

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Гидропневмоавтоматика»

Д. Л. Стасенко, Д. В. Лаевский

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОПНЕВМОСИСТЕМ

**УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ
по одноименному курсу для студентов
специальности 1-36 01 07 «Гидропневмосистемы
мобильных и технологических машин»
дневной и заочной форм обучения**

Гомель 2017

УДК 621(075.8)
ББК 22.17я73
С77

*Рекомендовано научно-методическим советом
машиностроительного факультета ГГТУ им. П. О. Сухого
(протокол № 3 от 14.11.2016 г.)*

Рецензент: главный конструктор ОАО «Гомельское специальное конструкторско-техническое бюро гидроавтоматики» А. А. Гинзбург

Стасенко, Д. Л.

С77 Математическое моделирование гидропневмосистем : учеб.-метод.пособие по одному курсу для студентов специальности 1-36 01 07 «Гидропневмосистемы мобильных и технологических машин» днев. и заоч. форм обучения / Д. Л. Стасенко, Д. В. Лаевский. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2017. – 150 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: <https://elib.gstu.by>. – Загл. с титул. экрана.

Содержит теоретические основы изучения математического моделирования гидропневмоаппаратуры, гидропневмомашин и гидропневмосистем в целом. Представлены методы, средства моделирования, предложены методики различных видов моделирования гидропневмоаппаратуры и агрегатов, с современной позиции рассмотрены вопросы планирования и анализа экспериментальных исследований с целью получения регрессионных моделей.

Для студентов специальности 1-36 01 07 «Гидропневмосистемы мобильных и технологических машин» дневной и заочной форм обучения.

УДК 621(075.8)
ББК 22.17я73

© Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого», 2017

ТЕМА 1. ВВЕДЕНИЕ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ.

При создании машин, технических комплексов и других объектов широко используется моделирование. Как средство познания и преобразования материального мира моделирование применяется в экспериментальных и теоретических научных исследованиях.

Моделирование представляет собой процесс замещения объекта исследования некоторой его моделью и проведение исследований на модели с целью получения необходимой информации об объекте. *Модель* — это физический или абстрактный образ моделируемого объекта, удобный для проведения исследований и позволяющий адекватно отображать интересующие исследователя физические свойства и характеристики объекта. Удобство проведения исследований может определяться различными факторами: легкостью и доступностью получения информации, сокращением сроков и уменьшением материальных затрат на исследование и др.

Различают моделирование предметное и абстрактное. При *предметном моделировании* строят *физическую модель*, которая соответствующим образом отображает основные физические свойства и характеристики моделируемого объекта. При этом модель может иметь иную физическую природу в сравнении с моделируемым объектом (например, электронная модель гидравлической или механической системы). Если модель я объект одной и той же физической природы, то моделирование называют *физическим*. Физическое моделирование широко применялось до недавнего времени при создании сложных технических объектов. Обычно изготавливался макетный или опытный образец технического объекта, проводились испытания, в процессе которых определялись его выходные параметры и характеристики, оценивались надежность функционирования и степень выполнения технических требований, предъявляемых к объекту. Если вариант технической разработки оказывался неудачным, все повторялось сначала, т.е. осуществлялось повторное проектирование, изготовление опытного образца, испытания и т.д.

Физическое моделирование сложных технических систем сопряжено с большими временными и материальными затратами.

Абстрактное моделирование связано с построением *абстрактной модели*. Такая модель представляет собой математические соотношения, графы, схемы, диаграммы и т.п. Наиболее мощным и

универсальным методом абстрактного моделирования является математическое моделирование. Оно широко используется как в научных исследованиях, так и при проектировании.

Математическое моделирование позволяет посредством математических символов и зависимостей составить описание функционирования технического объекта в окружающей внешней среде, определить выходные параметры и характеристики, получить оценку показателей эффективности и качества, осуществить поиск оптимальной структуры и параметров объекта. Применение математического моделирования при проектировании в большинстве случаев позволяет отказаться от физического моделирования, значительно сократить объемы испытаний и доводочных работ, обеспечить создание технических объектов с высокими показателями эффективности и качества. Одним из основных компонентов системы проектирования в этом случае становится математическая модель.

Математическая модель — это совокупность математических объектов и отношений между ними, адекватно отображающая физические свойства создаваемого технического объекта. В качестве математических объектов выступают числа, переменные, множества, векторы, матрицы и т.п. Процесс формирования математической модели и использования ее для анализа и синтеза называется *математическим моделированием*. В конструкторской практике под математическим моделированием обычно понимается процесс построения математической модели, а проведение исследований на модели в процессе проектирования называют *вычислительным экспериментом*. Такое деление удобно для проектировщиков и функционально вполне обосновано, поэтому в дальнейшем будем придерживаться этой терминологии.

Для осуществления вычислительного эксперимента на ЭВМ необходимо разработать алгоритм реализации математической модели. *Алгоритм* — это предписание, определяющее последовательность выполнения операций вычислительного процесса. *Алгоритм автоматизированного проектирования* представляет собой совокупность предписаний, обеспечивающих выполнение операций и процедур проектирования, необходимых для получения проектного решения. Для наглядности алгоритмы чаще всего представляют в виде схем или графов, иногда дают их вербальное (словесное) описание. Алгоритм, записанный в форме, воспринимаемой вычислительной машиной, представляет собой *программную модель*. Процесс программирования называют *программным моделированием*.

Тема 2 КЛАССИФИКАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

При проектировании технических объектов используют множество видов математических моделей, в зависимости от уровня иерархии, степени декомпозиции системы, аспекта, стадии и этапа проектирования.

На любом уровне иерархии объект проектирования представляют в виде некоторой системы, состоящей из элементов. В этой связи различают *математические модели элементов и систем*.

При переходе к более высокому иерархическому уровню блочного структурирования система низшего уровня становится элементом системы нового уровня, и наоборот, при переходе к низшему уровню элемент становится системой. В этом случае часто оказывается нецелесообразным использование одних и тех же видов математических моделей на разных уровнях. Обычно чем ниже уровень иерархии блочного структурирования технического объекта, тем более детальное описание его физических свойств. Следовательно, на низших уровнях используют наиболее сложные математические модели. На высших уровнях могут быть с успехом применены более простые модели. Их можно получить путем аппроксимации моделей низших иерархических уровней.

В общем случае уравнения математической модели связывают физические величины, которые характеризуют состояние объекта и не относятся к перечисленным выше выходным, внутренним и внешним параметрам. Такими величинами являются: скорости и силы — в механических системах; расходы и давления — в гидравлических и пневматических системах; температуры и тепловые потоки в тепловых системах; токи и напряжения — в электрических системах.

Величины, характеризующие состояние технического объекта в процессе его функционирования, называют *фазовыми переменными* (фазовыми координатами). Вектор фазовых переменных задает точку в пространстве, называемом *фазовым пространством*. Фазовое пространство, в отличие от геометрического - многомерное. Его размерность определяется количеством используемых фазовых координат.

Обычно в уравнениях математической модели фигурируют не все фазовые переменные, а только часть из них, достаточная для однозначной идентификации состояния объекта. Такие фазовые переменные называют *базисными координатами*. Через базисные

координаты могут быть вычислены значения и всех остальных фазовых переменных.

К математическим моделям предъявляются требования *адекватности, экономичности, универсальности*. Эти требования противоречивы, поэтому обычно для проектирования каждого объекта используют свою оригинальную модель.

Модель считается адекватной, если отражает исследуемые свойства с приемлемой точностью. Точность оценивается степенью совпадения предсказанных в процессе вычислительного эксперимента на модели значениях ВЫХОДНЫХ параметров с истинными их значениями. Погрешность модели ε по всей совокупности m учитываемых выходных параметров оценивается одной из норм вектора:

$$\vec{\varepsilon}_M = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m),$$
$$\varepsilon = \|\vec{\varepsilon}_M\| = \max |\varepsilon_j|, \quad j \in [1:m],$$

или

$$\varepsilon = \|\vec{\varepsilon}_M\| = \sqrt{\sum_{j=1}^m \varepsilon_j^2},$$

где ε_j — относительная погрешность модели по j -му выходному параметру:

$$\varepsilon_j = \frac{\tilde{y}_j - y_j}{y_j},$$

где \tilde{y}_j — значение j -го выходного параметра, полученное в результате вычислительного эксперимента на принятой для проектирования математической модели; y_j — значение того же параметра, полученное при испытаниях технического объекта в контролируемых тестовых условиях или в вычислительном эксперименте на более сложной математической модели, точность которой проверена и отвечает принятой норме.

Математические модели технических объектов, используемые при проектировании, предназначены для анализа процессов функционирования объектов и оценки их выходных параметров. Они должны отображать физические свойства объектов, существенные для решения конкретных задач проектирования. При этом математическая модель должна быть как можно проще, но в то же время обеспечивать адекватное описание анализируемого процесса.

Классификация математических моделей, используемых при проектировании технических систем, приведена на рис. 2.1. В зависимости от степени абстрагирования при описании физических свойств технической системы различают три основных

иерархических уровня: верхний, или метауровень; средний, или макроуровень; нижний, или микроуровень.

Метауровень соответствует начальным стадиям проектирования, на которых осуществляется научно-технический поиск и прогнозирование, разработка концепции и технического решения, разработка технического предложения. Для построения математических моделей метауровня используют методы морфологического синтеза, теории графов, математической логики, теории автоматического управления, теории массового обслуживания, теории конечных автоматов.

На *макроуровне* объект проектирования рассматривают как динамическую систему с сосредоточенными параметрами. Математические модели макроуровня представляют собой системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Эти модели используют при определении параметров технического объекта и его функциональных элементов.

На *микроуровне* объект представляется как сплошная среда с распределенными параметрами. Для описания процессов функционирования таких объектов используют дифференциальные уравнения в частных производных. На микроуровне проектируют неделимые по функциональному признаку элементы технической системы, называемые *базовыми элементами*. Примерами таких элементов являются рамы, панели, корпусные детали, валы, диски фрикционных механизмов и др. Проектирование их основано на анализе сложнапряженного состояния. При этом естественно, базовый элемент рассматривается как система, состоящая из множества однотипных функциональных элементов одной и той же физической природы, взаимодействующих между собой и находящихся под воздействием внешней среды и других элементов технического объекта, также являющихся внешней средой по отношению к базовому элементу.

На всех рассмотренных иерархических уровнях используют следующие виды математических моделей: детерминированные и вероятностные, теоретические и экспериментальные факторные, линейные и нелинейные, динамические и статические, непрерывные и дискретные, функциональные и структурные.

По форме представления математических моделей различают инвариантную, алгоритмическую, аналитическую и графическую модели объекта проектирования.



Рисунок 2.1. Классификация математических моделей (ТО — технический объект)

В *инвариантной форме* математическая модель представляется системой уравнений (дифференциальных, алгебраических) вне связи с методом решения этих уравнений.

В *алгоритмической форме* соотношения модели связаны с выбранным численным методом решения и записаны в виде алгоритма — последовательности вычислений.

Аналитическая модель представляет собой явные зависимости искоемых переменных от заданных величин (обычно зависимости выходных параметров объекта от внутренних и внешних параметров). Такие модели получают на основе физических законов либо в результате прямого интегрирования исходных дифференциальных уравнений, используя табличные интегралы. К ним относятся также регрессионные модели, получаемые на основе результатов эксперимента.

Графическая (схемная) модель представляется в виде графов, эквивалентных схем, динамических моделей, функциональных, кинематических и алгоритмических схем, диаграмм, циклограмм и т.п. Для использования графических моделей должно существовать правило однозначных) соответствия условных изображений элементов графической и компонентов инвариантной математических моделей.

Среди алгоритмических моделей выделяют *имитационные модели*, предназначенные для имитации физических и информационных процессов, протекающих в объекте при функционировании его под воздействием различных факторов внешней среды.

Математические модели могут представлять собой функциональные зависимости между выходными, внутренними и внешними параметрами:

$$\vec{Y} = \vec{F}(\vec{X}, \vec{Q}),$$

где $\vec{Y}, \vec{X}, \vec{Q}$ — векторы выходных, внутренних и внешних параметров соответственно:

$$\vec{Y} = (y_j), j = \overline{1, m}; \vec{X} = (x_i), i = \overline{1, n}; \vec{Q} = (q_k), k = \overline{1, l};$$

m, n, l - число выходных, внутренних и внешних параметров соответственно; $\vec{F}(\ast)$ - вектор-функция. Математическая модель данного вида относится к аналитической. Она позволяет легко и просто решать задачи определения оптимальных параметров. Поэтому, если представляется возможность получения модели в таком виде, ее всегда целесообразно реализовать, даже если при этом придется выполнить ряд вспомогательных процедур. Такие модели

обычно получают методом планирования эксперимента (вычислительного или физического).

Деление математических моделей на функциональные и структурные определяется характером отображаемых свойств технического объекта. *Структурные модели* отображают только структуру объектов и используются при решении задач структурного синтеза. Параметрами структурных моделей являются признаки функциональных или конструктивных элементов, из которых состоит технический объект и по которым один вариант структуры объекта отличается от другого. Эти параметры называют *морфологическими переменными*. Структурные модели имеют форму таблиц, матриц и графов. Наиболее перспективно применение древовидных графов типа И-ИЛИ-дерева. Они позволяют аккумулировать накопленный опыт, используя описания всех существующих аналогов, известных из патентной литературы и гипотетических объектов. Такие модели наиболее широко используют на метауровне при выборе технического решения.

Функциональные модели описывают процессы функционирования технических объектов и имеют форму систем уравнений. Они учитывают структурные и функциональные свойства объекта и позволяют решать задачи как параметрического, так и структурного синтеза. Их широко используют на всех иерархических уровнях, стадиях и этапах, при функциональном, конструкторском и технологическом проектировании. На метауровне функциональные модели позволяют решать задачи прогнозирования, на макроуровне — выбора структуры и оптимизации внутренних параметров технического объекта, на микроуровне — оптимизации параметров базовых элементов и несущих конструкций.

По способам получения функциональные математические модели делятся на теоретические и экспериментальные. *Теоретические модели* получают на основе описания физических процессов функционирования объекта, а *экспериментальные* — на основе изучения поведения объекта во внешней среде, рассматривая его как кибернетический «черный ящик». Эксперименты при этом могут быть *физические* (на техническом объекте или его физической модели) или *вычислительные* (на теоретической математической модели).

При построении теоретических моделей используют физический и формальный подходы. *Физический подход* сводится к непосредственному применению физических законов для описания

объектов, например законов Ньютона, Гука, Кирхгофа, Фурье и др. *Формальный подход* использует общие математические принципы и применяется при построении как теоретических, так и экспериментальных моделей.

Построение теоретических формальных моделей основано на вариационном принципе Гамильтона—Остроградского. Для динамических систем с сосредоточенными параметрами вариационный принцип приводит к уравнениям Лагранжа второго рода.

Экспериментальные модели — формальные. Они не учитывают всего комплекса физических свойств элементов исследуемой технической системы, а лишь устанавливают обнаруживаемую в процессе эксперимента связь между отдельными параметрами системы, которые удается варьировать и (или) осуществлять их измерение. Варьируемые параметры при этом называют факторами. Такие модели дают адекватное описание исследуемых процессов лишь в ограниченной области факторного пространства, в которой осуществлялось варьирование факторов в эксперименте. Поэтому экспериментальные математические модели носят частный характер, в то время как физические законы отражают общие закономерности явлений и процессов, протекающих как во всей технической системе, так и в каждом ее элементе в отдельности. Следовательно, экспериментальные факторные модели не могут быть приняты в качестве физических законов. Вместе с тем методы, применяемые для построения этих моделей (метод статистических испытаний, регрессионный анализ, корреляционный анализ, планирование эксперимента и др.), широко используются при проверке научных гипотез.

Функциональные математические модели могут быть линейные и нелинейные. *Линейные модели* содержат только линейные функции фазовых переменных и их производных. Характеристики многих элементов реальных технических объектов нелинейные. Математические модели таких объектов включают нелинейные функции фазовых переменных и (или) их производных и относятся к *нелинейным*. С целью упрощения задач проектирования на высших иерархических уровнях используют простые линейные модели. Если описание технического объекта представлено системой линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, то, применяя преобразование Лапласа, ее можно привести к системе алгебраических уравнений с комплексными переменными, решение которой значительно проще, чем исходной системы дифференциальных

уравнений. Такой подход используется для построения математических моделей на метауровне. В моделях макроуровня следует учитывать нелинейные свойства технического объекта.

Если при моделировании учитываются инерционные свойства технического объекта и (или) изменение во времени параметров объекта или внешней среды, то модель называют *динамической*. В противном случае модель *статическая*. Выбор динамической или статической модели определяется режимом работы технического объекта, положенным в основу проводимой процедуры анализа в маршруте проектирования. Большинство задач функционального проектирования требует использования динамических моделей. При конструкторском проектировании часто применяют статические модели, а динамические эффекты процесса функционирования объекта учитывают при формировании нагрузочных характеристик посредством коэффициентов динамичности, определяемых в процессе функционального проектирования.

Математическое представление динамической модели в общем случае может быть выражено системой дифференциальных уравнений, а статической — системой алгебраических уравнений. Динамическая модель может также представлять собой интегральные уравнения, передаточные функции, а в аналитической форме — явные зависимости фазовых координат или выходных параметров технического объекта от времени.

Воздействия внешней среды на технический объект носят случайный характер и описываются случайными функциями. При проектировании также учитывается случайный разброс параметров элементов объекта, обусловленный технологическим процессом изготовления. Все процессы, происходящие в объекте, также случайны и могут быть оценены вероятностными и статистическими характеристиками: вероятностью выполнения тех или иных требований, корреляционной функцией, спектральной плотностью, математическим ожиданием, дисперсией и др. Анализ функционирования объекта в этом случае требует построения *вероятностной математической модели*. Однако такая модель весьма сложная и ее использование при проектировании требует больших затрат машинного времени. Поэтому ее применяют чаще на заключительном этапе проектирования.

Большинство проектных процедур выполняется на детерминированных моделях. *Детерминированная математическая модель* характеризуется взаимно однозначным соответствием между

внешним воздействием на динамическую систему и ее реакцией на это воздействие. В вычислительном эксперименте при проектировании обычно задают некоторые стандартные типовые воздействия на объект: *ступенчатые, импульсные, гармонические, кусочно-линейные, экспоненциальные* и др. Их называют *тестовыми воздействиями*.

Тема 3. СТРУКТУРА И ПАРАМЕТРЫ ОБЪЕКТОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Структура — это упорядоченное множество элементов и их отношений. Технический объект при системном подходе рассматривается как система, состоящая из взаимодействующих элементов, составляющих упорядоченное множество.

Структура технического объекта характеризуется качественным и количественным составом элементов и их взаиморасположением или взаимосвязями. Качественное различие элементов определяется их физическими свойствами. Количественно физические свойства элементов выражаются некоторыми скалярными величинами, называемыми *параметрами элементов*.

Характеристики функционирования технического объекта зависят от его физических свойств и внешних воздействий окружающей среды. Физические свойства объекта определяются его структурой и параметрами элементов, из которых он состоит. Внешние воздействия зависят от физических свойств внешней среды и характера ее взаимодействия с техническим объектом. Физические свойства внешней среды также определяются ее параметрами.

Параметр — это величина, характеризующая свойство или режим работы объекта. Под объектом здесь понимается как отдельный элемент технической системы, так и вся система в целом. Следует отметить, что параметрами технической системы являются *показатели качества и эффективности*: производительность, рабочая скорость, грузоподъемность, удельная материалоемкость, удельная энергоемкость, габариты, масса, показатели надежности, показатели качества переходных процессов и др. Эти параметры называют *выходными параметрами технического объекта*.

Если структура технического объекта определена, то его выходные параметры зависят только от параметров элементов и параметров внешней среды. Различают внутренние и внешние параметры. *Внутренние параметры* — это параметры элементов, из ко-

торых состоит технический объект. Например, двигатель и трансмиссия являются элементами автомобиля. Их выходные параметры — мощность двигателя, передаточные числа трансмиссии и одновременно это внутренние параметры автомобиля. *Выходные параметры* характеризуют свойства технического объекта, а внутренние параметры — свойства его элементов. При переходе к новому иерархическому уровню проектирования внутренние параметры могут стать выходными и наоборот.

Внешние параметры — это параметры внешней среды, оказывающей влияние на функционирование технического объекта. Например, для автомобиля внешняя среда — дорога и воздушная среда. Параметры дороги включают в себя углы продольного и поперечного уклонов, коэффициенты сопротивления качению и сцепления колес с дорогой. Параметры воздушной среды — плотность и относительная влажность воздуха, скорость и направление ветра.

3.1. Объекты проектирования на микроуровне

Микроуровень — это нижний иерархический уровень декомпозиции объектов проектирования по степени абстрагирования при составлении математического описания. На этом уровне осуществляется детальное описание физических свойств технического объекта. Объекты рассматриваются как сплошные среды, имеющие конечные области определения, выделяемые в трехмерном геометрическом пространстве. Такие объекты представляют собой, *динамические системы с распределенными параметрами*. Их также называют *непрерывными системами*. Функционирование этих систем описывается *дифференциальными уравнениями в частных производных*.

Общий вид уравнений математической модели описания физических свойств технического объекта с распределенными параметрами

$$F(x_1, x_2, \dots, x_m, \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_m}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_{12}}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial t}) = 0 \quad (3.1)$$

или в компактной форме:

$$L\varphi(\vec{Z}) = \theta(\vec{Z}) \quad (3.2)$$

где L — дифференциальный оператор; φ — искомая функция — фазовая координата; x_i — пространственные координаты; n — количество пространственных координат; t — время; Z — вектор

независимых переменных; $\theta(Z)$ — известная функция независимых координат.

Независимыми переменными в этих моделях являются пространственные координаты $x_i, i=1, n$ и время t . Фазовая координата — функция независимых переменных.

Размерность задачи определяется числом пространственных координат где: при $n=1$ — объект одномерный; при $n=2$ — двумерный; при $n=3$ — трехмерный.

Если уравнение содержит одну фазовую переменную, система описывается одним уравнением вида (3.1), если несколько фазовых переменных, т.е. вектор, то системой уравнений.

Если фазовые переменные не являются явными функциями времени, задачу анализа объекта называют *стационарной*, в противном случае — *нестационарной*. Стационарная задача характеризует *статическое состояние* технического объекта. *Динамические режимы* функционирования объекта относятся к нестационарным задачам и для их оценки требуются исследования *переходных процессов*.

Уравнение (3.1) имеет множество решений. Для получения единственного решения необходимо задать *краевые условия*. Краевые условия включают граничные и начальные условия. *Граничные условия* — это сведения об искомым непрерывных функциях (p и (или) их производных на границе S области определения объекта Ω , характеризующие условия взаимодействия с окружающей внешней средой. *Начальные условия* — это значения этих же функций во всей области определения в начальный момент времени. Начальные условия задаются только при решении нестационарных задач (при исследовании переходных процессов).

Исходное дифференциальное уравнение в частных производных (3.1) вместе с краевыми условиями носит название *дифференциальной краевой задачи* и представляет собой математическую модель технического объекта с распределенными параметрами.

Существует несколько стандартных способов задания граничных условий. Для теплового объекта, представляющего собой твердое гомогенное (однородное) тело, используют граничные условия первого, второго и третьего родов.

Граничные условия первого рода означают задание на границе S области определения объекта Ω значений φ_s искомой функции фазовой переменной φ .

При *граничных условиях второго рода* задают на границе значения частных производных искомой функции по пространственным координатам.

Граничные условия третьего рода представляют собой уравнения баланса потоков, характеризующих обмен энергией объекта с окружающей внешней средой.

В некоторых случаях, например, для гетерогенных (неоднородных по составу материала) тепловых объектов, могут быть и иные граничные условия.

Состояние объекта характеризуется изменением во времени фазовых координат, определяемых в различных его точках. Задача анализа процесса функционирования технического объекта на микроуровне заключается в определении функций фазовых координат для множества точек, выделенных в области определения объекта.

Объекты с распределенными параметрами могут быть различной физической природы: механические, гидравлические, тепловые, электрические, магнитные и др.

Механические объекты представляют собой элементы и базовые детали машин и механизмов: корпуса, рамы, панели, валы, крылья самолетов, лопасти турбин и др. При анализе механических объектов находят деформации и напряжения. Они определяют несущую способность конструктивных элементов, надежность и нормальные условия функционирования базирующихся на них других элементов объекта.

При проектировании многих технических объектов возникает необходимость анализа тепловых напряжений деталей, выбора оптимальных размеров и конфигурации теплообменников и решения многих других задач теплопередачи. В тепловых объектах определению подлежат температурные поля и термические напряжения.

При анализе гидравлических и пневматических систем определяют режимы течения сплошных потоков жидкостей и газов, характеризующиеся скоростями и давлениями.

Обычно в исходные уравнения (3.1) входят не все фазовые координаты, характеризующие процессы функционирования технического объекта, а только базисные, например, деформации — в модели механической системы, температуры — в тепловой системе и т.д. Остальные фазовые координаты (например, напряжения в упомянутых системах) определяют через базисные координаты на

основе уравнений, устанавливающих между ними соответствующие связи.

3.2. Основы построения математических моделей на микроуровне

Для построения математических моделей технических объектов с распределенными параметрами используют фундаментальные физические законы. К ним относятся, прежде всего, законы сохранения (массы, энергии, количества движения).

Общая формулировка закона сохранения: *изменение во времени некоторой субстанции в элементарном объеме равно сумме притока-стока этой субстанции через его поверхность с учетом скорости генерации или уничтожения субстанции в этом объеме.*

Уравнение, соответствующее данной формулировке, имеет вид:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{j} + G, \quad (3.3)$$

где φ — фазовая переменная (координата), выражающая субстанцию; \vec{j} — вектор плотности потока фазовой переменной; $\operatorname{div} \vec{j}$ — дивергенция вектора \vec{j} ; G — скорость генерации или уничтожения субстанции.

У трехмерного технического объекта вектор \vec{j} состоит из трех составляющих, направленных параллельно осям декартовой системы координат x, y, z , т.е. $\vec{j} = (j_x, j_y, j_z)$. Дивергенция вектора \vec{j} — скалярная величина, определяемая выражением:

$$\operatorname{div} \vec{j} = \partial j_x / \partial x + \partial j_y / \partial y + \partial j_z / \partial z \quad (3.4)$$

Дивергенция вектора плотности потока характеризует сумму притока-стока субстанции через поверхность элементарного объема. В качестве субстанции в различных физических законах выступают: масса, энергия, количество движения и др.

Уравнение закона сохранения массы

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{j}_\rho \quad (3.5)$$

где ρ — плотность массы, кг/м³; \vec{j}_ρ — вектор плотности потока массы

$$\vec{j}_\rho = \rho \vec{g} \quad (3.6)$$

где \vec{g} — вектор скорости переноса массы.

Уравнение (3.5) в гидроаэродинамике называют *уравнением неразрывности*.

В одномерном случае, когда скорость направлена лишь вдоль оси x , уравнение (3.5) имеет вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho \mathcal{G})}{\partial x} \quad (3.7)$$

Плотность потока массы $j_\rho = \rho \mathcal{G}$ измеряется в кг/(м²·с).

Уравнение закона сохранения энергии:

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} = -\text{div} \vec{j}_E + G_E \quad (3.8)$$

где $E = e + \mathcal{G}^2/2$ — полная энергия единицы массы; e — внутренняя энергия единицы массы; ρE — энергия единицы объема, Дж/м³; \vec{j}_E — вектор плотности потока энергии; G_E — скорость генерации или поглощения энергии в единице объема, Дж/(м³·с).

В одномерном случае поток энергии направлен только вдоль оси x , тогда $J_E = J_{Ex}$, а уравнение (3.8) принимает вид:

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} = \frac{\partial j_{Ex}}{\partial x} + G_{Ex} \quad (3.9)$$

Плотность потока энергии измеряется в Дж/(м²·с).

Уравнение закона сохранения количества движения используют при моделировании движения потока жидкости. Для потока идеальной жидкости (без учета сил трения, обусловленных вязкостью) уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial(\rho \vec{\mathcal{G}})}{\partial t} = -\vec{\mathcal{G}} \text{div}(\rho \vec{\mathcal{G}}) - \text{grad } p \quad (3.10)$$

где $\rho \vec{\mathcal{G}}$ — вектор количества движения единицы объема жидкости; p — давление жидкости; $\text{grad } p$ — градиент давления.

Градиентом называют векторную функцию скалярного аргумента. Компонентами вектора градиента являются частные производные аргумента по пространственным координатам. Градиент давления: $\text{grad } p = (\partial p / \partial x, \partial p / \partial y, \partial p / \partial z)$.

Для одномерного потока жидкости получаем:

$$\frac{\partial(\rho \mathcal{G})}{\partial t} = -\mathcal{G} \frac{\partial(\rho \mathcal{G})}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.11)$$

При учете массовых сил и сил трения уравнение закона сохранения количества движения имеет вид:

$$\frac{\partial \vec{\mathcal{G}}}{\partial t} = G_M - (\text{grad } p - \eta \nabla^2 \vec{\mathcal{G}} - \eta \text{grad } \text{div} \vec{\mathcal{G}} / 3) / \rho, \quad (3.12)$$

где G_M — напряженность поля массовых сил; η — динамическая вязкость; ∇^2 — оператор Лапласа:

$$\nabla^2 \vec{\mathcal{G}} = \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial x^2} \vec{i} + \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial y^2} \vec{j} + \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial z^2} \vec{k}$$

Выражение (3.12) называют *уравнением Навье—Стокса*.

3.4. Модели гидравлических систем на микроуровне

В технических системах широкое применение находят гидравлические и пневматические приводы. При большой длине гидравлических или пневматических магистралей в них возникают волновые процессы, исследование которых возможно на основе непрерывных моделей, использующих дифференциальные уравнения в частных производных.

Основные физические свойства жидкостей и газов — текучесть, сжимаемость и непрерывность потока. Текучесть оценивается вязкостью, сжимаемость — модулем объемной упругости.

Все применяемые на практике жидкости и газы представляют собой обычные *ньютоновские вязкие среды*. В такой среде при взаимных перемещениях ее элементов возникают силы внутреннего трения. Напряжения трения в ньютоновской жидкости пропорциональны относительным скоростям, или скоростям сдвига.

Жидкости обычно имеют сравнительно большую вязкость и слабую сжимаемость. Газы, наоборот, отличаются малой вязкостью и высокой сжимаемостью. Математическое описание физических свойств жидкостей и газов на микроуровне можно выполнить на основе одних и тех же законов. Поэтому в дальнейшем будем говорить о жидкостной сплошной среде.

Движение жидкости в трубопроводе обычно рассматривают как одномерный сплошной поток. При этом положение поперечного сечения потока относительно начала отсчета геометрической координаты, выбираемого на левой граничной поверхности трубопровода, определяется одной координатой x . Значение x не зависит от кривизны осевой линии трубопровода, а равно ее длине от начала отсчета до рассматриваемого сечения.

Для описания движения жидкости используют закон сохранения массы и закон сохранения количества движения.

Закон сохранения массы выражает свойство непрерывности потока жидкости в трубопроводе и для одномерного случая имеет вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho g)}{\partial x} \quad (3.13)$$

Уравнение Навье—Стокса в одномерном случае, выражающее закон сохранения количества движения элементарной массы, согласно (3.12), имеет вид:

$$\frac{\partial g}{\partial t} = G_M - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{4}{3} \eta \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}. \quad (3.14)$$

При анализе движения жидкости в трубопроводе обычно массовыми силами пренебрегают. Тогда

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{4}{3} \eta \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} \quad (3.15)$$

Находит применение также приближенная форма уравнения Навье—Стокса

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{2\zeta}{\rho} \vartheta, \quad (3.16)$$

где ζ — коэффициент линеаризованного вязкого трения в трубопроводе.

Иногда при исследованиях пренебрегают вязкостью жидкости. Принимая $\eta=0$ в выражении (3.15), получаем уравнение Эйлера для одномерного потока в трубопроводе постоянного сечения

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.17)$$

Уравнение Эйлера учитывает лишь инерционные свойства потока, а уравнение Навье—Стокса — инерционные и диссипативные (рассеивание энергии) свойства.

Уравнения (3.13) и (3.15) сведем в единую систему

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\rho \frac{\partial \vartheta}{\partial x}; \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{4}{3} \eta \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

Уравнения (3.18) представляют собой систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных с тремя неизвестными функциями: скорости ϑ , давления p и плотности ρ . Чтобы сделать систему определенной, необходимо в нее добавить уравнение связи между p и ρ .

Будем предполагать, что поток жидкости изолированы от притока тепла извне. Такой процесс движения жидкости называют *адиабатическим*. Характерная его особенность — постоянство энтропии. Следовательно, адиабатический процесс является изоэнтропическим.

Для газа в рассматриваемом случае плотность можно выразить через давление на основании уравнения состояния

$$\frac{p}{\rho} = RT = \frac{k-1}{k} h, \quad (3.19)$$

где R — газовая постоянная; T — температура; k — показатель адиабаты: $k = C_p / C_V$, где C_p и C_V — соответственно удельная теплоемкость газа при постоянном давлении и постоянном объеме.

В пневматических приводах большинства технических объектов в качестве рабочего тела используют воздух. Параметры воздуха при $T=273,15$ °К и $p_0=1$ Па; $\rho =1,293$ кг/м³; $C_p=1,006 \cdot 10^3$ Дж/(кг·°К); $C_v=0,718 \cdot 10^3$ Дж/(кг·°К); показатель адиабаты $k=1,405$.

Следует также учитывать зависимость динамической вязкости от температуры. Обычно используют степенную зависимость вида

$$\eta = \eta_0 \left(\frac{T_0}{T} \right)^n. \quad (3.20)$$

Показатель степени n для воздуха при температуре от 90 до 300 °К равен (-0,889), а при температуре $T=(300 \dots 400)$ °К - $n=0,75$.

Эта же формула годится и для рабочих жидкостей, используемых в гидроприводах. В температурном интервале $303 \leq T \leq 423$ °К принимают $n \leq 2,77$.

Зависимость плотности от давления для жидкостей представляется следующим обобщенным уравнением изоэнтропы

$$\frac{p+B}{\rho^n} = const. \quad (3.21)$$

При проектировании машиностроительных гидроприводов часто принимают линейную аппроксимацию зависимости изменения давления от относительного изменения объема жидкости при ее сжатии. Эта зависимость устанавливается законами Гука и в одномерном случае имеет вид:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -E \frac{\partial \vartheta}{\partial x}, \quad (3.21)$$

где E — модуль объемной упругости жидкости, который при адиабатическом процессе определяется выражением $E_a = V dp/dV$; V — объем жидкости.

Учитывая слабую сжимаемость рабочих жидкостей гидроприводов, полагают $\rho = const$ и для анализа полей скоростей и давлений в трубопроводе используют систему дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \vartheta}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{4}{3} \eta \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}; \\ \frac{\partial p}{\partial t} &= -E \frac{\partial \vartheta}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

Значение модуля объемной упругости зависит от типа жидкости, давления, температуры, скорости деформации и характера термодинамического процесса. Наибольшее влияние на него оказывает давление, поэтому для минеральных масел обычно используют линеаризованную зависимость:

$$E_a = E_{a0} + A_a \cdot p \quad (3.23)$$

Коэффициент пропорциональности A_a зависит от типа жидкости и ее температуры. Так, для жидкости АМГ-10 при $T=293$ °К; $E_{a0}=1,68 \cdot 10^3$ МПа; $A_a=12,75$.

Реальная жидкость в гидроприводах обычно представляет собой двухфазную газожидкостную смесь. Воздух в этой смеси может находиться в растворенном и нерастворенном состоянии. Растворенный воздух практически не влияет на свойства рабочих жидкостей. Нерастворенный воздух содержится в жидкости в виде пузырьков. Вследствие значительно большей сжимаемости воздуха по сравнению со сжимаемостью жидкости модуль объемной упругости газожидкостной двухфазной смеси уменьшается, причем это уменьшение является существенным при малых давлениях.

Для определения модуля объемной упругости газожидкостной смеси E_c используется приближенное выражение:

$$E_c = \frac{\varepsilon_B \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{1}{k}} + (1 - \varepsilon_B) A_a \sqrt{\frac{E_{a0} + A_a p_0}{E_{a0} + A_a p}}}{\frac{\varepsilon_B \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{1}{k}}}{kp} + \frac{(1 - \varepsilon_B)}{E_{a0} + A_a p}}, \quad (3.24)$$

где ε_B — относительный объем газовой фазы в смеси; k — показатель адиабаты сжатия воздуха; p_0 — давление, при котором определен модуль объемной упругости E_{a0} (обычно принимают избыточное давление $p_0=0$).

Для минеральных масел, используемых в машиностроительных гидроприводах, параметры находятся в следующих пределах: $E_{a0} = (1,35 \dots 1,92) \cdot 10^3$ МПа; $A_a = 12 \dots 13$; $\varepsilon_B = 0,005 \dots 0,006$; $k = 1,4$.

Распределенные модели используются при анализе высокочастотных колебаний в системах гидравлических и пневматических приводов. Для решения систем уравнений (3.17) и (3.22) необходимо задать краевые условия. Обычно принимают граничные условия первого рода и задают функции давлений и скоростей на левой и правой границах участка трубопровода:

$$\left. \begin{aligned} p &= \phi_1(t); \\ v &= \phi_2(t); \end{aligned} \right\} \text{при } x=0 \text{ и } x=L, \quad (3.25)$$

где L — длина участка трубопровода.

Начальными условиями являются значения этих же функций в начальный момент времени $t_0=0$ во всех контролируемых точках

трубопровода. Если функции (3.25) не зависят от времени, процесс движения жидкости в трубопроводе будет стационарным. Его характеристики зависят только от граничных условий. Начальные условия задаются для исследования нестационарных (переходных) процессов, обусловленных переменными внешними воздействиями, определяемыми функциями (3.25).

3.5. Модели механических систем на микроуровне

Технический уровень изделий машиностроения в значительной мере определяется рациональным выбором геометрических параметров входящих в их состав механических элементов. Форма и размеры элементов, их взаимное расположение, в конечном счете, определяют важнейшие параметры технического объекта — его массу и габариты, показатели надежности и долговечности.

Для решения задачи выбора геометрических параметров технического объекта необходим анализ напряженно-деформированного состояния его элементов. Значения напряжений и деформаций позволяют оценить прочность, долговечность, виброустойчивость конструктивных элементов и осуществить поиск их оптимальных размеров и конфигурации.

