Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Теоретические основы электротехники»

Л. Г. Бычкова

# РАСЧЕТ ПАССИВНЫХ И АКТИВНЫХ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ

**ПРАКТИКУМ**
**по курсу «Теория электрических цепей»
для студентов специальности 1-36 04 02
«Промышленная электроника»
дневной и заочной форм обучения**

Гомель 2011

УДК 621.3.011.7(075.8)
ББК 31.211я73
Б95

*Рекомендовано научно-методическим советом*
*факультета автоматизированных и информационных систем*
*ГГТУ им. П. О. Сухого*
(*протокол № 10 от 28.06.2010 г.*)

Рецензент: ст. преподаватель каф. «Промышленная электроника» ГГТУ им. П. О. Сухого
*Ю. А. Козусев*

**Бычкова, Л. Г.**

Б95 Расчет пассивных и активных четырехполюсников : практикум по курсу «Теория электрических цепей» для студентов специальности 1-36 04 02 «Промышленная электроника» днев. и заоч. форм обучения / Л. Г. Бычкова. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2011. – 41 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: http://lib.gstu.local. – Загл. с титул. экрана.

Приведены примеры решения задач для закрепления знаний по теории четырехполюсников.

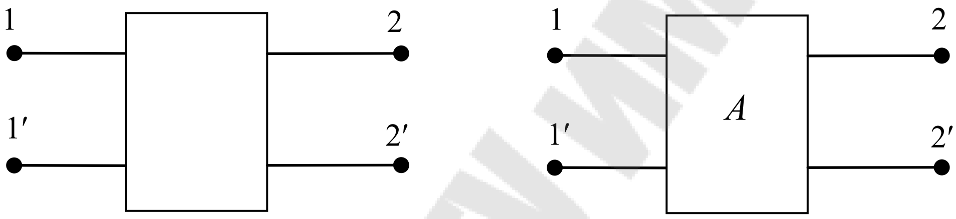
Для студентов специальности 1-36 04 02 «Промышленная электроника» дневной и заочной форм обучения.

**УДК 621.3.011.7(075.8)**
**ББК 31.211я73**

# ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКИ

*Общие положения*

Часть электрической цепи, имеющая две пары внешних зажимов, называется четырехполюсником. Понятие «четырехполюсник» используется тогда, когда рассчитывают напряжение и токи только в двух ветвях цепи. В качестве четырехполюсника может быть представлен трансформатор, длинная линия, усилитель. На практике к категории четырехполюсников, прежде всего, обращаются при анализе линий связи, предназначенных для передачи информации. Тракт передачи таких сигналов состоит из ряда четырехполюсников, включенным между генератором и приемником сигналов. Четырехполюсный элемент имеет две пары внешних зажимов (рис. 1.1).




а) б)

Рис. 1.1

Одну пару выводов 1-1´ называют первичными или входными – к ним обычно подключают генератор. Вторую пару выводов 2-2´ называют вторичными или выходными – к ним обычно подключают нагрузку. В том случае, когда источники питания и приемники подключаются только к вводам четырехполюсника, обозначенными одинаковыми цифрами, четырехполюсник называется проходным.

Все четырехполюсники разделяются на пассивные и активные. Активные четырехполюсники содержат внутри себя независимые и зависимые источники питания. При этом если источники являются независимыми, то на внешних разомкнутых зажимах четырехполюсника имеется напряжение, обусловленное внутренними источниками. Такой четырехполюсник называется автономным. В случае, если источники питания являются зависимыми, например, в схеме замещения транзистора или операционного усилителя, то после отключения четырехполюсника от остальной части схемы напряжение на его зажимах отсутствует. Такой активный четырехполюсник называется неавтономным. Активный четырехполюсник имеет в обозначении букву А (рис. 1.1*б*). Пассивный четырехполюсник не содержит источников питания.

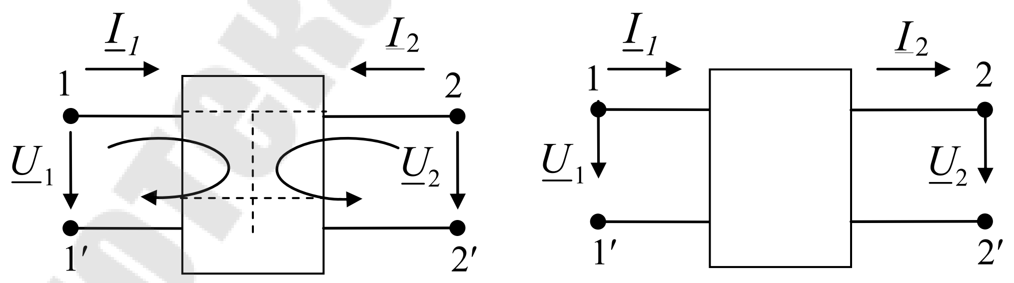
Различают четырехполюсники симметричные и несимметричные. Четырехполюсники являются симметричными, если при перемене местами входных и выходных зажимов токи и напряжения в цепях, подключенных к четырехполюснику, не изменяются.

Четырехполюсник называется обратимым, если между входными и выходными зажимами выполняется принцип взаимности. Пассивный линейный четырехполюсник является обратимым.

Основной смысл теории четырехполюсников заключается в том, что пользуясь некоторыми обобщенными параметрами, можно находить токи и напряжения на входе и выходе четырехполюсника. В общем случае схема самого четырехполюсника может быть и неизвестна.

*1. Формы записи пассивного проходного четырехполюсника. Способы определения коэффициентов четырехполюсника*

Уравнения четырехполюсника устанавливают связь между двумя напряжениями и двумя токами, определяющими режим на первичных и вторичных выводах. Если считать две указанные величины заданными, то две другие величины будут связаны с ними системой из двух уравнений. Всего можно записать шесть видов уравнений (сочетание из четырех по два). При записи уравнений будем считать режим четырехполюсника синусоидальным.




а) б)

Рис. 1.2

Первые четыре формы записи соответствуют направлениям токов, показанных на рис. 1.2*а*.

1.Форма [$Z$]

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_{11} \cdot \underline{I}_1 + \underline{Z}_{12} \cdot \underline{I}_2 \tag{1}$$

$$\underline{U}_2 = \underline{Z}_{21} \cdot \underline{I}_1 + \underline{Z}_{22} \cdot \underline{I}_2 \tag{2}$$

или в матричной форме

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = [\underline{Z}] \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix}, \tag{3}$$

где $Z$-матрица – квадратная:

$$[\underline{Z}] = \begin{vmatrix} \underline{Z}_{11} \cdot \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} \cdot \underline{Z}_{22} \end{vmatrix}.$$

Все коэффициенты имеют размерность сопротивлений. Если рассматривать токи $I_1$ и $I_2$ как контурные (рис. 1.2*а*), то $Z$ - матрица совпадает с матрицей контурных сопротивлений и $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21}$. Таким образом, линейный четырехполюсник имеет только три независимых параметра. Для симметричного четырехполюсника выполняется условие $Z_{11} = Z_{22}$, то есть, независимых параметров в этом случае только два.

