УДК 536.2.01

Шабловский О.Н.
Shablovsky O N

Стоячие волны и вынужденные тепловые колебания в локально-неравновесной среде с источником энергии

Standing waves and forced heat oscillations in a locally non-equilibrium medium with an energy source

Получено новое точное решение уравнений теплопереноса с учетом процессов релаксации и ретардации. Изучены стоячие волны и вынужденные колебания температуры в закрытом тепловом резонаторе.

A new exact solution for heat transfer equations is btained. Processes of relaxation and retardation ar taken into account. Standing waves and forced oscillations of temperature in a close-end thermal resonator are studied.

Ключевые слова: локально-неравновесная среда, тепловые колебания, стоячие тепловые волны, закрытый резонатор.

Keywords: locally non-equilibrium medium, heat oscillations, standing heat waves, close – end resonator.

Введение

Локально – неравновесная модель переноса тепла в неподвижной среде состоит из уравнения для теплового потока и уравнения баланса энергии [1]:

$$\boldsymbol{q} + \ _1\frac{\boldsymbol{q}}{\boldsymbol{t}} \qquad \text{grad}\, T \qquad _2\frac{}{t}(\text{grad}\, T), \tag{1}$$

$$c\frac{T}{t} + \text{div}\, \boldsymbol{q} = q \ , \tag{2}$$

где T – температура; $\boldsymbol{q}$ - вектор удельного теплового потока; c - объемная теплоемкость; - коэффициент теплопроводности; $_1$ - время релаксации теплового потока; $_2$ - время ретардации (время релаксации градиента температуры); q - объемный источник энергии; t - время. Уравнение (1) известно в литературе как уравнение двойной фазы с задержкой (dual - phase - lag equation). Оно является математическим аналогом реологического уравнения состояния вязкоупругой жидкости Олдройда. При $_2 \quad 0$ формула (1) определяет модель Максвелла релаксационного теплопереноса. Современное состояние теории локально-неравновесного теплопереноса в нелинейных средах и подробная библиография этой проблемы даны в [2].

Считаем, что объемный источник энергии линейно зависит от температуры:

$$q \ = q^1 (T \quad T_0); \ q^1, \ T_0 \quad \text{const}. \tag{3}$$

Модель (3) имеет широкую область физических приложений: вариант $q^1 > 0$ применялся в [3] при изучении взрывной кристаллизации аморфных пленок, напыленных на подложку; вариант $q^1 < 0$ типичен при исследовании теплопереноса в биологических тканях [4]. Здесь мы полагаем $, c, \ _1, \ _2 \quad \text{const}$ и рассматриваем одномерные тепловые поля, для которых $T = T(x, \ t)$, $q = q(x, \ t)$, где x - декартова координата.

Цель исследования: 1) построить новое точное решение уравнений теплопереноса; 2) указать условия существования стоячих тепловых волн; 3) изучить вынужденные колебания температуры в слое материала, обладающего «тепловой памятью». Прикладные аспекты данной работы связаны с процессами, для которых следует учитывать релаксацию теплового потока: воздействие термических колебаний на биологическую ткань ([4], $_1$~ 20 с); вынужденные колебания теплового резонатора, материалом которого служит высокотемпературный сверхпроводник ([5], $_1$~ 500 с).

Точное решение. В одномерном случае (плоская симметрия) уравнения (1) - (3) имеют вид:

$$q + \ _1\frac{q}{t} \qquad \frac{T}{x} \qquad _2\frac{^2T}{x\ t}, \tag{4}$$

$$c\frac{T}{t} + \frac{q}{x} = q^1 (T \quad T_0).$$

Решение строим в форме, содержащей незатухающие колебания по t:

$$T \quad T_0 = B(x)\sin(k_1 t) + D(x)\cos(k_1 t),$$

$$t \quad 0, \ x \quad 0.$$

Функции $B(x)$, $D(x)$ удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$d^2B/dx^2 = HB + h_{12}D\,,$$

$$d^2D/dx^2 = h_{21}B + HD\,;$$

$$H = \tilde{h}_{11}/[\quad(1+k_1^2\ \ {}_2^2)],$$

$$h_{12} = \quad h_{21} = \tilde{h}_{12}/[\quad(1+k_1^2\ \ {}_2^2)]\,,$$

$$\tilde{h}_{11} = ck_1^2(\ {}_2\quad\ {}_1)\quad q^1 1(+\quad {}_1\ {}_2k_1^2)\,,$$

$$\tilde{h}_{12} = \quad ck_1 1(+\quad {}_1\ {}_2k_1^2)\quad k_1 q^1(\ {}_2\quad\ {}_1)\,.$$