Примеры объектов проектирования: валы двигателей и трансмиссий, корпуса, рамы, панели и стержневые конструкции автомобилей, самолетов, станков, кораблей и др.

Современные методы анализа напряженно-деформированного состояния несущих элементов различных технических систем базируются на использовании моделей с распределенными параметрами. В основе построения таких моделей лежит теория упругости. Динамические модели различных элементов технических объектов сводятся к стержневым, пластинчатым, оболочечным или объемным системам, находящимся под действием произвольных механических нагрузок (сосредоточенных, распределенных, детерминированных, случайных и др.). Эти модели представляют собой динамические системы с распределенными параметрами, функционирование которых описывается дифференциальными уравнениями в частных производных.

Математической моделью анализа напряженно-деформированного состояния элемента механической системы является *основное уравнение теории упругости* — *уравнение Ламе*. Это уравнение выводится из условия динамического равновесия

твёрдого тела под действием приложенных к нему сил, включая и силу инерции.

Выделим в твёрдом теле элементарный параллелепипед (рис. 3.1).

Сформулируем условия его равновесия: *геометрическая сумма сил, приложенных к выделенному элементарному параллелепипеду, включая его силу инерции, равна нулю.* При этом учитываются распределённые нагрузки на гранях параллелепипеда и массовая сила. Распределённые нагрузки представляются нормальными σ_{ii} и касательными σ_{ij} напряжениями.

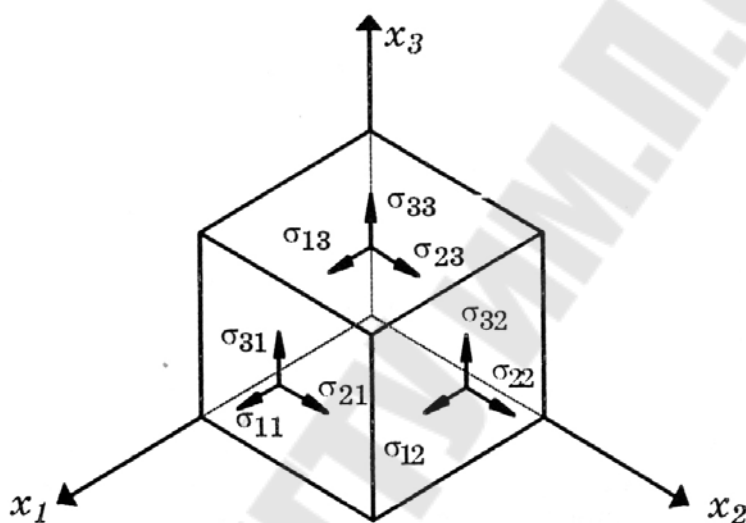


Рисунок 3.1. Компоненты напряжений на гранях элементарного параллелепипеда

Учитывая закон о парности касательных напряжений, согласно которому $\sigma_{12} = \sigma_{21}$, $\sigma_{23} = \sigma_{32}$, $\sigma_{31} = \sigma_{13}$, получаем уравнения равновесия в проекциях на оси x_1, x_2, x_3 :

$$\rho \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.26)$$

где ρ — плотность материала твёрдого тела; U_i — перемещение элемента вдоль оси x_i , σ_{ij} — напряжение, действующее в направлении оси x_i в грани элемента, перпендикулярной оси x_j ; ρg_i — проекция вектора массовых сил $\rho \vec{g}$ на ось x_i ; \vec{g} — вектор ускорения свободного падения.

Напряжения σ_{ij} связаны с деформациями ε_{ij} , а последние — с перемещениями U_i . В случае линейной связи между ними, устанавливаемой законом Гука, для анизотропного тела имеем:

$$\sigma_{ij} = \lambda \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{jj} + 2\mu\varepsilon_{ii} ; \quad (3.27)$$

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} \text{ при } i \neq j , \quad (3.28)$$

где ε_{ij} — деформация, вычисляемая по формуле:

$$\varepsilon_{ij} = 0,5\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right); \quad (3.29)$$

λ и μ - постоянные Ламе, характеризующие упругие свойства среды

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad (3.30)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} , \quad (3.31)$$

где E - модуль упругости; ν — коэффициент Пуассона.

Заменяя напряжения на деформации в уравнениях равновесия (3.26), получаем основное уравнение теории упругости, называемое уравнением Ламе:

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \text{grad div} \vec{U} + \mu \nabla^2 \vec{U} + \rho \vec{g}, \quad (3.32)$$

где \vec{U} — вектор перемещений; ∇^2 — оператор Лапласа.

Модели для анализа напряжений и деформаций часто оказываются более удобными, если представлены в интегральной форме, вытекающей из вариационных принципов механики. Вариационный принцип Лагранжа (принцип потенциальной энергии) гласит, что потенциальная энергия системы получает стационарные значения на тех кинематически возможных перемещениях, отвечающих заданным граничным условиям, которые удовлетворяют условиям равновесия. Поэтому модель представляют в виде выражения потенциальной энергии E_{Π} системы как разности энергии деформации E_D и работы W массовых и приложенных поверхностных сил:

$$E_{\Pi} = E_D - W,$$

где

$$E_D = 0,5 \int_{\bar{R}} \vec{\varepsilon}^T \vec{\sigma} d\bar{R};$$

$\vec{\varepsilon}^T = (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} + \varepsilon_{12} + \varepsilon_{13} + \varepsilon_{23})$ - вектор строка деформаций;

$\vec{\sigma} = (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} + \sigma_{12} + \sigma_{13} + \sigma_{23})$ - вектор столбец напряжений;

\bar{R} - область определения искомой функции.

Введем матрицу:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix}. \quad (3.33)$$

Используя матрицу (3.33), уравнения (3.27) и (3.28) можно записать в лаконичной форме:

$$\vec{\sigma} = D\vec{\varepsilon} \quad (3.34)$$

При использовании принципа Лагранжа вместо решения уравнения (3.32) требуется минимизировать функционал:

$$E_{II} = 0,5 \int_{\vec{R}} \vec{\varepsilon}^T D \vec{\varepsilon} d\vec{R} - W \quad (3.35)$$

Тема 4. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРОСТЫХ ДИСКРЕТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ТЕХНИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

4.1. Объекты проектирования на макроуровне

На макроуровне осуществляют проектирование различных машин и механизмов. Объекты проектирования рассматриваются как сложные технические системы, состоящие из совокупности взаимодействующих элементов. Таким образом, в отличие от микроуровня, где объектами проектирования были детали машин (валы, корпуса, панели и т. п.), на макроуровне объект имеет сложную неоднородную структуру, состоящую из элементов — объектов проектирования микроуровня.

На микроуровне использовались математические модели, представляемые дифференциальными уравнениями в частных производных. Эти модели универсальны, дают наиболее полное описание физических свойств и позволяют решать любые задачи анализа технического объекта. Однако они чрезвычайно сложны даже для отдельного элемента машины или механизма и требуют значительных затрат времени на проведение анализа. Если рассматривать каждый элемент объекта макроуровня как сплошную среду, т. е. как динамическую систему с распределенными параметрами, то это сделает практически нереальным решение задач оптимизации структуры и параметров объекта.

Вместе с тем многие задачи проектирования успешно решаются с использованием более простых математических моделей. Эти модели можно получить путем аппроксимации распределенных моделей микроуровня на основе соответствующих допущений

относительно представления структуры и физических свойств объекта. При этом динамическая система с распределенными параметрами путем дискретизации в пространственных координатах представляется совокупностью материальных объектов, выделенных из сплошной среды, — дискретных элементов с постоянными усредненными параметрами. Такую систему называют *динамической системой с сосредоточенными параметрами*.

Дискретный элемент в общем случае обладает инерционными, упругими и диссипативными свойствами (внутренние свойства системы). Различают простые и сложные элементы. *Простой элемент* наделен только одним из упомянутых физических свойств, а *сложный* — более чем одним.

Основанием для дискретизации является наличие выраженного дискретного спектра собственных частот колебаний системы в ограниченном диапазоне (например, для механических систем — до 300 Гц). Дискретные системы оказываются вполне пригодными для анализа колебательных процессов в этом диапазоне частот.

Математическая модель динамической системы с сосредоточенными параметрами — система обыкновенных дифференциальных уравнений.

Таким образом, объекты проектирования на макроуровне рассматриваются как системы, состоящие из совокупности взаимодействующих дискретных элементов. Задача проектирования таких объектов состоит в определении оптимальных параметров и структуры исходя из заданного описания внешней среды и технических требований к объекту.

4.2. Динамическая модель технического объекта на макроуровне

Построение математической модели технического объекта осуществляется на основе его динамической модели. *Динамическая модель* — это абстрактное графическое отображение основных физических свойств технического объекта и характеристик взаимодействия с внешней средой.

При построении динамической модели следует принимать во внимание лишь те физические свойства объекта и воздействия внешней среды, которые могут оказать существенное влияние на точность результатов исследования моделируемого процесса функционирования объекта. Такой подход позволит избежать необоснованной избыточности в его математическом описании. Но

при этом должна быть обеспечена адекватность математической модели.

На этапе построения математической модели микроуровня в инвариантной форме динамическая модель объекта проста. Она представляет собой графическое изображение области определения объекта Ω соответствующей конфигурации, определяемой граничной поверхностью S , посредством которой осуществляется взаимодействие объекта с внешней средой. Во многих случаях достаточно вербального описания динамической модели. Необходимость построения динамической модели микроуровня возникает лишь при разработке алгоритмической модели.

При построении математической модели макроуровня в инвариантной форме почти всегда необходима разработка динамической модели. Это объясняется тем, что *структура динамической модели макроуровня* гораздо сложнее. Она представляется в виде совокупности взаимодействующих дискретных элементов и ее сложность зависит от степени абстрагирования при отображении физических свойств объекта.

На макроуровне для выделения дискретных элементов из сплошной среды используют: методы сеток, функционально законченных элементов и сосредоточенных масс.

Методы сеток подразделяют на метод *конечных разностей* и *метод конечных элементов*. Они обычно используются при построении алгоритмической модели на микроуровне в процессе алгебраизации дифференциальных уравнений в частных производных, но могут применяться и для построения математической модели макроуровня путем аппроксимации модели микроуровня.

Метод функционально законченных элементов основан на выделении типовых элементов технического объекта, завершенных в конструктивном отношении и предназначенных для выполнения определенных функций (например, в гидромеханической системе — участок гидромагистрали, золотниковый клапан, дроссель, обратный клапан, насос, гидромотор и др.). Имея библиотеку математических моделей функционально законченных элементов и зная структуру технического объекта, можно составить полную математическую модель.

Наиболее часто при построении динамической модели используют *метод сосредоточенных масс*. Этот метод применим, если система имеет явно выраженный дискретный спектр

собственных частот. Это характерно для технических объектов, у которых масса распределена в пространстве неравномерно. Например, в механической системе автомобиля масса вращающихся деталей в основном сосредоточена в маховике двигателя, крупных шестернях трансмиссии, барабане стояночного тормоза, колесах, имеющих большие радиальные размеры и обладающих большими моментами инерции, а соединяющие их детали (валы, муфты, карданные передачи и др.) имеют малые радиальные размеры и массу, но обладают существенными упругими свойствами. Из названия метода следует, что он предназначен для моделирования технических объектов, мерой инертности элементов которых служит масса.

При построении динамической модели методом сосредоточенных масс выделяют некоторые абстрактные материальные субстанции, наделяя их определенными физическими свойствами. Такими субстанциями, являются: сосредоточенные массы (материальные точки и абсолютно твердые тела), эквивалентные массам соответствующих частей технического объекта, и элементы, лишенные массы (невесомые), отображающие характер взаимодействия сосредоточенных масс.

Сосредоточенные массы обладают инерционными свойствами и способностью накапливать кинетическую энергию. Их называют *инерционными элементами*.

Взаимодействие сосредоточенных масс осуществляется посредством упругих, диссипативных, фрикционных и трансформаторных элементов.

Упругие элементы отображают упругие свойства динамической системы. Они обладают способностью накапливать потенциальную энергию.

Диссипативные элементы отображают свойства диссипации (рассеивания) энергии конструктивными элементами технического объекта, обусловленные силами внутреннего трения, пропорциональными относительной скорости перемещения взаимодействующих сосредоточенных масс (или сосредоточенных масс относительно внешней среды, например, при движении жидкости в трубопроводе).

Фрикционные элементы отображают физические свойства фрикционных механизмов технического объекта.

Трансформаторные элементы отображают безынерционные преобразования параметров потока энергии, осуществляемые техническими устройствами, называемыми трансформаторами.

Следует отметить, что рабочие процессы трансформаторов в общем случае могут быть весьма сложными, в особенности, если происходит преобразование одного вида энергии в другой. В таком случае необходима более детальная математическая модель трансформатора. Здесь же речь идет о тех случаях, когда внутренними процессами трансформатора можно пренебречь и учитывать лишь пропорциональные изменения величины выходных фазовых переменных по отношению к величине переменных на его входе без преобразования вида энергии.

Состояние сосредоточенных масс характеризуется *фазовыми координатами типа потока*. Обычно это *геометрические координаты*, позволяющие определять положение сосредоточенных масс в многомерном фазовом пространстве, либо скорости движения сосредоточенных масс в этом пространстве. В последнем случае фазовые координаты типа потока составляют только часть координатного базиса, в состав которого кроме переменных типа потока входят переменные типа потенциала, характеризующие состояние упругих элементов.

О координатном базисе моделей макроуровня подробнее будет сказано в последующих разделах. Здесь же отметим, что в механике фазовые координаты типа потока выбирают в качестве обобщенных координат. *Количество независимых обобщенных координат системы равно числу ее степеней свободы*. В общем случае не все введенные фазовые переменные типа потока будут независимыми. *Переменные же типа потенциала* всегда принадлежат к зависимым координатам и выражаются через переменные типа потока.

Направления фазовых координат типа потока выбирают таким образом, чтобы они отражали положительное направление потока передаваемой через техническую систему энергии внешних источников. При этом также учитываются ограничения, наложенные объектами внешней среды на свободу перемещения сосредоточенных масс. Направления фазовых координат типа потока должны быть отображены в динамической модели системы.

Ограничения на изменения геометрических координат и скоростей движения сосредоточенных масс динамической системы называют связями. Различают связи: геометрические (позиционные) и кинематические; удерживающие и недерживающие

(виртуальные); стационарные и нестационарные; голономные и неголономные. Математическое описание ограничений дается уравнениями связей. Каждое уравнение связи отображает тот факт, что данная связь лишает материальную систему одной степени свободы. При этом соответственно уменьшается количество независимых координат системы.

Если в динамической модели выбрать только такие независимые фазовые координаты, которые отображают лишь перемещения сосредоточенных масс, допускаемые позиционными удерживающими связями, то необходимость составления и использования уравнений этих связей исключается. Сложное движение твердого тела при этом раскладывается на простейшие составляющие — поступательное и вращательное.

При моделировании технического объекта с виртуальными и неголономными связями уравнения этих связей включаются в состав математической модели.

Для обозначения элементов в динамических моделях применяют графические изображения, используемые в кинематических и принципиальных схемах.

Пример:

Используя метод сосредоточенных масс, построить динамическую модель для анализа плавности хода автомобиля.

В связи с неровностями дороги движение автомобиля сопровождается колебаниями кузова и вибрацией его механизмов и деталей. Для того чтобы создать нормальные условия работы водителю, комфортные условия пассажирам, обеспечить сохранность перевозимого груза и нормальное функционирование механизмов и систем автомобиля, применяют систему поддрессоривания (подвеску автомобиля). Эта система содержит упругие элементы и амортизаторы. Энергия толчков и ударов, возникающих на неровностях дороги, преобразуется в потенциальную энергию деформации упругих элементов подвески, вследствие чего обеспечиваются плавные колебательные движения кузова. Амортизаторы поглощают и рассеивают энергию колебаний, значительно уменьшая амплитуды резонансных колебаний. Упругими свойствами обладают и пневматические шины колес автомобиля при их радиальной деформации. В результате поддрессоренная масса кузова и неподдрессоренные массы колес и мостов представляют собой многомассовую колебательную систему.

Адекватное описание физических свойств системы поддресоривания позволяет провести анализ колебаний и выбрать оптимальные параметры упругих и диссипативных элементов подвески.

При движении автомобиля кузов можно рассматривать как твердое тело с шестью степенями свободы, совершающее линейные колебательные движения относительно трех ортогональных осей, проведенных через его центр масс, и вращательные движения относительно этих же осей (рис. 4.1, а). Перемещения колес при колебаниях зависят от кинематической схемы направляющих устройств подвески. Различают зависимую и независимую подвески колес. Если колеса непосредственно закреплены на несущей балке моста, движения их оказываются взаимосвязанными и подвеску называют зависимой. В этом случае мост вместе с колесами может перемещаться вертикально и вращаться относительно продольной оси автомобиля. Могут быть и другие направления движения, определяемые кинематикой подвески, однако перемещения в этих направлениях обычно незначительны и ими во многих случаях пренебрегают. При зависимой подвеске мост вместе с колесами можно рассматривать как твердое тело с двумя степенями свободы. При независимой подвеске колес обычно учитывают только их вертикальные перемещения.

Во многих случаях при моделировании зависимой подвески вместо одного твердого тела, совершающего вращательное и поступательное движения, принимают модель с двумя независимыми твердыми телами, совершающими только вертикальные перемещения, аналогично схеме с независимой подвеской колес.

Динамическая модель колебательной системы автомобиля с учетом изложенных представлений о физических свойствах системы поддресоривания приведена на рис. 4.1, а. Она имеет 10 степеней свободы. В практических задачах часто ограничиваются моделированием только трех движений кузова: поступательного вдоль оси z и вращательных относительно осей x и y , т. е. учитывают три степени свободы кузова. Тогда динамическая модель автомобиля представляет собой колебательную систему с семью степенями свободы.

Внешние воздействия на эту систему создаются неровностями микро- и макропрофиля дороги. Эти воздействия носят случайный характер и описываются случайными функциями $q(t)$.

Рассмотренная динамическая модель приводит к довольно сложной математической модели и ее использование при проектировании требует больших затрат времени. Поэтому на ранних этапах проектирования применяют более простые динамические модели.

Для предварительного выбора параметров подвески используют одномассовую динамическую модель, пренебрегая массой колес и мостов (рис. 4.1, б). При этом принимают во внимание, что у существующих автомобилей параметры колебаний передней и задней частей кузова слабо связаны между собой. В этой связи постулируют допущение о несвязанности этих колебаний. Масса m представляет собой часть массы кузова, нагружающей колеса данного моста. Таким образом, динамическая модель в данном случае представляет совокупность инерционного, упругого и диссипативного элементов, находящихся под воздействием функции микропрофиля дороги $q(t)$. Параметром упругого элемента является коэффициент жесткости c , учитывающий упругие свойства подвески и пневматической шины, а параметром диссипативного элемента — коэффициент сопротивления μ , учитывающий потери энергии в гидравлическом амортизаторе и шине при ее деформировании.

Одномассовая динамическая модель не учитывает колебаний колес. Парциальная частота колебаний колес обычно в 6...10 раз выше парциальной частоты колебаний кузова. Вследствие этого колебания колес могут вызывать вибрации элементов конструкции кузова и расположенных в нем приборов и механизмов. Кроме того, при проектировании должны быть найдены рациональные соотношения между параметрами упругих и диссипативных элементов подвески и шин. В этой связи возникает необходимость использования двухмассовой динамической модели (рис. 4.1, в). В этой модели учитывается масса части кузова m_2 , приходящаяся на колеса данного моста, масса колес и моста m_1 , коэффициенты жесткости упругих элементов подвески C_2 и шины C_1 , коэффициенты сопротивления диссипативных элементов подвески μ_2 и шины μ_1 . С учетом наложенных позиционных связей на сосредоточенные массы m_1 и m_2 они могут перемещаться только вертикально вдоль осей соответственно z_1 и z_2 . Следовательно, система имеет две степени свободы.

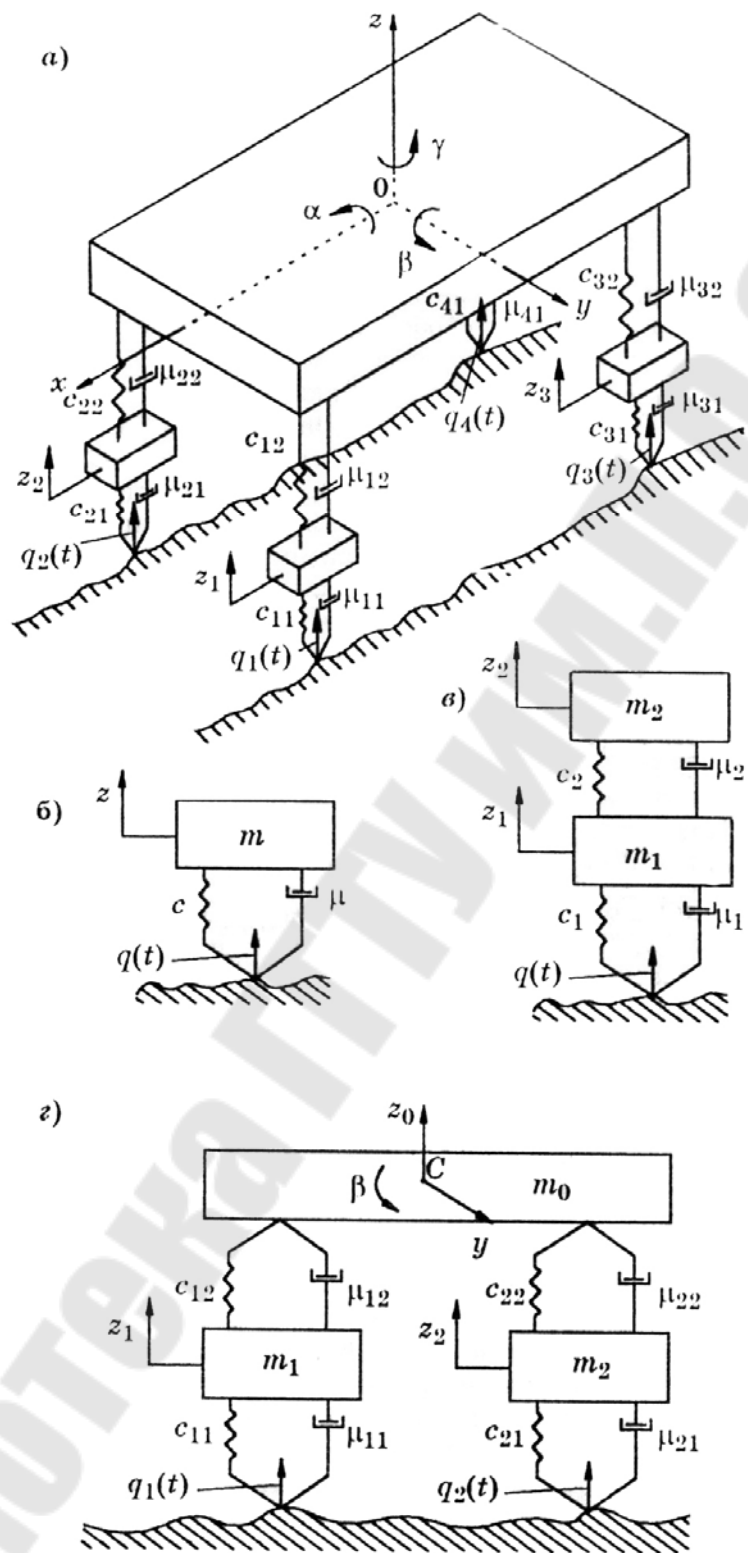


Рисунок 4.1. Динамические модели для анализа плавности хода автомобиля

Однако для более детального анализа влияния параметров подвески на колебания кузова необходимо учитывать связанность

колебаний. Кроме того, возникает необходимость оценки колебаний механизмов и приборов, расположенных в различных местах кузова. В этом случае приходим к динамической модели плоских колебаний (рис. 4.1, z), в которой учитываются не только вертикальные колебания кузова относительно оси z_0 , но и угловые продольные колебания β относительно оси y . Колебательная система имеет четыре степени свободы и ее состояние определяется фазовыми координатами z_0, β, z_1, z_2 . Аналогичная модель используется при исследовании поперечных колебаний кузова.

Таким образом, в зависимости от степени абстрагирования при описании физических свойств технического объекта получают различные динамические модели.

В заключение еще раз подчеркнем необходимость обоснованного подхода к выбору моделей на различных этапах проектирования, постепенного их усложнения при приближении к заключительному этапу. Необходимость использования большого количества разнообразных моделей в процессе проектирования одного и того же технического объекта обуславливает актуальность автоматизации их формирования.

4.3. Компонентные и топологические уравнения.

Физические свойства технического объекта в динамической модели макроуровня отображаются совокупностью взаимодействующих дискретных элементов. В зависимости от способа построения динамической модели каждый элемент может наделяться одним или несколькими физическими свойствами. При дискретизации методом функционально законченных элементов или сеточными методами элементы обычно обладают несколькими физическими свойствами и являются сложными. В методе сосредоточенных масс все элементы простые, так как каждый из них наделен только одним физическим свойством.

В данной главе рассматриваются только простые дискретные элементы.

Состояние простого элемента характеризуется одной фазовой переменной типа потока и одной переменной типа потенциала. Физическое свойство элемента описывается математической моделью, выражающей зависимость между этими фазовыми переменными. Это выражение называют компонентным уравнением.

Основные физические свойства технических объектов любой физической природы — *инерционные, упругие и диссипативные*. Они

отображаются в динамических моделях соответственно инерционными, упругими и диссипативными элементами. Фрикционные и трансформаторные элементы отображают специфические свойства, характерные не для всех технических объектов. Математическое описание этих свойств может быть различным, в зависимости от физической природы технического объекта.

Компонентные уравнения дискретных элементов могут быть получены аппроксимацией моделей микроуровня или непосредственным использованием физических законов.

Аппроксимация моделей микроуровня осуществляется путем замены всех частных производных фазовых переменных по пространственным координатам отношениями конечных разностей. Например, производную $d\varphi/dx$ заменяют выражением:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{l_x}$$

где φ_1, φ_2 — значения фазовой переменной φ на границах дискретного элемента (в узлах 1 и 2 дискретизации сплошной среды); l_x — длина дискретного элемента вдоль оси x .

Значения параметров элементов, выделяемых из сплошной среды с распределенными параметрами, усредняют.

Для математического описания физических свойств элементов могут быть также использованы физические законы. *Компонентные уравнения, полученные на основе физических законов, имеют следующий вид:*

для инерционного элемента

$$U_u = Id I_x / dt \quad (4.1)$$

для диссипативного элемента

$$U_d = D I_\delta \quad (4.2)$$

для упругого элемента

$$U_y = Y \int I_y dt \quad (4.3)$$

В уравнениях (4.1) — (4.3) приняты следующие обозначения: I, D, Y — параметры инерционного, диссипативного и упругого элементов, соответственно; I — фазовая переменная типа потока; U — фазовая переменная типа потенциала. Индексы при фазовых переменных I и U указывают на принадлежность их соответствующим элементам.

Для получения полной математической модели технической системы необходимо объединить все компонентные уравнения

элементов в общую систему уравнений. Объединение осуществляется на основе физических законов, выражающих условия равновесия и непрерывности фазовых переменных. Уравнения этих законов называют топологическими уравнениями. Они описывают характер взаимодействия между простыми элементами, устанавливая соотношения между однотипными фазовыми переменными.

Условия равновесия записываются для фазовых переменных типа потенциала:

$$\sum_i U_i = 0 \quad (4.4)$$

а условия непрерывности — для фазовых переменных типа потока:

$$\sum_k I_k = 0 \quad (4.5)$$

Форма компонентных и топологических уравнений одинакова для систем различной физической природы.

Если фазовые переменные — векторные величины, то направления векторов учитываются только топологическими уравнениями, а в компонентных уравнениях их направления не учитываются. Компонентные уравнения (4.1) — (4.3) в этом случае устанавливают соотношения лишь между модулями фазовых переменных. Это позволяет обеспечить корректное описание взаимодействия элементов системы в полной математической модели.

Топологическое уравнение для векторных переменных формулируются как равенство нулю геометрической суммы соответствующих фазовых координат, а для скалярных — равенство нулю алгебраической суммы этих координат.

Полная математическая модель технического объекта на макроуровне, составленная на основе компонентных уравнений, представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Искомые функциями в этих уравнениях являются базисные фазовые координаты I и U , а независимой переменной — время t . Размерность математической модели определяется общим порядком системы дифференциальных уравнений (или числом базисных координат). Эту модель обычно представляют в нормальной форме Коши, в которой все уравнения разрешены относительно первых производных фазовых координат dI/dt и dU/dt . Координатный базис в этом случае составляют фазовые переменные типа потока I и типа потенциала U .

Состояние сосредоточенных масс определяется фазовыми координатами типа потока. Количество таких координат

соответствует числу степеней свободы динамической модели объекта.

4.4. Компонентные и топологические уравнения механической системы

Фазовые координаты. Сосредоточенные массы, отображаемые на динамических моделях механических систем, в силу учитываемых позиционных связей, могут совершать только простейшие виды движений — поступательное и вращательное, либо сложное движение, которое представляется сочетанием этих простейших видов.

Поступательное движение твердого тела характеризуется линейной скоростью v и силой F , а вращательное — угловой скоростью ω и вращающим моментом M . Они и принимаются в качестве фазовых переменных механической системы:

фазовые переменные типа потока — скорости v , м/с и ω , рад/с;

фазовые переменные типа потенциала — силы F , N и вращающие моменты M , $N\cdot m$.

Параметры элементов. Параметром инерционного элемента при поступательном движении является масса m (кг), а при вращательном движении — момент инерции J ($кг\cdot m^2$).

Параметр диссипативного элемента — коэффициент сопротивления μ , называемый также коэффициентом неупругого сопротивления, коэффициентом вязкого трения, коэффициентом демпфирования. При поступательном движении он измеряется в $N\cdot c/m$, а при вращательном — $N\cdot m\cdot c/рад$.

Параметр упругого элемента — коэффициент жесткости c . При поступательном движении в качестве единицы измерения c используется N/m , а при вращательном — $N\cdot m/рад$.

Компонентные уравнения. *Компонентное уравнение инерционного элемента* получают на основе второго закона Ньютона. Для поступательного движения твердого тела уравнение имеет вид:

$$F_u = m \frac{dv_u}{dt}, \quad (4.6)$$

а для вращательного:

$$M_u = J \frac{d\omega_u}{dt}, \quad (4.7)$$

где F_u , M_u — соответственно сила инерции и момент сил инерции (или инерционный момент) элемента; v_u , ω_u — скорости инерционного элемента.

Скорости v_u и ω_u представляют собой абсолютные скорости сосредоточенных масс соответственно при поступательном и вращательном движениях. Если твердое тело совершает сложное движение, то для каждого вида движения составляется свое компонентное уравнение инерционного элемента.

Математическое описание *диссипативного элемента* основано на использовании закона Ньютона для вязкого трения. При поступательном движении компонентное уравнение имеет вид:

$$F_d = \mu v_d, \quad (4.8)$$

а при вращательном

$$M_d = \mu \omega_d \quad (4.9)$$

где F_d , M_d — соответственно сила и момент вязкого трения; v_d , ω_d — скорости диссипативных элементов.

Согласно закону Гука сила упругости деформируемого механического элемента пропорциональна величине деформации:

$$F_y = c \Delta$$

где Δ — деформация элемента: $\Delta = x_1 - x_2$; x_1 , x_2 — перемещения узлов дискретизации 1 и 2 (или выделенных сосредоточенных масс).

Выражая перемещения x через фазовые переменные v или ω , получаем следующие *компонентные уравнения упругих элементов*: при поступательном движении

$$F_y = c \int v_y dt \quad (4.10)$$

при вращательном движении

$$M_y = c \int \omega_y dt \quad (4.11)$$

где F_y , M_y — соответственно сила и момент упругих элементов; v_y или ω_y — скорости деформации упругих элементов.

Упругие и диссипативные элементы в динамической модели соединяют между собой сосредоточенные массы (рис. 4.1). В этой связи скорости этих элементов v_y , ω_y , v_d , ω_d представляют собой относительные скорости соединяемых ими сосредоточенных масс:

$$v_{yj} = v_i - v_{i+1},$$

где v_{yj} — скорость деформации j -го упругого элемента; v_{dk} — скорость k -го диссипативного элемента; v_i , v_{i+1} — скорости i -й и $(i+1)$ -й сосредоточенных масс (твердых тел), соединяемых j -м упругим и k -м диссипативным элементами.

Скорости упругих и диссипативных элементов при вращательном движении твердых тел определяются аналогичными выражениями.

Силы F_u , F_y , F_D и моменты M_u , M_y , M_D инерционных, упругих и диссипативных элементов характеризуют их взаимодействия в динамической модели. Они представляют собой *внутренние силы системы*.

При движении системы под действием приложенных к ней внешних сил и моментов происходит изменение ее кинетической и потенциальной энергий, а часть энергии затрачивается на преодоление сил трения. Инерционные элементы динамической модели отображают свойство системы накапливать кинетическую энергию, упругие элементы — свойство накапливать потенциальную энергию, а диссипативные — рассеивать энергию потерь на трение путем превращения механической энергии в тепловую.

Топологические уравнения. Первое топологическое уравнение является уравнением равновесия. Оно выражает принцип Даламбера: геометрическая сумма всех сил, приложенных к твердому телу, включая силу инерции, равна нулю:

$$\sum_i \bar{F}_i = 0 \quad (4.12)$$

Уравнение (4.12) соответствует поступательному движению твердого тела. При вращательном движении используется уравнение

$$\sum_i \bar{M}_i = 0 \quad (4.13)$$

Второе топологическое уравнение определяет условие непрерывности фазовых координат типа потока. Оно выражает принцип сложения скоростей при сложном движении твердого тела: геометрическая сумма абсолютной, относительной и переносной скоростей равна нулю:

$$\sum_k \bar{v}_k = 0 \quad (4.14)$$

$$\sum_k \bar{\omega}_k = 0 \quad (4.15)$$

Количество составляемых топологических уравнений вида (4.12) и (4.13) равно числу степеней свободы моделируемой системы.

Если компонентные уравнения (4.6) — (4.11) записать в векторной форме, то в правых частях необходимо поставить знак минус. Это обусловлено тем, что сила инерции \bar{F}_u и инерционный момент \bar{M}_u направлены противоположно соответствующим ускорениям $\frac{d\bar{v}_u}{dt}$ и $\frac{d\bar{\omega}_u}{dt}$, сила и момент трения \bar{F}_D и \bar{M}_D противоположны относительным скоростям сосредоточенных масс \bar{v}_D и $\bar{\omega}_D$, а сила и момент упругих элементов \bar{F}_y и \bar{M}_y

противоположны вектору деформации $\bar{\Delta}$ (или соответственно относительным скоростям деформации \bar{v}_y и $\bar{\omega}_y$). Однако, компонентные уравнения при использовании метода сосредоточенных масс следует записывать без учета знаков фазовых координат, а их знаки необходимо учитывать лишь в топологических уравнениях.

4.5. Компонентные и топологические уравнения гидравлической системы

В гидравлической системе фазовыми переменными типа потока являются расходы Q ($\text{м}^3/\text{с}$), а типа потенциала — давления p ($\text{Н}/\text{м}^2=\text{Па}$).

При выводе компонентных уравнений используем уравнения Эйлера, Навье-Стокса и Гука, полученные для одномерной системы с распределенными параметрами.

Для перехода к модели с сосредоточенными параметрами осуществим аппроксимацию моделей микроуровня путем замены частных производных фазовых переменных по пространственным координатам отношениями конечных разностей.

Уравнение Эйлера для трубопровода постоянного сечения:

$$dv/dt = -\rho^{-1} dp/dx \quad (4.16)$$

где v — скорость потока жидкости в трубопроводе; ρ — плотность жидкости; x — геометрическая координата.

Разделим трубопровод на ряд участков длиной l и заменим частную производную dp/dx отношением конечной разности:

$$dp/dx = -(p_1 - p_2)/l = -p/l \quad (4.17)$$

где p_1, p_2 — давления в узлах дискретизации 1 и 2, т. е. на границах выделенных участков трубопровода. Здесь учтено, что градиент давления вдоль трубопровода $\text{grad } p = dp/dx$ отрицателен (давление падает по мере удаления от источника).

Расход жидкости в трубопроводе Q выразим через скорость потока и

$$Q = Av, \quad (4.18)$$

где A — площадь поперечного сечения трубопровода.

Подставим значения dp/dx из (4.17) и v из (4.18) в уравнение (4.16) и найдем выражение для определения p :

$$p = \frac{(\rho l) dQ}{A dl}.$$

Введем обозначение

$$m_{\Gamma} = \frac{\rho V}{A^2} = \frac{m_{жс}}{A^2} \quad (4.19)$$

где m_{Γ} — коэффициент массы (кг/м⁴); V — объем жидкости в выделенном участке трубопровода длиной l : $V=Al$; $m_{жс}$ — масса жидкости в этом участке.

С учетом (4.19) уравнение Эйлера (4.16) после дискретизации приводится к виду:

$$p_u = \frac{m_{\Gamma} dQ_{II}}{dt} \quad (4.20)$$

Сопоставляя (4.20) с выражением (4.1), приходим к выводу, что уравнение Эйлера отображает только инерционные свойства жидкости.

Рассмотрим *линеаризованное уравнение Навье—Стокса*:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{-r^{-1}\partial\rho}{\partial x} - (2\zeta / \rho)v, \quad (4.21)$$

где ζ — коэффициент линеаризованного вязкого трения жидкости.

Учитывая выражения (4.17) и (4.18), получаем:

$$\rho = \left(\frac{rl}{A}\right)\frac{dQ}{dt} + \left(\frac{2\zeta l}{A}\right)Q,$$

Введем обозначение:

$$\mu_{\Gamma} = 2\left(\frac{\zeta l}{A}\right) = \frac{2\zeta V}{A^2}, \quad (4.22)$$

где μ_{Γ} — коэффициент гидравлического сопротивления (Н*с/м⁵).