2. Форма [$Y$]

Все шесть форм записи четырехполюсника эквивалентны. Получим

$Y$ – параметры, решив систему (3) относительно токов

$$\underline{I}_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\underline{U}_1 \underline{Z}_{22} - \underline{U}_2 \underline{Z}_{12}}{\underline{Z}_{11} \underline{Z}_{22} - \underline{Z}_{12} \underline{Z}_{21}} = \underline{U}_1 \frac{\underline{Z}_{22}}{\Delta} + \underline{U}_2 \frac{-\underline{Z}_{12}}{\Delta}, \tag{4}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \underline{U}_1 \frac{-\underline{Z}_{21}}{\Delta} + \underline{U}_2 \frac{\underline{Z}_{11}}{\Delta}. \tag{5}$$

Обозначим

$$\frac{\underline{Z}_{22}}{\Delta} = \underline{Y}_{11}; \qquad \frac{-\underline{Z}_{12}}{\Delta} = \underline{Y}_{12};$$

$$\frac{-\underline{Z}_{21}}{\Delta} = \underline{Y}_{21}; \qquad \frac{\underline{Z}_{22}}{\Delta} = \underline{Y}_{22};$$

$$\Delta = \underline{Z}_{11}\underline{Z}_{22} - \underline{Z}_{12}\underline{Z}_{21}$$

Все коэффициенты имеют размерность проводимости. Перепишем (4), (5) с учетом введенных обозначений:

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = \underline{Y}_{11}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{12}\underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 = \underline{Y}_{21}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{22}\underline{U}_2 \end{cases}. \tag{6}$$

Или в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = [\underline{Y}] \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix}, \tag{7}$$

где $[\underline{Y}] = \begin{vmatrix} \underline{Y}_{11} \cdot \underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{21} \cdot \underline{Y}_{22} \end{vmatrix}$ - квадратная матрица.

Так как $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21}$, то $\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21}$, и в симметричном четырехполюснике $\underline{Y}_{11} = \underline{Y}_{22}$.

Следующие две формы [$\underline{H}$] и [$\underline{G}$] получили название гибридной формы записи уравнений четырехполюсника.

3.Форма [$\underline{H}$]:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{H}_{11}\underline{I}_1 + \underline{H}_{12}\underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 = \underline{H}_{21}\underline{I}_1 + \underline{H}_{22}\underline{U}_2 \end{cases}. \tag{8}$$

Или в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = [\underline{H}] \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix},$$

где

$$[\underline{H}] = \begin{vmatrix} \underline{H}_{11} \cdot \underline{H}_{12} \\ \underline{H}_{21} \cdot \underline{H}_{22} \end{vmatrix}. \tag{9}$$

Размерность $\underline{H}$-коэффициентов разная. Пусть $U_2 = 0$ (режим короткого замыкания на выходных зажимах).

Тогда $\underline{H}_{11} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1}$ - входное сопротивление четырехполюсника со стороны первичных зажимов в режиме короткого замыкания вторичной обмотки.

$\underline{H}_{21} = \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_2}$ - безразмерный коэффициент.

Теперь рассмотрим режим холостого хода на первичных зажимах $I_1 = 0$.

Тогда $\underline{H}_{12} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1}$ - безразмерный коэффициент.

Коэффициент $\underline{H}_{22} = \frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_2}$ имеет размерность проводимости, Ом$^{-1}$.

Для линейного четырехполюсника выполняется условие: $\underline{H}_{12} = \underline{H}_{21}$, для симметричного $\underline{H}_{11} = \underline{H}_{22}$.

4. Форма [$\underline{G}$]:

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{G}_{11} \cdot \underline{U}_1 + \underline{G}_{12} \cdot \underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 &= \underline{G}_{21} \cdot \underline{U}_1 + \underline{G}_{22} \cdot \underline{I}_2 \end{aligned} . \qquad (10)$$

Или в матричной форме $\begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = [\underline{G}] \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix}$,

где $[\underline{G}] = \begin{bmatrix} \underline{G}_{11} \underline{G}_{12} \\ \underline{G}_{21} \underline{G}_{22} \end{bmatrix}$

Коэффициент $\underline{G}_{12} = \underline{G}_{21}$ – безразмерный;

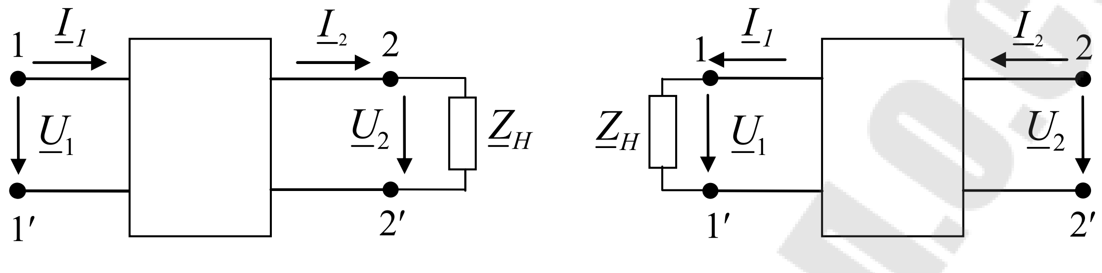
Коэффициент $\underline{G}_{11}$ имеет размерность проводимости;

$\underline{G}_{22}$ – размерность сопротивления.

Следующие две формы [$\underline{A}$] и [$\underline{B}$] записываются для нагруженного четырехполюсника.

5.Форма [$\underline{A}$]:

Источник питания подключен к первичным зажимам четырехполюсника, нагрузка – к вторичным. При записи уравнений в форме [$\underline{A}$] направления токов и напряжений выбираются согласно рис. 1.3*а*.




а) прямое включение б) обратное включение

Рис. 1.3

Такой выбор обусловлен тем, что передача энергии происходит от входных зажимов к выходным, причем четырехполюсник, включенный между источником и приемником, может состоять из нескольких четырехполюсников, соединенных каскадно.

