. Интегральные уравнения в краевых задачах электродинамики / В. И. Дмитриев, Е. В. Захаров. – М. : Изд-во МГУ, 1987. – 165 с.
8. Лебедев, Н. Н. Специальные функции и их приложения / Н. Н. Лебедев. – М. ; Л. : Гос изд-во физ-мат. лит., 1963. – 358 с.

Получено 26.06.2017