С учетом выражений (4.19) и (4.22) уравнение Навье—Стокса после дискретизации приводится к виду:

$$p = \frac{m_{\Gamma} dQ}{dt} + \mu_{\Gamma} Q, \quad (4.23)$$

Из выражения (4.23) следует, что *уравнение Навье-Стокса отображает инерционные и диссипативные свойства жидкости*. В этом случае $p=p_{II}+p_{Д}$, где $p_{Д}$ — величина потерь давления на преодоление трения при движении потока жидкости в трубопроводе, а p_{II} — затраты давления на разгон жидкости. Полагая p_{II} и $p_{Д}$ аддитивными величинами, выделим инерционный и диссипативный элементы участка трубопровода. Компонентное уравнение инерционного элемента соответствует выражению (4.20), а диссипативного элемента имеет вид:

$$p_{Д} = \mu_{\Gamma} Q_{Д} \quad (4.24)$$

Уравнение Гука:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -E \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (4.25)$$

позволяет учесть *упругие свойства жидкости*. Выразим скорость потока v через расход Q по формуле (4.18) и получим:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = A^{-1} \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Заменим $\frac{\partial Q}{\partial x}$ отношением конечной разности:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = - \frac{(Q_1 - Q_2)}{l} = - \frac{Q_y}{l}, \quad (4.26)$$

где Q_1, Q_2 — расходы в узлах дискретизации трубопровода 1 и 2; Q_y — изменение расхода, обусловленное сжимаемостью жидкости. В выражении (4.26) учтено, что при возрастании давления происходит увеличение объемной деформации жидкости, и величина расхода жидкости при удалении от источника уменьшается.

На основе уравнения (4.25) с учетом выражения (4.26) найдем выражение для определения давления упругого элемента, полагая E не зависящим от p :

$$p_y = \frac{E}{Al} \int Q_y dt, \quad (4.27)$$

Введем обозначение:

$$c_\Gamma = E(Al)^{-1} = E/V, \quad (4.28)$$

где c_Γ — коэффициент гидравлической жесткости (Н/м^5); E — модуль объемной упругости жидкости (Н/м^2).

В результате получаем *компонентное уравнение упругого элемента гидравлической системы*:

$$p_y = c_\Gamma \int Q_y dt \quad (4.29)$$

Фазовые переменные p_u, p_y, p_d , представляют собой *внутренние потенциалы исследуемой гидравлической системы*, характеризующие взаимодействие выделенных дискретных элементов и определяющие потери давления источника на преодоление сил инерции жидкости и сообщение ей кинетической энергии, на деформацию жидкости и изменение ее потенциальной энергии, а также на преодоление сил внутреннего трения жидкости.

Коэффициенты m_Γ, c_Γ и μ_Γ являются параметрами соответственно инерционных, упругих и диссипативных элементов гидравлической системы.

Топологические уравнения имеют вид:

$$\sum_i p_i = 0 \quad (4.30)$$

$$\sum_K Q_K = 0 \quad (4.31)$$

Первое уравнение выражает *условие равновесия потенциалов*, действующих на сосредоточенные массы, а второе — *условие непрерывности потоков жидкости*.

Пример.

На основе метода сосредоточенных масс необходимо построить динамическую модель гидравлической магистрали.

При построении динамической модели гидравлической магистрали ее разделяют на ряд участков и выделяют в них простые дискретные элементы — инерционные, диссипативные и упругие (рис. 4.2). Упругие элементы гидравлической системы должны учитывать не только сжимаемость жидкости, но и деформируемость трубопровода. Определение c_{Γ} , с учетом упругих свойств газожидкостной смеси и трубопроводов рассмотрено ранее.

Фрагмент динамической модели гидравлической магистрали после ее дискретизации представлен на рис. 4.2. Модель содержит две сосредоточенные массы, характеризуемые коэффициентами масс $m_{\Gamma 1}$ и $m_{\Gamma 2}$, два диссипативных элемента, обозначенных в виде постоянных дросселей с коэффициентами гидравлических сопротивлений $\mu_{\Gamma 1}$ и $\mu_{\Gamma 2}$, и один упругий элемент с коэффициентом гидравлической жесткости c_{Γ} , отображаемый в гидравлических схемах в виде гидроаккумулятора. Внешние воздействия на систему представлены в виде источников потенциалов p_{B1} и p_{B2} — давлений источника и потребителя.

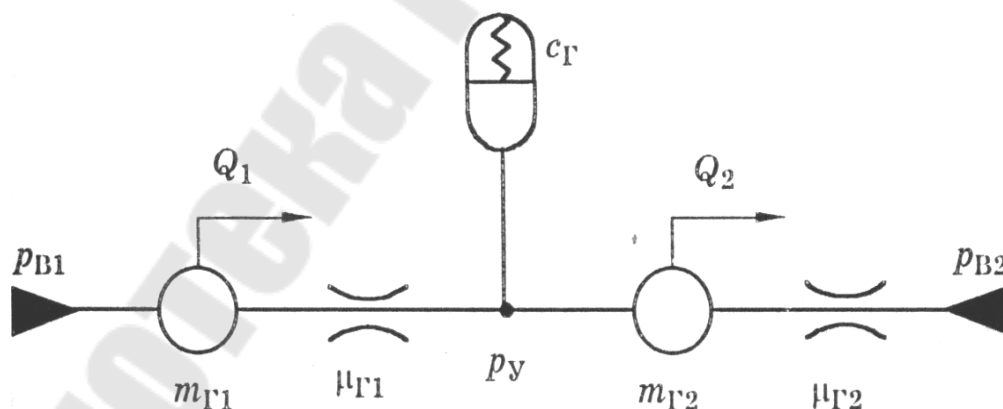


Рисунок 4.2. Динамическая модель гидравлической магистрали

Из рис. 4.2 следует, что фазовые переменные типа потока Q_{ui} и Q_{di} , характеризующие состояния инерционных и диссипативных элементов, равны абсолютным расходам жидкости в выделенных участках гидромагистрали Q_1 и Q_2 , т. е. равны фазовым координатам сосредоточенных масс. Отсюда следует, что потери давления p_d на

преодоление сил внутреннего трения жидкости, определяемые уравнением (4.24), зависят от абсолютной скорости жидкости в трубопроводе.

Фазовая переменная типа потока Q_y упругого элемента равна разности расходов жидкости в смежных участках трубопровода, т. е.

$$Q_y = Q_1 - Q_2.$$

4.6. Определение параметров элементов динамических моделей технических объектов.

4.6.1. Определение параметров элементов динамических моделей механической системы.

Параметры инерционных элементов — массы m и моменты инерции J и упругих элементов — коэффициенты жесткости c определяют по известным формулам теоретической механики.

Параметры диссипативных элементов — коэффициенты сопротивлений μ можно найти, используя априорную информацию об относительных коэффициентах затухания колебаний γ (коэффициентах апериодичности). Значения γ обусловлены трением в конструктивных элементах технической системы, возникающим в результате их деформации и взаимных микроперемещений сочлененных деталей. Влияние трения в материале для металлических конструкций обычно во много раз меньше, чем трения в сочленениях деталей. В деталях, изготовленных из полимеров (резина, пластмасса и др.), трение значительно больше, чем в аналогичных металлических деталях (значение γ примерно в 100 раз выше). В зависимости от конструктивного исполнения технической системы упругие элементы ее динамической модели могут отображать как отдельные сплошные (неделимые) детали, обладающие сравнительно небольшой жесткостью (например, пружины, длинные валы), так и целый ряд сочлененных деталей. В этой связи величина γ колеблется в значительных пределах: $\gamma = 0,03 \dots 1,0$. Для гашения колебаний применяют специальные демпфирующие элементы (резиновые муфты, гидравлические амортизаторы и др.), позволяющие значительно увеличить γ и снизить амплитуды колебаний.

Коэффициент сопротивления μ_j j -го диссипативного элемента механической системы зависит не только от γ_j , но и от параметров элементов динамической модели, непосредственно примыкающих к

данному диссипативному элементу. При определении значений μ_j , используют парциальные системы.

Парциальной системой называется частичная одночастотная подсистема, выделяемая из динамической модели технического объекта. Она имеет только одну частоту собственных колебаний, называемую *собственной парциальной частотой*. На рис. 4.3 показаны динамические модели парциальных систем объектов механической природы с вращательным движением сосредоточенных масс. Особенность структуры парциальной системы состоит в том, что она содержит один базовый элемент и некоторое множество взаимодействующих с ним элементов с иными физическими свойствами по сравнению с базовым элементом. На рис. 4.3, а, в, д базовым является инерционный элемент с параметром J_i , а на рис. 3.3, б, г, е — упругий элемент с параметром c_j . Парциальные системы, показанные на рис. 3.3, а, б называют простыми, а на рис. 3.3, в - е - сложными.

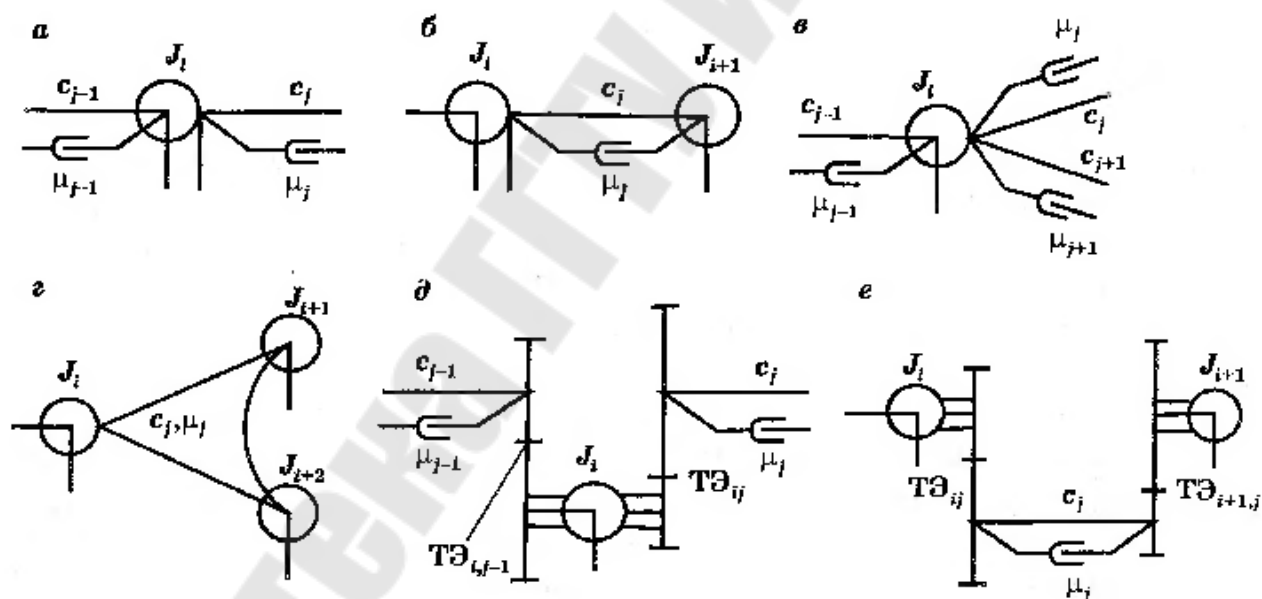


Рисунок 4.3. Динамические модели парциальных систем: а, в, д - с инерционным базовым элементом; б, г, е - с упругим базовым элементом

Собственная парциальная частота определяется без учета диссипативных элементов. Это частота свободных незатухающих колебаний парциальной системы. Для системы с инерционным базовым элементом она вычисляется по формуле:

$$\omega_i = \sqrt{\sum_{j=1}^K c_j^* / J_i},$$

а для системы с упругим базовым элементом

$$\omega_j = \sqrt{\frac{c_j}{J_j^*}},$$

где c_j^* - приведенный к i -му инерционному базовому элементу коэффициент жесткости j -го упругого элемента; K - количество упругих элементов, входящих в парциальную систему; J_j^* - параметр эквивалентного приведенного инерционного элемента, кинетическая энергия которого равна сумме кинетических энергий всех инерционных элементов парциальной системы.

Рассмотрим вначале парциальные системы с инерционным базовым элементом (рис. 4.3, а, в, д). Необходимость определения параметра c_j^* возникает при наличии в парциальной системе трансформаторных элементов., что характерно для системы на рис. 4.3, д. Значение параметра c_j^* определяется из условия равенства потенциальных энергий исходного упругого элемента с параметром c_j и приведенного упругого элемента с параметром c_j^* . Если упругий элемент расположен на входе инерционного элемента, как c_{j-1} на рис. 4.3, д, то приведенный коэффициент жесткости этого элемента c_{j-1}^* получают умножением c_{j-1} на квадрат передаточного числа $u_{i,j-1}$ трансформаторного элемента $TЭ_{i,j-1}$, а если на выходе, то делением:

$$c_{j-1}^* = c_{j-1} \cdot u_{i,j-1}^2; c_j^* = \frac{c_j}{u_{i,j}^2}.$$

Вход и выход базового элемента определяются по направлению передаваемого через динамическую систему потока энергии. Передаточное число трансформаторного элемента равно отношению скорости па его входе к скорости на выходе.

При отсутствии трансформаторных элементов (рис. 4.3, а, в) частота свободных незатухающих колебаний определяется:

$$\omega_i = \sqrt{\sum_{j=1}^K c_j / J_i},$$

Рассмотрим определение параметра J_j^* для парциальных систем с упругим базовым элементом. При отсутствии трансформаторных элементов (рис. 4.3, б, з):

$$J_j^* = \frac{1}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{J_i}},$$

где N - количество инерционных элементов, входящих в парциальную систему.

Если же парциальная система содержит трансформаторные элементы (рис. 4.3, *e*), то в последнюю формулу вместо J_i необходимо подставлять приведенные к упругому базовому элементу моменты инерции J^* . Значение J^* определяется из условия равенства кинетических энергий исходного инерционного элемента с параметром J_i и приведенного с параметром J_i^* . Если инерционный элемент расположен на входе базового упругого элемента, то J_i умножают на квадрат передаточного числа трансформаторного элемента, а если на выходе, тогда делят. Для парциальной системы на рис. 4.3, *e*:

$$J_i^* = J_i \cdot u_{ij}^2; \quad J_{i+1}^* = J_{i+1} / u_{i+1,j}^2$$

Рассмотрим парциальные системы с трансформаторными элементами (рис. 4.4). Пусть энергия в системе (рис. 4.4, *a*) передается от массы m_1 к массе m_2 , или (рис. 4.4, *б*) от массы J_1 к массе J_2 . Обе системы имеют по два трансформаторных элемента $TЭ_1$ и $TЭ_2$.

В поступательной системе (рис. 4.4, *a*) трансформаторные элементы отображают рычажные передачи. Передаточное число $TЭ_1$ найдем через отношение скоростей точек A и B , а передаточное число $TЭ_2$ - скоростей точек D и E :

$$u_1 = \frac{v_A}{v_B} = -\frac{l_{11}}{l_{12}}; \quad u_2 = \frac{v_D}{v_E} = \frac{l_{21}}{l_{22}}.$$

Так как $TЭ_1$ расположен на входе в упругий элемент, а $TЭ_2$ — на его выходе, то значение m^* вычислим по формуле:

$$m^* = \frac{m_1 u_1^2 m_2 (u_2^2)^{-1}}{m_1 u_1^2 + \frac{m_2}{u_2^2}}.$$

Аналогично определяется J^* для парциальной вращательной системы (рис. 4.4, *б*):

$$J^* = \frac{J_1 u_1^2 J_2 (u_2^2)^{-1}}{J_1 u_1^2 + \frac{J_2}{u_2^2}},$$

где u_1 и u_2 - передаточные числа $TЭ_1$ и $TЭ_2$, отображающие зубчатые передачи:

$$u_1 = \frac{\omega_1}{\omega_{12}} = -\frac{z_{12}}{z_{11}}; u_2 = \frac{\omega_{12}}{\omega_2} = -\frac{z_{22}}{z_{21}},$$

где z_{ij} – числа зубьев передач.

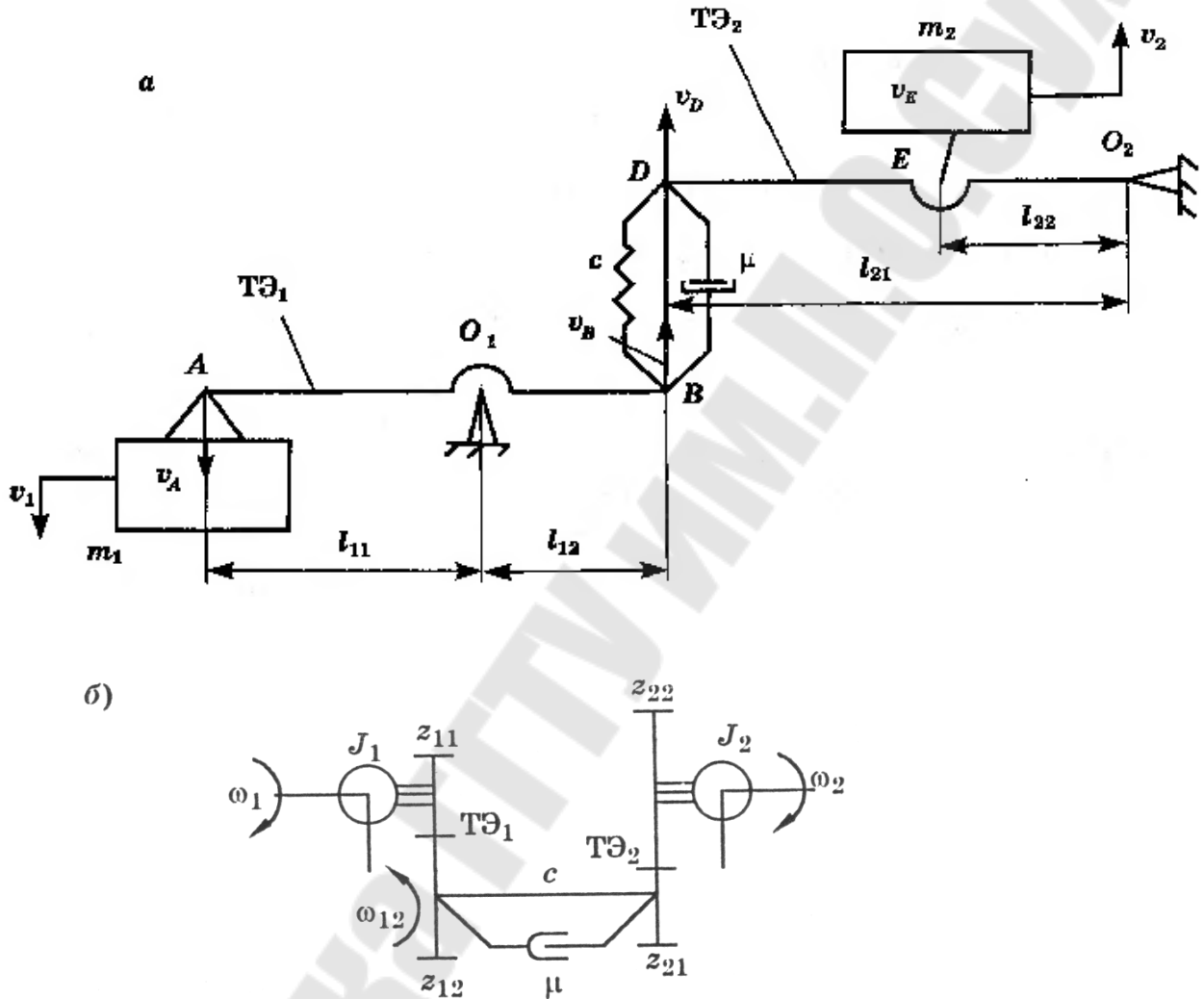


Рисунок 4.4. Парциальные системы с трансформаторными элементами $TЭ_1$ и $TЭ_2$: *a* — поступательная, *б* — вращательная

При определении параметров диссипативных элементов используются парциальные системы с упругим базовым элементом. Значение μ_j определяется по формуле:

$$\mu_j = 2\gamma_j J_j^* \omega_j.$$

Таким образом при поступательном движении твердых тел (рис. 4.4, *a*) в формулы вместо моментов инерции J_i и J_j подставляют значения масс m_i и m_j^* . На рис. 4.5 показан пример выделения парциальной системы с упругим базовым элементом c_j из динамической модели механической поступательной системы.

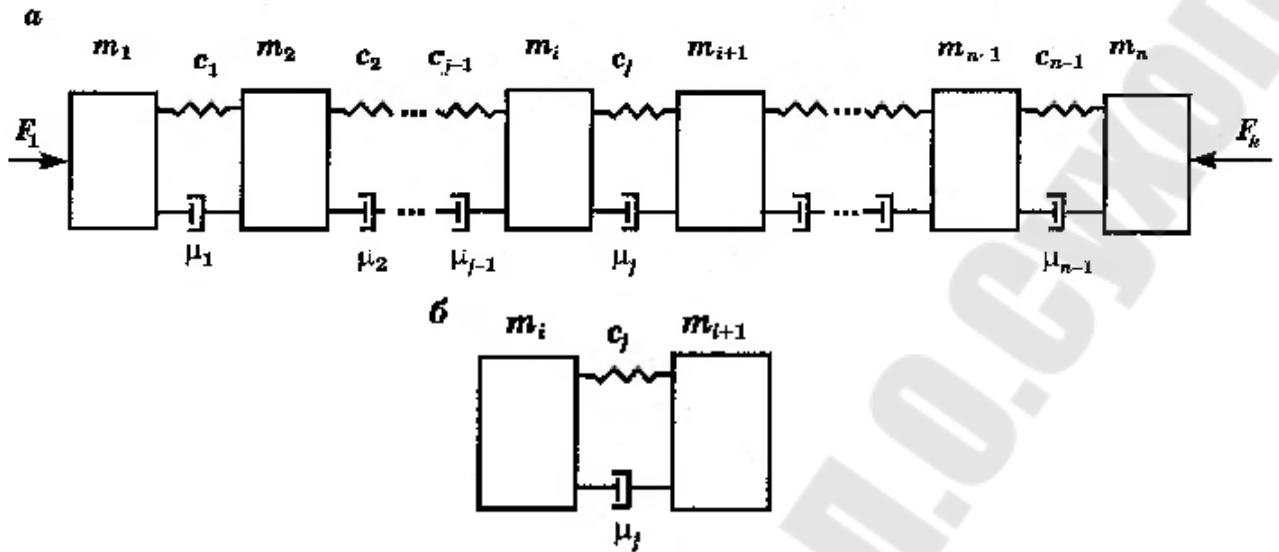


Рисунок 4.5. Динамическая модель механической поступательной системы (а) и выделенная из нее парциальная система (б)

4.6.2. Определение параметров элементов динамических моделей гидравлической системы.

Если при дискретизации гидравлической магистрали выделенные участки трубопровода имеют постоянное сечение, то параметры инерционных элементов m_2 определяют по формуле (4.19).

Если же какой-либо участок трубопровода имеет сложную конфигурацию и состоит из нескольких частей различного поперечного сечения, тогда используется формула:

$$m_2 = \rho \sum_{i=1}^n \frac{V_i}{A_i^2}$$

где V_i — объем i -ой части участка трубопровода; A_i - площадь поперечного сечения этой части; n - число частей.

Компонентное уравнение диссипативного элемента гидравлической системы, получено на основе линеаризованного уравнения Навье—Стокса и имеет вид:

$$p_d = \mu_2 Q_2 = \mu_2 A v,$$

где v — скорость потока жидкости в трубопроводе.

В реальной гидравлической системе трение носит более сложный, нелинейный характер. Значение μ_2 зависит от режима движения жидкости в трубопроводе. Различают два режима: *ламинарный* и *турбулентный*. Переход от ламинарного к турбулентному наступает при определенных условиях, характеризуемых числом Рейнольдса:

$$Re = \frac{vd}{\nu},$$

где d — диаметр трубопровода, м; ν — коэффициент кинематической вязкости жидкости (m^2/c , при температуре $T=323^\circ K$ для моторного масла $\nu=62 \cdot 10^{-4}$, а для масла АУП $\nu=15 \cdot 10^{-6}$).

При $Re < 2300$ режим движения жидкости *ламинарный*. Потери давления по длине трубопровода определяются по формуле Пуазейля:

$$p_{Дл} = \frac{8\rho\nu lv}{A}.$$

Значение коэффициента гидравлического сопротивления участка трубопровода длиной l при ламинарном режиме:

$$\mu_{эл} = \frac{25,2\rho lv}{A^2}.$$

При $Re \geq 2300$ режим движения жидкости *турбулентный*. Потери давления по длине трубопровода определяются по формуле:

$$p_{Дл} = \frac{0,443\lambda_m \rho v^2 l}{\sqrt{A}},$$

где λ_m — коэффициент потерь на трение при турбулентном потоке. (Его значение зависит от шероховатости стенок трубопровода и находится в пределах $\lambda_m=0,025 \dots 0,030$).

Для определения λ_m может быть использована формула Блазиуса:

$$\lambda_m = 0,3164 \cdot Re^{-0,25}.$$

На основании полученных зависимостей и принимая $p_{Дл} = p_{Д}$, получаем выражение для определения коэффициента гидравлического сопротивления участка трубопровода при турбулентном режиме:

$$\mu_{эл} = \frac{0,433\lambda_m \rho l |Q|}{A^2 \sqrt{A}}.$$

Так как $\mu_{эл}$ величина положительная, а фазовая переменная Q - расход жидкости может иметь любой знак, то в последней формуле принимают абсолютную величину Q .

Кроме потерь по длине трубопровода существуют местные потери давления, обусловленные резким изменением величины и (или) направления скорости потока жидкости (сужение, расширение, поворот трубопровода и т. п.). Местные потери давления определяют по формуле:

$$p_{Дл} = 0,5\xi\rho v^2,$$

где ξ - коэффициент местного сопротивления (безразмерная величина).

Принимая $p_{Дм} = p_{Д}$, находим выражение для определения коэффициента гидравлического сопротивления, учитывающего местные потери:

$$\mu_{zm} = \frac{0,5\xi\rho|Q|}{A^2}.$$

В динамических процессах режим движения жидкости в трубопроводе может изменяться в широких пределах. Поэтому при анализе переходных процессов для оценки потерь по длине трубопроводов используют сумму коэффициентов μ_{zl} , μ_{zm} , μ_{zm} а коэффициент гидравлического сопротивления участка трубопровода определяют по формуле:

$$\mu_z = \mu_{zl} + \mu_{zm} + \mu_{zm} = \frac{25,2\rho vl}{A^2} + \left(\frac{0,433\lambda_m \rho l}{A^2 \sqrt{A}} + \frac{\xi\rho}{2A^2} \right) |Q|.$$

Коэффициент жесткости c_z дискретного объема жидкости V определяется по формуле:

$$c_z = \frac{E}{V}.$$

Сжимаемость жидкости незначительна, но в процессе работы гидроприводов рабочая жидкость вспенивается и насыщается нерастворенным воздухом. Модуль объемной упругости газожидкостной смеси E_c оказывается гораздо меньше модуля упругости жидкости, особенно при небольших давлениях - до 6...10 МПа. Кроме того, при определении коэффициента c_z необходимо учитывать упругие свойства трубопровода. Во многих случаях деформация стенок трубопровода значительно снижает жесткость гидропривода.

Коэффициент жесткости упругого элемента зависит также от вида соединения выделенных дискретных элементов - участков трубопровода и их параметров. В общем случае они могут иметь различные геометрические размеры - диаметры, толщины и длины, а также изготавливаться из различных материалов (сталь, латунь, эластичные шланги из резины или пластмассы и др.).

При последовательном соединении двух участков трубопровода коэффициент жесткости c_z определяется зависимостью:

$$c_z = \frac{\prod_{j=1}^2 c_{zj}}{\sum_{j=1}^2 c_{zj}},$$

а при разветвлении трубопровода (объединённых в одном узле):

$$c_e = \frac{1}{\sum_{j=1}^N \frac{1}{c_{ej}}},$$

где c_{ej} - коэффициент жесткости j -го участка трубопровода; N – число ветвей трубопровода, примыкающих к узлу ветвления.

Коэффициент жесткости j -го участка трубопровода определяется с использованием формулы:

$$c_{ej} = \frac{E_{npj}}{V_j \psi_j} = \frac{E_{npj} \delta_{npj} E_c}{V_j \psi_j (1 + d_{mp})},$$

где E_{npj} – приведенный модуль упругости газожидкостной смеси j -го участка трубопровода; V_j – объем j -го участка трубопровода; ψ_j – доля объема жидкости j -го участка трубопровода, отнесенная к данному упругому элементу; E_c – модуль объемной упругости газожидкостной смеси; E_{npj} – модуль упругости материала j -го участка трубопровода; d_{npj} , δ_{npj} – диаметр и толщина стенки j -го участка трубопровода.

4.6.3. Определение параметров элементов динамических моделей гидромеханической системы.

К ней относятся различные гидроприводы, содержащие совокупность взаимодействующих механических и гидравлических элементов. В гидромеханической системе используются такие же фазовые переменные, как и в гидравлической, т.е. переменные типа потока — расходы Q и переменные типа потенциала — давления p . Так как в механической системе фазовые переменные иные, то параметры элементов динамической модели гидромеханической системы необходимо определять как для комплексных разнородных систем.

Коэффициент массы вычисляется по формуле:

$$m_{zm} = m_m + m_{zж} = \sum_{i=1}^n \frac{m_m + \rho V_i}{A_i^2}$$

где m_m - масса механических частей технической системы, отнесенная к данному инерционному элементу (например, масса поршня цилиндра с присоединенными к нему деталями рабочих органов машины или механизма); V - объем жидкости гидромеханической системы, отнесенный к данному инерционному элементу.

В общем случае объем V переменный. В частности, объем полости гидроцилиндра зависит от перемещения поршня x :

$$V = V_0 \pm Ax$$

где V_0 - начальный объем гидроцилиндра (в исходном положении поршня); A - площадь поперечного сечения гидроцилиндра; знак «+» принимается, если при увеличении координаты x объем цилиндра возрастает, а знак «-» - в противном случае.

Коэффициент гидравлического сопротивления μ_2 для дискретных элементов, определяют по формулам для гидравлических систем.

Коэффициенты жесткости, упругих элементов гидромеханической системы определяют по формуле:

$$c_{2m} = c_{2j} + \frac{c_{mj}}{A_j^2},$$

где c_{2j} - коэффициент гидравлической жесткости упругого компонента гидравлической природы, подсоединенного к гидроцилиндру (или иному гидромеханическому объекту); c_{mj} - коэффициент жесткости механического упругого компонента.

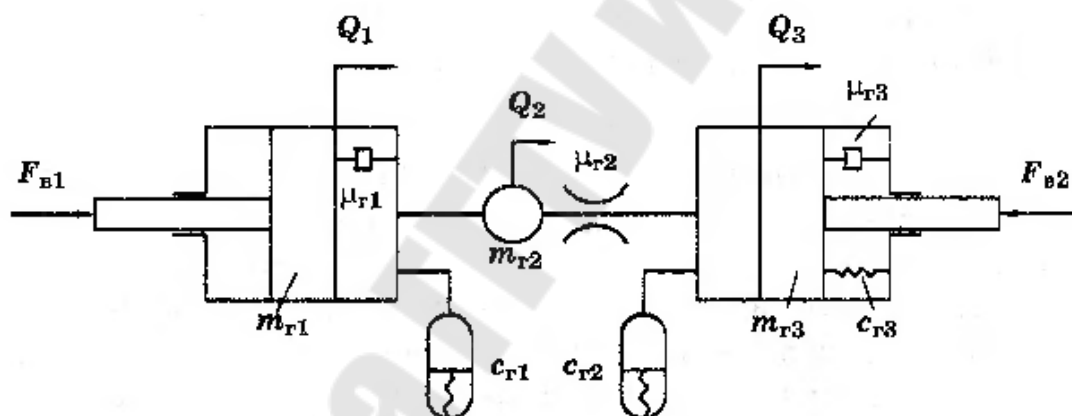


Рисунок 4.6. Динамическая модель гидропривода

Типичный механический компонент гидромеханической системы - возвратная пружина поршня или гидроаппарата (клапана, распределителя и др.). При наличии возвратной пружины часто упругими свойствами гидравлического компонента пренебрегают и коэффициент гидравлической жесткости определяют по формуле:

$$c_2 = \frac{c_{en}}{A^2},$$

где c_{en} - коэффициент жесткости возвратной пружины; A - площадь поперечного сечения гидроцилиндра или гидроаппарата, находящаяся под нагрузкой. Если гидроцилиндр связан с рабочим органом машины или механизма, необходимо учитывать жесткость

привода этого органа, а также жесткость элементов внешней среды, взаимодействующих с рабочим органом.

Например, рассмотрим определение параметров системы гидропривода (динамическая модель которого приведена на рис. 4.6).

В динамическую модель (рис.4.6) входят три сосредоточенных массы, три упругих элемента с коэффициентами гидравлической жесткости c_{2j} и три диссипативных элемента с коэффициентами гидравлического сопротивления μ_{2k} . Коэффициенты масс инерционных элементов m_{21} и m_{23} определены с учетом масс поршней и объемов жидкости в полостях гидроцилиндров, а коэффициент m_{22} учитывает массу жидкости в гидравлической магистрали.

При определении коэффициентов гидравлической жесткости c_{21} и c_{22} рассматриваются физические свойства двух компонентов. Одним из них является половина длины гидравлической магистрали, а вторым - полость гидроцилиндра. Для обоих компонентов определяется коэффициент жесткости рассматриваемого участка по формуле:

$$c_{2j} = \frac{E_{npj}}{V_j \psi_j} = \frac{E_{mpj} \delta_{mpj} E_c}{V_j \psi_j (1 + d_{mp})},$$

а затем находится значение c_{22} , как для последовательного соединения участков трубопровода. При вычислении коэффициент жесткости для гидроцилиндра параметры d_{mp} и δ_{mp} в формуле соответствуют его диаметру и толщине стенок соответственно.

Коэффициент гидравлической жесткости возвратной пружины c_{23} находится по формуле:

$$c_{23} = \frac{c_{6n}}{A^2}.$$

Коэффициенты гидравлического сопротивления μ_{21} и μ_{23} характеризуют потери на трение при перемещении поршня относительно цилиндра. Основная доля потерь при этом определяется уплотнительным устройством гидроцилиндра. Коэффициент μ_{22} характеризует потери давления в гидравлической магистрали, а также на ее входе и выходе.

Состояния сосредоточенных масс определяются фазовыми координатами типа потока - расходами жидкости в гидроцилиндрах Q_1 и Q_3 и в гидравлической магистрали Q_2 . Число степеней свободы равно количеству этих координат.

Так как фазовыми переменными типа потенциала в гидромеханической системе принимают давления, то силы внешних

воздействий F_{B1} и F_{B2} на поршни гидроцилиндров при построении математической модели необходимо преобразовать в давления:

$$p_{e1} = \frac{F_{e1}}{A_1}; p_{e2} = \frac{F_{e2}}{A_3},$$

где A_1 и A_3 - площади поперечных сечений соответствующих гидроцилиндров.

Потенциалы упругих p_{yj} , диссипативных $p_{Дк}$ и инерционных $p_{иi}$ элементов, характеризующих их состояния, являются внутренними распределенными силами системы.

ТЕМА 5. ПОСТРОЕНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ НА МАКРОУРОВНЕ

5.1. Способы построения теоретических моделей

При моделировании технических объектов на макроуровне они рассматриваются как динамические системы с сосредоточенными параметрами. Описание процессов их функционирования дается системами обыкновенных дифференциальных уравнений. При построении теоретических моделей используется два подхода: физический и формальный. *Физический подход* основан на непосредственном применении физических законов, а *формальный* использует общие математические принципы при описании физических свойств объектов. Общим в использовании обоих подходов является необходимость построения динамической модели объекта.

Структура динамической модели представляется в виде совокупности взаимодействующих дискретных элементов, каждый из которых наделен соответствующими физическими свойствами. Набор элементов и их свойства определяются способом структурирования.

В динамической модели, построенной на основе метода сосредоточенных масс, все элементы простые. Простой элемент наделен только одним физическим свойством и описывается компонентным уравнением, составленным с использованием соответствующего физического закона. Взаимодействия между элементами динамической модели описываются топологическими уравнениями, выражающими условия равновесия и непрерывности фазовых координат. Топологические уравнения позволяют объединить все компонентные уравнения в общую систему уравнений и получить полную математическую модель технического объекта.

В теме 4 рассмотрено на основе физического подхода получение компонентных и топологических уравнений для технических объектов различной физической природы и установлены между элементами этих объектов динамические аналогии. Структурирование технических систем при этом выполнялось методом сосредоточенных масс и методом сеток (метод конечных разностей).

При формировании математической модели технического объекта на основе компонентных и топологических уравнений используют следующие способы: узловый, контурный, метод переменных состояния, табличный метод.

Наибольшую известность и широкое применение получил *узловой метод*. Он основан на использовании топологических уравнений, выражающих условия равновесия потенциалов в узлах дискретизации динамической системы. Математическая модель объекта получается в виде системы интегро-дифференциальных уравнений, искомыми неизвестными в которых являются фазовые переменные типа потока, характеризующие состояние сосредоточенных масс.

Узловой метод имеет ряд недостатков, осложняющих его использование для автоматизации формирования математической модели непосредственно на ЭВМ. Одним из недостатков метода является неудобная форма системы уравнений математической модели. Для использования численных методов интегрирования дифференциальных уравнений наиболее предпочтительно представление уравнений в нормальной форме Коши. Узловой метод не позволяет формировать математическую модель объекта с трансформаторными и фрикционными элементами, имеет ограничения на вид компонентных уравнений, требует значительной затраты времени на матричные вычисления в процессе формирования модели.

Метод переменных состояния ориентирован на получение математической модели в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальной форме Коши. Однако представление структуры динамической модели в этом методе гораздо сложнее, чем в узловом, и требует выполнения большого объема подготовительной работы, которая не поддается автоматизации.

Табличный метод использует исходные компонентные и топологические уравнения непосредственно, без каких-либо пре-

образований, поэтому автоматизировать его легко и просто. Однако математическая модель при этом получается высокого порядка и имеет избыточное число фазовых координат. Система уравнений оказывается переопределенной. Количество уравнений значительно превышает число степеней свободы системы. Это приводит к неустойчивости вычислительных алгоритмов при решении полученной системы уравнений.

Контурный метод применяется в электротехнике и строительной механике, где схемы взаимодействия конструктивных элементов образуют замкнутые контуры прохождения сигналов. Применение его для других технических объектов требует построения схемы замещения (эквивалентной схемы) и сопряжено со значительными сложностями формализации процесса составления математической модели.