Получим уравнения формы [$\underline{A}$] из формы [$\underline{Y}$]. Для этого в уравнениях (6) перед током $\underline{I}_2$ поставим знак минус:

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = \underline{Y}_{11}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{12}\underline{U}_2 \\ -\underline{I}_2 = \underline{Y}_{21}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{22}\underline{U}_2 \end{cases}. \tag{11}$$

Из второго уравнения системы следует:

$$\underline{U}_1 = -\frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{21}}\underline{U}_2 - \frac{1}{\underline{Y}_{21}}\underline{I}_2. \tag{12}$$

Подстановка (12) в первое уравнение системы (11) дает:

$$\underline{I}_1 = \underline{Y}_{11}(-\frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{21}}\underline{U}_2 - \frac{1}{\underline{Y}_{21}}\underline{I}_2) + \underline{Y}_{12}\underline{U}_2 = -\frac{\underline{Y}_{11}\underline{Y}_{22} - \underline{Y}_{21}\underline{Y}_{12}}{\underline{Y}_{21}}\underline{U}_2 - \frac{\underline{Y}_{11}}{\underline{Y}_{21}}\underline{I}_2\ . \tag{13}$$

Обозначим $\underline{\mathrm{A}} = \frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{21}}$ ; $\underline{B} = -\frac{1}{\underline{Y}_{21}}$;

$$\underline{C} = -\frac{\underline{Y}_{11}\underline{Y}_{22} - \underline{Y}_{21}\underline{Y}_{12}}{\underline{Y}_{21}}; \qquad \underline{D} = -\frac{\underline{Y}_{11}}{\underline{Y}_{21}}.$$

Получим систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} \underline{U}_1 = \underline{A}\cdot\underline{U}_2 + \underline{B}\cdot\underline{I}_2 \\ \underline{I}_1 = \underline{C}\cdot\underline{U}_2 + \underline{D}\cdot\underline{I}_2 \end{aligned}\right\}. \qquad (14)$$

Или в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}\underline{B} \\ \underline{C}\underline{D} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix}.$$

Коэффициенты $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$, $\underline{D}$ в общем случае комплексные и зависят от частоты. Размерность коэффициентов:

$$\underline{A} = \left(\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2}\right)_{\underline{I}_2=0}; \quad \underline{D} = \left(\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2}\right)_{\underline{U}_2=0}$$ - безразмерные;

$$\underline{B} = \left(\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2}\right)_{\underline{U}_2=0}$$ - передаточное сопротивление при закороченных вторичных зажимах;

$$\underline{C} = \left(\frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2}\right)_{\underline{I}_2=0}$$ -передаточная проводимость при разомкнутых вторичных зажимах.

Определитель, составленный из $\underline{A}$-коэффициентов, равен $\underline{A}\underline{D} - \underline{B}\underline{C} = \frac{\underline{Y}_{12}}{\underline{Y}_{21}}$, и для обратимого четырехполюсника $\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21}$, и тогда

$$\underline{A}\cdot\underline{D} - \underline{B}\cdot\underline{C} = 1. \qquad (15)$$

Если четырехполюсник симметричный, то $\underline{Y}_{11} = \underline{Y}_{22}$, и $\underline{A}$=$\underline{D}$, то есть число независимых коэффициентов равно двум.

6. При записи уравнений в форме [$\underline{B}$] полагают, что источник питания подключен к выходным зажимам, нагрузка - к входным. Передача энергии, соответственно, противоположна прямому включению (рис. 1-3*б*).

Получим уравнения в форме [$\underline{B}$] из уравнений (14). Поскольку при обратном включении токи имеют противоположное направление, поставим перед током $\underline{I}_1$ и $\underline{I}_2$ знак “минус”

$$\left.\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{A}\cdot\underline{U}_2 - \underline{B}\cdot\underline{I}_2 \\ -\underline{I}_1 &= \underline{C}\cdot\underline{U}_2 - \underline{D}\cdot\underline{I}_2 \end{aligned}\right\},$$

и решим полученную систему относительно $\underline{U}_2$ и $\underline{I}_2$:

$$\underline{U}_2 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{bmatrix}\underline{U}_1 & -\underline{B}\\ \underline{I}_1 & -\underline{D}\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}\underline{A} & -\underline{B}\\ \underline{C} & -\underline{D}\end{bmatrix}} = \frac{-\left(\underline{D}\cdot\underline{U}_1 - \underline{B}\cdot\underline{I}_1\right)}{-\left(\underline{A}\cdot\underline{D} - \underline{B}\cdot\underline{C}\right)}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix}\underline{A} & \underline{U}_1\\ \underline{C} & \underline{I}_1\end{vmatrix}}{-\left(\underline{A}\cdot\underline{D} - \underline{B}\cdot\underline{C}\right)} = \frac{-\left(\underline{C}\cdot\underline{U}_1 + \underline{A}\cdot\underline{I}_1\right)}{-\left(\underline{A}\cdot\underline{D} - \underline{B}\cdot\underline{C}\right)}.$$

С учетом (15) получим

$$\begin{cases} \underline{U}_2 = \underline{D}\cdot\underline{U}_1 + \underline{B}\cdot\underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 = \underline{C}\cdot\underline{U}_1 + \underline{A}\cdot\underline{I}_1 \end{cases}. \qquad (16)$$

Сравнивая уравнение (14) при прямом включении и уравнение (16) при обратном, делаем вывод, что коэффициенты $\underline{A}$ и $\underline{D}$ меняются местами.

Связь коэффициентов разных форм записи уравнений четырехполюсников приведены в таблице 1.

*2. Определение входных сопротивлений нагруженного четырехполюсника*

Входное сопротивление $\underline{Z}_{вх1}$ при прямом включении четырехполюсника согласно закону Ома равно:

$$\underline{Z}_{вх.1} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{A} \cdot \underline{U}_2 + \underline{B} \cdot \underline{I}_2}{\underline{C} \cdot \underline{U}_2 + \underline{D} \cdot \underline{I}_2} = \frac{\underline{A} \cdot \underline{Z}_н + \underline{B}}{\underline{C} \cdot \underline{Z}_н + \underline{D}}, \tag{17}$$

где $Z_н = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2}$.

При обратном включении:

$$\underline{Z}_{вх.2} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} = \frac{\underline{D} \cdot \underline{U}_1 + \underline{B} \cdot \underline{I}_1}{\underline{C} \cdot \underline{U}_1 + \underline{A} + \underline{I}_1} = \frac{\underline{D} \cdot \underline{Z}_н + \underline{B}}{\underline{C} \cdot \underline{Z}_н + \underline{A}}. \tag{18}$$

где $\underline{Z}_н = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1}$.