Взяв $B(x) = B_1\exp(rx)$, $D(x) = D_1\exp(rx)$; B_1, D_1 $\quad$ const, получаем характеристическое уравнение

$$^2\quad 2H\quad + (H^2 + h_0^2) = 0\,,$$

$$= r^2\,,\ h_0^2 = \quad h_{12}h_{21}\,.$$

Корни этого уравнения такие:

$$_1 = H + i\sqrt{h_0^2}\,,$$

$$_2 = H\quad i\sqrt{h_0^2}\,.$$

Для полуплоскости $x\quad 0$ физический смысл имеют два характеристических корня: $r_1 = a\quad ib$, $r_2 = a + ib$, где $a < 0$, $b > 0$, и выполнены соотношения $a^2\quad b^2 = H$, $4a^2b^2 = h_0^2$. Следовательно, $4a^4\quad 4a^2H\quad h_0^2 = 0$. Отсюда находим

$$a = \quad\left[\frac{1}{2}\left(H + \sqrt{H^2 + h_0^2}\right)\right]^{1/2},$$

$$b = (h_0^2/4a^2)^{1/2}\,. \qquad (5)$$

Для $x\quad 0$ структура решения аналогичная, нужно только применять корни $r_3 = \quad a + ib$, $r_4 = \quad a\quad ib$. Далее работаем в правой полуплоскости $x\quad 0$. После стандартной процедуры выделения действительной и мнимой частей решения находим:

$$B(x) = H_1\exp(ax)\sin(bx)\,,$$

$$D(x) = H_1\exp(ax)\cos(bx)\,.$$

Здесь H_1 - произвольная постоянная; еще одна произвольная константа, входящая в это решение (запись опущена), не является существенной, поэтому приняли ее равной нулю. Физический смысл имеет случай $2ab/h_{21} = \quad 1$, см. (5), для которого

$$q^1(\ {}_1\quad\ {}_2) < d(+\quad {}_1\ {}_2k_1^2)\,,$$

$$0\quad\ {}_2 <\ {}_1\,.$$

Это ограничение выполнено при всех $q^1\quad 0$, а также для не слишком больших положительных значений $q^1 = dq\quad/dT$. Таким образом, температура среды определяется выражением

$$T\quad T_0 = H_1\exp(ax)\cos(bx\quad k_1t)\,. \qquad (6)$$

Данное решение удовлетворяет граничным условиям:

$$x = 0\,,$$

$$T\quad T_0 = H_1\cos(k_1t)\,;$$

$$x\qquad ,\ T\quad T_0\,,$$

где k_1 - частота возбуждающих колебаний теплового поля. В математическом отношении (6) является обобщением известного в теории теплопроводности решения параболической задачи без источника [$_1 = 0$, $_2 = 0$, $q^1 = 0$], см. [6, гл. 3]. Действительно, для этого частного случая из (5) получаем $H = 0$, $a^2 = b^2$, $a^4 = c^2k_1^2/4(\quad ^2)$, т.е. $a^2 \sim |k_1|$; такое решение определяет процесс теплопроводности (модель Фурье) в моменты времени, удаленные от начального и не содержит информацию о начальных условиях.

В структуре формулы (6) содержится аргумент $= bx\quad k_1t$ типа бегущей волны. При каждом фиксированном $\quad$ на волне $x = (\quad + k_1t)/b\quad 0$ происходит затухание: $T\quad T_0 = H_1\exp(ax\quad)\cos\quad$.