При структурировании динамической модели *методом функционально законченных элементов* выделяемые дискретные элементы не обладают такой общностью, как в методе сосредоточенных масс или в сеточных методах. Количество выделяемых функционально законченных элементов и их свойства в конкретной предметной области определяются ее особенностями. Для описания элементов различных технических объектов используется множество разнообразных математических моделей. Это создает определенные преимущества при моделировании, так как исключаются любые ограничения на способы описания физических свойств элементов. Однако при этом теряется межпредметная унификация математических описаний, что требует создания и хранения в памяти ЭВМ библиотеки математических моделей элементов всех возможных технических объектов. Тем не менее, при создании специализированных САПР в конкретных технических областях часто отдается предпочтение методу функционально законченных элементов.

Широкое применение для построения математических моделей технических объектов находит *формальный подход*. Он основан на использовании интегральных вариационных принципов аналитической механики. Одним из наиболее мощных теоретических методов формального моделирования является вариационный принцип Гамильтона—Остроградского. Он применим к техническим объектам различной физической природы (механическим, гидравлическим, электрическим и др.). Для систем с

сосредоточенными параметрами вариационный принцип приводит к уравнениям Лагранжа второго рода.

Все упомянутые выше способы предназначены для получения математических моделей технических объектов в инвариантной форме. Эти модели представляют собой либо систему компонентных и топологических уравнений, либо систему обыкновенных дифференциальных уравнений. В частном случае при описании статических состояний технического объекта математической моделью в инвариантной форме является система алгебраических уравнений, получаемая путем соответствующих преобразований исходной системы дифференциальных уравнений.

5.2. Графические формы представления математических моделей

В инженерной практике часто используют графические формы представления математических моделей. Для использования графических форм должно существовать правило однозначного соответствия условных изображений элементов графической модели и компонентов инвариантной математической модели.

Одной из форм отображения физических свойств технического объекта является *динамическая модель*. Графические изображения элементов динамической модели отождествляются с их компонентными уравнениями, а соединения элементов соответствуют топологическим уравнениям. Следовательно, динамическую модель можно рассматривать в качестве математической модели технического объекта в графической форме.

Структурирование динамической модели и идентификация ее элементов позволяют формализовать процесс составления математической модели технического объекта в инвариантной форме. Для этого удобно использовать графические формы моделей в виде графов и эквивалентных схем.

Граф представляет структурную математическую модель системы и отображает ее топологию, а *эквивалентная схема* — функциональную модель и отображает топологию и компонентный состав, так же как и динамическая модель. Если ввести обозначения ветвей графа, то он будет содержать ту же информацию, что и эквивалентная схема.

Компонентные уравнения элементов динамической модели представляют собой компоненты полной математической модели объекта. Уравнения инерционных, упругих и диссипативных элементов технических объектов различной физической природы

приведены в литературе [1, табл. 3.1]. Трансформаторные и фрикционные элементы отображают специфические особенности внутренних свойств системы и ее взаимодействия с внешней средой.

Характеристики процессов функционирования объекта определяются не только его внутренними физическими свойствами, но и внешними воздействиями. Математические описания этих воздействий также являются компонентами математической модели. Воздействия представляют собой источники потенциалов:

$$U_e = f_1(I, t),$$

и источники потоков:

$$I_e = f_2(U, t).$$

При построении полной математической модели в инвариантной форме все компонентные уравнения посредством топологических уравнений сводят в единую систему. Это наиболее удобно осуществлять с помощью графов.

Граф представляет собой совокупность узлов (вершин) и соединяющих их ветвей (ребер). Такое же определение имеет и эквивалентная схема. Определение графа может быть записано в следующем виде:

$$G = (U, B, I),$$

где U — множество узлов; B — множество ветвей; I — инцидентор — указатель способа соединения ветвей.

Ветви графа и эквивалентной схемы соответствуют компонентам математической модели. Они отображают математические описания инерционных, упругих и диссипативных элементов динамической модели и источников внешних воздействий.

Узлы графа и эквивалентной схемы соответствуют узлам дискретизации непрерывных объектов в геометрическом пространстве, вводимым при переходе от моделей микроуровня к моделям макроуровня. При дискретизации системы методом сосредоточенных масс узлы дискретизации совпадают с сосредоточенными массами, представляемыми в динамической модели материальными точками или твердыми телами. Состояние технической системы и характер протекающих в ней процессов определяются фазовыми координатами узлов дискретизации. Эти координаты представляют собой потоковые переменные (например, в механической системе — скорости или геометрические координаты).

Сосредоточенные массы динамической модели обладают дуальными свойствами: они отображают инерционные свойства технической системы и одновременно являются носителями

информации о ее состоянии. Последнее выражается в том, что систему фазовых координат динамической модели связывают непосредственно с сосредоточенными массами.

Граф и эквивалентная схема позволяют эти свойства сосредоточенных масс дифференцировать более четко: инерционные свойства отображаются ветвями, а носители информации о состоянии технической системы — узлами. В результате каждая сосредоточенная масса отображается узлом графа или эквивалентной схемы, а ее физические свойства — ветвью инерционного элемента.

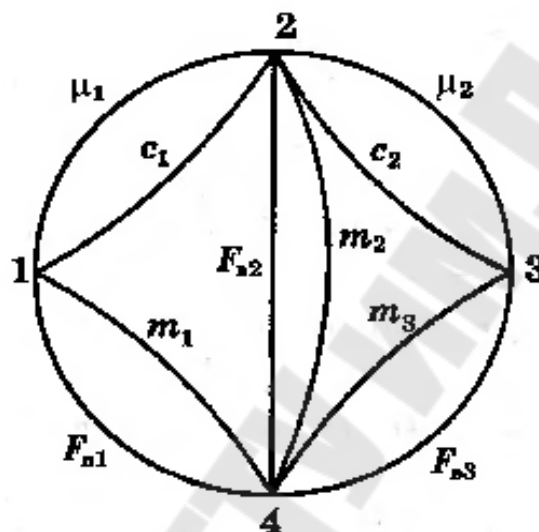


Рисунок 5.1. Пример графа механической системы
Узлы графа обозначают точками, а ветви линиями (рис. 5.1).

Узлам присваивают номера сосредоточенных масс, а ветвям дают обозначения параметров отождествляемых ими элементов динамической модели или обозначения источников внешних воздействий (источник потенциалов U_B или источник потоков I_B). Один из узлов графа и эквивалентной схемы отображает инерциальную систему отсчета фазовых координат типа потока. Его называют *базовым узлом* (или базой) и ему присваивается нулевой номер.

Для обозначения различных ветвей эквивалентной схемы рекомендуется применять графические изображения, показанные на рис. 5.2. Ветви эквивалентной схемы и графа, отображающие внутренние свойства технического объекта, можно именовать так же, как и соответствующие им элементы динамической модели, т.е. инерционные, упругие и диссипативные. Поскольку эти ветви суть компоненты математической модели в графической форме, то и компоненты имеют те же наименования, что и ветви.

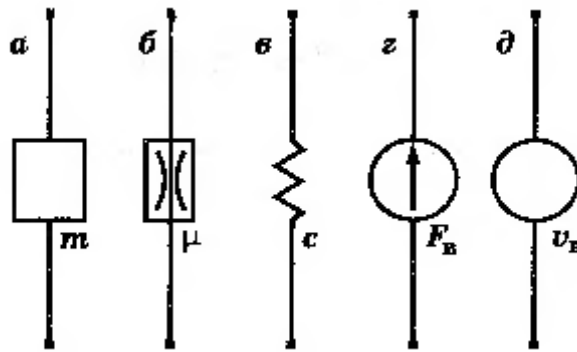


Рисунок 5.2. Обозначение ветвей эквивалентной схемы: *a* - инерционной; *б* - диссипативной; *в* - упругой; *з* - источника потенциала; *д* - источника потока

На эквивалентных схемах и графах применяют обозначения параметров элементов и источников внешних воздействий соответственно виду моделируемой технической системы. На рис. 5.2 использованы обозначения для механической поступательной системы.

Рассмотрим особенности построения эквивалентной схемы и графа на примере механической вращательной системы, динамическая модель которой приведена на рис. 5.3, *a*. Модель отображает инерционные, упругие и диссипативные элементы системы и внешние воздействия на нее. Элементы динамической модели обозначаются на схеме их параметрами с цифровыми индексами, соответствующими порядковым номерам элементов: J_i - моменты инерции вращающихся твердых тел (сосредоточенных масс); c_j , μ_j - коэффициенты жесткостей и сопротивлений соответственно упругих и диссипативных элементов. На динамической модели необходимо также отобразить внешние воздействия на технический объект. Источники потенциалов M_{ek} воздействуют непосредственно на сосредоточенные массы, а источники потоков ω_{ek} - на упругие и диссипативные элементы. Рассматриваемый объект подвержен воздействиям только источников потенциалов $M_{ek}, k = \overline{1,3}$.

Источники воздействий могут сообщать энергию объекту или отводить ее от объекта. Для отображения этого на динамической модели должны быть указаны положительные направления фазовых координат типа потока ω_i (или φ_i), характеризующих состояния сосредоточенных масс, а также направления потоков энергии, сообщаемой объекту источниками внешних воздействий ω_{ek}, M_{ek} .

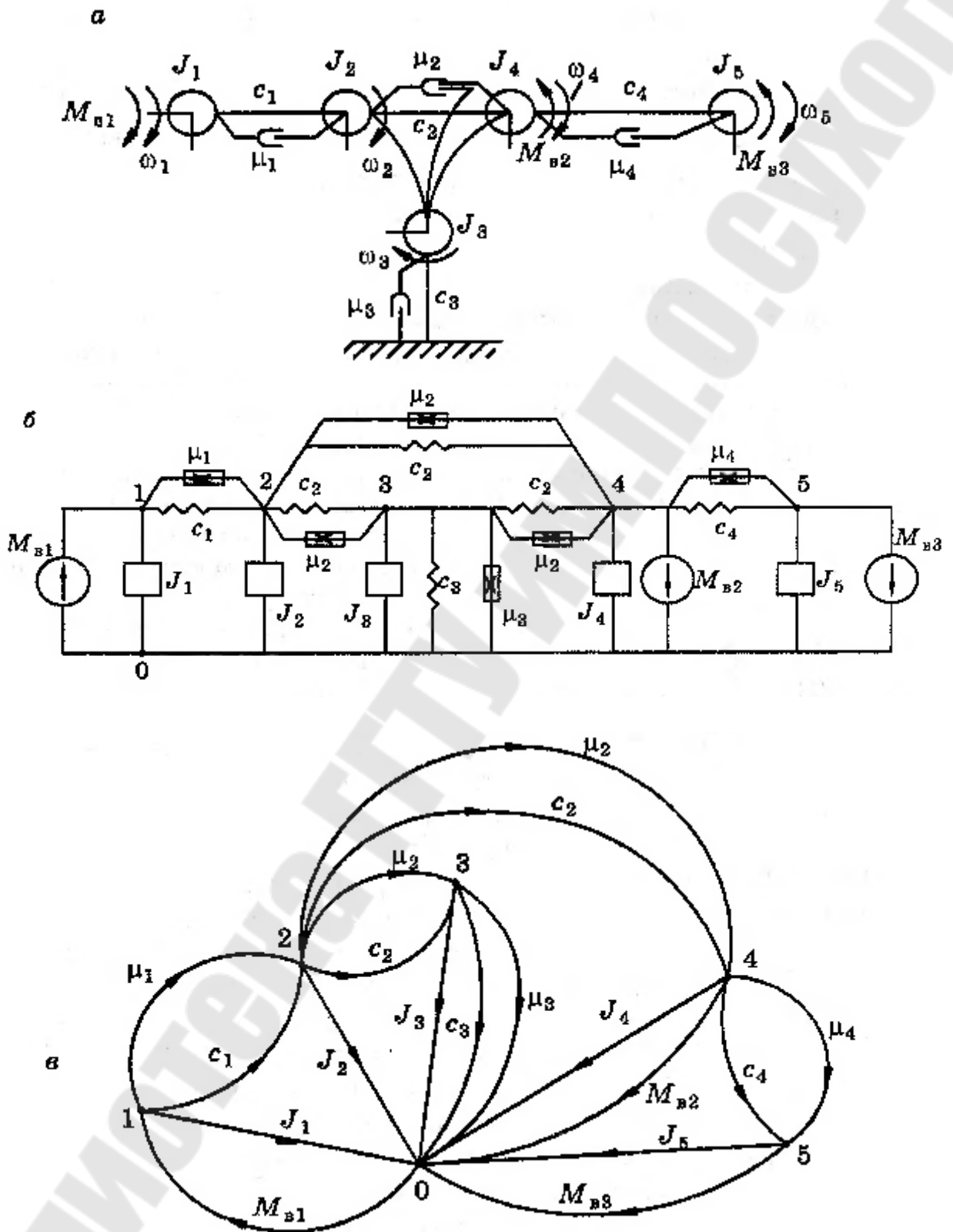


Рисунок 5.3. Динамическая модель (а), эквивалентная схема (б) и орграф (в) механической вращательной системы

Если энергия источника потенциала подводится к объекту, то направления M_{ek} и ω_i совпадают, а если отводится (т.е. вместо

источника имеет место сток), то их направления противоположны. В рассматриваемом примере вращающий момент M_{e1} является движущим, увеличивающим энергию объекта (к объекту подводится энергия двигателя), поэтому направления M_{e1} и ω_1 совпадают. Вращающие моменты M_{e2} и M_{e3} характеризуют сопротивления внешней среды движению объекта, на преодоление которых затрачивается его энергия. В этой связи направления M_{e2} и ω_4 , а также M_{e3} и ω_5 не совпадают.

Потенциалы упругих M_{yj} и диссипативных M_{Dj} элементов, характеризующие их взаимодействие с другими элементами системы, являются внутренними воздействиями и на динамической модели не изображаются.

Следует обратить внимание на то, что функции источников внешних воздействий типа потока ω_{ek} и типа потенциала M_{ek} обозначаются такими же символами, как и фазовые координаты типа потока ω_i и типа потенциала M_{yj} , M_{Dj} моделируемого технического объекта. Чтобы их различать в динамических моделях, в обозначениях внешних воздействий вводится индекс «в».

Если один и тот же упругий элемент соединяет между собой более двух сосредоточенных масс, т.е. образует кольцевое соединение (например, элемент на рис. 5.3, а), то такое соединение называется *дифференциальным*, а если кольцевое соединение сосредоточенных масс осуществляется различными упругими элементами, то его называют *гироторным*. Это же относится и к диссипативным элементам.

В случае *дифференциального соединения* следует иметь в виду, что все сосредоточенные массы, входящие в соединение, взаимодействуют с одним и тем же упругим и диссипативным элементами, что и отражено на схеме (рис. 5.3, а).

При моделировании сложных технических объектов графические изображения диссипативных элементов на динамических моделях могут значительно усложнить чертеж (схему). Но если диссипативные элементы расположены в модели параллельно упругим элементам (что характерно для большинства механических систем), тогда их графические изображения можно исключить, а вместо них наличие диссипативных элементов отметить записью параметров μ_j рядом с параметрами c_j упругих элементов (при этом обозначения c_j и μ_j должны разделяться между собой запятой). Это допущение будет использоваться в дальнейшем в

динамических моделях вращательных механических систем (например, на рис. 5.6).

Построение эквивалентной схемы (рис. 5.3, б) начинают с инерционных ветвей, которые располагают вертикально. Эти ветви соединяют узлы, отождествляющие сосредоточенные массы системы, с базовым узлом, соответствующим инерциальной системе отсчета фазовых координат типа потока. Ветви упругих и диссипативных компонентов соединяют между собой взаимодействующие узлы, в соответствии с динамической моделью. Ветви источников потенциалов связывают узлы, к которым они приложены, с базой.

Граф является аналогом эквивалентной схемы и структура его аналогична (рис. 5.3, в). Если обозначить направления сигналов в ветвях графа, то получим *ориентированный граф (орграф)*. Направления сигналов в ветвях графа изображают стрелками.

В ветвях источников внешних воздействий сигналы направляют от базы к узлу, если энергия подводится к узлу и источник обеспечивает возрастание потоковой переменной узла. В случае источника потенциала подвод энергии осуществляется при условии совпадения направлений $M_{\delta k}$ и ω_i . При отводе энергии на преодоление сопротивлений направления $M_{\delta k}$ и ω_i противоположны, поэтому направление сигнала в ветви источника - от узла к базе. Направление сигнала в ветви источника потока определяется аналогично, в зависимости от того, подводится энергия к техническому объекту от внешней среды или отводится.

Во всех ветвях инерционных компонентов направления сигналов от узлов к базе. Такое направление характеризует затраты энергии источников на увеличение кинетической энергии инерционных элементов. В любых других ветвях, соединяющих узлы с базой, кроме ветвей источников, сигналы всегда направлены к базе.

В ветвях упругих компонентов стрелки указывают направление передачи энергии от источников к потребителям. Если ветви диссипативных компонентов параллельны ветвям упругих компонентов, то направления сигналов в них одинаковые.

Однако встречаются случаи, когда нельзя однозначно указать направление передачи энергии в некоторых ветвях графа. Это характерно для систем с дифференциальным соединением сосредоточенных масс. В рассматриваемом примере сосредоточенные массы с моментами инерции J_2 , J_3 и J_4 соединены упругим элементом с коэффициентом жесткости c_2 и диссипативным элементом с коэффициентом сопротивления μ_2 . В результате на

эквивалентной схеме узлы 2, 3 и 4 связаны между собой одними и теми же упругими и диссипативными ветвями c_2 и μ_2 . Энергия передается от узла 2 к узлам 3 и 4, но направление передачи энергии между узлами 3 и 4 заранее установить нельзя.

Орграф, в отличие от эквивалентной схемы, содержит только ориентированные ветви. В этой связи упругая и диссипативная ветви c_2 и μ_2 эквивалентной схемы, соединяющие узлы 3 и 4, на орграфе отсутствуют. Вместе с тем следует отметить, что отображать соединение этих узлов на орграфе нет необходимости. Орграф вполне определенно иллюстрирует взаимодействие всех трех узлов и отражает распределение энергии между узлами 3 и 4, передаваемой к ним через упругий и диссипативный элементы c_2 и μ_2 от узла 2.

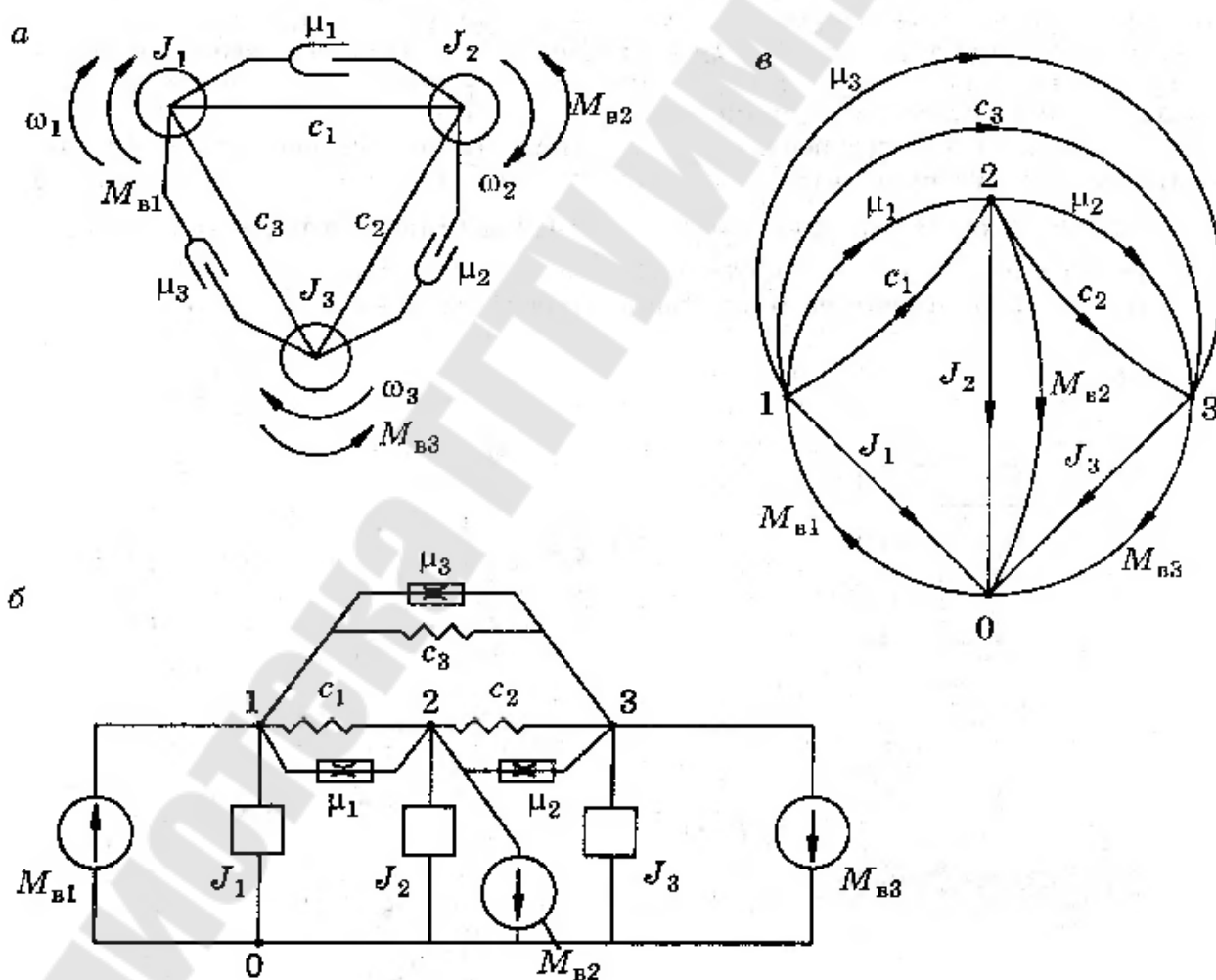


Рисунок 5.4. Динамическая модель (а), эквивалентная схема (б) и орграф (в) технического объекта с гираторным соединением сосредоточенных масс

При *гираторном соединении* (рис. 5.4, а) каждая пара сосредоточенных масс соединена своими упругими и диссипативными элементами, поэтому все они должны быть отображены на орграфе соответствующими ветвями с указанием направлений в них сигналов (рис. 5.4, в). Здесь также определить направление сигнала в одной из ветвей может оказаться затруднительным. В этом случае принимают произвольное направление.

Таким образом, орграф позволяет идентифицировать структуру и физические свойства моделируемой технической системы и представляет собой ее математическую модель в графической форме. Использование орграфа дает возможность формализовать процесс составления полной математической модели объекта в инвариантной форме, т.е. получить систему обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих процесс функционирования технического объекта.

Эквивалентную схему применяют обычно лишь при предметном моделировании, когда необходимо иметь схему замещения для построения эквивалентной динамической модели на элементах иной физической природы. При математическом моделировании технических систем ограничиваются использованием орграфов.

5.3. Матричная форма представления математической модели

Информация о математической модели технического объекта, которую содержит орграф, может быть представлена в виде матрицы.

Сформируем матрицу размерности $\alpha \times \beta$, где α - число строк, β - число столбцов. В этой матрице каждому узлу орграфа, за исключением базового, соответствует строка, а каждой ветви - столбец. Единицами в матрице отметим наличие соединений между узлами и ветвями орграфа, а нулями - их отсутствие. Направления сигналов в ветвях орграфа отобразим знаками единиц. Если сигнал направлен от узла, примем знак минус, а если к узлу - знак плюс.

Матрицу, построенную по изложенным правилам для данного орграфа, называют *матрицей инциденций*.

В табл. 5.1 приведена матрица инциденций для технического объекта, динамическая модель которого и орграф представлены на рис. 5.3.

Таблица 5.1 Матрица инцидентий механической вращательной системы

Узлы	Ветви															
	Инерционные					Диссипативные				Упругие				Источники потенциалов		
	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	c_1	c_2	c_3	c_4	$M_{\epsilon 1}$	$M_{\epsilon 2}$	$M_{\epsilon 3}$
1	-1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
2	0	-1	0	0	0	1	-1	0	0	1	-1	0	0	0	0	0
3	0	0	-1	0	0	0	1	-1	0	0	1	-1	0	0	0	0
4	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	-1	0
5	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	-1
Подматрицы	$A_{и}$					$A_{д}$				$A_{у}$				$A_{в}$		

Обозначим матрицу инцидентий $A = (a_{ij})$, $i = \overline{1, \alpha}$; $j = \overline{1, \beta}$, где α - число узлов графа, за исключением базового; β - суммарное число ветвей орграфа - инерционных, диссипативных, упругих и источников внешних воздействий.

При составлении матрицы инцидентий для объекта с источниками внешних воздействий типа потока $v_{\epsilon 1}^*(t)$ в нее включаются не только узлы, отображающие сосредоточенные массы, но и узлы источников потоков, отмечаемые на орграфе и в матрице звездочкой и имеющие свою нумерацию. Кроме того, необходимо иметь в виду следующее. Каждый узел орграфа должен находиться в равновесии, что соответствует топологическому уравнению

$$\sum_i F_i = 0$$

где F_i - потенциалы ветвей, инцидентных данному узлу. Выполнение этого условия для узла источника потока обеспечивается, если учесть реакцию внешней среды $F_{\epsilon j}^*$. Эта реакция представляет собой потенциал ветви орграфа, отображающей источник потока. Поэтому источники потоков в матрице инцидентий формально замещаются источниками реактивных потенциалов $F_{\epsilon j}^*$.

Матрицу инцидентий A можно представить состоящей из подматриц инерционных $A_{и}$, диссипативных $A_{д}$, упругих $A_{у}$ ветвей и подматрицы ветвей источников потенциалов $A_{в}$:

$$A = [A_{и}, A_{д}, A_{у}, A_{в}].$$

Из табл. 5.1 следует, что подматрица $A_{и}$ во всех случаях единичная диагональная. В этой связи при составлении матрицы инцидентий A с целью упрощения обычно подматрицу $A_{и}$ опускают.

Рассмотрим подматрицу ветвей упругих компонентов A_y для примера технического объекта на рис. 5.3 (табл. 5.1) и установим связь между нею и компонентными уравнениями упругих элементов.

Компонентное уравнение упругого элемента механической вращательной системы имеет вид:

$$M_y = c \int \omega_y dt \quad (5.1)$$

Для первого упругого элемента, согласно динамической модели (рис. 5.3, а) $\omega_{y1} = \omega_1 - \omega_2$, следовательно, компонентное уравнение этого элемента примет вид:

$$M_{y1} = c_1 \int (\omega_1 - \omega_2) dt \quad (5.2)$$

Рассмотрим возможность получения этого же уравнения на основе матрицы инцидентностей. Примем во внимание, что состояние сосредоточенных масс, а следовательно, и отображающих их узлов графа, характеризуется фазовыми координатами типа потока ω_j .

Учитывая это и используя столбец подматрицы A_y , соответствующий данному упругому элементу, можно составить следующее выражение:

$$M_{yj} = -c_j \int \left(\sum_{i=1}^n I_{yij} \omega_i \right) dt, \quad (5.3)$$

где ω_i – фазовая координата типа потока (угловая скорость) i -й сосредоточенной массы (i -го узла орграфа); I_{yij} – инцидентор – элемент матрицы инцидентностей A , характеризующий наличие или отсутствие соединения j -й ветви орграфа с i -м узлом и направление сигнала в данной ветви; n – число узлов орграфа. Используя выражение (5.3), на основе матрицы инцидентностей, приведенной в табл. 5.1, получаем компонентное уравнение для первого упругого элемента, полностью совпадающее с уравнением (5.2).

Для второго упругого элемента получаем:

$$M_{y2} = c_2 \int (\omega_2 - \omega_3 - \omega_4) dt, \quad (5.4)$$

а соответственно для третьего:

$$M_{y3} = c_3 \int \omega_3 dt. \quad (5.5)$$

Сравнивая выражения (5.2), (5.4) и (5.5) и анализируя соответствующие им столбцы подматрицы инцидентностей A_y ветвей упругих элементов, легко обнаружить следующие закономерности. Если в столбце содержатся два ненулевых инцидентора, то упругий элемент соединяет между собой две сосредоточенные массы, т.е. осуществляет простое соединение. При наличии трех и более инциденторов (например, второй столбец подматрицы A_y в табл. 5.1) соединение сосредоточенных масс дифференциальное. Если

инцидентор только один, то упругий элемент соединяет сосредоточенную массу с инерциальной системой отсчета. Такое соединение называют реактивным, а упругий элемент, осуществляющий это соединение - реактивным упругим элементом.

Для получения компонентных уравнений инерционных элементов по матрице инциденций используют выражение, которое составляется аналогично выражению (5.3):

$$M_{ij} = -J_i \frac{d}{dt} (I_{iii} \omega_i), \quad (5.6)$$

где I_{iii} - диагональный элемент подматрицы инциденций A_u ветвей инерционных компонентов ($I_{iii} = -1$ для всех инерционных компонентов, поэтому $M_{ii} = J_i \frac{d\omega_i}{dt}$).

Компонентное уравнение диссипативного элемента:

$$M_{ok} = -\mu_k \sum_{i=1}^n I_{dik} \omega_i, \quad (5.7)$$

где I_{dik} - элемент подматрицы инциденций A_d ветвей диссипативных компонентов.

Таким образом, на основе матрицы инциденций можно получить все компонентные уравнения элементов технической системы и построить ее математическую модель в инвариантной форме. Следовательно, матрица инциденций несет ту же информацию о системе, что и оргграф или динамическая модель. Поэтому ее можно рассматривать как функциональную математическую модель технического объекта в матричной форме.

5.4. Узловой метод формирования математической модели

Для формирования полной математической модели технического объекта на основе компонентных и топологических уравнений наиболее широкое применение получил узловой метод.

Так как компонентные уравнения описывают физические свойства простых элементов, устанавливая соотношения между фазовыми переменными типа потока и типа потенциала, характеризующими состояния элементов, а топологические уравнения описывают условия равновесия и непрерывности фазовых переменных, то используем обозначения фазовых переменных и параметров, применяемые для механической поступательной системы, и выпишем компонентные и топологические уравнения в этих обозначениях.

Принимая во внимание, что фазовые переменные такой системы: \square_k и F_j составляют некоторые множества, запишем компонентные уравнения элементов системы в матричной форме:

уравнения инерционных элементов

$$\vec{F}_u = m \left(\frac{d\vec{v}_u}{dt} \right); \quad (5.8)$$

уравнения диссипативных элементов

$$\vec{F}_\rho = \mu \vec{v}_\rho; \quad (5.9)$$

уравнения упругих элементов

$$\vec{F}_y = c \int \vec{v}_y dt; \quad (5.10)$$

где \vec{F}_u , \vec{F}_ρ , \vec{F}_y - соответственно векторы потенциалов инерционных, диссипативных и упругих элементов; m , μ , c - диагональные матрицы параметров этих же элементов; \vec{v}_u , \vec{v}_ρ , \vec{v}_y - векторы фазовых переменных типа потока соответствующих элементов.

Топологические уравнения механической поступательной системы:

уравнение равновесия потенциалов ветвей орграфа, инцидентных i -му узлу,

$$\left(\sum_j \vec{F}_j \right)_i = 0, \quad i = \overline{1, n};$$

уравнение непрерывности фазовых переменных типа потока l -й ветви орграфа

$$\left(\sum_k \vec{v}_k \right)_l = 0, \quad l = \overline{1, L}$$

где n - число узлов орграфа, за исключением базового; L - число ветвей.

Используя матрицу инцидентностей, топологические уравнения можно записать в матричной форме:

$$A\vec{F} = 0; \quad (5.11)$$

$$\vec{v}_\rho + A^T \vec{v} = 0, \quad v = \text{и, д, у}, \quad (5.12)$$

где A — матрица инцидентностей; A^T — транспонированная матрица A ; \vec{F} - вектор потенциалов ветвей; \vec{v}_ρ, \vec{v} - векторы потоковых переменных, соответственно ветвей и узлов графа. Элемент v_{el} вектора \vec{v}_ρ определяется по формуле:

$$v_{el} = \sum_{i=1}^n I_{eil} v_i \quad (5.13)$$

где I_{eil} - элемент матрицы инцидентностей, характеризующий инцидентность l -й ветви орграфа i -му узлу.

Таким образом, основные положения узлового метода можно сформулировать следующим образом:

- 1) в качестве базисных координат используются узловые потоковые переменные \vec{v} , которые характеризуют состояния узлов графа;
- 2) исходным топологическим уравнением системы является уравнение равновесия потенциалов ветвей в узлах графа (5.11), что соответствует принципу Даламбера.

Вектор потенциалов системы \vec{F} представляется состоящим из подвекторов потенциалов компонентов $\vec{F}_u, \vec{F}_o, \vec{F}_y, \vec{F}_B$ - соответственно инерционных, диссипативных, упругих и источников внешних воздействий:

$$\vec{F}^T = [\vec{F}_u, \vec{F}_d, \vec{F}_y, \vec{F}_B]. \quad (5.14)$$

Аналогично можно представить матрицу инцидентий, состоящую из соответствующих подматриц:

$$A = [A_u, A_d, A_y, A_B]. \quad (5.15)$$

Используя выражения (5.14) и (5.15), можно привести уравнение равновесия системы к следующему виду:

$$0 = [A_u \vec{F}_u + A_d \vec{F}_d + A_y \vec{F}_y + A_B \vec{F}_B]. \quad (5.16)$$

Если в данное выражение подставить значения потенциалов ветвей (5.8-5.10), то получим выражение следующего вида:

$$A_u m \left(\frac{d\vec{v}_u}{dt} \right) + A_d \mu \vec{v}_d + A_y c \int \vec{v}_y dt + A_B \vec{F}_B = 0.$$

С учетом выражения (5.12) можно переписать последнее выражение в следующем виде:

$$A_u m A_u^T \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right) + A_d \mu A_d^T \vec{v} + A_y c A_y^T \int \vec{v} dt = -A_B \vec{F}_B. \quad (5.17)$$

Полученное выражение (5.17) показывает, что классический вариант узлового метода приводит к получению интегро-дифференциальных уравнений. Такой вид уравнений неудобен для анализа процесса функционирования объекта. Как уже упоминалось, наиболее предпочтительной формой математической модели при использовании численных методов является система дифференциальных уравнений в нормальной форме Коши. Однако отмеченный недостаток узлового метода можно легко устранить. Преобразование интегро-дифференциальных уравнений (5.17) к нормальной форме можно осуществить путем расширения координатного базиса. Для этого введем функции потенциалов

упругих компонентов в состав базисных координат. Тогда эти функции представляются выражением:

$$\vec{F}_y = -cA_y^T \int \vec{v} dt. \quad (5.18)$$

Выполнив подстановку (5.18) в (5.17) и переписав выражение относительно производной, а также полученные выражения сведем в единую систему уравнений, то получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальной форме Коши:

$$\begin{cases} \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{A_B \vec{F}_B + A_Y \vec{F}_Y - A_D \mu A_D^T \vec{v}}{A_{II} m A_{II}^T} \\ \frac{d\vec{F}_Y}{dt} = -cA_Y^T \vec{v} \end{cases}. \quad (5.19)$$

В уравнениях (5.19) базисными координатами являются фазовые переменные \vec{v} и \vec{F}_Y . Базисными координатами называют совокупность неизвестных переменных в уравнениях, описывающих функционирование динамической системы.

Для системы с источниками внешних воздействий типа потенциала потоковые фазовые переменные \vec{v} характеризуют состояние сосредоточенных масс и являются независимыми координатами, а их количество равно числу степеней свободы системы. При этом число узлов орграфа n (за вычетом базового) равно числу сосредоточенных масс.

Орграф объекта с источниками внешних воздействий типа потока включает дополнительные узлы, отображающие внешнюю среду, генерирующую эти воздействия. Их называют узлами источников потоков. Такие узлы имеют свою отдельную нумерацию и отмечаются на орграфе звездочками.

Независимыми координатами системы являются только фазовые переменные типа потока \vec{v} , характеризующие состояния сосредоточенных масс технической системы. Эти массы отображаются на орграфе узлами с порядковыми номерами без индексов. Их количество равно числу степеней свободы системы.

Подматрица инерционных ветвей орграфа A_{II} , как отмечалось, является единичной матрицей. Порядок этой матрицы для объекта с источниками потенциалов равен числу степеней свободы системы n , а для объектов с источниками потоков ее порядок будет равен сумме: $n+n_{u.n.}$, где $n_{u.n.}$ - количество источников потоков. Однако во всех случаях эта матрица квадратная. Такой же порядок имеет и диагональная матрица параметров инерционных элементов m . Для объектов с источниками потоков в состав матрицы m входят также

элементы m_i^* , являющиеся параметрами инерционности внешней среды. При моделировании технических объектов инерционность внешней среды полагают бесконечно большой, поэтому включение параметров m_i^* в состав матрицы m необходимо рассматривать как формальный прием обеспечения необходимой ее размерности.

Так как матрицы A_{II} и m одного и того же порядка n , то матричное произведение в первом уравнении системы (5.19) $A_{II}mA_{II}^T = m$. С учетом этого систему (5.19) можно переписать в виде:

$$\begin{cases} \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{A_B \vec{F}_B + A_Y \vec{F}_Y - A_D \vec{F}_D}{m} \\ \frac{d\vec{F}_Y}{dt} = -cA_Y^T \vec{v} \end{cases}, \quad (5.20)$$

где $\vec{F}_D = -\mu A_D^T \vec{v}$ - вектор потенциалов диссипативных компонентов, имеет матричную форму и представляет собой компонентное уравнение диссипативных элементов.

Для решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (5.20) необходимо задать начальные условия \vec{v}_0 и \vec{F}_{y0} при $t=0$. Первое матричное уравнение системы (5.20) выражает принцип Даламбера, а второе является компонентным уравнением упругих элементов.

В системе уравнений (5.20) число неизвестных функций \vec{v} и \vec{F}_y равно числу дифференциальных уравнений. Следовательно, узловый метод позволяет избежать избыточности фазовых координат и переопределенности системы уравнений, что способствует повышению устойчивости вычислительных алгоритмов при их решении численными методами. Процедура формирования математической модели полностью формализована и можно построить алгоритм ее реализации на ЭВМ.

Изложенная модификация узлового метода позволяет получить модель в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальной форме Коши, наиболее удобной при использовании численных методов интегрирования. Таким образом, эта модификация устраняет один из недостатков классического узлового метода.