Входные сопротивления $\underline{Z}_{вх1}$ и $\underline{Z}_{вх2}$ можно выразить через входные сопротивления в режиме холостого хода и короткого замыкания. В самом деле, при питании со стороны первичных зажимов и разомкнутых вторичных (режим х.х., $\underline{I}_2 = 0$), и при коротком замыкании (режим к.з., $\underline{U}_2 = 0$) следует:

$$\underline{Z}_{1х} = \frac{\underline{A}}{\underline{C}}; \qquad \underline{Z}_{1к} = \frac{\underline{B}}{\underline{D}}. \tag{19}$$

и соответственно, в режиме холостого хода ($\underline{I}_1 = 0$) и короткого замыкания ($\underline{U}_1 = 0$) при обратном включении из (16) следует:

$$\underline{Z}_{2к} = \frac{\underline{D}}{\underline{C}}; \qquad \underline{Z}_{2к} = \frac{\underline{B}}{\underline{A}}. \tag{20}$$

Подставив (19) и (20) в (17) и (18), получим:

$$\underline{Z}_{вх.1} = \frac{\underline{A}}{\underline{C}} \cdot \frac{\underline{Z}_н + \frac{\underline{B}}{\underline{A}}}{\underline{Z}_н + \frac{\underline{D}}{\underline{C}}} = \underline{Z}_{1х} \cdot \frac{\underline{Z}_н + \underline{Z}_{2к}}{\underline{Z}_н + \underline{Z}_{2х}}, \tag{21}$$

$$\underline{Z}_{вх.2} = \frac{\underline{D}}{\underline{C}} \cdot \frac{\underline{Z}_н + \dfrac{\underline{B}}{\underline{D}}}{\underline{Z}_н + \dfrac{\underline{A}}{\underline{C}}} = \underline{Z}_{2x} \cdot \frac{\underline{Z}_н + \underline{Z}_{1к}}{\underline{Z}_н + \underline{Z}_{1x}} \ . \tag{22}$$

Формулы (21) и (22) удобно применять в том случае, если схема четырехполюсника неизвестна. Сопротивление в режиме холостого хода и короткого замыкания для данного четырехполюсника неизменны, и могут быть найдены экспериментальным путем.

### *3. Передаточные функции четырехполюсника*

В технике связи удобно использовать передаточные функции нагруженного четырехполюсника, определяя отношение выходных величин к входным. Коэффициент передачи по напряжению $\underline{H}_U$ – это комплексная величина, равная:

$$\underline{H}_u = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{A} \cdot \underline{U}_2 + \underline{B} \cdot \underline{I}_2} = \frac{\underline{Z}_н}{\underline{A} \cdot \underline{Z}_н + \underline{B}} \ , \tag{23}$$

где $\underline{Z}_н = \dfrac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2}$ - сопротивление нагрузки.

Коэффициент передачи по току $\underline{H}_i$ – это комплексная величина, равная отношению тока нагрузки к входному току:

$$\underline{H}_i = \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{I}_2}{\underline{C} \cdot \underline{U}_2 + \underline{D} \cdot \underline{I}_2} = \frac{1}{\underline{C} \cdot \underline{Z}_н + \underline{D}} \ . \tag{24}$$

### *4. Расчет $\underline{A}$-параметров четырехполюсника по экспериментальным данным*

Как указывалось в предыдущем разделе, входные сопротивления четырехполюсника в режимах холостого хода и короткого замыкания для данного четырехполюсника неизменны, и могут быть найдены экспериментально. Считая $\underline{Z}_{1x}$ и $\underline{Z}_{1к}$, $\underline{Z}_{2x}$ и $\underline{Z}_{2к}$ известными, решим совместно уравнения (19) и (20). В результате получим:

$$\underline{A} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1x}}{\underline{Z}_{2x} - \underline{Z}_{2k}}}; \qquad \underline{B} = \underline{A} \cdot \underline{Z}_{2k}$$

$$\underline{C} = \frac{\underline{A}}{\underline{Z}_{1x}}; \qquad \underline{D} = \underline{A} \cdot \frac{\underline{Z}_{2x}}{\underline{Z}_{2x}}. \tag{25}$$

Необходимо подчеркнуть, что сопротивления $\underline{Z}_{1x}$ и $\underline{Z}_{1к}$, $\underline{Z}_{2x}$ и $\underline{Z}_{2к}$ связаны соотношением:

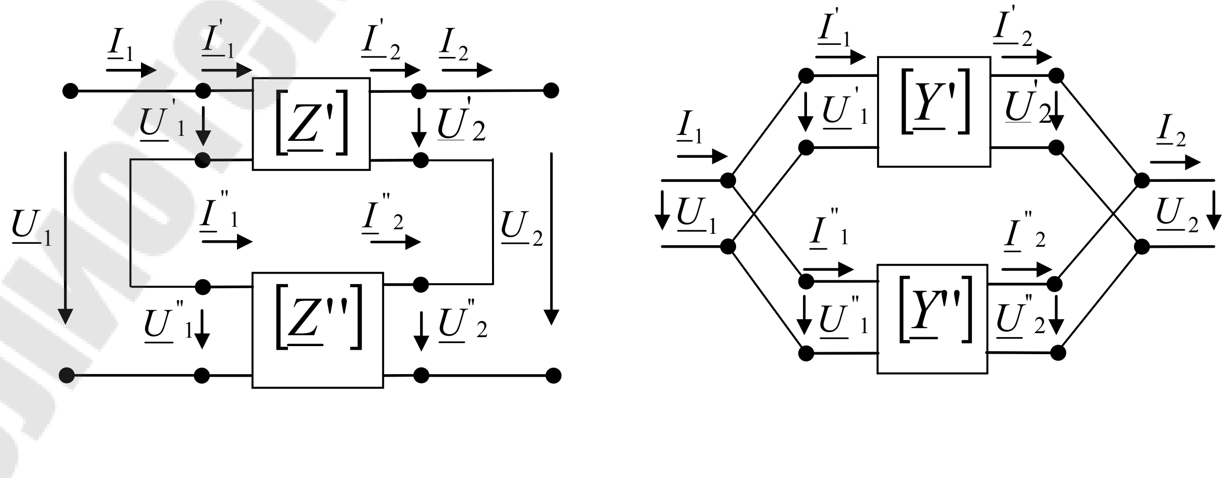
$$\frac{\underline{Z}_{1\text{х}}}{\underline{Z}_{1\text{к}}} = \frac{\underline{Z}_{2\text{х}}}{\underline{Z}_{2\text{к}}}. \tag{26}$$

Это несложно проверить подстановкой в формулу (26) формул (19) и (20).

Поскольку для коэффициента $\underline{A}$ при расчете по формуле (25) получается два значения, следует выбрать результат измерением выходного напряжения $U_2$ и разности начальных фаз $\underline{U}1$ и $\underline{U}2$.

*5. Схемы соединения четырехполюсников. Расчет параметров составных четырехполюсников*

Последовательное соединение двух четырехполюсников показано на рис. 1-4*а*.




а) б)

Рис. 1.4

При последовательном соединении равны входные и выходные токи:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_1^{'} = \underline{I}_1^{''}$$
$$\underline{I}_2 = \underline{I}_2^{'} = \underline{I}_2^{''},$$

а напряжения суммируются:

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_1^{'} + \underline{U}_1^{''}$$
$$\underline{U}_2 = \underline{U}_2^{'} + \underline{U}_2^{''}.$$

Эквивалентные параметры найдем, используя $Z$-параметры четырехполюсников:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1{}' \\ \underline{U}_2{}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{11}^{'} & \underline{Z}_{12}^{'} \\ \underline{Z}_{21}^{'} & \underline{Z}_{21}^{'} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_1^{'} \\ \underline{I}_2^{'} \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1{}'' \\ \underline{U}_2{}'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{11}^{''} & \underline{Z}_{12}^{''} \\ \underline{Z}_{21}^{''} & \underline{Z}_{21}^{''} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_1^{''} \\ \underline{I}_2^{''} \end{bmatrix}.$$

Матрица параметров составного четырехполюсника:

$$\begin{vmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{Z}_{11}^{'} + \underline{Z}_{11}^{''} & \underline{Z}_{12}^{'} + \underline{Z}_{12}^{''} \\ \underline{Z}_{21}^{'} + \underline{Z}_{21}^{''} & \underline{Z}_{22}^{'} + \underline{Z}_{22}^{''} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{vmatrix}. \quad (27)$$

При последовательном соединении суммируются $\underline{Z}$ -параметры: $|\underline{Z}| = |\underline{Z}^{'}| + |\underline{Z}^{''}|$.