Тепловой поток вычисляем по формуле

$$q(x,t) = \quad\exp(\quad t/\ {}_1)\int_0^t \exp(t/\ {}_1)\left[\quad\frac{T}{x} + \right.$$

$$\left. +\qquad {}_2\frac{^2T}{x\ t}\right]dt\,,$$

которая следует из (4). Здесь для определенности принято $q(x,\ t = 0) = 0$; подынтегральное выражение подсчитывается на основе (6). В установившемся $(t \quad)$ режиме имеем:

$$q \ (x,t) = \frac{H_1 \exp(ax)}{(\ ^2 + k_1^2)} \Big[U_1 \sin(k_1 \ t) + + U_2 \cos(k_1 \ t) \Big], \quad (7)$$

$$U_1 = \cos(bx) D_{11} \quad \sin(bx) D_{12},$$

$$U_2 = \cos(bx) D_{21} \quad \sin(bx) D_{22},$$

$$D_{11} = k_1 a + (b / \ ) = D_{22},$$

$$D_{12} = k_1 b \quad (\ / \ ) = \quad D_{21}.$$

Формула (7) записана при $_2 = 0$, $_1 = \quad > 0$. Далее будем рассматривать именно этот вариант с одним временем релаксации. Стабилизировавшийся во времени тепловой поток (7) удовлетворяет граничным условиям:

$$x = 0, \ q \quad = q \ (0, \ t);$$

$$x \qquad , \ q \qquad 0.$$

Здесь $q \ (x = 0, \ t)$ - периодическая функция, обладающая частотой k_1.

Стоячие волны. Произвольная константа k_1 входит в формулы расчета $H, \ h_{12}^2, \ a, \ b$ посредством k_1^2, поэтому можем записать еще одно решение, сделав замену $k_1 \quad (\ k_1)$ в (6):

$$T \quad T_0 = H_2 \exp(ax) \cos(bx + k_1 t), \ H_2 \quad \text{const}. \quad (8)$$

Сумма двух линейно независимых решений (6) и (8) дает суперпозицию встречных волн с разными амплитудами:

$$T \quad T_0 = \exp(ax) \big[H_1 \cos(bx \quad k_1 t) + + H_2 \cos(bx + k_1 t) \big]. \quad (9)$$

Здесь по-прежнему $k_1 > 0$. Формуле (8) соответствует тепловой поток, который получается из (7) после замены $k_1 \quad (\ k_1)$. Итоговая запись выражения $q \ (x, \ t)$ [эта формула здесь не приводится] основана на решении (9) и есть результат суммирования двух формул вида (7), взятых при k_1 и $(\ k_1)$.

Если $H_1 = H_2$, то (9) есть стоячая волна

$$T \quad T_0 = 2 H_1 \exp(ax) \cos(bx) \cos(k_1 t). \quad (10)$$

Узлы $T = T_0$ имеют координаты $x = b^{\ 1} [(\ 2) + 2 \quad n_0]$, $n_0 = 0, 1, 2, \ldots$; в этих точках $q \ (T_0) = 0$. Стоячей волне температуры соответствует стабилизировавшийся тепловой поток $q \ (x, \ t)$, который представляет собой суперпозицию двух пар встречных волн

$$\sin(bx \pm k_1 \ t), \ \cos(bx \pm k_1 \ t). \quad (11)$$

В конечном счете это означает, что в режиме стоячей волны (10) существует сдвиг $_q$ фазы колебаний температуры $(bx \pm k_1 \ t)$ и теплового потока $(bx \pm k_1 \ t + \ _q)$; подробная запись $_q$ не приводится.

Остается отметить, что по отношению к исходному решению (6), для которого температура содержит только одну волну $= (bx \quad k_1 \ t)$, выражение (7) содержит в своей структуре уже две встречные волны вида (11), которые образуют стоячую волну теплового потока.