Узловой метод хорошо приспособлен для моделирования электрических цепей, гидравлических и тепловых систем (движение жидкости в гидравлических магистралях, теплопередача в твердом теле при одномерном тепловом потоке). Для механических систем он применим лишь в случае представления объектов в виде системы

материальных точек или твердых тел, совершающих простые движения - поступательные или вращательные.

Но узловым методом не может применяться для динамических систем, содержащих трансформаторные и фрикционные элементы. Это обусловлено невозможностью отображения этих элементов матрицей инцидентий. Узловым методом нельзя построить математическую модель системы твердых тел при сложном их движении - плоском, сферическом. Кроме того, в некоторых случаях для описания физических свойств технических объектов и взаимодействия с внешней средой недостаточно использования рассмотренных выше простых элементов. В частности, это относится к объектам с неголономными связями, с виртуальными связями и с переменной структурой. Такими свойствами обладают многие механические и гидромеханические системы.

Если параметры элементов m , c , $|\mu$ рассматриваемой системы постоянны, то полученная математическая модель будет линейной. Однако в реальных системах значения параметров элементов зависят от фазовых координат и модель оказывается нелинейной. Кроме того, необходимо учитывать силы кулоновского трения, являющиеся нелинейными функциями. Отметим, что силы кулоновского трения при составлении математической модели условно относят к внешним воздействиям.

В гидравлической системе используются нелинейные функции для определения параметров диссипативных и упругих элементов μ_2 и c_2 .

Однако нелинейные функции не препятствуют построению математической модели узловым методом, так как они включаются в нее после формирования системы уравнений.

5.5. Уравнения Лагранжа второго рода

При моделировании сложных технических систем применяют уравнения Лагранжа второго рода. Их можно использовать при построении математических моделей объектов любой физической природы, если они рассматриваются как системы с сосредоточенными параметрами. При этом никаких ограничений на структуру и физические свойства объекта не накладывается.

Уравнения Лагранжа второго рода для системы с голономными связями имеют вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_i} = Q_i, \quad (5.21)$$

где E_k - кинетическая энергия системы; q_i - обобщенная координата; \dot{q}_i - обобщенная скорость; Q_i — обобщенная сила; $i = \overline{1, n}$; n - число степеней свободы системы.

В качестве обобщённых координат выбирают независимые между собой переменные, которые позволяют полностью определить состояние исследуемой системы. Обычно в качестве обобщённых координат принимают величины, производные по времени от которых представляют собой фазовые координаты типа потока. Например, для механических систем обобщёнными координатами выбирают линейные и угловые скорости. В этом случае обобщённые силы сохраняют свой физический смысл и представляют собой силы и вращающие моменты.

Каждой обобщённой координате q_i соответствует своя обобщённая сила Q_i . Работу всех обобщённых сил на возможных перемещениях системы (виртуальную работу) можно вычислить по формуле

$$\delta W = \sum_{i=1}^n \delta W_i = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i, \quad (5.22)$$

где δq_i – вариация i -ой обобщённой координаты; δW_i – работа i -ой обобщённой силы на возможном перемещении.

Из формулы (5.22) следует, что обобщённые силы представляют собой коэффициенты при вариациях обобщённых координат в выражении для виртуальной работы.

Так как вариации обобщённых координат δq_i независимы, то вычисляя работу всех приложенных к системе сил на одном из возможных перемещений δq_i , а все остальные вариации в формуле (5.22) принимают равными нулю, поэтому достаточно легко можно определить каждую обобщённую силу Q_i в отдельности.

Кинетическая энергия системы E_k в общем случае является функцией обобщённых координат, обобщённых скоростей и времени и представляет собой сумму

$$E_k = E_{k_0} + E_{k_1} + E_{k_2},$$

$$\text{где } E_{k_0} = a_0, \quad E_{k_1} = \sum_{i=1}^n a_i \dot{q}_i, \quad E_{k_2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j.$$

Если формулы связей декартовых и обобщённых координат не содержат явно времени t , то $E_{k_0} = E_{k_1} = 0$, а $E_k = E_{k_2}$. Следовательно, при стационарной структуре системы кинематическая энергия представляется однородной квадратичной формой:

$$E_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad (5.23)$$

где m_{ij} – элемент матрицы параметров инерционных элементов системы.

Обобщённые силы можно разделить на потенциальную Q_n , диссипативные Q_d и произвольные Q^* .

Силы называются потенциальными, если существует положительно определённая функция обобщённых координат, удовлетворяющая следующим равенствам:

$$Q_n = -\frac{\partial E_n}{\partial q_i}, \quad i = \overline{1, n},$$

где $E_n = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ – потенциальная энергия системы.

В стационарном равновесии состояние системы $E_n = \min$, следовательно, $\delta E_n = 0$ и $\delta^2 E_n > 0$. В окрестности точки, соответствующей этому состоянию в фазовом пространстве, потенциальная энергия может быть представлена квадратичной формой:

$$E_n = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad (5.24)$$

$$Q_d = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = \overline{1, n},$$

где Φ – диссипативная функция Рэлея:

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mu_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad (5.25)$$

где μ_{ij} – элемент матрицы параметров упругих элементов системы.

Обобщённая сила Q_i соответствует i -ой обобщённой координате, равна алгебраической сумме произвольной Q_i^* потенциальной Q_{ni} и диссипативной Q_{di} составляющих:

$$Q_i = Q_i^* - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial E_n}{\partial q_i}, \quad i = \overline{1, n} \quad (5.26)$$

Подставим значение Q_i в уравнении (5.21), опуская индекс (*) при составляющей Q_i^* :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_i} + \frac{\partial E_n}{\partial q_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} = Q_i, \quad i = \overline{1, n} \quad (5.27)$$

Обобщённая сила Q_i , фигурирующая в этом уравнении, определяется с учётом работы источников всех внешних воздействий, а также некоторых внутренних источников, которые не могут быть отнесены к упругим и диссипативным элементам (например, силы кулоновского трения в механических системах).

Математическая модель, получаемая на основе уравнений Лагранжа второго рода, представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида:

$$\bar{F}(\ddot{q}, \dot{q}, q, t) = 0. \quad (5.28)$$

В эту систему входит n дифференциальных уравнений второго порядка, где n – число степеней свободы системы.

Процедура получения математической модели на основе уравнений Лагранжа второго рода включает следующие операции:

1) составление динамической модели технического объекта (при этом выделяются инерционные, упругие, диссипативные, трансформаторные и фрикционные элементы, определяются источники внешних воздействий);

2) определение возможных перемещений элементов системы с учётом наложенных позиционных голономных связей и введение обобщённых координат Q_i , количество которых должно соответствовать числу степеней свободы системы n ;

3) составление выражений для вычисления кинетической E_k и потенциальной E_n энергий и диссипативной функции Рэлея Φ ;

4) Составление выражения для вычисления виртуальной работы δW источников внешних воздействий, определение обобщённых сил Q_i ;

5) выполнение операций дифференцирования, предусмотренных уравнением (5.27) и формированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Отметим важное свойство функций E_k , E_n , Φ – их аддитивность. Напомним, что способностью накапливать кинетическую энергию обладают инерционные элементы, а потенциальную энергию – упругие элементы. Диссипативные элементы рассеивают энергию системы, затрачивая её на преодоление внутренних сопротивлений. В связи со свойством аддитивности кинетическая энергия системы равна сумме кинетических энергий всех инерционных элементов. Потенциальная энергия системы равна сумме потенциальных энергий всех упругих элементов, а диссипативная функция – сумме энергий потерь всех диссипативных элементов.

В общем случае, когда состояние дискретных элементов системы, обладающих инерционными свойствами и взаимодействующих между собой посредством безынерционных упругих и диссипативных элементов, описываются несколькими обобщёнными координатами, функции E_k , E_n , Φ для каждого

элемента определяются по формулам (5.23) – (5.25). Примером такого объекта является твёрдое тело с шестью степенями свободы. Однако при моделировании часто встречаются более простые динамические модели, в которых состояние каждого дискретного элемента характеризуется одной или двумя обобщёнными координатами. Тогда функции E_k , E_n , Φ значительно упрощаются.

Например, при плоском движении твёрдого тела кинетическая энергия равна сумме кинетических энергий и переносном (поступательном) и относительном (вращательном) движениях:

$$E_k = 0,5m\vartheta^2 + 0,5J\omega^2, \quad (5.29)$$

где m – масса твёрдого тела; ϑ - скорость центра масс тела; J - момент инерции твёрдого тела относительно оси, проходящей через центр масс; ω - угловая скорость вращения тела относительно этой оси.

Кинетическая энергия сосредоточенной массы жидкости в дискретном элементе – участке трубопровода:

$$E_k = 0,5m_z Q^2, \quad (5.30)$$

где m_z – коэффициент массы, кг/м⁴; Q – расход, м³/с.

Потенциальная энергия упругого элемента

$$E_k = 0,5c\Delta^2, \quad (5.31)$$

где c —параметр упругого элемента (характеризует его способность накапливать потенциальную энергию); $\Delta=q_1-q_2$; q_1, q_2 — обобщенные координаты инерционных элементов, соединяемых данным упругим элементом.

Для механической системы Δ представляет собой величину деформации упругого элемента (линейную или угловую), для гидравлической — изменение объема жидкости упругого элемента, для электрической — изменение заряда конденсатора. Тепловая система упругими свойствами не обладает.

Диссипативная функция определяется по формуле

$$\Phi = 0,5\mu\Delta^2, \quad (5.32)$$

где μ — параметр диссипативного элемента; $\Delta=q_1-q_2$; q_1, q_2 — обобщенные скорости (фазовые переменные типа потока), характеризующие состояние инерционных элементов, соединяемых данным диссипативным элементом.

Для механической системы Δ представляет собой относительную скорость движения взаимодействующих сосредоточенных масс, для гидравлической — скорость движения сосредоточенной массы жидкости в дискретном участке

трубопровода, в тепловой системе — разность температур в узлах дискретизации.

5.6. Метод функционально законченных элементов

Во многих отраслях техники объекты состоят из некоторого конечного набора типовых конструктивных элементов. Каждый такой элемент имеет определенное функциональное значение и выполняется в виде автономного объекта, завершено в конструктивном отношении. При этом предусмотрена возможность его присоединения к другим типовым конструктивным элементам и создания на основе упорядоченной их совокупности некоторой интегрированной технической системы, обеспечивающей заданный процесс функционирования, отвечающий определенным требованиям.

При наличии таких элементов они могут быть положены в основу структурирования объектов при их математическом описании. Это создает определенные преимущества при проектировании. Структуру объекта составляют типовые элементы, имеющие соответствующие математические описания, которые используются для получения полной математической модели технического объекта. Изменяя в процессе проектирования количественный и качественный состав элементов и варьируя их параметрами, можно получить в результате технический объект с высокими показателями качества и эффективности.

Метод структурирования технического объекта и построения его математической модели в рассматриваемом случае называют *методом функционально законченных элементов*. Этот метод широко применяется при проектировании гидроприводов. Однако его можно использовать и в других областях техники.

Рассмотрим особенности этого метода на примере гидромеханических систем. Он обладает высокой гибкостью и позволяет составить динамическую модель любого гидропривода.

Математические модели функционально законченных элементов можно получить различными методами, однако наиболее удобно воспользоваться уравнениями Лагранжи второго рода. В этом случае нет необходимости рассматривать взаимодействие элемента с другими элементами системы. Достаточно лишь составить выражения для определения кинетической E_k и потенциальной E_n энергий и диссипативной функции Φ . Так как E_k , E_n и Φ представляют собой квадратичные функции обобщенных координат

и обобщенных скоростей, то не возникает необходимость выбора направления координат или учета предполагаемого расположения элемента в динамической модели. Воздействия на элемент, как внутренние, так и внешние, также не принимаются во внимание при построении его математической модели. Дело в том, что взаимодействия элементов будут учтены топологическими уравнениями при формировании математической модели системы, а для внешних воздействий составляются отдельные математические описания, входящие в библиотеку моделей воздействий, которая, так же как и библиотека моделей элементов, используется на стадии формирования полной модели системы.

Определив функции E_k , E_n и Φ и используя уравнения Лагранжа второго рода, получают математическую модель элемента, которая в общем случае представляется выражением вида:

$$F_{и} + F_{д} + F_{у} = F_{в} \quad (5.33)$$

где $F_{и}$ — сила инерции элемента; $F_{д}$ — диссипативная сила элемента; $F_{у}$ — сила упругости элемента; $F_{в}$ — сила взаимодействия данного элемента с другими элементами системы.

Для элементов вращательного движения вместо сил в уравнение (6.1) будут входить соответствующие моменты:

$$M_{н} + M_{д} + M_{у} = M_{в}$$

В табл. 5.2 указаны физические свойства, которыми поделены функционально законченные элементы, и даны математические описания этих свойств. В формулах приняты следующие обозначения параметров и фазовых переменных: m , $J_{н}$, $J_{гм}$ — масса и моменты инерции соответствующих дискретных инерционных элементов; A — площадь поперечного сечения гидромагистральной; $\mu_{лн}$, $\mu_{нл}$ — коэффициенты, соответственно, линейных и нелинейных потерь; μ — коэффициент вязкого трения; ρ — плотность жидкости; ϵ — коэффициент расхода дросселя; $A_{др}$, $A_{др.п}$ — площади сечений, соответственно, постоянного и переменного дросселей; ζ — коэффициент местного сопротивления; a_w , b_w — коэффициенты гидромеханических потерь; c_2 — коэффициент жесткости упругого элемента; $c_{сп}$ — коэффициент жесткости возвратной пружины; x — координата сосредоточенной массы, взаимодействующей с упругим элементом; w — количество масс, взаимодействующих с данным упругим элементом; \dot{x} , \ddot{x} — скорость и ускоренно сосредоточенной массы.

Значения $\mu_{гн}$ определяются по формулам:

$$\mu_{2l} = 25,2\rho vl / A, \quad \mu_{2l} = 0,443\lambda_T \rho l / \sqrt{A} + 0,5g\rho$$

Таблица 5.2 Физические свойства функционально законченных элементов

Элементы гидропривода	Обозначения элементов	Физические свойства элементов и их математическое описание		
		инерционные	диссипативные	упругие
1. Участок гидромагистрالی		$m\ddot{x}$	$(\mu_{2l}\dot{x} + \mu_{2l}x^2 \text{sign}x)$	
2. Безынерционный участок гидромагистрالی			$(\mu_{2l}\dot{x} + \mu_{2l}x^2 \text{sign}x)$	
3. Безынерционный упругий элемент				$c_r \sum_{j=1}^W (\pm A_j x_j)$
4. Механический подвижный элемент		$\mu\ddot{x}$	$\mu\dot{x}$	
5. Возвратная пружина				$c_{en}(x_i - x_{i-1})$
6. Постоянный дроссель			$\frac{A_p}{2} \left(\frac{A\dot{x}}{\varepsilon A_{др}} \right)^2 \text{sign}\dot{x}$	
7. Переменный дроссель			$\frac{A_p}{2} \left(\frac{A\dot{x}}{\varepsilon A_{др}} \right)^2 \text{sign}\dot{x}$	
8. Обратный клапан			$0,5g\rho A\dot{x}^2 \text{sign}\dot{x}$	
9. Насос		$J_H \ddot{\Phi}_H$	$\alpha_W \dot{\Phi}_H$	
10. Гидромотор		$J_{ГМ} \ddot{\Phi}_{ГМ}$	$b_W \Phi_{ГМ}$	

Площадь сечения дросселя зависит от факторов управления $A_{др.п} = f(x_k, p_k, t)$, где x_k – координата регулирующего органа дросселя; p_k – управляющее давление; t – время.

Обратный клапан рассматривается как безынерционный элемент переключения. В зависимости от направления скорости потока жидкости и разности давлений на его входе $p_{вх}$ и выходе $p_{вых}$ он может находиться в открытом или закрытом состоянии. Условие открытия при $x = 0$, тогда $\text{sign}(p_{вх} - p_{вых}) = 1$, а условие закрытия при $x \neq 0$, т.е.

$$\Pi \operatorname{sign} \dot{x} = -1,$$

где x - скорость потока жидкости в магистрали, в которой расположен обратный клапан; Π - дискретная функция, характеризующая условие работы клапана: $\Pi=1$, если клапан расположен в магистрали так, что пропускает жидкость только в положительном направлении скорости потока; $\Pi=-1$ - в противном случае.

Если обратный клапан снабжен возвратной пружиной, то к $p_{\text{вых}}$ добавляется слагаемое $F_{\text{пр.о.к.}}/A_{\text{о.к.}}$, где $F_{\text{пр.о.к.}}$ - усилие пружины обратного клапана; $A_{\text{о.к.}}$ - площадь перекрываемого клапаном отверстия - для шарикового или грибового клапана, или площадь поверхности управляющего элемента - для золотникового клапана.

Для построения математической модели системы необходимо использовать компонентные уравнения функционально законченных элементов и топологические уравнения, выражающие условия равновесия потенциалов и непрерывности фазовых переменных типа потока. Топологические уравнения составляются для узлов взаимодействия элементов. Как следует из табл. 6.1, каждый элемент представляет собой двухполюсник и содержит два узла, отмеченные цифрами 1 и 2. Исключение составляет лишь безынерционный упругий элемент, отображающий упругие свойства газожидкостной смеси и трубопроводов, который содержит только один узел.

В гидромеханической системе взаимодействие функционально законченных элементов осуществляется посредством рабочей жидкости, поэтому в качестве топологического уравнения используется уравнение баланса расходов жидкости в узлах взаимодействия элементов, выражающее условие непрерывности фазовых координат

$$\left(\sum_{i=1}^w Q_i \right)_j = 0, \quad j = \overline{1, u}, \quad (5.34)$$

где Q_i - расход жидкости i -го элемента, взаимодействующего с j -ым узлом.

Давление жидкости в каждом узле взаимодействия одинаково для всех функционально законченных элементов, примыкающих к данному узлу.

Расход Q_i можно выразить через скорость потока жидкости \dot{x}_i и площадь его поперечного сечения A_i : $Q_i = A_i \dot{x}_i$. Тогда уравнение непрерывности потока для j -го узла принимает вид:

$$\sum_{i=1}^w A_i \dot{x}_i = 0$$

Топологическое уравнение эквивалентно уравнению позиционной связи

$$\sum_{i=1}^w A_i x_i = 0$$

Наличие позиционных связей системы приводит к избыточности координат и переопределенности системы уравнений, поэтому избыточность желательно исключить.

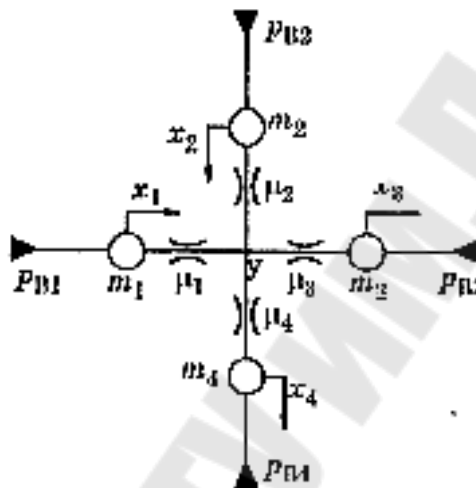


Рисунок 5.5 Фрагмент динамической модели гидравлической магистрали с ветвлением в точке у.

Рассмотрим порядок исключения избыточных координат на примерах. На рис. 5.5 приведен фрагмент динамической модели системы, отображающей ветвление гидравлической магистрали в точке у. Участки гидромагистрали, примыкающие к узлу ветвления у, обладают инерционными и диссипативными свойствами. Упругие свойства жидкости при этом не учитываются. В результате координаты всех инерционных элементов x_j оказываются взаимосвязанными и число степеней свободы на единицу меньше общего числа координат.

Выберем в качестве зависимой координаты x_j . Тогда в соответствии с уравнением связи можно записать

$$\sum_{i=1}^s A_i x_i + A_j x_j = 0,$$

где s — число степеней свободы рассматриваемой подсистемы; x_i — независимая обобщенная координата; x_j — зависимая обобщенная координата (на рис. 5.5 $x_i = 4$).

Для определения зависимой координаты x_j получим выражение

$$\sum_{i=1}^s A_i x_i + A_j x_j = 0, \quad (5.35)$$

Предположим, что каждый элемент гидромеханической системы обладает одновременно инерционными, диссипативными и упругими свойствами и подвергается внешнему воздействию F_B . Движение такого элемента описывается дифференциальным уравнением.

Записав для всех элементов аналогичные уравнения и исключив из них зависимые координаты и их производные, получаем систему дифференциальных уравнений в виде

$$F_{Иi} + F_{Дi} + F_{Vi} + \sum_{j=1}^r (F_{Иij} + F_{Дij} + F_{Vij}) = F_{Bi} + \sum_{j=1}^r F_{Bij}, \quad i = \overline{1, u} \quad (5.36)$$

где $F_{Иij}$, $F_{Дij}$, F_{Vij} — составляющие воздействия j -го элемента с исключенной зависимой координатой x_j на элемент системы с координатой x_i ; r — число исключаемых зависимых координат, равное числу уравнений связей.

Для фрагмента системы, изображенного на рис. 5.5, число степеней свободы $s=3$, число связей $r=1$, а математическая модель его содержит 3 уравнения вида (5.35) и одно уравнение связи (5.34).

Систему уравнений (5.35) можно представить в виде

$$f_i(\ddot{x}_1, \ddot{x}_2, \dots, \ddot{x}_s, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_s, x_1, x_2, \dots, x_s, t) = 0, \quad i = \overline{1, s} \quad (5.36)$$

Уравнения в совокупности с уравнениями связей дают зависимость

$$x_j = \sum_{i=1}^r (A_i / A_j) x_i, \quad j = \overline{1, r}, \quad (5.37)$$

которая представляют собой математическую модель динамической системы с 8 степенями свободы. Решение этих уравнений позволяет определить все обобщенные координаты системы: независимые x_i и зависимые x_j . При этом необходимо задать начальные условия $x_{i0}, \dot{x}_{i0}, i = \overline{1, s}$.

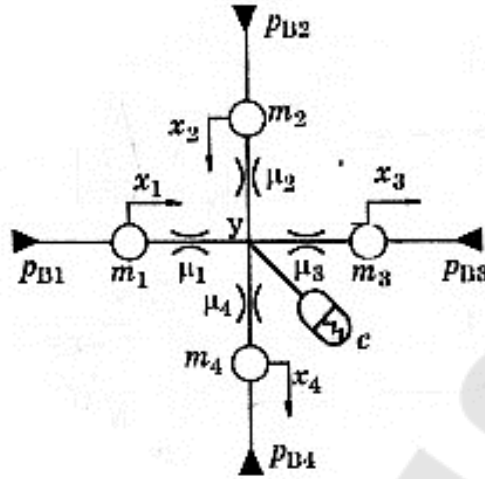


Рисунок 5.6. - Фрагмент динамической модели гидравлической магистрали с учетом упругих свойств газожидкостной смеси и трубопроводов

Следует отметить, что не каждое уравнение системы (5.35) будет содержать составляющие, стоящие под знаком суммы. Например, если в подсистеме, приведенной на рис. 5.5, учесть упругие свойства газожидкостной смеси и трубопроводов, то в узле взаимодействия элементов появится упругий безынерционный элемент, как показано на рис. 5.6. В результате координаты всех инерционных элементов x_i окажутся независимыми и уравнения будут иметь вид

$$F_{Ii} + F_{Di} + F_{Yi} = F_{Bi}, \quad i = \overline{1,4}$$

Как следует из табл. 5.2, обобщенные координаты x_i можно задать только тем функционально законченным элементам, которые обладают инерционными свойствами. Математическое описание остальных элементов должно осуществляться с использованием обобщенных координат инерционных элементов.

Динамические модели гидроприводов представляют собой разветвленные разомкнутые цепи, а в системах автоматического управления – замкнутые одноконтурные или многоконтурные цепи. Точки ветвления цепей делят их на отдельные ветви, состоящие из некоторого набора последовательно соединенных функционально законченных элементов. Если в такую ветвь наряду с инерционными элементами входят также безынерционные, то описание последних дается с использованием обобщенных координат примыкающих инерционных элементов.

На рис. 5.7 даны динамические модели фрагментов ветвей. Узлы взаимодействия входящих в них элементов обозначены y_i -

Фрагмент ветви на рис. 5.7, а включает три функционально законченных элемента: участок гидромагистрали 1, постоянный дроссель 6 и безынерционный упругий элемент 3 (обозначения элементов соответствуют их порядковым номерам, принятым в табл. 5.2.) .

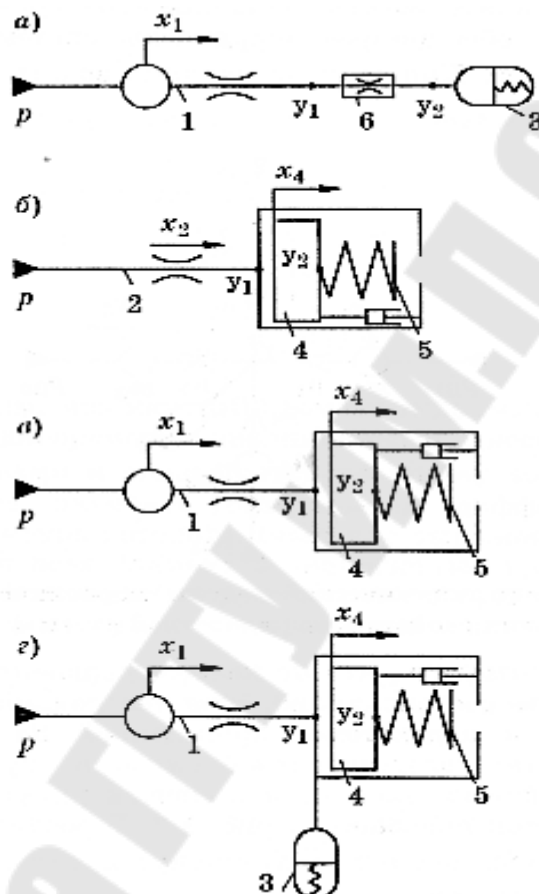


Рисунок 5.7 - Динамические модели ветвей гидроприводов, состоящих из взаимодействующих функционально законченных элементов

Поскольку согласно принятым условиям при структурировании элементов постоянный дроссель считается установленным в данный участок гидромагистрали, а безынерционный упругий элемент примыкает к этому участку, то состояние всех элементов ветви определяется координатой сосредоточенной массы жидкости в участке трубопровода x_1 .

Используем координату x_1 и площадь поперечного сечения участка трубопровода A_1 в моделях всех элементов ветви. Решая совместно уравнения этих элементов, получаем дифференциальное уравнение рассматриваемой ветви

$$A_1^{-1} m_1 \ddot{x}_1 + \mu_{ГЛ1} \dot{x}_1 + \left[\mu_{ГЛ1} \dot{x}_1^2 + \frac{\rho}{2} \left(\frac{A_1 \dot{x}_1}{\varepsilon A_{ДР}} \right)^2 \right] \text{sign} \dot{x}_1 + c_{Г3} x_1 = p$$

Фрагмент схемы на рис. 5.7, б также содержит элемент, обладающий инерционными свойствами (механический подвижный элемент 4). Остальные элементы безынерционные, поэтому математическое описание ветви можно составить, используя только одну независимую обобщенную координату x_4 .

Выпишем уравнения всех компонентов ветви, обозначив их координаты номерами элементов

$$\left(\mu_{ГЛ2} \dot{x}_2 + \mu_{ГЛ2} \dot{x}_2^2 \text{sign} \dot{x}_2 \right) A_2 = A_2 (p - p_{y1}),$$

$$m_4 \ddot{x}_4 + \mu_4 \dot{x}_4 = A_4 p_{y1} - F_{ВП};$$

$$c_{ВП} x_4 = F_{ВП};$$

где p_{y1} – давление жидкости в узле взаимодействия y_1 ; $F_{ВП}$ – усилие возвратной пружины.

Используя топологические уравнения $\dot{x} = (A_4 / A_2) \dot{x}_4$ и решая совместно компонентные уравнения, получаем дифференциальное уравнение ветви

$$\frac{1}{A_4} (m_4 \ddot{x}_4 + \mu_4 \dot{x}_4 + c_{ВП} x_4) + \mu_{ГЛ} \frac{A_4}{A_2} \dot{x}_4 + \mu_{ГЛ2} \frac{A_4^2}{A_2^2} \dot{x}_4^2 \text{sign} \dot{x}_4 = p$$

Для фрагмента схемы на рис. 6.3, в аналогичные выкладки приводят к уравнению ветви

$$\frac{1}{A_4} \left[\left(\frac{A_4^2}{A_1^2} + m_4 \right) \ddot{x}_4 + \mu_4 \dot{x}_4 + c_{ВП} x_4 \right] + \mu_{ГЛ1} \frac{A_4}{A_1} \dot{x}_4 + \mu_{ГЛ1} \frac{A_4^2}{A_1^2} \dot{x}_4^2 \text{sign} \dot{x}_4 = p$$

Таким образом, несмотря на то, что в рассматриваемой ветви два инерционных элемента, получен одно дифференциальное уравнение с одной неизвестной x_4 , принятой в качестве независимой

обобщенной координаты. Значение координаты x_1 определяется из уравнения связи: $x_1 = (A_4 / A_1)x_4$.

Если функционально законченные элементы, обладающие инерционными свойствами, разделены между собой упругим элементом, их координаты оказываются независимыми. Так, динамическая модель ветви гидромеханической схемы, представленная на рис. 5.6, з, имеет две степени свободы и для ее математического описания необходимо использовать две независимые координаты x_1 и x_4 . В результате получаем систему дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} A_1^{-1} m_1 \ddot{x}_1 + \mu_{ГЛ1} \dot{x}_1 + \mu_{ГЛ1} x_1 \operatorname{sign} \dot{x}_1 + c_{Г3} x_1 - c_{Г3} (A_4 / A_1) x_4 &= p \\ A_1^{-1} (m_4 \ddot{x}_4 + \mu_4 \dot{x}_4 + c_{ВП} x_4) + c_{Г3} (A_4 / A_1) ((A_4 / A_1) x_4 - x_1) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

При формировании математической модели объекта методом функционально законченных элементов система дифференциальных уравнений (5.36) имеет не совсем обычный вид. В отдельные уравнения системы могут входить вторые производные одновременно нескольких обобщенных координат. В этой связи при необходимости приведения их к нормальной форме Коши можно поступить следующим образом. Предполагаем искомыми неизвестными в системе уравнений (5.36) вторые производные независимых обобщенных координат \ddot{x}_i и для их определения составляем систему неоднородных алгебраических уравнений вида

$$\left. \begin{aligned} a_{11} \ddot{x}_1 + a_{12} \ddot{x}_2 + \dots + a_{1s} \ddot{x}_s &= f_1; \\ a_{21} \ddot{x}_1 + a_{22} \ddot{x}_2 + \dots + a_{2s} \ddot{x}_s &= f_2; \\ \dots &\dots \\ a_{s1} \ddot{x}_1 + a_{s2} \ddot{x}_2 + \dots + a_{ss} \ddot{x}_s &= f_s; \end{aligned} \right\} \quad (5.38)$$

где a_{ki} - коэффициенты при искомым переменных \ddot{x}_i ; f_k - функции возмущений, определяемые независимыми координатами x_i и их первыми производными $\dot{x}_i = v_i$, а также внешними воздействиями на инерционные элементы системы F_{Bi} т. е.

$$f_k(v_i, x_i, F_{Bi}, \quad i = \overline{1, s}), \quad k = \overline{1, s}.$$

Решив в общем виде систему уравнений (5.38) и введя обозначение $\ddot{x}_i = dv_i/dt$ получим следующую систему дифференциальных уравнений в нормальной форме Коши

$$\left. \begin{aligned} d v_i / dt &= f_i(v_k, F_{Bk}, p_l, \quad k = \overline{1, s}, \quad l = \overline{1, q}), \quad i = \overline{1, s}; \\ dp_j / dt &= f_j(v_k, \quad k = \overline{1, s}), \quad j = \overline{1, q}, \end{aligned} \right\} (5.3)$$

9)

где p_j - давление, определяемое деформацией упругого элемента, расположенного в j -м узле взаимодействия элементов системы; q - число узлов, в которых учитываются упругие свойства системы.

Если упругим элементом является возвратная пружина, то его усилие выражается через давление посредством соотношения $F_{ВП} = pA$, где A - площадь рабочей поверхности механического подвижного элемента, с которым взаимодействует возвратная пружина.

Переменные v_i и p_j являются фазовыми координатами системы гидропривода. При этом количество переменных типа потока равно числу степеней свободы системы.

Задавая начальные условия v_{i0} и p_{j0} и интегрируя систему уравнений (5.39), получают искомые функции скоростей движения потоков жидкости и механических элементов гидропривода $v_i(t)$ и давлений жидкости $p_j(t)$ в узлах, в которых расположены упругие элементы.

Тема 6. СТРУКТУРНО-МАТРИЧНЫЙ МЕТОД ФОРМИРОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

6.1. Основы структурно-матричного метода

Динамическая модель технического объекта, построенная методом сосредоточенных масс, представляется совокупностью взаимодействующих элементов — инерционных, упругих, диссипативных, трансформаторных и фрикционных. Техническую систему, динамическая модель которой может быть представлена совокупностью только инерционных, упругих и диссипативных элементов, назовем простой. Динамическая модель сложной технической системы кроме этих элементов содержит трансформаторные и (или) фрикционные элементы. К сложным

также относятся механические системы при сложном движении твердых тел.

Математическую модель простой технической системы можно сформировать узловым методом, используя информацию, содержащуюся в матрице инцидентностей. Алгоритм формирования математической модели модифицированным узловым методом описывается системой уравнений.

Первое матричное уравнение системы получено на основе условия равновесия потенциалов ветвей орграфа, инцидентных соответствующим его узлам, и выражает принцип Даламбера. Второе уравнение системы представляют собой матричные компонентные уравнения соответственно упругих и диссипативных элементов системы.

Уравнения относительно производных потоковых переменных $\frac{dv}{dt}$ также могут быть непосредственно получены с помощью матрицы инцидентностей. Динамическая модель объекта (рис. 5.4, а) и орграф (рис. 5.4, в), а матрица инцидентностей дана в таблице 5.1. Математическую модель объекта составляют уравнения (5.22) — (5.25).

Выпишем матрицу инцидентностей анализируемого объекта, исключив в ней подматрицу инцидентностей инерционных элементов A_U , так как она в системе уравнений (5.20) не используется. Кроме того, осуществим перестановку подматриц A_D , A_Y и A_P , поменяв их столбцы местами. Матрица инцидентностей с учетом этих изменений приведена в табл. 6.1.

Сопоставляя два первых уравнения системы (5.22) с элементами строк табл. 5.1, соответствующими узлам орграфа 1 и 2, легко заметить, что эти уравнения можно получить путем суммирования потенциалов компонентов, инцидентных данным узлам:

$$dv / dt = \left(\sum_{i=1}^L F_{Bil} + \sum_{j=1}^N F_{Yij} + \sum_{k=1}^K F_{Дик} \right) / m_i \quad i = \overline{1, n} \quad (6.1)$$

где L — количество источников внешних воздействий типа потенциала (источников потенциалов); N — количество упругих элементов системы; K — количество диссипативных элементов; n — количество сосредоточенных масс системы, равное числу ее степеней свободы.

Таблица 6.1

Узлы	Ветви						
	Источники потенциала			Упругие		Диссипативные	
	F_{u1}	F_{u2}	F_{B1}	C_1	C_2	μ_1	μ_2
1	-1	0	0	1	0	1	0
2	0	-	0	-1	1	-1	1
1*	0	1	0	1	0	-1	-1
Подматрицы	A_U			A_V		A_D	

Наличие или отсутствие источников потенциалов, упругих и диссипативных элементов, а также направления сигналов в ветвях орграфа определяются соответствующими инциденторами I значения, которых содержатся в матрице инциденций. Поэтому выражение (6.1) можно записать в таком же виде, как и выражения для компонентных уравнений. В результате уравнения (5.20) и (5.21) модифицированного узлового метода можно привести к виду:

$$\left. \begin{aligned} dv_i / dt &= \left(\sum_{i=1}^L I_{Bil} F_{Bl} + \sum_{j=1}^N I_{Yij} F_{Yj} + \sum_{k=1}^K I_{Dik} F_{Dk} \right) / m_i, \quad i = \overline{1, n} \\ dF_{Yj} / dt &= -c_j \sum_{i=1}^n I_{Yij} v_i, \quad j = \overline{1, N} \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

$$F_{Dk} = -\mu_k \sum_{i=1}^n I_{Dik} v_i, \quad k = \overline{1, K} \quad (6.3)$$

$$F_{Bm}^* = - \left(\sum_{j=1}^N I_{Yij} F_{Yj} + \sum_{k=1}^K I_{Dik} F_{Dk} \right), \quad m = \overline{1, M} \quad (6.4)$$

где M — количество источников внешних воздействий типа потока; F_{Bm}^* — реакция внешней среды, генерирующей m -ый источник потока.

Уравнения (6.2) — (6.4) описывают алгоритм структурно-матричного метода формирования математических моделей простых технических объектов.

При использовании этого метода уравнения динамического равновесия потенциалов $d\bar{v} / dt = \bar{f}(\bar{F}_B, \bar{F}_Y, \bar{F}_D)$ и выражения для определения реакций внешней среды $\bar{F}_B^* = \bar{f}(\bar{F}_Y, \bar{F}_D)$, алгебраически суммируя потенциалы ветвей орграфа по строкам матрицы инциденций, а компонентные уравнения упругих и диссипативных

элементов, — суммируя потоковые переменные узлов орграфа по соответствующим столбцам матрицы инцидентий. При этом, как следует из уравнений (6.2) — (6.4), слагаемые компонентных уравнений и выражений для определения \overline{F}_B^* необходимо умножить на минус единицу. Основу структурно-матричного метода формирования математических моделей, так же как и узлового, составляет матрица инцидентий, которая, представляет собой матричную форму математической модели. Однако этот метод несравненно проще узлового, так как исключает необходимость выполнения сложной вычислительной процедуры перемножения матриц. Алгоритм структурно-матричного метода легко реализовать на ЭВМ и, следовательно, обеспечить автоматизацию процесса построения моделей. Метод отличается очевидной наглядностью в отображении структуры технической системы и ее взаимодействия с внешней средой. Он превосходно иллюстрирует полное соответствие между математическими моделями в матричной форме и инвариантной, т. е. в форме систем дифференциальных и алгебраических уравнений.

Рассмотрим пример формирования моделей с применением изложенного метода.