На рис. 1.4*б* приведена схема параллельного соединения двух четырехполюсников. При параллельном соединении одинаковы их входные и выходные напряжения:

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_1{}' = \underline{U}_1{}'', \quad \underline{U}_2 = \underline{U}_2{}' = \underline{U}_2{}'',$$

а токи суммируются:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_1{}' = \underline{I}_1{}'', \quad \underline{I}_2 = \underline{I}_2{}' = \underline{I}_2{}''.$$

Матрица составного четырехполюсника в этом случае находится суммированием $\underline{Y}$-параметров:

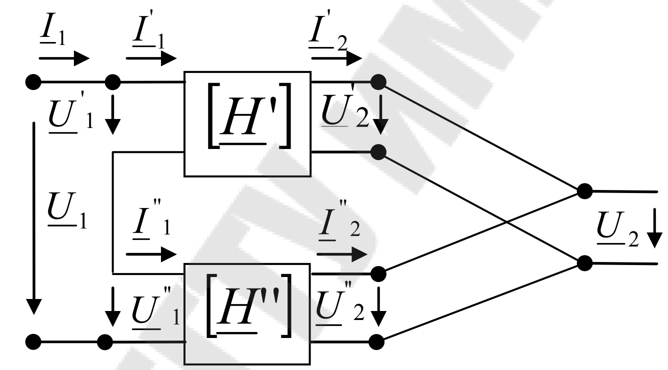
$$\begin{vmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{Y}'_{11} & \underline{Y}'_{12} \\ \underline{Y}'_{21} & \underline{Y}'_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \underline{Y}''_{11} & \underline{Y}''_{12} \\ \underline{Y}''_{21} & \underline{Y}''_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{Y}'_{11} + \underline{Y}''_{11} & \underline{Y}'_{12} + \underline{Y}''_{12} \\ \underline{Y}'_{21} + \underline{Y}''_{21} & \underline{Y}'_{22} + \underline{Y}''_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{vmatrix}.$$

При параллельном соединении суммируются $\underline{Y}$-параметры:

$$[\underline{Y}] = \left|\underline{Y}'\right| + \left|\underline{Y}''\right|. \tag{28}$$

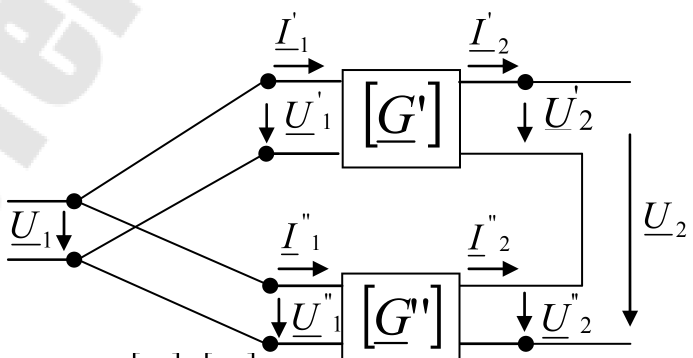
Смешанное соединение двух четырехполюсников и их эквивалентные параметры показаны на рис. 1.5.

а) Последовательно-параллельное соединение четырехполюсников.




$[\underline{H}] = [\underline{H}'] + [\underline{H}'']$

б) Параллельно-последовательное соединение четырехполюсников




$[\underline{G}] = [\underline{G}'] + [\underline{G}'']$

Рис. 1.5

При каскадном соединении четырехполюсников выходные зажимы первого четырехполюсника являются входными для второго (рис. 1.6).

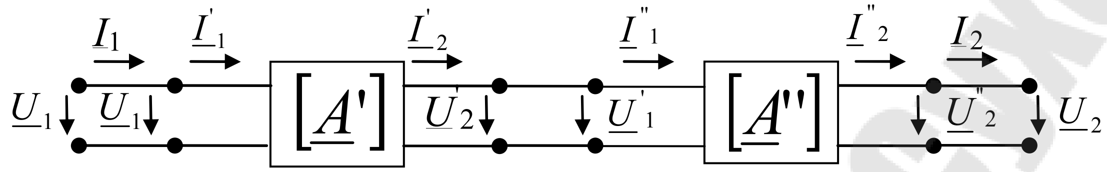



Рис. 1.6

Используя уравнения в форме $[\underline{A}]$ четырехполюсников и с учетом:

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_1' \qquad \underline{I}_1 = \underline{I}_1'$$

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_2' \qquad \underline{I}_2 = \underline{I}_2'$$

$$\underline{U}_2' = \underline{U}_1'' \qquad \underline{I}_2' = \underline{I}_1''$$

Получим

$$\begin{vmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{U}_1' \\ \underline{I}_1' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{A}_1' & \underline{B}_1' \\ \underline{C}_1' & \underline{D}_1' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \underline{U}_2' \\ \underline{I}_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{A}_1' & \underline{B}_1' \\ \underline{C}_1' & \underline{D}_1' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \underline{A}_1'' & \underline{B}_1'' \\ \underline{C}_1'' & \underline{D}_1'' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{vmatrix}. \qquad (29)$$

Откуда следует, что $\underline{A}$-матрица составного четырехполюсника равна произведению $\underline{A}$-матриц составляющих его четырехполюсников:

$$[\underline{A}] = [\underline{A}'] \cdot [\underline{A}''].$$

Определим коэффициент передачи составного четырехполюсника:

$$\underline{H}_u = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\underline{U}_2''}{\underline{U}_1'}. \qquad (30)$$

Умножим числитель и знаменатель формулы (30) на $\underline{U}_2' = \underline{U}_1''$ и с учетом $\underline{H}_u = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}$ и $\underline{H}_u = \frac{\underline{U}_2''}{\underline{U}_1'}$ получим:

$$\underline{H}_u = \frac{\underline{U}_2^{'}}{\underline{U}_1^{'}} \cdot \frac{\underline{U}_2^{''}}{\underline{U}_1^{'}} = \underline{H}_u^{'} \cdot \underline{H}_u^{''}. \qquad (31)$$

Коэффициент передачи составного четырехполюсника при каскадном соединении определяется как произведение коэффициентов передачи четырехполюсников, входящих в каскад.