Вынужденные колебания. Рассмотрим конечный слой материала на интервале $x \quad [0, \ h]$. Граничные условия соответствуют установившемуся во времени $(t \quad)$ режиму колебаний закрытого теплового резонатора [2]. А именно: на левой границе периодический во времени тепловой поток $q \ (x = 0, \ t)$ колеблется около стационарного значения $q_s(x = 0) = s_1 h > 0$; правая граница $x = h$ теплоизолирована, $q \ (x = h, \ t) = 0$. Градиент стационарного теплового потока обусловлен объемным стоком энергии $q^{(s)} < 0$:

$$q^{(s)} = dq_s(x)/dx \quad \text{const}, \ x \quad \big[0, \ h\big].$$

Стационарное тепловое поле определяется следующими выражениями:

$$q_s(x) \qquad dT_s(x)/dx = s_1(h \quad x), \qquad q = \quad s_1 < 0, \quad (12)$$

$$T_s(x) = T_0 \quad x(s_1 h / \ ) + x^2 (s_1 \ 2 \quad), \qquad T_s(x = 0) = T_0. \quad (13)$$

Производство энтропии $_s = \ _e^{(s)} + \ _i^{(s)}$ вычисляем по известным формулам [1]:

$$_e^{(s)} = q^{(s)} / T_s,$$

$$_i^{(s)} = q_s^2 / (\ T_s^2),$$

где $^{(s)}_{e}$ - производство энтропии за счет энергообмена с внешней средой; $^{(s)}_{i}$ - производство энтропии за счет внутренних необратимых процессов. В результате получаем

$$_s(x=0)=\frac{1}{T_0^2}\left(\frac{s_1^2h^2}{\quad} \quad s_1T_0\right);$$

$$s_1=|q \ |.$$

Значение q находим из условия экстремума производства энтропии:

$$_s(x=0)/ \ s_1=0.$$

Тип этого экстремума – минимум, и он достигается при

$$q= \quad T_0/(2h^2)<0.$$

Решение задачи представим как суперпозицию двух тепловых полей: стационарного (12), (13) и нестационарного (6), (7). Нестационарное поле есть результат возбуждающего воздействия поверхностного источника энергии. Решение (6), (7) применяем в двух вариантах записи: вариант - 1 (он далее отмечен верхним индексом l) полностью соответствует формулам (6), (7); вариант - 2 (он отмечен верхним индексом r) получается преобразованием исходного решения, полученного для аргументов $x, \ t$, к переменным $x, \ t$. Выполняя такое преобразование, надо в (4) заменить x на $(\ x)$ и поставить «минус» перед q. Цель замены $x \quad (\ x)$, $q \quad (\ q)$ в том, чтобы получить два линейно независимых решения, которые в слое $x \quad [0, \ h]$ меняются по отношению к координате x в противоположных направлениях. А именно: для варианта - 1 $[\exp(ax)]/ \ x<0$; для варианта - 2 $[\exp(\ ax)]/ \ x>0$. Такая структура решения дает возможность обеспечить выполнение условия теплоизоляции при $x=h$.

Тепловой поток определяется выражением

$$q \ (x, \ t)=q_s(x)+q^{(l)}(x, \ t) \quad q^{(r)}(x, \ t),$$
$$x \quad [0, \ h]. \tag{14}$$

Из (12), (14) следует, что условие теплоизоляции $q \ (x=h, \ t)=0$ будет выполнено, если

$$q^{(l)}(x=h, \ t)=q^{(r)}(x=h, \ t).$$

Значит, нужно взять такие связи между параметрами задачи:

$$bh=(\ /2)+ \ n_0, \tag{15}$$

$$H_1^{(l)}\exp(ah)=H_1^{(r)}\exp(\ ah), \tag{16}$$

где $n_0=0, \ 1, \ 2,...$ - целое число. Таким образом, поверхностный источник энергии на входе в резонатор имеет вид

$$q \ (x=0, \ t)=s_1h$$
$$\frac{(H_1^{(l)}+H_1^{(r)})D_0\sin(k_1t+ \ _1)}{(\ ^2+k_1^2)},$$

$$D_0=(D_{11}^2+D_{21}^2)^{1/2},$$

$$_1=\mathrm{arctg}(D_{21}/D_{11}),$$

где $k_1, \ s_1, \ (H_1^{(l)}+H_1^{(r)})$ - параметры теплового потока, поглощенного левой поверхностью образца материала. Температура левой стенки резонатора равна