Пример моделирования гидравлической системы.

На рис. 6.1, а приведена принципиальная схема гидравлической системы, состоящей из насоса 1, переливного клапана 2, трех гидромагистралей потребителей 3, 4 и 5 и соединительной магистрали 6. При построении динамической модели необходимо учесть основные свойства гидравлической системы. Предположим, что магистрали потребителей сравнительно короткие и волновыми процессами в них можно пренебречь. Тогда их можно рассматривать как дискретные элементы, наделенные инерционными и диссипативными свойствами. Массу жидкости в дискретном элементе рассматривают как сосредоточенную. Если объем жидкости в соединительной магистрали 6 значительно меньше объемов жидкости в магистралях 3, 4 и 5, в первом приближении его массой можно пренебречь, или учесть эту массу путем перераспределения ее между массами магистралей 3, 4 и 5. но пренебрегать потерями в соединительной магистрали без достаточных оснований нельзя, поэтому будем учитывать характеристики ее гидравлического сопротивления.

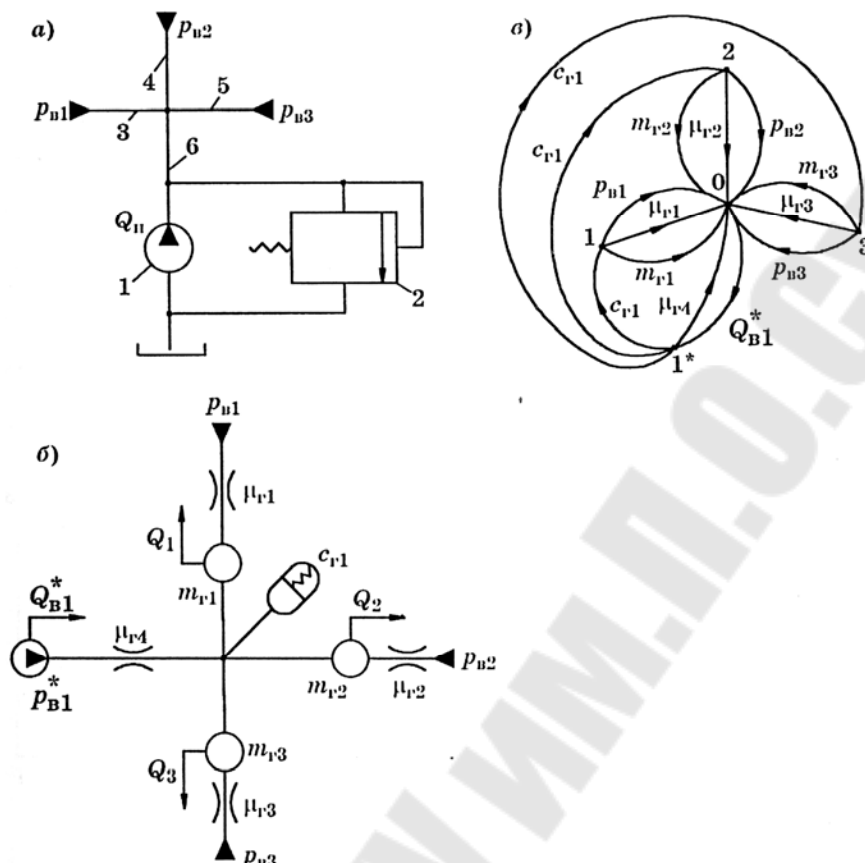


Рисунок 6.1. Принципиальная схема (а), динамическая модель (б) и орграф (в) гидравлической системы

Внешние воздействия на гидравлическую систему создаются потребителями и насосом, причем, воздействия потребителей представляют собой источники потенциалов, а воздействие насоса – источник потока. Источники потенциалов описываются функциями давлений $p_i = f(t)$, характеризующими потери напора в гидроаппаратах потребителей, а источник потока – функцией расхода (подачи насоса) $Q_H = f(t)$.

Если подача насоса Q_H превышает пропускную способность гидравлических магистралей, открывается переливной клапан 2 и пропускает часть жидкости на слив. При этом клапан обеспечивает поддержание практически постоянного давления насоса $p_H = const$. Такую гидросистему называют *системой с источником постоянного давления* (или *неограниченной энергии*). В этом случае в динамической модели насос изображается как источник постоянного давления p_H , а функция подачи $Q_H(t)$ не указывается. Однако во многих случаях пропускная способность гидравлических магистралей при заданном уровне максимального давления, ограничиваемого

переливным клапаном, оказывается выше подачи насоса. Тогда суммарный расход жидкости в магистралях определяется подачей насоса и можно в первом приближении считать $Q_H = const$ (или в общем случае $Q_H = f(t)$), а давление насоса p_H будет определяться давлением потребителей и потерями в гидромагистралях. Такую гидросистему называют *системой с источником ограниченной энергии* и насос в динамической модели изображают как источник потока Q^*_{B1} (рис. 6.1, б).

Упругий элемент, учитывающий сжимаемость газожидкостной смеси и деформируемость стенок трубопровода, подключают в точках ветвления гидравлической магистрали. Он осуществляет дифференциальное соединение всех инерционных элементов и источника потока.

Фазовыми переменными типа потока в гидравлической системе принимают расходы Q_i , а типа потенциала – давления p_j .

На рис. 6.1, б, в построен оргграф гидросистемы, а в табл. 6.2 приведена матрица инцидентий.

Таблица 6.2

Узлы	Ветви									
	P_{B1}	P_{B2}	P_{B3}	P^*_{B1}	c_{Γ}	$\mu_{\Gamma1}$	$\mu_{\Gamma2}$	$\mu_{\Gamma3}$	$\mu_{\Gamma4}$	
1	-1	0	0	0	1	-1	0	0	0	
2	0	-1	0	0	1	0	-1	0	0	
3	0	0	-1	0	1	0	0	-1	0	
1*	0	0	0	1	-1	0	0	0	-1	
Подматрицы	A_B					A_D				

Составим уравнения математической модели, пользуясь структурно-матричным методом

$$\left. \begin{aligned} dQ_1 / dt &= (-P_{B1} + P_{Y1} - P_{D1}) / m_{\Gamma1}; \\ dQ_2 / dt &= (-P_{B2} + P_{Y1} - P_{D2}) / m_{\Gamma2}; \\ dQ_3 / dt &= (-P_{B3} + P_{Y1} - P_{D3}) / m_{\Gamma3}; \\ dP_{Y1} / dt &= c_{\Gamma1}(-Q_1 - Q_2 - Q_3 + Q^*_{B1}); \end{aligned} \right\} \quad (6.5)$$

$$P_{Di} = \mu_{\Gamma i} Q_i; \quad i = 1, 2, 3; \quad P_{D4} = \mu_{\Gamma4} Q^*_{B1}; \quad P^*_{B1} = P_{Y1} + P_{D4},$$

где $P^*_{B1} = P_H$ - давление, развиваемое насосом.

Для решения системы уравнений (6.5) задаются начальные условия $Q_{10}, Q_{20}, Q_{30}, P_{Y10}$.

Пример моделирования гидромеханической системы. В заключение рассмотрим более сложный технический объект,

принципиальная схема которого дана на рис. 6.1. Это схема гидропривода, который включает насос 1, переливной клапан 2, гидрораспределитель 3, гидравлическую магистраль, состоящую из трех участков 4, 5 и 6, и два гидродвигателя 7 и 8, выполненных в виде гидравлических цилиндров с возвратными пружинами 9 и 10. Гидродвигатели приводят в действие рабочие органы некоторой машины или механизма. Взаимодействие гидродвигателей с рабочими органами характеризуется функциями внешних воздействий на систему гидропривода F_{B1} и F_{B2} . Функция $h(t)$ характеризует состояние и процесс включения или выключения гидрораспределителя. Обычно время включения гидрораспределителя существенно меньше времени переходного процесса гидропривода, поэтому при моделировании полагают мгновенное включение гидрораспределителя.

Способ моделирования насоса определяется соотношением его подачи и пропускной способности гидропривода при заданном уровне давления p_H , поддерживаемом переливным клапаном. В предыдущем примере предполагали, что гидросистема имеет источник ограниченной энергии. В данном примере предположим, что в процессе включения гидропривода давление насоса падает незначительно, и примем условие $p_H = const$.

Система гидропривода содержит гидравлические и механические взаимодействующие элементы. Фазовыми координатами гидромеханической системы принимают расходы Q_i (переменные типа потока) и давления p_j (переменные типа потенциала).

При моделировании гидропривода примем во внимание инерционные свойства жидкости в дискретных участках трубопроводов, поршней гидродвигателей с учетом присоединенных к ним масс рабочих органов и массы жидкости в гидроцилиндрах. Упругие свойства гидропривода учтем введением моделей гидроаккумуляторов в точках ветвления гидромагистрали и взаимодействия гидравлических и механических элементов. Кроме того, необходимо учесть упругие свойства возвратных пружин, оказывающие на физические свойства гидропривода, как правило, гораздо большее влияние, чем сжимаемость газожидкостной смеси и деформируемость трубопроводов.

На процесс функционирования гидропривода значительно влияют утечки жидкости из рабочих полостей гидродвигателей и

аппаратуры управления. Режим движения жидкости в щелях между поверхностями, осуществляющими герметизацию рабочих полостей, ламинарный, поэтому значение коэффициента гидравлического сопротивления щелей μ_r определяют с использованием только первого слагаемого по формуле Пуэзейля. При определении значений коэффициентов μ_r для участков гидромагистрали учитываются все виды потерь – по длине и местные. Кроме того, при моделировании необходимо учитывать потери на трение при взаимном перемещении механизмов гидродвигателей (механические потери).

Тема 7 ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ФАКТОРНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

7.1. Особенности экспериментальных факторных моделей

Наряду с теоретическими математическими моделями при функциональном проектировании технических систем широко применяются экспериментальные факторные математические модели.

Теоретические модели имеют то преимущество, что они непосредственно описывают физические свойства технической системы. Коэффициенты уравнений теоретических моделей представляют собой параметры элементов технической системы (внутренние параметры системы) или некоторые комбинации этих параметров, а зависимые переменные — фазовые координаты системы. Они позволяют осуществлять имитационное моделирование процессов функционирования технической системы во времени, детально изучать изменение фазовых координат в зависимости от внешних воздействий (возмущающих и управляющих), анализировать устойчивость системы, качество переходных процессов, эффективность функционирования в условиях случайных внешних воздействий, близких к реальным, т.е. оценивать ее функциональную работоспособность и выполнение технических требований к системе.

Но функциональные теоретические модели сложных технических объектов представляют собой системы нелинейных дифференциальных уравнений высокого порядка (обычно не ниже 30-го порядка). Однократное решение такой системы уравнений на самых современных ЭВМ требует значительной затраты машинного

времени (десятки и даже сотни минут). Следует при этом учитывать, что задачи проектирования носят ярко выраженный оптимизационный характер. Целью функционального проектирования является выбор структуры на основе некоторого множества вариантов и определение оптимальных параметров технического объекта. Процедуры выбора структуры и оптимизационные алгоритмы требуют выполнения множества итераций, количество которых может достигать чисел второго и третьего порядков, причем, на каждой итерации решается исходная система дифференциальных уравнений. Поэтому решение одной проектной задачи характеризуется огромными затратами машинного времени. Этим объясняется медленное внедрение методов функционального проектирования в конструкторских организациях. Вместе с тем без выполнения работ по функциональному проектированию невозможно обеспечить высокий технический уровень и конкурентоспособность создаваемых сложных технических объектов.

Затраты машинного времени можно значительно сократить, если на этапе оптимизации параметров использовать экспериментальную факторную математическую модель. *Экспериментальные факторные модели*, в отличие от теоретических, не используют физических законов, описывающих происходящие в объектах процессы, а представляют собой некоторые формальные зависимости выходных параметров от внутренних и внешних параметров объектов проектирования.

Экспериментальная факторная модель может быть построена на основе проведения экспериментов непосредственно на самом техническом объекте (*физические эксперименты*), либо *вычислительных экспериментов* на ЭВМ с теоретической моделью. При создании новых технических объектов физический эксперимент проводится на прототипах или аналогах, а иногда на макетных образцах. Однако физические эксперименты требуют огромных затрат материальных и временных ресурсов, поэтому их выполняют обычно в тех случаях, когда возникает необходимость поиска путей совершенствования существующих технических систем, когда сложность этих систем и условий их функционирования не позволяет надеяться на требуемую точность их математического описания теоретическими методами.

При функциональном проектировании факторные модели наиболее часто получают на основе вычислительных экспериментов на ЭВМ с теоретической моделью.



Рисунок- 7.1. Схема объекта исследования при построении экспериментальной факторной модели

При построении экспериментальной факторной модели объект моделирования (проектируемая техническая система) представляется в виде "черного ящика", на вход которого подаются некоторые переменные \vec{X} и \vec{Z} , а на выходе можно наблюдать и регистрировать переменные \vec{Y} (рис. 7.1). В число входных переменных \vec{X} и \vec{Z} входят внутренние и внешние параметры объекта проектирования, подлежащие оптимизации, а выходными переменными "черного ящика" являются выходные параметры объекта, характеризующие его эффективность и качество процессов функционирования, выбираемые в качестве критериев оптимальности. В процессе проведения эксперимента изменение переменных \vec{X} и \vec{Z} приводит к изменениям выходных переменных \vec{Y} . Для построения факторной модели необходимо регистрировать эти изменения и осуществить необходимую их статистическую обработку для определения параметров модели.

При проведении физического эксперимента переменными \vec{X} можно управлять, изменяя их величину по заданному закону. Переменные \vec{Z} — неуправляемые, принимающие случайные значения. При этом значения переменных \vec{X} и \vec{Z} можно контролировать и регистрировать с помощью соответствующих измерительных приборов. Кроме того, на объект воздействуют некоторые переменные \vec{E} , которые нельзя наблюдать и контролировать. Переменные $\vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ называют *контролируемыми и управляемыми*; переменные $\vec{Z} = (z_1, z_2, \dots, z_m)$ — *контролируемыми, но неуправляемыми*, а переменные $\vec{E} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_l)$ — *неконтролируемыми и неуправляемыми*.

Переменные \vec{X} и \vec{Z} называют *факторами*. Факторы \vec{X} являются управляемыми и изменяются как *детерминированные переменные*, а факторы \vec{Z} — неуправляемые, изменяемые во времени случайным образом, т.е. \vec{Z} представляют собой *случайные процессы*. Пространство контролируемых переменных — факторов \vec{X} и \vec{Z} — образует *факторное пространство*.

Выходная переменная \vec{Y} представляет собой вектор зависимых переменных моделируемого объекта. Ее называют *откликом*, а зависимость \vec{Y} от факторов \vec{X} и \vec{Z} — *функцией отклика*. Геометрическое представление функции отклика называют *поверхностью отклика*.

Переменная Y действует в процессе эксперимента бесконтрольно. Если предположить, что факторы \vec{X} и \vec{Z} стабилизированы во времени и сохраняют постоянные значения, то под влиянием переменных \vec{E} функция отклика \vec{Y} может меняться как систематическим, так и случайным образом. В первом случае говорят о *систематической помехе*, а во втором — о *случайной помехе*. При этом полагают, что случайная помеха обладает вероятностными свойствами, не изменяемыми во времени.

Возникновение помех обусловлено ошибками методик проведения физических экспериментов, ошибками измерительных приборов, неконтролируемыми изменениями параметров и характеристик объекта и внешней среды, включая воздействия тех переменных, которые в принципе могли бы контролироваться экспериментатором, но не включены им в число исследуемых факторов (вследствие трудностей их измерения, по ошибке или незнанию). Помехи могут быть также обусловлены неточностью физического или математического моделирования объектов.

В вычислительных экспериментах объектом исследования является теоретическая математическая модель, на основе которой необходимо получить экспериментальную факторную модель. Для ее получения необходимо определить структуру и численные значения параметров модели.

Под *структурой модели* понимается вид математических соотношений между факторами \vec{X}, \vec{Z} и откликом \vec{Y} . *Параметры* представляют собой коэффициенты уравнений факторной модели. Структуру модели обычно выбирают на основе априорной информации об объекте с учетом назначения и последующего использования модели. Задача определения параметров модели

полностью формализована. Она решается методами *регрессионного анализа*. *Экспериментальные факторные модели* называют также *регрессионными моделями*.

Регрессионную модель можно представить выражением

$$\vec{Y} = \vec{\varphi}(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{B})$$

где \vec{B} — вектор параметров факторной модели.

Вид вектор-функции $\vec{\varphi}$ определяется выбранной структурой модели и при выполнении регрессионного анализа считается заданным, а параметры \vec{B} подлежат определению на основе результатов эксперимента, проводимого в условиях действия помехи \vec{E} , представляемой в виде аддитивной составляющей функции отклика \vec{Y} (рис. 7.1).

Эксперимент — это система операций, воздействий и (или) наблюдений, направленных на получение информации об объекте при исследовательских испытаниях.

Опыт — воспроизведение исследуемого явления в определенных условиях проведения эксперимента при возможности регистрации его результатов. Опыт — отдельная элементарная часть эксперимента.

Различают эксперименты пассивные и активные. *Пассивным* называется такой эксперимент, когда значениями факторов управлять нельзя, и они принимают случайные значения. Это характерно для многих технических объектов при проведении на них физических экспериментов. В таком эксперименте существуют только факторы \vec{Z} . В процессе эксперимента в определенные моменты времени измеряются значения факторов \vec{Z} и функций откликов \vec{Y} . После проведения N опытов полученная информация обрабатывается статистическими методами, позволяющими определить параметры факторной модели. Такой подход к построению математической модели лежит в *Основе метода статистических испытаний (Монте-Карло)*.

Активным называется такой эксперимент, когда значениями факторов задаются и поддерживают их неизменными на заданных уровнях в каждом опыте в соответствии с планом эксперимента. Следовательно, в этом случае существуют только управляемые факторы \vec{X} . Однако в связи с тем, что в активном эксперименте также действует аддитивная помеха \vec{E} , реализации функций отклика \vec{Y} представляют собой случайные величины, несмотря на то, что

варьируемые факторы \vec{X} детерминированы. Поэтому здесь также, как и в пассивном эксперименте, построение экспериментальной факторной модели требует статистической обработки получаемых результатов опытов.

Основные особенности экспериментальных факторных моделей следующие: они статистические; представляют собой сравнительно простые функциональные зависимости между оценками математических ожиданий выходных параметров объекта от его внутренних и внешних параметров; дают адекватное описание установленных зависимостей лишь в области факторного пространства, в которой реализован эксперимент. Статистическая регрессионная модель описывает поведение объекта в среднем, характеризуя его неслучайные свойства, которые в полной мере проявляются лишь при многократном повторении опытов в неизменных условиях.

7.2. Основные принципы планирования эксперимента

Для получения адекватной математической модели необходимо обеспечить выполнение определенных условий проведения эксперимента. Модель называют *адекватной*, если в оговоренной области варьирования факторов \vec{X} полученные с помощью модели значения функций отклика \vec{Y} отличаются от истинных не более чем на заданную величину.

Методы построения экспериментальных факторных моделей рассматриваются в *теории планирования эксперимента*.

Цель планирования эксперимента — получение максимума информации о свойствах исследуемого объекта при минимуме опытов. Такой подход обусловлен высокой стоимостью экспериментов, как физических, так и вычислительных, и вместе с тем необходимостью построения адекватной модели.

Планирование осуществляют как активного, так и пассивного эксперимента. Планируемый активный эксперимент при прочих равных условиях точнее и информативнее, а иногда и дешевле пассивного. Это следует учитывать при выборе вида эксперимента. В вычислительном эксперименте, в отличие от физического, нет никаких ограничений на выбор управляемых факторов и характер их изменения. Поэтому вычислительные эксперименты обычно всегда реализуются как активные. В дальнейшем будут рассматриваться в

основном вопросы, связанные с планированием активных экспериментов.

При планировании активных экспериментов используются следующие принципы:

отказ от полного перебора всех возможных состояний объекта;
постепенное усложнение структуры математической модели;
сопоставление результатов эксперимента с величиной случайных помех;
рандомизация опытов;
оптимальное планирование эксперимента.

Детальное представление о свойствах поверхности отклика может быть получено лишь при условии использования густой дискретной сетки значений факторов, покрывающей все факторное пространство. В узлах этой многомерной, сетки находятся точки плана, в которых проводятся опыты. В этом случае в принципе можно получить факторную модель, которая будет практически почти полностью соответствовать исходной теоретической модели. Однако в большинстве случаев при решении практических задач, для которых используется факторная модель, такого Детального описания не требуется. Выбор структуры факторной модели основан на постулировании определенной степени гладкости поверхности отклика. Поэтому с целью уменьшения количества опытов принимают небольшое число точек плана, для которых осуществляется реализация эксперимента.

В отсутствие априорной информации о свойствах функции отклика нет смысла сразу строить сложную математическую модель объекта. Если проверка этой модели на адекватность не дает удовлетворительного результата, ее постепенно усложняют путем изменения структуры (например, повышая степень полинома, принятого в качестве факторной модели, или вводя в модель дополнительные факторы и т. п.). При этом используются результаты опытов, выполненных при построении простой модели, и проводится некоторое количество дополнительных опытов.

При большом уровне случайной помехи получается большой разброс значений функции отклика \bar{Y} в опытах, проведенных в одной и той же точке плана. В этом случае оказывается, что чем выше уровень помехи, тем с большей вероятностью простая модель окажется работоспособной. Чем меньше уровень помехи, тем точнее должна быть факторная модель.

Кроме случайной помехи при проведении эксперимента может иметь место систематическая помеха. Наличие этой помехи практически никак не обнаруживается и результат ее воздействия на функцию не поддается контролю. Однако если путем соответствующей организации проведения опытов искусственно создать случайную ситуацию, то систематическую помеху можно перевести в разряд случайных. Такой принцип организации эксперимента называют *рандомизацией* систематически действующих помех.

Наличие помех приводит к ошибкам эксперимента. *Ошибки* подразделяют на *систематические* и *случайные*, соответственно наименованиям вызывающих их факторов — помех.

В вычислительных активных экспериментах ошибки характерны только для определяемых значений функций отклика. Если исходить из целей построения факторных моделей на основе теоретических моделей, полагая, что теоретические модели дают точное описание физических свойств технического объекта, а регрессионная модель является ее аппроксимацией, то значения функций отклика будут содержать только случайную ошибку. В этом случае необходимости в рандомизации опытов не возникает.

Рандомизацию опытов осуществляют только в физических экспериментах. Следует отметить, что в этих экспериментах систематическую ошибку может породить наряду с отмеченными в предыдущем параграфе факторами также неточное задание значений управляемых факторов, обусловленное некачественной калибровкой приборов для их измерения (инструментальная ошибка), конструктивными или технологическими факторами.

К факторам в активном эксперименте предъявляются определенные требования. Они должны быть:

1) *управляемыми* (установка заданных значений и поддержание постоянными в процессе опыта);

2) *совместными* (их взаимное влияние не должно нарушать процесс функционирования объекта);

3) *независимыми* (уровень любого фактора должен устанавливаться независимо от уровней остальных);

4) *однозначными* (одни факторы не должны быть функцией других);

5) *непосредственно влияющими на выходные параметры*.

В вычислительном эксперименте реализация трех первых требований не создает никаких затруднений, а в физическом

эксперименте могут возникнуть сложности и далее невозможность их осуществления, что приведет к необходимости замены активного эксперимента пассивным. Функции отклика должны быть:

1) численно измеряемыми; 2) иметь четкий физический смысл; 3) однозначными (характеризовать только одно свойство объекта); 4) информативными (полностью характеризовать определенное свойство объекта); 5) статистически эффективными (измеряться с достаточной точностью с целью сокращения дублирования опытов).

7.3. План эксперимента

При проведении активного эксперимента задается определенный план варьирования факторов, т.е. эксперимент заранее планируется

План эксперимента — совокупность данных, определяющих число, условия и порядок реализации опытов.

Планирование эксперимента — выбор плана эксперимента, удовлетворяющего заданным требованиям.

Точка плана — упорядоченная совокупность численных значений факторов, соответствующая условиям проведения опыта, т.е. точка факторного пространства, в которой проводится эксперимент. Точке плана с номером i соответствует вектор-строка

$$\vec{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$$

Общая совокупность таких векторов \vec{X}_i , $i = \overline{1, L}$ образует план эксперимента, а совокупность различных векторов, число которых обозначим N , — *спектр плана*.

В активном эксперименте факторы могут принимать только фиксированные значения. Фиксированное значение фактора называют *уровнем фактора*. Количество принимаемых уровней факторов зависит от выбранной структуры факторной модели и принятого плана эксперимента. Минимальный $X_{j \min}$ и максимальный $X_{j \max}$, $j = \overline{1, n}$ (n — число факторов) уровни всех факторов выделяют в факторном пространстве находятся все некоторый гиперпараллелепипед, представляющий собой *область планирования*. В области планирования возможные значения факторов, используемые в эксперименте.

Вектор $\vec{X}^0 = (X_1^0, X_2^0, \dots, X_n^0)$ задает точку центра области планирования. Координаты этой точки X_j^0 обычно выбирают из соотношения

$$X_j^0 = (X_{j \max} + X_{j \min}) / 2 \quad (7.1)$$

Точку \vec{X}^0 называют *центром эксперимента*. Она определяет основной уровень факторов X_j^0 , $j = \overline{1, n}$. Центр эксперимента стремятся выбрать как можно ближе к точке, которая соответствует искомым оптимальным значениям факторов. Для этого используется априорная информация об объекте.

Интервалом (или *шагом*) *варьирования фактора* X_j называют величину, вычисляемую по формуле

$$\Delta X_j = (X_{j \max} - X_{j \min}) / 2, \quad j = \overline{1, n}. \quad (7.2)$$

Факторы нормируют, а их уровни кодируют. В кодированном виде верхний уровень обозначают +1, нижний -1, а основной 0. Нормирование факторов осуществляют на основе соотношения

$$x_j = (X_j - X_j^0) / \Delta X_j, \quad j = \overline{1, n}. \quad (7.3)$$

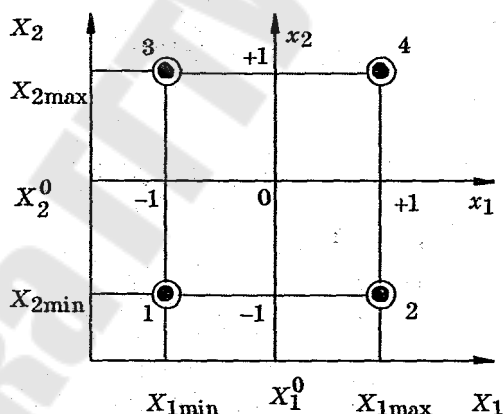


Рисунок 7.2. Геометрическое представление области планирования при двух факторах: X_1 и X_2

Для переменных x_j , начало координат совмещено с центром эксперимента, а в качестве единиц измерения используются интервалы варьирования факторов. Геометрическое представление области планирования при двух факторах показано на рис. 7.2. Центр эксперимента находится в точке 0 с координатами X_1^0, X_2^0 . Точки 1, 2, 3, 4 являются точками плана эксперимента. Например, значения факторов X_1 и X_2 в точке 1 равны соответственно $X_{1 \min}$ и $X_{2 \min}$, а нормированные их значения $x_{1 \min} = -1, x_{2 \min} = -1$.

В дальнейшем будем предполагать, что в планах активных экспериментов факторы нормированы.

План эксперимента удобно представлять в матричной форме. План эксперимента задается либо матрицей плана, либо матрицей спектра плана в совокупности с матрицей дублирования.

Матрица плана представляет собой прямоугольную таблицу, содержащую информацию о количестве и условиях проведения опытов. Строки матрицы плана соответствуют опытам, а столбцы — факторам. Размерность матрицы плана $L \times n$, где L — число опытов, n — число факторов. При проведении повторных (дублирующих) опытов в одних и тех же точках плана матрица плана содержит ряд совпадающих строк.

Матрица спектра плана — это матрица, в которую входят только различающиеся между собой строки матрицы плана. Размерность матрицы спектра плана $N \times n$, где N — число точек плана, различающихся между собой хотя бы одной координатой X_{ij} , $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, n}$.

Матрица спектра плана имеет вид

$$X = \begin{bmatrix} \vec{X}_1 \\ \vec{X}_2 \\ \dots \\ \vec{X}_i \\ \dots \\ \vec{X}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1j} & \dots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2j} & \dots & X_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{i1} & X_{i2} & \dots & X_{ij} & \dots & X_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{N1} & X_{N2} & \dots & X_{Nj} & \dots & X_{Nn} \end{bmatrix}, \quad (7.4)$$

где X_i — вектор, определяющий нормированные значения координат точки плана в i -ом опыте; X_{ij} — нормированное значение j -го фактора в i -ом опыте.

Матрица дублирования — квадратная диагональная матрица m , диагональные элементы которой равны числам параллельных опытов в соответствующих точках спектра плана:

$$m = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & m_N \end{bmatrix}. \quad (7.5)$$

Опыты при выполнении эксперимента проводятся в последовательности, предусмотренной матрицей плана. Эта матрица составляется лишь при необходимости рандомизации опытов, когда в

результатах эксперимента можно ожидать наличие систематических ошибок. Для выбора случайной последовательности опытов используется таблица равномерно распределенных случайных чисел. Первое число таблицы выбирают произвольно, желательно случайным образом, а затем, начиная с этого числа, выписывают L чисел таблицы, где L — число опытов (с учетом их дублирования). При этом числа, большие L , а также уже выписанные, отбрасываются. Равномерно распределенные псевдослучайные числа приведены в табл. 7 приложения.

В вычислительных экспериментах опыты проводят в соответствии с матрицей спектра плана, так как предполагается отсутствие систематических ошибок и поэтому нет необходимости в рандомизации опытов.

7.4. Регрессионный анализ

Регрессионный анализ проводится с целью получения по экспериментальным данным регрессионных моделей, представляющих собой экспериментальные факторные модели. Задачей регрессионного анализа является определение параметров экспериментальных факторных моделей объектов проектирования или исследования, т.е. определение коэффициентов уравнений моделей при выбранной их структуре.

Регрессионный анализ включает той основных этапа:

- 1) статистический анализ результатов эксперимента;
- 2) получение оценок \vec{b} искомых коэффициентов регрессии $\vec{\beta}$;
- 3) оценку адекватности и работоспособности полученной экспериментальной факторной модели технической системы.

Под структурой экспериментальной факторной математической модели понимается вид математических соотношений

между факторами \vec{X}, \vec{Z} и откликом \vec{Y} . В качестве факторов принимают внутренние и внешние параметры технической системы, подлежащие оптимизации в процессе ее проектирования. Внутренние параметры системы — это параметры ее элементов, внешние — это параметры внешней среды, в условиях воздействий которой осуществляется функционирование системы.

Функциями отклика \vec{Y} являются выходные параметры технической системы, характеризующие ее эффективность и качество

процессов функционирования. Выходные параметры системы принимаются в качестве критериев оптимальности.

Как уже отмечалось, структура факторной модели выбирается на основе априорной информации, используя принцип постепенного ее усложнения. Параметры факторной математической модели определяются методами регрессионного анализа. При определении параметров этими методами нет необходимости различать виды факторов, т. е. подразделять факторы на управляемые \vec{X} и неуправляемые \vec{Z} . Поэтому в дальнейшем все они будут обозначаться буквой \vec{X} . Тогда факторную модель можно представить векторным уравнением регрессии вида

$$\vec{Y} = \vec{\varphi}(\vec{X}, \vec{B}) \quad (7.6)$$

Определение параметров \vec{B} этой модели будем рассматривать на примере одного уравнения $Y = \varphi(\vec{X}, \vec{B})$. Для определения параметров используются результаты эксперимента. Результаты эксперимента можно представить функцией вида

$$Y = \varphi(\vec{X}) + \varepsilon, \quad (7.7)$$

где ε — аддитивная помеха случайного характера с нормальным законом распределения.

Так как каждый опыт проводится при определенном сочетании уровней факторов X , то функцию $\varphi(\vec{X})$ представим выражением

$$\varphi(\vec{X}) = \sum_{j=0}^d \beta_j f_j(\vec{X}), \quad (7.8)$$

где β_j — j -ый элемент вектора искомых коэффициентов уравнения регрессии: $\vec{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_d^T)$; $f_j(\vec{X})$ — j -ая базисная функция — элемент вектора базисных функций

$$\vec{f}(\vec{X}) = [f_0(\vec{X}), f_1(\vec{X}), \dots, f_d(\vec{X})]^T.$$

В качестве базисных функций используют полиномы простейших переменных, системы ортогональных полиномов, тригонометрические функции. Наиболее часто пользуются полиномами первой и второй степеней. Например полином первой степени, описывающий функцию отклика y при двух факторах x_1 и x_2 , может иметь вид

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2, \quad (7.9)$$

или

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_1 x_2, \quad (7.10)$$

а полином второй степени

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_1x_2 + b_4x_1^2 + b_5x_2^2. \quad (7.11)$$

Базисные функции в случае использования последнего выражения имеют вид:

$$f_0(\vec{X}) = 1; f_1(\vec{X}) = x_1; f_2(\vec{X}) = x_2; f_3(\vec{X}) = x_1x_2; f_4(\vec{X}) = x_1^2; f_5(\vec{X}) = x_2^2;$$

Если уравнение регрессии имеет вид выражений (7.9), (7.10), его называют уравнением *линейной регрессии* (линейной регрессией или регрессией первого порядка), а если содержит факторы во второй и более высокой степени — *нелинейной регрессией* (регрессией соответствующего порядка).

Линейная регрессия может представлять как линейную математическую модель, так и нелинейную, в зависимости от того, содержит ли она *линейные эффекты* (как в выражении (7.9), или наряду с ними также *эффекты взаимодействия* (как в выражении (7.10)). Линейным называют эффект, характеризующий линейную зависимость выходного параметра y от соответствующего фактора x_i . Эффектом взаимодействия называют эффект, характеризующий совместное влияние нескольких факторов на y (например, в выражении (7.10) x_1x_2). Эффекты взаимодействия двух факторов называют парным взаимодействием, трех факторов — тройным взаимодействием и т. д.

Как всякий статистический метод, регрессионный анализ применим при определенных предпосылках (постулатах).

1. Аддитивная помеха ε — случайная нормально распределенная величина с параметрами $m_\varepsilon=0$ и $\sigma_\varepsilon^2=\text{const}$. В этом случае функция отклика Y также случайная величина с нормальным законом распределения. Гипотезу о нормальном распределении Y можно проверить по критерию Пирсона.

2. Постоянство дисперсии помехи означает, что интенсивность ошибки определения Y не меняется при изменении уровня факторов в процессе эксперимента. Выполнение этого постулата проверяется по критерию однородности дисперсии в разных точках опыта.

3. Значения факторов в активном эксперименте — неслучайные величины. Это означает, что установление каждого фактора на заданном уровне и удерживание его на этом уровне во время опыта точнее, чем ошибка воспроизводимости. В вычислительном эксперименте это выполняется однозначно, а в физическом вклад, вносимый ошибками измерения факторов \vec{X} , должен быть пренебрежимо малым в сравнении с действием других

неконтролируемых факторов, образующих ошибку ε определения функции Y .

4. Значения помехи ε в различных точках опыта некоррелированы. Для обеспечения этих требований используется рандомизация опытов.

5. В пассивном эксперименте условие некоррелированности помехи обеспечиваются путем соответствующего выбора временного интервала съема информации об условиях и результатах опытов.

6. Векторы-столбцы базисных функций должны быть линейно независимыми. Выполнение этого требования необходимо для получения отдельных оценок \vec{b} всех коэффициентов регрессии $\vec{\beta}$. В активном эксперименте оно обеспечивается соответствующим выбором спектра плана эксперимента. При этом число опытов N (без учета дублирования) должно быть не меньше, чем число оцениваемых коэффициентов N_B , т. е. $N \geq N_B$.

В пассивном эксперименте линейная зависимость между столбцами практически исключается, так как факторы неуправляемы и принимают случайные значения в различных опытах, но может наблюдаться сильная коррелированность столбцов, что повлечет за собой большие ошибки вычисления коэффициентов регрессии. Для выявления коррелированности столбцов проводят корреляционный анализ результатов пассивного эксперимента.

11.5. Оценка параметров регрессионной модели.

Исходными данными для получения оценок параметров регрессионной модели технической системы (т. е. оценок \vec{b} искомых коэффициентов регрессии $\vec{\beta}$) является информация о значениях управляемых факторов \vec{X} (или неуправляемых — при проведении пассивного эксперимента) и функции отклика Y . Эту информацию можно представить в виде матрицы X значений факторов во всех N опытах, предусмотренных спектром плана эксперимента, и вектора-столбца \vec{Y} полученных в этих опытах значений функции отклика Y :

$$X = \begin{bmatrix} \vec{X}_1 \\ \vec{X}_2 \\ \dots \\ \vec{X}_j \\ \dots \\ \vec{X}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11} X_{12} \dots X_{1j} \dots X_{1n} \\ X_{21} X_{22} \dots X_{2j} \dots X_{2n} \\ \dots \\ X_{i1} X_{i2} \dots X_{ij} \dots X_{in} \\ \dots \\ X_{N1} X_{N1} \dots X_{Nj} \dots X_{Nn} \end{bmatrix}; \quad (7.12)$$

$$\vec{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_i, \dots, y_N)^T, \quad (7.13)$$

где $\vec{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$ - вектор-строка значений факторов в i -м опыте; X_{ij} — значение j -го фактора в i -м опыте; n — количество факторов; N — количество опытов; y_i — значение функции отклика Y в i -ом опыте (если проводились параллельные опыты, т. е. осуществлялось дублирование опытов, то вместо y_i используются оценки их математических ожиданий, т. е. выборочные средние \bar{y}_i).

Значения базисных функций во всех опытах представляют собой матрицу F , называемую матрицей базисных функций

$$F = \begin{bmatrix} \vec{f}_1(\vec{X}_1) \\ \vec{f}_2(\vec{X}_2) \\ \dots \\ \vec{f}_i(\vec{X}_i) \\ \dots \\ \vec{f}_N(\vec{X}_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{10} f_{11} f_{12} \dots f_{1k} \dots f_{1d} \\ f_{20} f_{21} f_{22} \dots f_{2k} \dots f_{2d} \\ \dots \\ f_{i0} f_{i1} f_{i2} \dots f_{ik} \dots f_{id} \\ \dots \\ f_{N0} f_{N1} f_{N2} \dots f_{Nk} \dots f_{Nd} \end{bmatrix}, \quad (7.14)$$

где f_{ik} — значение k -ой базисной функции в i -ом опыте; $\vec{f}_{ik}(\vec{X}_i) = (f_{i0}, f_{i1}, f_{i2}, \dots, f_{ik}, \dots, f_{id})$ — вектор-строка значений базисных функций в i -ом опыте.