8) *Эквивалентные схемы четырехполюсников*

Любой пассивный обратимый четырехполюсник характеризуется тремя независимыми параметрами. Следовательно, такой четырехполюсник может быть представлен в виде трехэлементной Т или П-образной схемы (рис. 1.7). Такие схемы с минимальным количеством элементов называют каноническими.

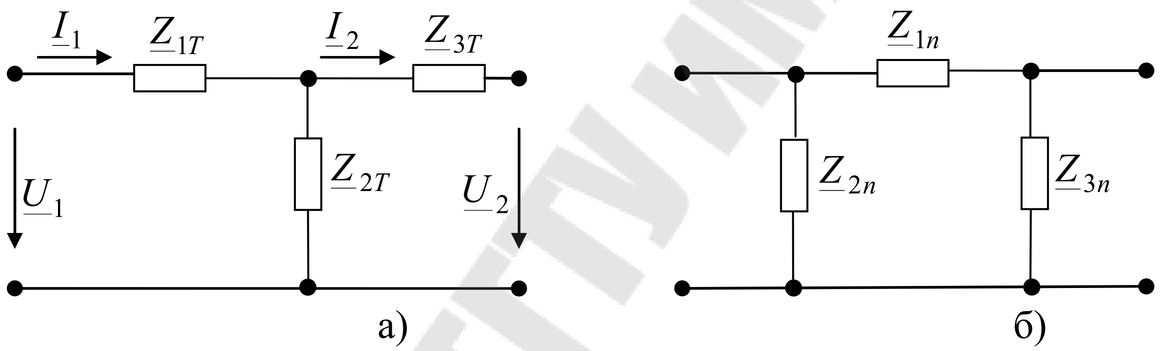


Рис. 1.7

Найдем связь параметров канонических четырехполюсников с $\underline{A}$-параметрами. Выразим напряжение и ток $\underline{I}_1$ Т-образной схемы через напряжение $\underline{U}_2$ и ток $\underline{I}_2$:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \frac{\underline{U}_2 + \underline{I}_2 \underline{Z}_{3T}}{\underline{Z}_{2T}} = \underline{U}_2 \frac{1}{Z_3} + \underline{I}_2 \left(1 + \frac{\underline{Z}_{3T}}{\underline{Z}_{2T}}\right). \qquad (32)$$

$$U_1 = \underline{Z}_1 \underline{I}_1 + \underline{I}_2 \underline{Z}_{3T} + \underline{U}_2 = \underline{Z}_{1T} \left[\underline{U}_2 \frac{1}{\underline{Z}_3} + \underline{I}_2 (1 + \frac{\underline{Z}_{3T}}{\underline{Z}_{2T}})\right] + \underline{I}_2 \underline{Z}_{3T} + \underline{U}_2 .$$

Окончательно получаем

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 (1 + \frac{\underline{Z}_{1T}}{\underline{Z}_{2T}}) + \underline{I}_2 (\underline{Z}_{1T} + \underline{Z}_{3T} + \frac{\underline{Z}_{1T} \underline{Z}_{3T}}{\underline{Z}_{2T}}). \qquad (33)$$

Сопоставим коэффициенты уравнений (32) и (33) с уравнениями в форме $\underline{A}$:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{A}\,\underline{U}_2 + \underline{B}\,\underline{I}_2 \\ \underline{I}_1 &= \underline{C}\,\underline{U}_2 + \underline{D}\,\underline{I}_2 \end{aligned}.$$

Получим: $\underline{A} = 1 + \dfrac{\underline{Z}_{1T}}{\underline{Z}_{2T}}$; $\quad \underline{B} = \underline{Z}_{1T} + \underline{Z}_{3T} + \dfrac{\underline{Z}_{1T}\,\underline{Z}_{3T}}{\underline{Z}_{2T}}$;

$\underline{C} = \dfrac{1}{\underline{Z}_{3T}}$; $\quad \underline{D} = 1 + \dfrac{\underline{Z}_{3T}}{\underline{Z}_{2T}}$.

Следовательно,

$$\left.\begin{aligned} \underline{Z}_{1T} &= \frac{\underline{A}-1}{\underline{C}} \\ \underline{Z}_{3T} &= \frac{\underline{D}-1}{C} \\ \underline{Z}_{2T} &= \frac{1}{C} \end{aligned}\right\}. \tag{34}$$

Аналогично рассчитываются коэффициенты П-образной схемы замещения (приведем без вывода).

$$\underline{Z}_{1\Pi} = B; \qquad \underline{Z}_{2\Pi} = \frac{B}{\underline{D}-1}; \qquad \underline{Z}_{3\Pi} = \frac{B}{\underline{A}-1}\ . \tag{35}$$

Для симметричного четырехполюсника $\underline{A} = \underline{D}$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{1T} &= \underline{Z}_{3T} \\ \underline{Z}_{2\Pi} &= \underline{Z}_{3\Pi} \end{aligned}.$$

9. Характеристические сопротивления четырехполюсника

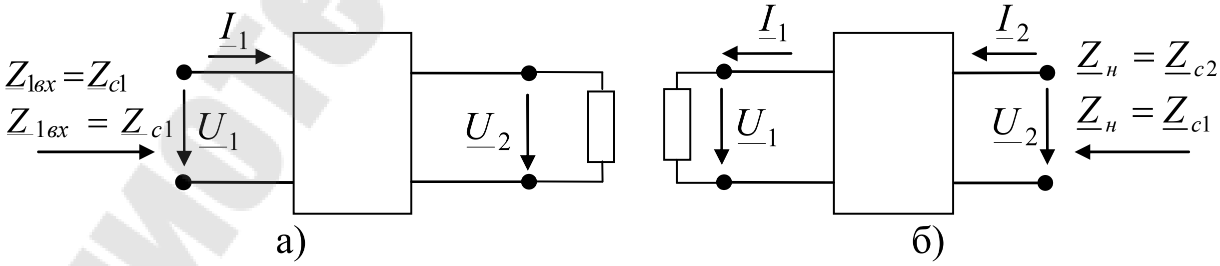



Рис. 1.8

Характеристическими называется такая пара сопротивлений, которые подобраны следующим образом: $\underline{Z}_{вх.1} = \underline{Z}_{C1}$ если $\underline{Z}_н = \underline{Z}_{C2}$ - при прямом включении четырехполюсника (рис. 1.8*а*) и $\underline{Z}_{вх.2} = \underline{Z}_{C2}$, если $\underline{Z}_H = \underline{Z}_{C1}$ - при обратном включении четырехполюсника (рис.1.8б). Условие, когда четырехполюсник нагружен характеристическим сопротивлением, называется согласованным режимом четырехполюсника.