$$T(x=0, \ t)=T_0+(H_1^{(l)} \quad H_1^{(r)})\cos(k_1t).$$

Правая стенка резонатора имеет температуру

$$T(x=h, \ t)=T_s(x=h)+2H_1^{(l)}\exp(ah)\sin(k_1t).$$

Добротность резонатора – это отношение амплитуды колебаний температуры при $x=h$ к амплитуде колебаний при $x=0$:

$$K_T=2H_1^{(l)}\exp(ah)\big/(H_1^{(l)} \quad H_1^{(r)}).$$

Нужно отметить, что решение (14) - (18) относится только к резонатору, для которого параметры h и k_1 взаимосвязаны, см. (15). По этой причине резонансную кривую (зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты k_1 при фиксированном h) построить не удается. Вместе с тем можем оценить зависимость добротности резонатора от основных параметров задачи. С учетом (16) находим

$$K_T=2\exp(ah)/[1 \quad \exp(2ah)].$$

Отсюда ясно, что $K_T>1$, если $\exp(ah)>(\sqrt{2} \quad 1)$. Кроме того, нужно учесть, что $K_T/ \ (|ah|)<0$. Следовательно, чем меньше безразмерная толщина слоя $|ah|$, тем выше добротность резонатора. Существенно, что константы $a, \ b$ [см. (5)] несут информацию обо всех важнейших параметрах процесса: , c, , q^1, k_1. Например, если $q^1 = 0$, то

$$2a^2 = k_1 c S / \quad ,$$

$$h^2 = \quad ^2 \; S/(2k_1 c),$$

$$n_0 = 0,$$

$$S = \sqrt{\quad + \quad ^2} \qquad ,$$

где $=$ k_1 - безразмерное время релаксации. Значит, в данном классе решений при q 0 имеем вынужденные колебания резонатора с частотой тем большей, чем меньше толщина слоя h: $h/ \; k_1 < 0$. Рост параметра уменьшает относительную толщину слоя: $(|ah|)/ \quad < 0$, поэтому чем сильнее проявляется волновой механизм переноса тепла, тем больше добротность резонатора, $K_T / \quad > 0$.

Заключение

Выполнено аналитическое исследование уравнений теплопереноса в локально-неравновесной среде с источником энергии, линейно зависящим от температуры. Получено новое решение, которое определяет колебания и волны в среде, обладающей двумя временами релаксации. Данное решение является обобщением известного в математической физике решения классического уравнения теплопроводности без начальных условий. Обнаружены тепловые режимы, при которых существуют стоячие волны температуры и теплового потока. Представлено точное решение задачи о возбуждении колебаний в закрытом тепловом резонаторе. Дана оценка добротности резонатора.

Библиографический список

1. **Жоу Д., Касас - Баскос Х., Лебон Дж.** Расширенная необратимая термодинамика. Москва – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2006. 528 с.
2. **Шабловский О.Н.** Релаксационный теплоперенос в нелинейных средах. Гомель: ГГТУ им. П.О. Сухого, 2003. 382 с.
3. **Шабловский О.Н., Кроль Д.Г.** Феноменологическая оценка времени тепловой релаксации при взрывной кристаллизации аморфных пленок германия // Тепловые процессы в технике. 2010. Т. 2. № 5. С. 203-208.
4. **Ching-yu Yang.** Boundary estimation of hyperbolic bioheat conduction // Int. Journal of Heat and Mass Transfer. 2011. Vol. 54. P. 2506-2513.
5. **Шабловский О.Н., Концевой И.А.** Физическая нелинейность и вынужденные колебания теплового поля высокотемпературного сверхпроводника // Материалы. Технологии. Инструменты. 2011. Т. 16. № 1. С. 30-37.
6. **Тихонов А.Н., Самарский А.А.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 736 с.

Шабловский Олег Никифорович – д-р физ. – мат. наук, профессор, зав. кафедрой «Техническая механика» ГГТУ, г. Гомель (Республика Беларусь).
Тел.: +375 (232) 480406. E-mail: shablovsky-on@yandex.ru

Shablovsky Oleg Nikiforovich – doctor of Phys. – Math. Sciences, head of the sub-department of “Technical Mechanics” of GSTU, Gomel (Republic of Belarus).
Tel.: +375 (232) 480406. E-mail: shablovsky-on@yandex.ru