Используя информацию об X , \vec{Y} и F , необходимо найти оценки коэффициентов регрессии, представляемые вектором-столбцом

$$\vec{b}^T = (b_0, b_1, b_2, \dots, b_k, \dots, b_d), \quad (7.15)$$

где b_k — значение оценки коэффициента регрессии при базисной функции $f_k(\vec{X})$.

Так как функция отклика Y — случайная величина, поскольку на ее значения в различных опытах оказывает влияние случайная помеха ε , то оценки коэффициентов регрессии будут случайными

величинами.

Уравнение регрессии устанавливает зависимость между оценкой математического ожидания функции отклика \bar{y} и факторами $\vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Общий вид этой зависимости

$$\bar{y} = \sum_{k=0}^d b_k k_k(\vec{X}). \quad (7.16)$$

В связи с наличием помехи значение функции отклика в i -м опыте y_i будет отличаться от \bar{y}_i . Для определения y_i можно составить выражение

$$y_i = b_0 f_{i0} + b_1 f_{i1} + \dots + b_k f_{ik} + \dots + b_d f_{id} + \varepsilon_i, i = \overline{1, N} \quad (7.17)$$

где ε_i - невязка уравнения регрессии в i -м опыте.

Невязка характеризует отклонение значений функции отклика в опытах от получаемых с помощью регрессионной модели (7.16). Она возникает по двум причинам: из-за ошибки эксперимента и из-за непригодности (приближенности) выбранной структуры факторной математической модели. Причем, эти причины смешаны и нельзя сказать, какая из них преобладает.

Если постулировать, что модель пригодна, то невязка будет порождаться только ошибкой опыта. Тогда для определения коэффициентов уравнения (7.16) невязку надо минимизировать. Для этого в регрессионном анализе используется *метод наименьших квадратов* (МНК). Составляется функция, представляющая собой сумму квадратов невязок, и осуществляется ее минимизация, т. е.

$$E = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2 \rightarrow \min. \quad (7.18)$$

Подставим значение ε_i из выражения (7.17)

$$E = \sum [y_i - (b_0 f_{i0} + b_1 f_{i1} + \dots + b_k f_{ik} + \dots + b_d f_{id})]^2 \rightarrow \min. \quad (7.19)$$

В выражении (7.19) коэффициенты b_k рассматриваются как неизвестные переменные, которые наилучшим образом соответствуют полученным результатам эксперимента. Значения этих коэффициентов, при которых достигается минимум функции E , принимаются в качестве оценок коэффициентов регрессии. Минимум функции E имеет место при равенстве нулю частных производных этой функции по переменным b_0, b_1, \dots, b_d .

$$\frac{\partial E}{\partial b_0} = -2 \sum_{i=1}^N [y_i - b_0 f_{i0} + b_1 f_{i1} + \dots + b_d f_{id}] f_{i0} = 0;$$

$$\frac{\partial E}{\partial b_1} = -2 \sum_{i=1}^N [y_i - b_0 f_{i0} + b_1 f_{i1} + \dots + b_d f_{id}] f_{i1} = 0;$$

$$\dots$$

$$\frac{\partial E}{\partial b_d} = -2 \sum_{i=1}^N [y_i - b_0 f_{i0} + b_1 f_{i1} + \dots + b_d f_{id}] f_{id} = 0.$$

После преобразований получим систему линейных неоднородных алгебраических уравнений относительно искомых оценок коэффициентов регрессии b_0, b_1, \dots, b_d :

$$\left. \begin{aligned} b_0 \sum_{i=1}^N f_{i0}^2 + b_1 \sum_{i=1}^N f_{i1} f_{i0} + \dots + b_d \sum_{i=1}^N f_{id} f_{i0} &= \sum_{i=1}^N y_i f_{i0}; \\ b_0 \sum_{i=1}^N f_{i0} f_{i1} + b_1 \sum_{i=1}^N f_{i1}^2 + \dots + b_d \sum_{i=1}^N f_{id} f_{i1} &= \sum_{i=1}^N y_i f_{i1}; \\ \dots \\ b_0 \sum_{i=1}^N f_{i0} f_{id} + b_1 \sum_{i=1}^N f_{i1} f_{id} + \dots + b_d \sum_{i=1}^N f_{id}^2 &= \sum_{i=1}^N y_i f_{id}. \end{aligned} \right\} \quad (7.20)$$

Очевидно, что коэффициенты при неизвестных переменных \vec{b} этой системы уравнений являются элементами матрицы Φ , определяемой из выражения

$$\Phi = F^T F \quad (7.21)$$

в котором F представляет собой матрицу базисных функций (7.14). Значения элементов матрицы F известны из проведенного эксперимента. Следовательно, элементы матрицы Φ оказываются известными коэффициентами системы уравнений (7.20). Выпишем матрицу Φ

$$\Phi = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N f_{i0}^2 & \sum_{i=1}^N f_{i1} f_{i0} & \dots & \sum_{i=1}^N f_{id} f_{i0} \\ \sum_{i=1}^N f_{i0} f_{i1} & \sum_{i=1}^N f_{i1}^2 & \dots & \sum_{i=1}^N f_{id} f_{i1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^N f_{i0} f_{id} & \sum_{i=1}^N f_{i1} f_{id} & \dots & \sum_{i=1}^N f_{id}^2 \end{bmatrix}. \quad (7.22)$$

Матрицу Φ называют *информационной матрицей Фишера*. Она содержит $(d+1)$ строк и $(d+1)$ столбцов, причем, элемент j -ой строки

k -го столбца представляет собой сумму $\sum_{i=1}^N f_{ij}f_{ik}$. Матрица Φ симметрична относительно главной диагонали, что упрощает составление системы алгебраических уравнений (7.20) для регрессионной модели.

Систему уравнений (7.20) можно также записать в матричной форме

$$\Phi \vec{B} = F^T \vec{Y}. \quad (7.23)$$

Система уравнений (7.20) имеет единственное решение, если определитель матрицы Φ не равен нулю. В этом случае матрица Φ будет не вырожденной. Выполнение пятой предпосылки регрессионного анализа, изложенной в предыдущем параграфе, исключает возникновение вырожденности.

Решение системы уравнений (7.20) обычно осуществляют методом Гаусса. При небольшом числе определяемых коэффициентов b_k можно использовать правило Крамера.

Полученные методом наименьших квадратов оценки b_0, b_1, \dots, b_d действительных значений коэффициентов регрессии $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_d$ обладают следующими свойствами:

1) математические ожидания оценок $M[b_j] = \beta_j, j = \overline{0, d}$, т. е. оценки b_j несмещенные;

2) дисперсии оценок коэффициентов регрессии минимальны и равны

$$\sigma_{b_j}^2 = M\{(b_j - M[b_j])^2\} = M\{(b_j - \beta_j)^2\} = \sigma_\varepsilon^2 C_{jj}, \quad (11.24)$$

а корреляционный момент

$$\mu_{11}(b_j, b_k) = M\{(b_j - M[b_j])(b_k - M[b_k])\} = M\{(b_j - \beta_j)(b_k - \beta_k)\} = \sigma_\varepsilon^2 C_{jk}, \quad (7.25)$$

где C_{jj}, C_{jk} — элементы матрицы Φ^{-1} , обратной к информационной; σ_ε^2 — дисперсия случайной помехи;

3) оценки b_0, b_1, \dots, b_d подчиняются совместному $(d+1)$ -мерному нормальному распределению.

7.6. Планы экспериментов и их свойства

Для проведения активных экспериментов разработано множество различных планов. Планы учитывают как особенности структуры регрессионных моделей, так и требования их эффективности с позиций повышения точности получаемых моделей

и снижения затрат на проведение эксперимента.

При построении линейных моделей или нелинейных, содержащих только взаимодействия факторов, но без квадратов этих факторов (регрессий первого порядка), каждый фактор можно варьировать только на двух уровнях. Для получения таких моделей используют *планы первого порядка*.

Известно несколько разновидностей планов первого порядка. Эти планы различаются в зависимости от структуры регрессионной модели. Они предназначены для планирования следующих видов экспериментов:

однофакторного (классического) эксперимента;
полного факторного эксперимента;
дробного факторного эксперимента.

Если в регрессионную модель входят факторы в квадрате или с более высокими степенями, то необходимо не менее трех уровней варьирования факторов. При построении квадратичных моделей применяют *планы второго порядка*. Эти планы часто используют в качестве своего ядра какой-либо план первого порядка, который дополняется так называемыми *звездными точками*.

Планы различают по степени насыщенности и композиционному. *План называют насыщенным*, если общее число точек плана равно числу неизвестных параметров регрессионной модели. Такой план позволяет получить экспериментальную факторную модель при минимальных затратах, так как обеспечивает минимум числа опытов.

План называется композиционным если в спектр его в качестве составной части входят точки спектра плана, который был реализован при построении более простой модели. Композиционность плана позволяет реализовать принцип постепенного усложнения модели при минимальных затратах, так как при этом используются результаты опытов, выполненных для получения простой модели. Многие планы второго порядка являются композиционными.

Важным свойством плана является его *ортогональность*. У ортогональных планов информационная матрица Фишера Φ диагональная, а столбцы матрицы базисных функций F попарно ортогональны. Для ортогонального плана при заданных значениях диагональных элементов матрицы Φ дисперсии $\sigma_{b_k}^2$ оценок коэффициентов регрессии b_k минимальны. Причем, эти оценки получаются независимыми, что существенно облегчает их вычисление и анализ.

При изменении вида плана изменяется матрица Φ , что влияет на дисперсии оценок коэффициентов регрессии. Различают D -, A - и E -оптимальные планы. Они обеспечивают различные формы эллипсоидов рассеивания оценок. D -оптимальный план минимизирует обобщенную дисперсию оценок коэффициентов регрессии и обеспечивает минимальный объем эллипсоида их рассеивания. A -оптимальный план минимизирует среднюю дисперсию всех оценок, а эллипсоид имеет наименьшую сумму квадратов длин осей. Эллипсоид рассеивания у E -оптимального плана имеет минимальную длину своей наибольшей оси.

В зависимости от возможностей предсказания отклика по уравнению регрессии различают планы *ротатабельные* и *униформные*. План называется ротатабельным, если дисперсия предсказания отклика постоянна на фиксированном расстоянии от центра эксперимента. Униформный план обеспечивает практически постоянное ее значение в некоторой области факторного пространства. Свойства ротатабельности или униформности обеспечиваются соответствующим выбором точек матрицы спектра плана. Задача выбора оптимального плана довольно сложная и в большинстве случаев не имеет аналитического решения. Поэтому поиск оптимальных планов обычно осуществляется численными методами на ЭВМ.

Рассмотрим основы построения и основные свойства планов первого порядка.

7.7. План однофакторного эксперимента

Однофакторный (классический) эксперимент предназначен для получения линейной экспериментальной факторной модели вида

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n. \quad (7.26)$$

Однофакторный эксперимент предусматривает поочередное варьирование каждого из факторов при фиксированных на некотором уровне значениях остальных факторов. Фактор X_i варьируют на двух уровнях $X_{iв}$ и $X_{iн}$, а все остальные при этом должны находиться в точке центра эксперимента $X_j^0, j \neq i$. Для нормированных факторов $x_{iв} = -1, x_j = 0$. С учетом этого составим матрицу спектра плана однофакторного эксперимента

$$X = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ +1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & +1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & \dots & +1 \end{bmatrix} \quad (7.27)$$

Число точек плана в этом случае $N = 2n$, где n — количество факторов. Точки спектра плана располагаются в центрах граней гиперкуба. На рис. 11.3, *a* показано расположение точек для двумерного случая, а на рис. 11.3, *б* — для трехмерного.

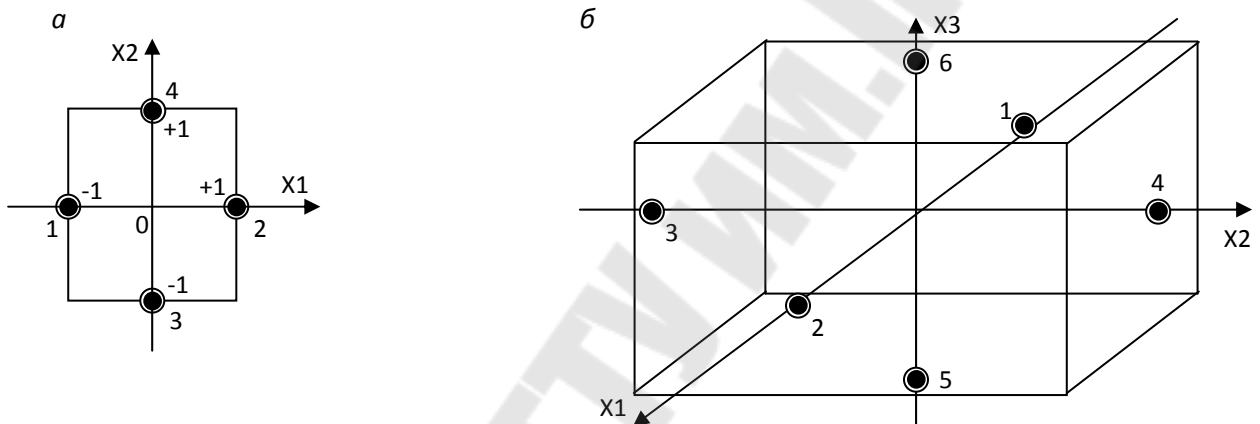


Рисунок 7.3. Расположение точек спектра однофакторного эксперимента: *a* — при двух факторах; *б* — при трех факторах

Вектор базисных функций имеет вид

$$\vec{f}(\vec{X}) = (1, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (7.28)$$

а матрица F численных значений базисных функций отличается от матрицы спектра плана X только одним дополнительным столбцом, соответствующим базисной функции $f_0 = (\vec{X}) = 1$

$$F = \begin{bmatrix} +1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ +1 & +1 & 0 & \dots & 0 \\ +1 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ +1 & 0 & +1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ +1 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ +1 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{bmatrix}, \quad (7.29)$$

Матрица базисных функций F обладает очевидными свойствами:

$$1) \quad \sum_{i=1}^N f_k(\vec{X}) = 0, k = \overline{1, n}; \quad (7.30)$$

$$2) \quad \sum_{i=1}^N f_0(\vec{X}) = N = 2n; \quad (7.31)$$

$$3) \quad \sum_{i=1}^N [f_k(\vec{X})]^2 = 2, k = \overline{1, n}; \quad (7.32)$$

$$4) \quad \sum_{i=1}^N [f_0(\vec{X})]^2 = 2 = 2n; \quad (7.33)$$

$$5) \quad \sum_{i=1}^N f_j(\vec{X})f_k(\vec{X}) = 0, j \neq k; j, k = \overline{0, n}, \quad (7.34)$$

где N – число точек спектра плана; $f_k(\vec{X}_i)$ – значение k -ой базисной функции в i -ом опыте.

Согласно выражению (7.34) векторы-столбцы всех базисных функций попарно ортогональны.

Используя свойства (7.32-7.34) и выражение (7.22), легко составить информационную матрицу Фишера $\Phi = F^T F$

$$\Phi = \begin{bmatrix} 2n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \quad (7.35)$$

Так как матрица Φ диагональная, то план однофакторного эксперимента ортогональный и коэффициенты регрессии некоррелированы друг с другом. Для определения дисперсии оценок коэффициентов регрессии (7.26) вычислим обращенную матрицу Фишера.

$$\Phi^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}. \quad (7.36)$$

Искомые дисперсии оценок коэффициентов регрессии определяются произведениями дисперсии помехи σ_ε^2 на соответствующие диагональные элементы матрицы Φ^{-1} :

$$\sigma_{b_0}^2 = \sigma_\varepsilon^2 / (2n); \sigma_{b_k}^2 = \sigma_\varepsilon^2 / 2, k = \overline{1, n}. \quad (7.37)$$

Очевидно, что точность получаемой модели в этом случае невысокая, так как коэффициенты регрессии $b_k, k=1, n$ (кроме коэффициента b_0) имеют высокое значение дисперсии. Поэтому

однофакторный эксперимент следует признать явно неудовлетворительным для построения модели технической системы. В связи с этим в настоящее время он практически не применяется. Следует отметить, что рассмотренный план обладает свойством ротатабельности.

7.8 План полного факторного эксперимента

Спектр плана полного факторного эксперимента (ПФЭ) содержит все возможные комбинации значений факторов на всех уровнях их изменения. Число точек N спектра плана определяется по формуле

$$N = U^n \quad (7.38)$$

где U — число уровней варьирования факторов; n — число факторов.

Рассмотрим особенности и свойства ПФЭ, применяемых при построении линейных регрессий вида

$$y = b_0 + \sum_{j=1}^n b_j x_j + \sum_{j=1}^n \sum_{k=j+1}^n b_{j,k} x_j x_k + \sum \sum \sum b_{j,k,l} x_j x_k x_l + \dots + b_{1,2,\dots,n} x_1 x_2 \dots x_n. \quad (7.39)$$

Для получения линейной регрессии достаточно варьировать факторы на двух уровнях, т. е. $U = 2$. Тогда число точек спектра плана будет

$$N = 2^n \quad (7.40)$$

Такой план принято обозначать ПФЭ 2^n .

Рассмотрим порядок составления матрицы спектра плана, полагая, что факторы нормированы и, следовательно, могут принимать значения только либо + 1, либо - 1. Напомним, что столбцы матрицы X соответствуют значениям факторов x_1, x_2, \dots, x_n .

Для составления матрицы спектра плана используется следующее простое правило: в первой строке матрицы все факторы равны - 1, в первом столбце знаки единиц меняются поочередно; во втором столбце они чередуются - через 2; в третьем - через 4; в четвертом - через 8 и т. д. по степеням двойки. Следовательно, для каждого последующего столбца частота изменения знака в два раза меньше, чем для предыдущего.

Используя изложенное правило чередования знаков, составим матрицы спектров планов для случаев $n = 2$ и $n = 3$, т. е. для двух и трех факторов.

При $n = 2$ число точек плана $N = 2^2 = 4$, а матрица спектра плана имеет вид

$$X = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ +1 & -1 \\ -1 & +1 \\ +1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (7.41)$$

при $n=3$ $N=2^3=8$, а матрица X

$$X = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & -1 \\ -1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 \\ -1 & -1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 \\ -1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 \end{bmatrix}. \quad (7.42)$$

Спектры планов можно изобразить в привычной для экспериментатора табличной форме. В табл. 7.1 приведен спектр плана ПФЭ 2^2 , а в табл. 7.2 - спектр плана ПФЭ 2^3 .

Таблица 7.1

i	Факторы	
	X ₁	X ₂
1	-1	-1
2	+1	-1
3	-1	+1
4	+1	+1

Таблица 7.2.

i	Факторы		
	X ₁	X ₂	X ₃
1	-1	-1	+1
2	+1	-1	+1
3	-1	+1	+1
4	+1	+1	+1
5	-1	-1	-1
6	+1	-1	-1
7	-1	+1	-1
8	+1	+1	-1

В табл. 7.1, 7.2 и в последующем буквой i обозначен номер точки спектра плана.

Точки плана ПФЭ 2^n располагаются в вершинах n -мерного гиперкуба. На рис. 7.4, а показано расположение точек для двумерного случая, а на рис. 7.4, б — для трехмерного.

Посредством ПФЭ можно построить как простейшую линейную модель технической системы вида

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n \quad (7.43)$$

так и нелинейную.

Для модели вида (7.43) система базисных функций очевидна:

$f_0(\vec{X}) = 1; f_1(\vec{X}) = x_1; f_2(\vec{X}) = x_2; \dots; f_n(\vec{X}) = x_n$. Число базисных функций в этом случае равно $n + 1$.

Выясним, какие базисные функции могут входить в регрессионную модель, получаемую посредством ПФЭ 2^n , чтобы выполнялось требование о линейной независимости векторов-столбцов этих функций, изложенное в § 11.4. При выполнении этого требования получают отдельные оценки всех коэффициентов регрессии. Линейная независимость столбцов матрицы F достигается, если в ней отсутствуют полностью совпадающие или полностью противоположные (по знакам) столбцы.

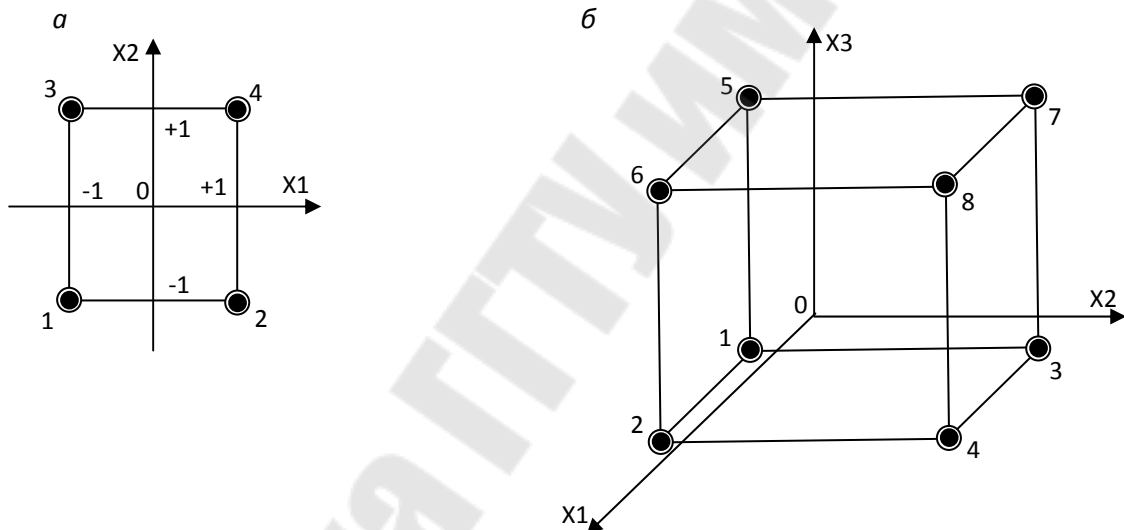


Рисунок 7.4. Расположение точек спектра плана ПФЭ 2^n :
а – при $n=2$; б – при $n=3$

В общем случае в полиномиальную модель могут входить факторы в любой степени и различные комбинации из их произведений. Так как при нормированных факторах их значения равны -1 или $+1$, а в качестве показателей степеней факторов принимаются целые числа, то при четных показателях степеней вектор-столбец базисной функции состоит только из $+1$ и совпадает с вектором-столбцом функции $f_0(\vec{X})$, а векторы-столбцы всех базисных функций, соответствующих одним и тем же факторам x_j , возведенным в любые нечетные степени, будут совпадающими.

Вместе с тем легко убедиться, что любые комбинации произведений факторов x_1, x_2, \dots, x_n могут быть в числе базисных функций.

Выпишем выражения линейных регрессий при $n = 2$ с учетом всех возможных сочетаний взаимодействия факторов

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_1x_2 \quad (7.44)$$

При $n = 3$ получаем

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_1x_2 + b_5x_1x_3 + b_6x_2x_3 + b_7x_1x_2x_3. \quad (7.45)$$

В табл. 7.3 приведены базисные функции плана ПФЭ², используемого для построения регрессионной модели (7.44), а в табл. 7.4 — плана ПФЭ³, используемого для модели (7.45). Прямоугольниками в этих таблицах обведены спектры планов.

Таблица 7.3. Базисные функции плана ПФЭ²

i	$f_0=1$	$f_1=x_1$	$f_2=x_2$	$f_3=x_1x_2$
1	+1	-1	-1	+1
2	+1	+1	-1	-1
3	+1	-1	+1	-1
4	+1	+1	+1	+1

Таблица 7.4. Базисные функции плана ПФЭ³

i	$f_0=1$	$f_1=x_1$	$f_2=x_2$	$f_3=x_3$	$f_4=x_1x_2$	$f_5=x_1x_3$	$f_6=x_2x_3$	$f_7=x_1x_2x_3$
1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1
2	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1
3	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1
4	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1
5	+1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	+1
6	+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1	-1
7	+1	-1	+1	+1	-1	+1	+1	-1
8	+1	+1	+1	+1	+1	-1	+1	+1

Уравнение линейной регрессии, как это видно из (7.44) и (7.45), может содержать следующее предельное количество коэффициентов при различных видах базисных функций:

один коэффициент b_0 — свободный член уравнения регрессии;

n коэффициентов b_j — линейных членов уравнения регрессии;

C_n^2 коэффициентов $b_{j,k}$ при парных взаимодействиях факторов;

C_n^3 коэффициентов $b_{j,k,l}$ при тройных взаимодействиях факторов и т.

д.;

один коэффициент $b_{1,2,\dots,n}$ взаимодействия факторов максимального, n -го порядка.

Выражение для определения общего числа коэффициентов регрессии имеет вид

$$N_B = 1 + n + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^n = 2^n \quad (7.46)$$

Так как при использовании всех возможных сочетаний факторов в уравнении регрессии число определяемых коэффициентов N_B равно числу точек N спектра плана ПФЭ 2^n , то такой план является насыщенным.

Численные значения $f_j(\vec{X}_i)$, приведенные в таблице базисных функций, являются элементами матрицы F . Матрица F плана ПФЭ 2^n обладает следующими свойствами.

1. *Свойство симметричности относительно центра эксперимента* - алгебраическая сумма элементов каждого столбца матрицы базисных функций, кроме столбца $f_0(\vec{X})$, равна нулю

$$\sum_{i=1}^N f_j(\vec{X}_i) = 0, j = \overline{1, d}, d = N_B - 1, \quad (7.47)$$

где $f_j(\vec{X}_i)$ — значение j -ой базисной функции, соответствующее i -ой строке матрицы F ; i — номер точки спектра плана; N — число точек спектра плана; N_B — количество базисных функций.

2. *Свойство ортогональности столбцов* — сумма построчных произведений элементов любых двух столбцов равна нулю

$$\sum_{i=1}^N f_j(\vec{X}_i) f_k(\vec{X}_i) = 0, j \neq k; j, k = \overline{0, d}. \quad (7.48)$$

3. *Свойство нормировки* — сумма квадратов элементов каждого столбца матрицы базисных функций равна числу точек N спектра плана

$$\sum_{i=1}^N [f_j(\vec{X}_i)]^2 = N, j = \overline{0, d}. \quad (7.49)$$

4. Для столбца базисной функции $f_0(\vec{X})$ сумма элементов также равна N

$$\sum_{i=1}^N f_0(\vec{X}_i) = N. \quad (7.50)$$

Выражения (7.47-7.50) записаны в предположении, что дублирование опытов не производится.

Составим информационную матрицу Фишера Φ , определяемую выражением (7.22). Выражения (7.48) и (7.49) позволяют определить элементы матрицы Φ . Очевидно, что для ПФЭ 2^n матрица Φ диагональная с постоянными диагональными элементами

$$\Phi = \begin{bmatrix} N & 0 & \dots & 0 \\ 0 & N & & 0 \\ \dots & & \dots & \\ 0 & 0 & & N \end{bmatrix}. \quad (7.51)$$

Следовательно, ПФЭ 2^n относится к классу *ортогональных планов*.

Так как матрица Φ диагональная, то корреляционные моменты оценок коэффициентов регрессии $\mu_{11}(b_j, b_k) = 0$ и оценки всех коэффициентов регрессии $b_j, j = 1, N$ некоррелированы друг с другом. Кроме того, все коэффициенты регрессии оцениваются с одинаковой точностью, так как диагональные элементы матрицы Φ одинаковы. Дисперсия оценок коэффициентов

$$\sigma_{b_j}^2 = \sigma_\varepsilon^2 / N. \quad (7.52)$$

Для линейной модели вида (7.43) план ПФЭ 2^n является А- и Е-оптимальным и ротатабельным, а для модели (7.39) — D-оптимальным.

7.9. План дробного факторного эксперимента

Наряду с отмеченными положительными качествами полного факторного эксперимента он имеет существенный недостаток: увеличение количества факторов приводит к быстрому росту числа опытов, что обусловлено степенной зависимостью (7.38). Например, при $n=10$ спектр плана содержит $N=2^{10}=1024$ опыта. Кроме того, необходимо дублирование опытов.

ПФЭ позволяет построить регрессионную модель, которая учитывает влияние на функцию отклика выбранных факторов и всех возможных сочетаний взаимодействий этих факторов. Но поскольку структура модели выбирается на основе априорной информации о физических свойствах исследуемого объекта, то весьма сложно представить себе влияние на характеристики его функционирования эффектов взаимодействий выше второго или третьего порядка. Обычно при построении многофакторной регрессионной модели ограничиваются парными или, в крайнем случае, отдельными тройными взаимодействиями факторов. В этом случае ПФЭ

оказывается избыточным, так как число точек спектра плана N значительно больше количества коэффициентов регрессии N_B . В результате возникает возможность сокращения числа опытов. Но при этом, естественно, должно соблюдаться условие возможности оценки коэффициентов регрессии по результатам опытов, которое выражается соотношением $N \geq N_B$.

Во многих случаях на начальной стадии моделирования технической системы в связи с отсутствием необходимой информации о влиянии на ее выходные параметры различных факторов (внутренних или внешних параметров) строят линейную модель вида (7.43). Например, при трех факторах выбирают модель в виде

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3. \quad (7.53)$$

В этом уравнении четыре коэффициента регрессии, а при $n=3$ спектр плана ПФЭ, согласно выражению (7.40), содержит 8 точек, т.е. предусматривает 8 опытов в различных точках факторного пространства. Следовательно, четыре опыта оказываются избыточными и их можно было бы исключить, естественно, при условии выполнения принятых предпосылок регрессионного анализа, прежде всего ортогональности столбцов матрицы базисных функций F .

При построении математических моделей, использующих упрощенные уравнения регрессий, когда $N > N_B$, применяют *дробные факторные эксперименты* (ДФЭ). Наибольшее распространение имеют регулярные планы ДФЭ типа 2^{n-p} , т.е. ДФЭ 2^{n-p} , где n — число факторов, p — степень дробности ДФЭ. Планы ДФЭ принято называть *репликами* с указанием их степени дробности. Так, план ДФЭ 2^{n-1} называют полурепликой ПФЭ 2^n (1/2-реплика); ДФЭ 2^{n-2} — 1/4-реплика ПФЭ 2^n ;

ДФЭ 2^{n-3} — 1/8-реплика ПФЭ 2^n и т.д. Полуреплика сокращает число опытов в два раза по сравнению с ПФЭ, 1/4-реплика — в четыре раза и т.д.

При построении матрицы спектра плана ДФЭ 2^{n-p} необходимо обеспечить выполнение условий, описываемых выражениями (7.47-7.50), принимая во внимание, что число точек спектра этого плана определяется по формуле

$$N = 2^{n-p}. \quad (7.54)$$

Условия (7.47 - 7.50) удовлетворяются, если в матрице базисных функций F отсутствуют полностью совпадающие или полностью

противоположные столбцы, что позволяет получить раздельное оценивание всех коэффициентов регрессии.

При выборе степени дробности ДФЭ должно выполняться условие

$$N \geq N_B. \quad (7.55)$$

Выбранные базисные функции для ДФЭ составляют лишь некоторую часть базисных функций соответствующего ПФЭ. Назовем эти функции *существенными переменными*, характеризующими в наибольшей мере физические свойства технического объекта.

Процедура построения спектра плана ДФЭ 2^{n-p} содержит четыре этапа.

Этап 1. Выбор структуры уравнения регрессии и определение степени дробности ДФЭ. При этом исходят из условия выполнения соотношения (7.55).

Этап 2. Выбор ведущих факторов и построение для них матрицы спектра плана, определяющего программу их изменения в ходе эксперимента.

Число k ведущих факторов принимают равным разности между количеством факторов n и степенью дробности ДФЭ

$$k = n - p \quad (7.56)$$

Для выбранных ведущих факторов x_1, x_2, \dots, x_k строят план ПФЭ 2^k , используя изложенное в предыдущем параграфе правило чередования знаков.

Этап 3. Построение матрицы X спектра плана ДФЭ 2^{n-p} . Часть этой матрицы составляет матрица спектра плана ПФЭ 2^k , а во вторую часть должны войти столбцы матрицы для остальных факторов $x_{k+1}, x_{k+1}, \dots, x_n$ количество которых равно

$$p = n - k. \quad (7.57)$$

Столбцы матрицы X , соответствующие этим факторам, определяют путем перемножения соответствующих столбцов ведущих факторов. Для этого используют генерирующие соотношения. *Генерирующим соотношением* называется алгебраическое выражение, устанавливающее связь между одним из факторов $x_{k+1}, x_{k+1}, \dots, x_n$ произведением какой-либо комбинации ведущих факторов x_1, x_2, \dots, x_k .

Чтобы получаемые столбцы были ортогональными, для каждого из них задается отдельное генерирующее соотношение (количество этих соотношений равно p). Выбор генерирующих соотношений, вообще говоря, произволен. Однако в качестве генерирующих нельзя

использовать те произведения ведущих факторов, которые входят в состав существенных переменных, так как в этом случае в матрице базисных функций F окажутся совпадающие столбцы: для одного из факторов $x_{k+1}, x_{k+1}, \dots, x_n$ одного из взаимодействий факторов из числа существенных переменных.

Генерирующее соотношение имеет вид

$$x_{k+i} = x_j x_l x_m \dots, i = \overline{1, p}, \quad (7.58)$$

где x_{k+i} — фактор, не включенный в число ведущих (для него определяется столбец матрицы X спектра плана ДФЭ 2^{n-p} ; x_j, x_l, x_m, \dots — ведущие факторы.

Количество ведущих факторов, входящих в генерирующее соотношение (7.58), может быть произвольным, но соотношения (7.58) для всех x_{k+i} должны быть разными.

Этап 4. Проверка пригодности полученного спектра плана. Для этого необходимо построить матрицу базисных функций F и проверить, нет ли в ней совпадающих или полностью противоположных столбцов, т. е. выяснить, обладает ли матрица F свойством ортогональности столбцов, определяемым выражением (7.48). Если в матрице F нет совпадающих или противоположных столбцов, полученный спектр плана ДФЭ 2^{n-p} пригоден для решения поставленной задачи. В противном случае выполняются последовательно следующие процедуры до тех пор, пока не будет обеспечена ортогональность:

выбираются иные генерирующие соотношения;

изменяется набор ведущих факторов;

уменьшается степень дробности плана p .

При ограниченных возможностях проведения опытов степень дробности плана сохраняют, а изменяют структуру уравнения регрессии (например, используют иные взаимодействия факторов или исключают какую-либо базисную функцию, соответствующую одному из взаимодействий высшего порядка).

Таким образом, регулярные план ДФЭ 2^{n-p} обладают теми же свойствами, что и планы ПФЭ 2^n . Матрица F удовлетворяет выражениям (7.47 - 7.50). Информационная матрица Фишера Φ диагональная и имеет вид (7.51). Дисперсию оценок коэффициентов регрессии определяют по формуле (7.52). Планы ДФЭ 2^{n-p} ортогональны. Для линейных моделей они ротатабельны. A - и E -оптимальны, а насыщенные планы D -оптимальны. Поскольку планы ДФЭ значительно экономичнее планов ПФЭ, они получили широкое практическое применение. В частности, их используют для анализа

чувствительности целевой функции к вариации параметров технических объектов в процессе их отсеивания и отбора для осуществления оптимизации.

Рассмотрим пример построения плана ДФЭ.

Получить спектр плана ДФЭ, предназначенного для оценки коэффициентов уравнения регрессии вида (7.53).

Так как число факторов в этом уравнении при (x_1, x_2, x_3) , то при проведении ПФЭ количество точек спектра плана было бы равно $N=2^3=8$. В уравнении же (7.53) всего четыре коэффициента, поэтому можно использовать полуреплику, т.е. ДФЭ 2^{3-1} , спектр плана которой содержит четыре точки: $N=2^{3-1}=4$, и следовательно, условие (7.55) выполняется.

Число ведущих факторов $k=n-p=3-2=1$. Выберем в качестве ведущих факторов x_1 и x_2 . Значения элементов векторов-столбцов этих факторов получим на основе плана ПФЭ 2^2 , используя метод чередования знаков. Для определения вектора-столбца фактора x_3 примем генерирующее соотношение в виде $x_3=x_1x_2$. Полученный спектр плана ДФЭ 2^{3-1} выделен прямоугольником в табл. 7.5, в которой приведена матрица базисных функций F .

Таблица 11.5 Матрица базисных функций F

i	$f_0=1$	$f_1=x_1$	$f_2=x_2$	$f_3=x_3$
1	+1	-1	-1	+1
2	+1	+1	-1	-1
3	+1	-1	+1	-1
4	+1	+1	+1	+1

В матрице F нет совпадающих столбцов, следовательно, полученный спектр плана пригоден для решения поставленной задачи.

Пример .2. Задан список существенных переменных: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4$. Получить спектр плана ДФЭ.

Уравнение регрессии в этом случае будет включать 4 фактора и 8 коэффициентов, а число точек спектра плана ПФЭ равно $N=2^4=16$.

Следовательно, можно попытаться использовать ДФЭ 2^{4-1} , спектр плана которого содержит необходимое число точек $N=8$ и обеспечивает выполнение условия (7.55).

Число ведущих факторов $k=n-p=3$. Выберем в качестве ведущих факторы x_1, x_2, x_3 . Для фактора x_4 необходимо указать генерирующее

соотношение. Возможно несколько вариантов: x_1x_2 , x_1x_3 , x_2x_3 , $x_1x_2x_3$. Соотношения x_1x_2 и x_2x_3 принимать нельзя, так как эти взаимодействия факторов входят в список существенных переменных, в результате их вектор-столбцы будут совпадать с вектором-столбцом фактора x_4 . Выберем для начала генерирующее соотношение $x_4 = x_1x_2x_3$. Вычислив значения элементов столбцов базисных функций $f_4=x_4$, $f_5=x_1x_2$, $f_6=x_2x_3$, $f_7=x_3x_4$, получим матрицу F , которая приведена в табл. 11.6. Спектр плана ДФЭ⁴⁻¹ обведен прямоугольником.