С учетом вышесказанного:

$$\left.\begin{aligned} \underline{Z}_{C1} &= \frac{\underline{A}\cdot\underline{Z}_{C2}+\underline{B}}{\underline{C}\cdot\underline{Z}_{C1}+\underline{D}}; \\ \underline{Z}_{C2} &= \frac{\underline{D}\cdot\underline{Z}_{C2}+\underline{B}}{\underline{C}\cdot\underline{Z}_{C2}+\underline{A}} \end{aligned}\right\}. \tag{36}$$

Решая совместно уравнения (35), получим:

$$\underline{Z}_{C1} = \sqrt{\frac{\underline{A}\cdot\underline{B}}{\underline{C}\cdot\underline{D}}} = \sqrt{\underline{Z}_{1x}\cdot\underline{Z}_{1k}};$$

$$\underline{Z}_{C2} = \sqrt{\frac{\underline{D}\cdot\underline{B}}{\underline{C}\cdot\underline{A}}} = \sqrt{\underline{Z}_{2x}\cdot\underline{Z}_{2k}};$$

$$\underline{Z}_{1x} = \frac{\underline{A}}{\underline{C}}; \qquad \underline{Z}_{1k} = \frac{\underline{B}}{\underline{D}}; \qquad \underline{Z}_{2x} = \frac{\underline{D}}{\underline{C}}; \qquad \underline{Z}_{2k} = \frac{\underline{B}}{\underline{A}}. \tag{37}$$

Для симметричного четырехполюсника:

$$\underline{A} = \underline{D}, \qquad \underline{Z}_{C1} = \underline{Z}_{C2} = \underline{Z}_C = \sqrt{\frac{\underline{B}}{\underline{C}}}.$$

В этом случае характеристическое сопротивление называется повторным.

Условие согласованного режим четырехполюсника при прямом включении записывается следующим образом:

$$\underline{Z}_{Г} = \overset{*}{\underline{Z}}_{C1} \qquad\qquad \underline{Z}_{н} = \underline{Z}_{C2}$$

где $\overset{*}{\underline{Z}}_{C1}$- сопряженный комплекс к $\underline{Z}_{C1}$. При этом от генератора в четырехполюсник передается максимальная мощность.

10. *Постоянная передачи четырехполюсника (мера передачи)* $\underline{g}$

Полученные два параметра $\underline{Z}_{c1}$ и $\underline{Z}_{c2}$ недостаточны для описания свойств четырехполюсника, так как в общем случае четырехполюсник характеризуется тремя независимыми параметрами. Третий параметр определяют из соотношения:

$$\underline{g} = \frac{1}{2}\ln\frac{\underline{U}_1 \cdot \underline{I}_1}{\underline{U}_2 \cdot \underline{I}_2} = a + jb, \qquad (38)$$

где $\underline{U}_1, \underline{I}_1, \underline{U}_2, \underline{I}_2$ - напряжения и токи в согласованном режиме четырехполюсника.

Величина $\underline{g}$ называется мерой передачи четырехполюсника, $a$ - постоянная затухания четырехполюсника, $b$ - коэффициент фазы. Определим связь меры передачи $\underline{g}$ с $\underline{A}$ - параметрами четырехполюсника. Для этого используем следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} &= \frac{\underline{A}\cdot\underline{U}_2 + \underline{B}\underline{I}_2}{\underline{U}_2} = \underline{A} + \frac{1}{\underline{Z}_{c2}}\cdot\underline{B}\underline{A} + \sqrt{\frac{\underline{A}\cdot\underline{B}\cdot\underline{C}}{\underline{D}}} \\ \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} &= \frac{\underline{C}\cdot\underline{U}_2 + \underline{D}\underline{I}_2}{\underline{I}_2} = \underline{C} + \underline{Z}_{c2} + \underline{D} = \underline{D} + \sqrt{\frac{\underline{D}\cdot\underline{B}\cdot\underline{C}}{\underline{A}}} \end{aligned}\right\}. \qquad (39)$$

Подставив (39) в (38), после преобразований получим:

$$\underline{g} = \ln(\sqrt{\underline{A}\cdot\underline{D}} + \sqrt{\underline{B}\cdot\underline{C}}). \qquad (40)$$

Для симметричного четырехполюсника:

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} = \underline{Z}_C = Z_C \cdot e^{j\theta}$$

Тогда $\dfrac{U_1 \cdot I_1 \cdot \cos\theta}{U_2 \cdot I_2 \cdot \cos\theta} = \dfrac{P_1}{P_2}$

И мера передачи $\underline{g}$ равна:

$$\underline{g} = \frac{1}{2}\ln\frac{\underline{U}_1 \cdot \underline{I}_1}{\underline{U}_2 \cdot \underline{I}_2} = \frac{1}{2}\ln\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \ln\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} = a + jb\ .$$

Коэффициент затухания $a = \ln\frac{U}{U_2} = \ln\frac{I_1}{I_2} = \ln\frac{P_1}{P_2}$

измеряется в Неперах (Нп ).

$a = 1$ Нп, если $\frac{P_1}{P_2} = e^2$ и $\frac{U_1}{U_2} = \frac{I_1}{I_2} = e = 2{,}718$

На практике такая единица затухания часто является слишком большой, поэтому используют единицу измерения, называемую децибелом (дБ):

$$a = 10\lg\frac{P_1}{P_2} = 20\lg\frac{U_1}{U_2}$$

Если $a = 1$ дБ, то $\frac{U_1}{U_2} = 10^{1/20} = 1{,}12$

Имеют место равенства:

1Нп=8,67дБ;   1дБ=0,115Нп

Коэффициент фазы $b = \psi_{U1} - \psi_{U2}$ показывает, как изменяется фаза напряжения (или тока) при прохождении через четырехполюсник. Коэффициент фазы определяется в радианах или градусах.

11. *Уравнения четырехполюсника в гиперболических функциях*

Выразим уравнения четырехполюсника через характеристические параметры.

Так как $e^{\underline{g}} = \sqrt{\underline{A}\cdot\underline{D}} + \sqrt{\underline{B}\cdot\underline{C}}$, то

$$e^{-\underline{g}} = \frac{1}{\sqrt{\underline{A}\cdot\underline{D}} + \sqrt{\underline{B}\cdot\underline{C}}}\cdot\frac{\sqrt{\underline{A}\cdot\underline{D}} - \sqrt{\underline{B}\cdot\underline{C}}}{\sqrt{\underline{A}\cdot\underline{D}} - \sqrt{\underline{B}\cdot\underline{C}}} = \sqrt{\underline{A}\cdot\underline{D}} - \sqrt{\underline{B}\cdot\underline{C}},$$

поскольку $\underline{A}\cdot\underline{D} - \underline{B}\cdot\underline{C} = 1$

Запишем гиперболический синус и косинус:

$$ch\underline{g} = \frac{1}{2}(e^{\underline{g}} + e^{-\underline{g}}) = \sqrt{\underline{A}\cdot\underline{D}}; \tag{41}$$

$$sh\underline{g} = \frac{1}{2}(e^{\underline{g}} - e^{-\underline{g}}) = \sqrt{\underline{B}\cdot\underline{C}}. \tag{42}$$