Таблица 11.6 Матрицу F

i	$f_0=1$	$f_1=x_1$	$f_2=x_2$	$f_3=x_3$	$f_4=x_4$	$f_5=x_1x_2$	$f_6=x_2x_3$	$f_7=x_3x_4$
1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	+1
2	+1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	-1
3	+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1	-1
4	+1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	+1
5	+1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	+1
6	+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1	-1
7	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1
8	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1

Векторы-столбцы x_1x_2 и x_3x_4 оказались одинаковыми, следовательно, полученный план непригоден. Последовательно перебирая все возможные варианты решения проблемы, можно убедиться, что ни один из них не дает положительного результата. Это означает, что при заданном списке существенных переменных план ДФЭ⁴⁻¹ не может быть применен для получения искомого уравнения регрессии. Следовательно, необходимо использовать план ПФЭ⁴.

7.10. Генерирующие соотношения и определяющие контрасты

Если матрица базисных функций F плана ДФЭ содержит полностью совпадающие или противоположные столбцы, то это исключает возможность отдельного оценивания коэффициентов регрессии, соответствующих этим столбцам. В этом случае говорят, что имеет место смешанная оценка. Коэффициенты регрессии при этом оказываются коррелированными.

Для выяснения системы смешивания используют определяющие контрасты. *Определяющие контрасты* матрицы F представляют собой произведения левых и правых частей генерирующих соотношений.

Генерирующее соотношение, устанавливающее связь между фактором x_{k+i} и ведущими факторами x_j, x_i, x_m , имеет вид

$$x_{k+i} = x_j x_i x_m. \quad (7.59)$$

Умножим левую и правую части этого выражения на x_{k+i} . Учитывая, что элементы столбца матрицы F при нормированных факторах равны $+1$ или -1 , получим $x_{k+i} x_{k+i} = 1$. В результате определяющий контраст будет представлен выражением

$$1 = x_j x_i x_m x_{k+i}. \quad (7.60)$$

Число определяющих контрастов, так же как и число генерирующих соотношений ДФЭ, равно p . Составив выражения определяющих контрастов для всех генерирующих соотношений и перемножив их левые и правые части, получим *обобщенный определяющий контраст* (ООК). При этом в правой части полученного произведения может оказаться некоторое количество одинаковых сомножителей, например, m сомножителей фактора x_j . В этом случае следует иметь в виду, что при четном числе сомножителей результат их перемножения равен единице, а при нечетном равен x_j , т. е.

$$\prod_1^m x_j = 1 \quad \text{при } m = 2, 4, 6, \dots,$$

$$\prod_1^m x_j = x_j \quad \text{при } m = 3, 5, 7, \dots$$

Для определения системы смешивания влияния переменных в ДФЭ обобщенный определяющий контраст умножают на каждую переменную, т. е. на каждую базисную функцию. Если при этом получают одинаковые результаты для какой-либо пары базисных функций, то соответствующие столбцы матрицы F окажутся совпадающими и оценки коэффициентов регрессии при этих базисных функциях будут коррелированными (смешанными). Такой план ДФЭ непригоден для получения регрессии заданной структуры. В общем случае может оказаться несколько пар совпадающих столбцов матрицы F .

В табл. 7.7 приведены результаты определения системы смешивания влияния переменных в ДФЭЭ⁴⁻¹ для примера 2. В этом примере использовано одно генерирующее соотношение: $x_4 = x_1 x_2 x_3$. В результате выражение ООК имеет вид: $1 = x_1 x_2 x_3 x_4$.

Таблица 7.7 Результаты определения системы смешивания влияния переменных в ДФЭЭ⁴⁻¹

Переменные уравнения регрессии	ООК	Система смешивания
x_0	$1 = x_1 x_2 x_3 x_4$	$x_0 = x_1 x_2 x_3 x_4$
x_1		$x_1 = x_2 x_3 x_4$
x_2		$x_2 = x_1 x_3 x_4$
x_3		$x_3 = x_1 x_2 x_4$
x_4		$x_4 = x_1 x_2 x_3$
$x_1 x_2$		$\underline{x_1 x_2} = \underline{x_3 x_4}$
$x_2 x_3$		$\underline{x_2 x_3} = \underline{x_1 x_4}$
$x_3 x_4$		$\underline{x_3 x_4} = \underline{x_1 x_2}$

Одинаковые результаты оценок системы смешивания подчеркнуты. Из таблицы видна смешанность оценок влияния переменных $x_1 x_2$ и $x_3 x_4$ на функцию отклика, что не дает возможности осуществить отдельную оценку коэффициентов регрессии при этих переменных.

7.11. Статистический анализ результатов активного эксперимента

Прежде чем определять оценки коэффициентов регрессии, необходимо выполнить статистический анализ результатов эксперимента с целью оценки их качества и пригодности для построения регрессионной модели. Статистический анализ включает оценку ошибок параллельных опытов, отсеивание грубых ошибок, проверку однородности дисперсий опытов и определение дисперсии воспроизводимости эксперимента.

Ошибки параллельных опытов. В условиях наличия случайных помех с целью уменьшения случайных погрешностей эксперимента и повышения точности получаемой регрессионной модели осуществляется дублирование опытов, т. е. проведение параллельных опытов. Каждый опыт, предусмотренный матрицей

спектра плана, повторяется $m = 2 \dots 5$ раз. Рекомендуется число m принимать одинаковым для всех N точек плана. В результате проводится $L = Nm$ опытов, в соответствии с матрицей плана, предусматривающей при этом рандомизацию опытов.

Повторные опыты в одной и той же точке плана при наличии помехи дают различные результаты при определении функции отклика. Разброс результатов относительно оценки математического ожидания функции отклика называют *ошибкой воспроизводимости опыта*. Эту ошибку надо оценить.

Для каждой точки плана по результатам параллельных опытов находят *выборочное среднее* \bar{y}_i , равное среднему арифметическому полученных опытных значений функции отклика

$$\bar{y}_i = \frac{1}{m} \sum_{u=1}^m y_{iu}, \quad i = \overline{1, N}, \quad (7.61)$$

где u — номер параллельного опыта; y_{iu} — значение функции отклика в u -м параллельном опыте i -ой точки спектра плана.

Для оценки отклонения функции отклика от ее среднего значения \bar{y}_i вычисляется *дисперсия воспроизводимости* опыта по данным m параллельных опытов в каждой i -ой точке спектра плана

$$S_i^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{u=1}^m (y_{iu} - \bar{y}_i)^2, \quad i = \overline{1, N}. \quad (7.62)$$

При вычислении S_i^2 , принимают число степеней свободы k на единицу меньше, чем число параллельных опытов, т. е. $k = m - 1$, так как одна степень свободы уже использована для вычисления \bar{y}_i . Это обеспечивает несмещенность оценки дисперсии воспроизводимости опыта S_i^2 .

Отсеивание грубых ошибок. Формула (7.61) справедлива лишь при нормальном распределении случайной величины y . При наличии грубых ошибок опыта распределение y отклоняется от нормального, что противоречит предпосылкам 1 и 2 (см. 7.4), положенным в основу регрессионного анализа. Поэтому грубые ошибки надо вначале исключить, а затем определять \bar{y}_i и S_i^2 . Грубые ошибки - это брак повторных опытов. Для обнаружения брака используют t -критерий Стьюдента

$$t_{iu} = \frac{y_{iu} - y_i^*}{S_i^*}. \quad (7.63)$$

Значения \bar{y}_i^* и S_i^* определяются по формулам (7.61) и (7.62), но без учета оцениваемого результата опыта y_{iu} .

Полученное значение t -критерия сравнивается с табличным t_T при выбранном уровне значимости $q = P[t > t_{k,q}]$ и числе степеней свободы k . Уровень значимости q характеризует вероятность ошибки. Если $t > t_T$, то это соответствует браку данного опыта и результат его не может быть использован. В этом случае опыт подлежит повторному проведению.

Значения t -критерия Стьюдента в зависимости от числа степеней свободы k и уровня значимости q приведены в табл. 4 приложения.

Проверка однородности дисперсий. Однородность дисперсии означает, что среди всех дисперсий S_i^2 , нет таких, которые бы значительно превышали все остальные. Для проверки однородности дисперсий во всех точках спектра плана используется либо критерий Кохрена G , либо критерий Фишера F (табл. 6 и 5 приложения).

Критерий Кохрена основан на распределении отношения максимальной дисперсии $S_{i_{\max}}^2$ к сумме всех дисперсий

$$G = S_{i_{\max}}^2 / \sum_{i=1}^N S_i^2. \quad (7.64)$$

Критерий Кохрена применяется, если количество сравниваемых дисперсий больше двух, а число повторных опытов во всех точках плана одинаково. Определив число степеней свободы $k_1 = m - 1$ и $k_2 = N$ (N — число точек спектра плана, m — количество повторных опытов в каждой точке плана), находят табличное значение критерия Кохрена G_T . Если $G < G_T$, гипотеза об однородности дисперсий и воспроизводимости результатов принимается. Это означает, что предпосылки 1 и 2, положенные в основу регрессионного анализа, выполняются. В этом случае каждая из дисперсий S_i^2 оценивает одну и ту же дисперсию помехи σ_ε^2 . Следовательно, полученные результаты эксперимента качественные и могут быть использованы для построения регрессионной модели. В противном случае следует увеличить число параллельных опытов или повторить эксперимент при строгом соблюдении методики и схемы проведения опытов, приняв необходимые меры для исключения грубых ошибок.

Если выяснится, что непостоянство дисперсии помехи σ_ε^2 обусловлено внутренними свойствами объекта, то необходимы более сложные способы обработки результатов эксперимента. Можно, например, вводить некоторую функцию от y : $\ln y$, \sqrt{y} и др.

Критерий Фишера можно применять при любом числе дисперсии S_i^2 . Он определяется из соотношения

$$F = S_{\max}^2 / S_{\min}^2. \quad (7.65)$$

Дисперсии однородны, если $F < F_T$, где F_T — табличное значение критерия Фишера, определяемое при числах степеней свободы k_1 и k_2 и принятом уровне значимости q .

Следует отметить, что уровень значимости q по всем критериям, применяемым в процессе статистического анализа и обработки результатов эксперимента (Кохрена, Стьюдента, Фишера), должен быть одинаков. Для технических систем рекомендуется принимать $q = 0,05$.

Дисперсия воспроизводимости эксперимента. Если дисперсии S_i^2 , однородны, то их усредняют и находят *дисперсию воспроизводимости эксперимента*

$$S_y^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S_i^2. \quad (7.66)$$

Дисперсия S_y^2 представляет собой оценку дисперсии помехи σ_ε^2 . Так как число степеней свободы при определении дисперсии S_i^2 равно $k = m - 1$, то число степеней свободы, связанное с оценкой S_y^2 , вычисляется по формуле

$$k = N(m - 1) \quad (7.67)$$

Формула (7.67) годится, если число повторных опытов во **всех** точках спектра плана одинаково. Если число опытов различно, используют формулу

$$S_y^2 = \frac{S_1^2 k_1 + S_2^2 k_2 + \dots + S_N^2 k_N}{k_1 + k_2 + \dots + k_N} = \left(\sum_{i=1}^N S_i^2 \right) / \left(\sum_{i=1}^N k_i \right), \quad (7.68)$$

где k_i — число степеней свободы в i -ой точке спектра плана; $k_i = m_i - 1$; m_i — число параллельных опытов в этой точке.

7.12. Определение коэффициентов регрессионной модели и проверка их значимости

Параметрами регрессионной модели являются коэффициенты регрессии $b_j, j = \overline{0, N_B - 1}$, где N_B — количество базисных функций. Значения коэффициентов регрессии можно получить, решив систему алгебраических уравнений (7.20). В этих уравнениях величина индекса d в обозначении базисных функций f_{id} и коэффициента регрессии b_d равна $d = N_B - 1$. Так как информационная матрица Фишера Φ для ПФЭ и ДФЭ диагональная (7.51) и все диагональные элементы ее одинаковы и равны N , то выражение для определения всех коэффициентов уравнения регрессии одинаково и имеет простой вид:

$$b_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_j(\bar{X}_i) \bar{y}_i, \quad (7.69)$$

где N — число точек спектра плана; $f_j(\bar{X}_i)$ значение j -ой базисной функции в i -ой точке спектра плана; \bar{y}_i — выборочное среднее функции отклика в той же точке, определяемое по формуле (7.61).

Значения базисных функций $f_j(\bar{X}_i)$ для отдельных факторов равны X_{ij} , а для взаимодействия факторов — $X_{ik} X_{il} X_{im} \dots$. С учетом этого на основе выражения (7.69) можно записать следующие формулы для вычисления значений коэффициентов уравнения регрессии:

для коэффициентов при факторах x_j включая также свободный член уравнения,

$$b_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_{ij} y_i, \quad j = \overline{0, n}; \quad (7.70)$$

для коэффициентов при взаимодействиях факторов

$$b_g = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_{ik} X_{il} X_{im} \dots \bar{y}_i, \quad g = \overline{n+1, d}; \quad (7.71)$$

$$k, l, m = \overline{1, n}; \quad k \neq l \neq m,$$

где n — количество факторов.

Формулы (11.70) и (11.71) применяются для планов первого порядка. Для плана ПФЭ $N = 2^n$, а ДФЭ $N = 2^{n-p}$. При определении коэффициента b_0 (свободного члена уравнения регрессии) $X_{i0} = 1, i = \overline{1, N}$.

Поскольку полученные значения коэффициентов регрессии $b_j, j = 0, N_B - 1$ - случайные числа, в связи с действием случайной помехи в процессе эксперимента, то они являются оценками истинных значений коэффициентов регрессии β_j . Погрешность определения b_j , оценивают дисперсией $S_{b_j}^2$.

Дисперсии $S_{b_j}^2$ оценок всех коэффициентов регрессии, как показано в разделах 7.8 и 7.9, одинаковы. Величина дисперсии $S_{b_j}^2$ зависит только от ошибки воспроизводимости эксперимента S_y^2 и числа опытов

$$S_{b_j}^2 = S_y^2 / (Nm), \quad (7.72)$$

где m — число повторных опытов (значение m должно быть одинаковым для всех точек N спектра плана).

После определения коэффициентов регрессии b_j , проверяют их значимость. Эта проверка осуществляется с использованием t -критерия Стюдента, значение которого находят из соотношения

$$t_j = |b_j| / S_{b_j}, \quad j = 0, N_B - 1, \quad (7.73)$$

где N_B — общее число коэффициентов уравнения регрессии, равное количеству используемых базисных функций для построения регрессии.

Полученное значение t_j для каждого коэффициента регрессии b_j сравнивают с табличным t_T , определяемым при принятом уровне значимости q и числе степеней свободы $k = N(m - 1)$ с которым определялась дисперсия воспроизводимости S_y^2 . Если $t_j < t_T$, нулевая гипотеза о незначимости коэффициента b_j , принимается и член уравнения регрессии, включающий этот коэффициент, исключается из математической модели. Если же $t_j > t_T$, полагают, что данный коэффициент значимо (неслучайно) отличается от нуля и его следует сохранить в регрессионной модели. В этом случае значение коэффициента b_j , больше ошибки опыта, которую можно оценить величиной доверительного интервала ε_{b_j} . Доверительный интервал находят по формуле

$$\varepsilon_{b_j} = \pm t_T S_{b_j}. \quad (7.74)$$

Следует, однако, отметить, что дисперсия воспроизводимости эксперимента S_y^2 зависит от очень многих факторов: выбора центра эксперимента, интервалов варьирования факторов, наличия экстремумов функции отклика в области планирования, соотношения величины отклика и помехи (так называемое отношение сигнал-шум) и др. В этой связи при небольшом различии между t_j и t_T , следует весьма осторожно относиться к оценке значимости коэффициентов регрессии. Лучше такие коэффициенты сохранить в модели, а влияние соответствующего фактора (или взаимодействия факторов) проверить в дальнейшем на более сложной модели или в иных условиях планирования эксперимента.

После исключения незначимых коэффициентов уравнение регрессии приобретает вид

$$y = \sum_{j=0}^{N_B^*-1} b_j f_j(\vec{X}), \quad (7.75)$$

где N_B^* — количество значимых коэффициентов регрессии.

Так как часть коэффициентов регрессии исключено из модели, то $N_B^* < N_B = d + 1 \leq N$.

Если все коэффициенты оказались значимыми, суммирование в формуле (7.75) осуществляется до $N_B - 1$.

7.13. Проверка адекватности и работоспособности регрессионной модели

По уравнению регрессии (7.75) можно вычислить предсказанные значения функции отклика y всех точек спектра плана: $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \dots, \vec{X}_N$. В результате будет получено N значений $y: y_1, y_2, \dots, y_N$. Если регрессионная модель получена на основе ПФЭ и все коэффициенты регрессии признаны значимыми, то в формуле (7.75) $N_B^* = N_B = N$. Тогда значения y_i должны совпадать со средними выборочными значениями \bar{y}_i , полученными в результате эксперимента для каждой точки спектра плана. Следовательно, поверхность отклика $Y = \varphi(\vec{X})$ проходит через все точки $\bar{y}_i, i = \overline{1, N}$ и полученная модель адекватна. Значения y_i в этом случае используют для проверки правильности вычислений коэффициентов регрессии.

Если же $N_B^* < N$, то в общем случае $y_i < \bar{y}_i$, а величины их разностей $(y_i - \bar{y}_i)$ несут информацию об ошибках предсказания по уравнению регрессии и их можно использовать для последующего анализа свойств полученной модели — ее адекватности и работоспособности.

Для оценки рассеяния эмпирических значений \bar{y}_i относительно расчетных y_i , полученных по уравнению регрессии, используют дисперсию адекватности

$$S_{ad}^2 = \frac{m}{N - N_B^*} \sum_{i=1}^N (\bar{y}_i - y_i)^2, \quad (7.76)$$

где m — число параллельных опытов; N — число точек спектра плана; N_B^* — количество значимых коэффициентов регрессии.

Если число параллельных опытов в различных точках спектра плана неодинаково, то для вычисления S_{ad}^2 , используют формулу

$$S_{ad}^2 = \frac{I}{N - N_B^*} \sum_{i=1}^N m_i (\bar{y}_i - y_i)^2, \quad (7.77)$$

где m_i — число параллельных опытов в i -ой точке спектра плана.

Проверка адекватности регрессионной модели осуществляется путем сопоставления дисперсии адекватности S_{ad}^2 и дисперсии воспроизводимости эксперимента S_y^2 . У адекватной модели значение S_{ad}^2 обусловлено в основном действием случайной помехи, поэтому различие между S_{ad}^2 и S_y^2 должно быть небольшим, так как они оценивают одну и ту же дисперсию помехи S_y^2 .

Проверку гипотезы об адекватности модели (гипотезы о равенстве дисперсий S_{ad}^2 и S_y^2) выполняют по критерию Фишера

$$F = S_{ad}^2 / S_y^2. \quad (7.78)$$

В формулах (7.76) и (7.77) учтено, что чем больше число m параллельных опытов, тем с большей достоверностью оцениваются средние значения функции отклика y . Поэтому требования к различиям между экспериментальными \bar{y}_i и расчетными y_i значениями становятся более жесткими, что отражается в увеличении F -критерия.

Полученные значения статистики F сравнивают с табличным значением критерия Фишера F_T , определяемым в зависимости от

уровня значимости q и чисел степеней свободы k_1 и k_2 , с которыми определялись дисперсии $S_{ад}^2$ и S_y^2 :

$$k_1 = N - N_B^*; \quad (7.79)$$

$$k_2 = N(m - 1). \quad (7.80)$$

Если $F < F_T$, регрессионная модель считается адекватной.

Различие между дисперсиями $S_{ад}^2$ и S_y^2 обусловлено систематической ошибкой при определении функции отклика по уравнению регрессии из-за его приближенности. Если модель описывает физические свойства исследуемого объекта неудовлетворительно, систематическая ошибка приводит к значительному возрастанию дисперсии адекватности и, следовательно, к увеличению статистики F .

При $F > F_T$ гипотеза адекватности модели отвергается. В таком случае нужно либо изменить структуру математической модели, либо уменьшить интервалы варьирования факторов и провести повторно эксперимент с моделью прежней структуры.

В первом варианте реализуется принцип постепенного усложнения структуры математической модели. Если использовалось упрощенное уравнение регрессии первого порядка, учитывающее влияние на функцию отклика только факторов, или факторов и некоторого количества эффектов их взаимодействий низших порядков, что характерно для ДФЭ, то в модель можно дополнительно ввести новые члены, содержащие другие эффекты взаимодействия тех же порядков или более высоких порядков. Однако во многих случаях такой путь оказывается неэффективным, так как, согласно выражению (7.76), при увеличении количества членов уравнения регрессии и неизменном числе точек спектра плана N дисперсия адекватности может возрасти, несмотря на снижение разности $(\bar{y}_i - y_i)$ поскольку при этом увеличивается N_B^* и, следовательно, уменьшается знаменатель выражения (7.76). Кроме того, следует иметь в виду, что с увеличением порядка эффекта взаимодействия возрастает вероятность незначимости коэффициента регрессии b_j при этом эффекте. В этой связи наиболее целесообразно перейти к планированию второго порядка, используя регрессионное уравнение в виде полного квадратного полинома (см. раздел 7.14).

После обеспечения адекватности регрессионной модели осуществляют проверку ее работоспособности.

Адекватность регрессионной модели еще не гарантирует ее пригодность к практическому использованию в задачах прогнозирования и поиска оптимальных решений. Модель может оказаться неработоспособной из-за низкой ее точности. Для проверки работоспособности модели используют коэффициент детерминации, представляющий собой числовую интегральную характеристику точности уравнения регрессии. Его значение вычисляют по формуле

$$R^2 = 1 - \frac{(N - N_B^*)S_{ad}^2 + N(m-1)S_y^2}{m \sum_{i=1}^N (\bar{y}_i - \bar{y})^2 + N(m-1)S_y^2}, \quad (7.81)$$

где \bar{y} — среднее значение отклика:

$$\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \bar{y}_i. \quad (7.82)$$

Модель считается работоспособной при $R^2 \geq 0,75$. В этом случае обеспечивается уменьшение ошибки предсказания, полученного по уравнению регрессии, по крайней мере, в 2 раза в сравнении с предсказанием по среднему значению отклика \bar{y} , без учета влияния факторов \vec{X} на функцию отклика y .

7.14. Планы второго порядка

Планы второго порядка предназначены для получения регрессионной модели в виде полного квадратного полинома — полинома второй степени. Такой полином содержит основные эффекты, все парные взаимодействия и квадратичные эффекты

$$y = b_0 + \sum_{j=1}^n b_j x_j + \sum_{j=1}^n \sum_{k=j+1}^n b_{j,k} x_j x_k + \sum_{j=1}^n b_{jj} x_j^2. \quad (7.83)$$

Число коэффициентов уравнения регрессии в этом случае

$$N_B = 1 + 2n + C_n^2 = [(n+1)(n+2)]/2, \quad (7.84)$$

что в $(n+2)/2$ раз больше, чем в линейной модели вида (7.43). Соответственно возрастает и минимально необходимое число точек в спектре плана. Для получения квадратичной модели варьирование факторов в эксперименте должно осуществляться, по крайней мере, на трех уровнях.

Существует большое множество различных планов второго порядка. Систематизированное их изложение дается в специальной литературе [9]. Рассмотрим кратко лишь композиционные планы

типа B_n , получившие широкое применение благодаря их экономичности и простой структуре. Эти планы содержат ядро $ПФЭ2^n$ или $ДФЭ2^{n-p}$ и включают $2n$ звездных точек, которые расположены на координатных осях на расстоянии $\pm\alpha$ от центра эксперимента. Величина α выбирается из условия минимизации обобщенной дисперсии оценок коэффициентов регрессии, что обеспечивает минимум объема эллипсоида рассеяния этих оценок. Следовательно, планы B_n построены с учетом критерия D -оптимальности. Величина α для этих планов оказывается равной 1 для всех n факторов, а область планирования представляет собой гиперкуб. Центральной точки планы B_n не содержат.

Если ядром плана является $ПФЭ2^n$, то число точек спектра плана типа B_n определяют по формуле

$$N = 2^n + 2n, \quad (7.85)$$

а если ядро составляет план $ДФЭ2^{n-p}$, то

$$N = 2^{n-p} + 2n. \quad (7.86)$$

В качестве примера в табл. 7.8 приведена матрица спектра плана типа B_n при $n=3$, ядром которого является план $ПФЭ2^3$

Таблица 7.8 Матрица спектра плана типа B_n при $n=3$

i	x_1	x_2	x_3	i	x_1	x_2	x_3
1	-1	-1	-1	9	-1	0	0
2	+1	-1	-1	10	+1	0	0
3	-1	+1	-1	11	0	-1	0
4	+1	+1	-1	12	0	+1	0
5	-1	-1	+1	13	0	0	-1
6	+1	-1	+1	14	0	0	+1
7	-1	+1	+1				
8	+1	+1	+1				

Из приведенной таблицы легко видеть процедуру построения плана. Первые восемь точек составляют ядро плана B_n , соответствуют спектру плана $ПФЭ2^3$, а остальные шесть - звездные точки. В этих точках варьируется только один какой-либо фактор x_j , на нижнем или верхнем уровне, а остальные находятся в центре эксперимента и их нормированные значения равны нулю.

Оценки коэффициентов регрессии вычисляют по формулам:

$$b_0 = \frac{1}{2(n-1)} \left(\sum_{i=N_1+1}^N \bar{y}_i - \frac{1}{2^{n-p-1}} \sum_{i=1}^{N_1} \bar{y}_i \right); \quad (7.87)$$

$$b_{jj} = \frac{1}{2} \sum_{i=N_1+1}^N X_{ij}^2 \bar{y}_i - b_0; \quad (7.88)$$

$$b_j = \frac{1}{2 + 2^{n-p}} \sum_{i=1}^N X_{ij} \bar{y}_i; \quad (7.89)$$

$$b_{jk} = \frac{1}{2^{n-p}} \sum_{i=1}^N X_{ij} X_{ik} \bar{y}_i. \quad (7.90)$$

В формулах (7.87 - 7.88) N_1 — число точек ядра спектра плана:
 $N_1 = 2^{n-p}$.

Если отдельные коэффициенты b_j и b_{jk} окажутся незначимыми, то их можно исключить из уравнения регрессии без пересчета остальных коэффициентов.

Дисперсии оценок коэффициентов регрессии различны, так как план B_n не обладает свойством ортогональности, а коэффициенты b_0 и b_{jj} коррелированы, поэтому в случае незначимости некоторых коэффициентов b_{jj} при исключении их из модели требуется уточнение оставшихся коэффициентов b_0 и b_{jj} .

7.15. Регрессионный анализ результатов вычислительного эксперимента на детерминированной теоретической модели

Детерминированная математическая модель характеризуется взаимно однозначным соответствием между внешним воздействием на моделируемую систему и ее реакцией на это воздействие. Поэтому в каждой точке спектра плана проводят только один опыт. План активного вычислительного эксперимента составляется в зависимости от вида регрессионной модели так же, как и для вероятностных математических моделей. При построении экспериментальных факторных моделей, предназначенных для решения задач оптимизации параметров технических объектов в процессе их функционального проектирования, используют планы первого и второго порядков.

Регрессионный анализ при экспериментах на детерминированных и вероятностных моделях включает одни и те же этапы: статистический анализ результатов эксперимента, получение

оценок коэффициентов регрессии b_j оценка адекватности экспериментальной факторной модели. Однако содержание первого и третьего этапов в обоих случаях различны.

На первом этапе осуществляется построение модели среднего и ее статистический анализ. При этом определяют среднее значение функции отклика \bar{y} и дисперсию модели среднего S_y^2 , характеризующую рассеяние результатов эксперимента относительно \bar{y} :

$$\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i; \quad (7.91)$$

$$S_y^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2, \quad (7.92)$$

где y_i — значение функции отклика в i -ой точке спектра плана; N — количество проведенных опытов, равное числу точек спектра плана.

Коэффициенты регрессии первого порядка определяются по формулам (7.70) и (7.71), а регрессии второго порядка, полученной на основе плана типа B_n — по формулам (7.87 - 7.90).

После определения коэффициентов b_j осуществляется проверка пригодности полученного уравнения регрессии. Для этого вначале необходимо вычислить по уравнению регрессии предсказываемые значения функции отклика в каждой точке плана y_i . В уравнение регрессии при вычислениях подставляют значения нормированных факторов x_{ij} в соответствии с матрицей спектра плана. Затем определяется *остаточная дисперсия*

$$S_{ocm}^2 = \frac{1}{N - N_B} \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2, \quad (7.93)$$

где N_B — число коэффициентов в уравнении регрессии.

При оценке пригодности полученного уравнения регрессии принимается иная нулевая гипотеза, чем при экспериментах на вероятностных моделях (см. раздел 7.13). Здесь нулевая гипотеза гласит о том, что модель среднего \bar{y} достаточно хорошо описывает исследуемый процесс. Качество предсказания, обеспечиваемого уравнением регрессии, оценивают по критерию Фишера F сравнивая остаточную дисперсию S_{ocm}^2 с дисперсией модели среднего S_y^2 :

$$F = S_y^2 / S_{ocm}^2. \quad (7.94)$$

Уравнение регрессии адекватно описывает результаты эксперимента, если полученное по формуле (7.94) значение F больше табличного значения критерия Фишера F_T , определяемого при принятом уровне значимости q и числах степеней свободы k_1 и k_2 , с которыми определены дисперсии S_y^2 и S_{ocm}^2 . Согласно выражениям (7.92) и (7.93) $k_1 = N - 1$; $k_2 = N - N_B$. Если условие $F > F_T$ выполняется, это означает, что уравнение регрессии описывает результаты эксперимента в F_T раз лучше модели среднего. Тогда нулевая гипотеза отвергается.

При оценке значимости коэффициентов регрессии b_j , принимается нулевая гипотеза о том, что $b_j = 0$, $j = \overline{1, N_B}$, и осуществляется проверка, отличаются ли статистически значимо оценки коэффициентов b_j от нуля. Значимость b_j проверяют по критерию Стьюдента, используя формулу (7.73). При вычислении дисперсии $S_{b_j}^2$, оценивающей погрешности определения коэффициентов b_j , используется остаточная дисперсия S_{ocm}^2 (а не дисперсия воспроизводимости эксперимента S_y^2 , как это было для вероятностной модели (см. раздел 7.12))

$$S_{b_j}^2 = S_{ocm}^2 / N \quad (7.95)$$

При упрощении уравнения регрессии остаточная дисперсия может возрасти, что приводит к снижению критерия Фишера. Поэтому члены уравнения регрессии с незначимыми коэффициентами b_j можно исключать лишь в том случае, если проверка полученной упрощенной модели на адекватность по критерию Фишера дает положительный результат.

7.16. Получение математической модели на основе пассивного эксперимента

При проведении экспериментов на реальных технических объектах независимое варьирование факторов в большинстве случаев оказывается невозможным, поэтому для получения их математических моделей обычно проводятся пассивные эксперименты. Объекты при этом находятся в нормальных условиях функционирования, а изменение их фазовых координат и выходных параметров обусловлено влиянием внешних возмущающих

воздействий, носящих случайный характер. В этой связи фазовые координаты и выходные параметры представляют собой случайные процессы.

Для получения информации о физических свойствах объекта, необходимой при построении математической модели, выбирают некоторый интервал дискретизации независимой переменной (времени t) и фиксируют в дискретные моменты времени значения Фазовых координат и выходных параметров. Эти значения представляют собой случайные последовательности чисел, составляющие непрерывные множества. Необходимо, чтобы эти случайные числа были некоррелированными. Это достигается соответствующим выбором интервала дискретизации времени (см. § 10.9). Эксперимент должен проводиться таким образом, чтобы исследуемые случайные процессы были стационарными и эргодическими. Допускается лишь нестационарность по математическому ожиданию, которую можно легко отфильтровать и использовать центрированные значения случайных процессов.

Изложенный подход к проведению пассивного эксперимента составляет основу *метода статистических испытаний (Монте-Карло)*. Используя полученные выборки значений факторов и выходных параметров, находят оценки вероятностных характеристик всех исследуемых случайных процессов. В результате получают вероятностную математическую модель объекта. Результаты статистических испытаний можно также использовать для получения регрессионной модели технического объекта. Уравнения регрессий принимают в виде

$$y_j = \bar{y}_j + b_{j1}(x_1 - \bar{x}_1) + b_{j2}(x_2 - \bar{x}_2) + \dots + b_{jn}(x_n - \bar{x}_n), \quad j = \overline{1, m}, \quad (7.96)$$

где b_{ij} — коэффициенты регрессии; \bar{y}_j, \bar{x}_i — оценки математических ожиданий (выборочные средние) соответственно выходного параметра y_j , и фактора x_i ; m — количество выходных параметров; n — количество факторов.

Определение оценок коэффициентов регрессии осуществляется на основе *корреляционного анализа* результатов статистических испытаний. Но предварительно необходимо определить оценки вероятностных характеристик всех факторов x_i и выходных параметров y_j (выборочные средние \bar{y}_j, \bar{x}_i , выборочные дисперсии $S_{x_i}^2, S_{y_j}^2, i = \overline{1, n}; j = \overline{1, m}$) и проверить выполнение гипотезы о нормальном их распределении.

В регрессионную модель технического объекта желательно включать только некоррелированные или слабокоррелированные выходные параметры с целью уменьшения вычислительных затрат на построение модели. Поэтому вначале необходимо оценить степень корреляции между всеми выходными параметрами и отсеять параметры, которые имеют сильную корреляцию с каким-либо параметром y_j .

В число факторов могут входить фазовые координаты объекта и изменяемые случайным образом внутренние его параметры — параметры элементов.

В процессе корреляционного анализа определяют оценки коэффициентов парной корреляции $r_{y_j x_i}$ между выбранными для построения математической модели выходными параметрами y_j и факторами x_i , а также между парами факторов x_i и x_k , т. е. оценки коррелированности этих факторов $r_{x_i x_k}$.

Оценка коэффициента корреляции между y_j и x_i вычисляется по формуле

$$r_{y_j x_i} = \frac{1}{(N-1)S_{y_j} S_{x_i}} \left(\sum_{u=1}^N y_{ju} x_{iu} - N \bar{y}_j \bar{x}_i \right), \quad i = \overline{1, n}; j = \overline{1, m}, \quad (7.97)$$

где N — число проведенных опытов; y_{ju} , x_{iu} значения переменных y_j и x_i в u -м опыте.

Коэффициенты $r_{y_j x_i}$ являются элементами корреляционной матрицы $R_{\bar{Y}, \bar{X}} = (r_{ji})$, $i = \overline{1, n}$; $j = \overline{1, m}$, в которой $r_{ji} = r_{y_j x_i}$

$$R_{\bar{Y}, \bar{X}} = \begin{bmatrix} \bar{R}_1 \\ \bar{R}_2 \\ \dots \\ \bar{R}_j \\ \dots \\ \bar{R}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{j1} & r_{j2} & \dots & r_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{m1} & r_{m2} & \dots & r_{mn} \end{bmatrix}, \quad (7.98)$$

где $\bar{R}_j = (r_{j1}, r_{j2}, \dots, r_{jn})$ — вектор-строка оценок коэффициентов парной корреляции между выходным параметром y_j и всеми факторами x_i , $i = \overline{1, n}$.

Аналогично вычисляются оценки коэффициентов парной корреляции $r_{x_i x_k}$ между факторами x_i и x_k

$$r_{x_i x_k} = \frac{1}{(N-1)S_{x_i} S_{x_k}} \left(\sum_{u=1}^N x_{iu} x_{ku} - N \bar{x}_i \bar{x}_k \right), \quad i, k = \overline{1, n}. \quad (7.99)$$

Обозначим $r_{x_i x_k} = \rho_{ik}$. Тогда связь между факторами можно представить корреляционной матрицей

$$R_{\bar{X}} = \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \cdots & \rho_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \cdots & \rho_{nn} \end{bmatrix}. \quad (7.100)$$

Используя вектор-строку \bar{R}_j матрицы (7.98) для j -го выходного параметра y_j и корреляционную матрицу (7.100), составим матричное уравнение

$$R_{\bar{X}} \bar{H}_j = \bar{R}_j, \quad j = \overline{1, m}. \quad (7.101)$$

Решив систему линейных алгебраических уравнений (7.101) относительно неизвестного вектора $\bar{H}_j = (h_{ji})$, $i = \overline{1, n}$, вычислим искомые коэффициенты уравнения регрессии (7.96) по формуле

$$b_{ji} = h_{ji} S_{y_j} / S_{x_i}. \quad (7.102)$$

Если факторы x_i — независимые случайные величины, то матрица $R_{\bar{X}}$ единичная, т. е. $\rho_{ii} = 1$, $\rho_{ik} = 0$, $i \neq k$. Тогда $\eta_{ji} = r_{ji}$.

Литература

1. В.А. Трудоношин, Н.В. Пивоварова. САПР: системы автоматизированного проектирования. Кн. 4. Математические модели технических объектов. – Минск: Высшая школа, 1988. – 159с.
2. Тарасик В.П. Математическое моделирование технических систем: Учебник для вузов. – Минск: ДизайнПРО, 2004, 640 с.
3. Попов Д.Н. Динамика и регулирование гидро- и пневмосистем. Учеб. Для машиностроительных вузов. – М.: Машиностроение, 1976
4. Бусленко Н.П. Моделирование сложных систем. – М.: Наука, 1978
5. Горнштейн А.М. Практика решения инженерных задач на ЭВМ. – М.: Радио и связь, 1984
6. Метлюк Н.Ф., Автушко В.П. Динамика пневматических и гидравлических приводов автомобилей. – М.: Машиностроение, 1980

Содержание

1	Тема 1. Введение. Основные понятия моделирования.	3
2	Тема 2 Классификация математических моделей	5
3	Тема 3. Структура и параметры объектов моделирования	13
4	Тема 4. Математические модели простых дискретных элементов технических объектов	26
5	Тема 5. Построение теоретических математических моделей на макроуровне	56
6	Тема 6. Структурно-матричный метод формирования математических моделей	90
7	Тема 7 Экспериментальные факторные математические модели	97
8	Литература	149

**Стасенко Дмитрий Леонидович
Лаевский Дмитрий Викторович**

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОПНЕВМОСИСТЕМ

**Учебно-методическое пособие
по одноименному курсу для студентов
специальности 1-36 01 07 «Гидропневмосистемы
мобильных и технологических машин»
дневной и заочной форм обучения**

Подписано к размещению в электронную библиотеку
ГГТУ им. П. О. Сухого в качестве электронного
учебно-методического документа 14.12.17.

Рег. № 20Е.
<http://www.gstu.by>