Кроме того, легко показать:

$$\sqrt{\frac{\underline{Z}_{C1}}{\underline{Z}_{C2}}} = \sqrt{\frac{\underline{A}}{\underline{D}}}. \qquad (43)$$

$$\sqrt{\underline{Z}_{C1} \cdot \underline{Z}_{C2}} == \sqrt{\frac{\underline{B}}{\underline{C}}}. \qquad (44)$$

Решая совместно (41),(42),(43) и (44) , получим

$$\left.\begin{array}{ll} \underline{A} = \sqrt{\dfrac{\underline{Z}_{C1}}{\underline{Z}_{C2}}} ch\underline{g}, & \underline{B}_1 = \sqrt{\underline{Z}_{C1} \cdot \underline{Z}_{C2}}\, sh\underline{g} \\ \underline{C} = \dfrac{1}{\sqrt{\underline{Z}_{C1} \cdot \underline{Z}_{C2}}} sh\underline{g} & \underline{D} = \sqrt{\dfrac{\underline{Z}_{C2}}{\underline{Z}_{C1}}} ch\underline{g} \end{array}\right\}. \qquad (45)$$

В результате можно записать уравнения пассивного обратимого четырехполюсника в гиперболических функциях:

$$\left.\begin{array}{l} \underline{U}_1 = \sqrt{\dfrac{\underline{Z}_{C1}}{\underline{Z}_{C2}}} \left(\underline{U}_2 \mathrm{ch}\underline{g} + \underline{I}_2 \underline{Z}_{C2} \mathrm{sh}\underline{g}\right) \\ \underline{I}_1 = \sqrt{\dfrac{\underline{Z}_{C2}}{\underline{Z}_{C1}}} \left(\dfrac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_{C2}} \mathrm{sh}\underline{g} + \underline{I}_2 \mathrm{ch}\underline{g}\right) \end{array}\right\}. \qquad (46)$$

Для согласованного режима четырехполюсника:

$\underline{I}_2 \underline{Z}_{C2} = \underline{U}_2$, тогда

$$\left.\begin{array}{l} \underline{U}_1 = \sqrt{\dfrac{\underline{Z}_{C1}}{\underline{Z}_{C2}}} \underline{U}_2 (\mathrm{ch}\underline{g} + \mathrm{sh}\underline{g}) = \sqrt{\dfrac{\underline{Z}_{C1}}{\underline{Z}_{C2}}} e^{-\underline{g}} \\ \underline{I}_1 = \sqrt{\dfrac{\underline{Z}_{C1}}{\underline{Z}_{C2}}}\, \underline{I}_2 (\mathrm{ch}\underline{g} + s\mathrm{hg}) = \sqrt{\dfrac{\underline{Z}_{C1}}{\underline{Z}_{C2}}} e^{\underline{g}} \end{array}\right\}. \qquad (47)$$

И для симметричного четырехполюсника

$\underline{Z}_{C1} = \underline{Z}_{C2} = \underline{Z}_C$,получаем $\underline{H}_U = \underline{H}_i = e^{-\underline{g}}$

Таким образом, для симметричного согласованного режима четырехполюсника мера передачи $\underline{q}$ показывает изменение амплитуды и фазы передаваемого сигнала.

12) *Уравнения активных четырехполюсников*

Пусть четырехполюсник содержит внутри себя независимые источники питания (рис. 1.9*а*).Это означает, что при отключении четырехполюсника от внешнего источника на его разомкнутых зажимах возникают напряжения $\underline{U}_{01}$ и $\underline{U}_{02}$ (рис. 1.9*б*).

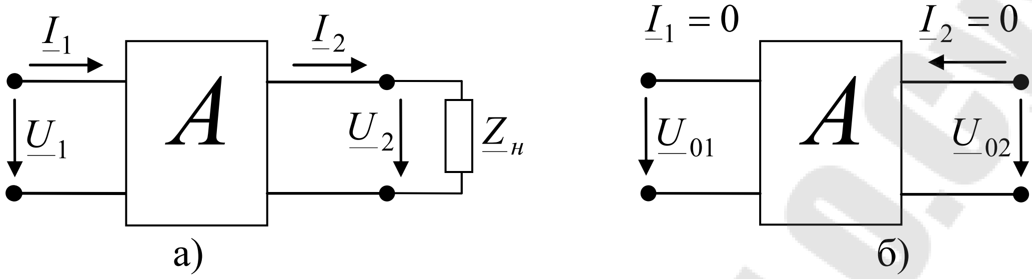



Рис. 1.9

Учтем напряжения $\underline{U}_{01}$ и $\underline{U}_{02}$ как эквивалентные источники питания, включенные в первичные и вторичные цепи четырехполюсника. Тогда сам четырехполюсник учитывается как пассивный (1.10).

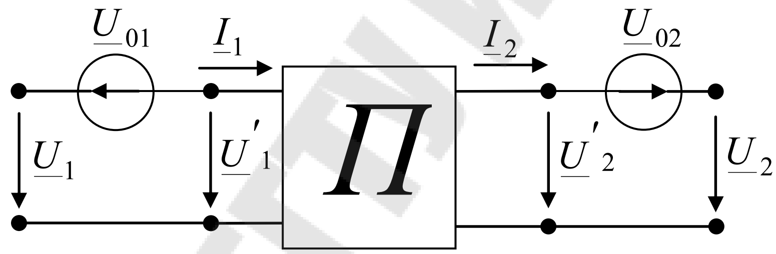



Рис. 1.10

Напряжения $\underline{U}_1'$ и $\underline{U}_2''$ рассчитываем согласно второму закону Кирхгофа:

$$\left.\begin{array}{ll} \underline{U}_1' - \underline{U}_1 = -\underline{U}_{01} & \underline{U}_1' = \underline{U}_1 - \underline{U}_{01} \\ \underline{U}_2' - \underline{U}_2 = -\underline{U}_{02} & \underline{U}_2' = \underline{U}_2 - \underline{U}_{02} \end{array}\right\}. \qquad (48)$$

Уравнения пассивного четырехполюсника в форме $[\underline{Z}]$- связывают $\underline{U}_1'$ и $\underline{U}_2'$ с токами $\underline{I}_1'$ и $\underline{I}_2'$

$$\left.\begin{array}{l} \underline{U}_1' = \underline{Z}_{11}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{12}\underline{I}_2 \\ \underline{U}_2' = \underline{Z}_{21}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{22}\underline{I}_2 \end{array}\right\}. \qquad (49)$$

С учетом (48) получим уравнения:

$\underline{U}_1 = \underline{Z}_{11}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{12}\underline{I}_2 + \underline{U}_{10}$;

$\underline{U}_2 = \underline{Z}_{21}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{22}\underline{I}_2 + \underline{U}_{20}$.

13) *Схемы замещения управляемых источников питания и их уравнения в форме* $[\underline{A}]$

В предыдущем параграфе мы рассмотрели уравнения активных обратимых четырехполюсников. В радиотехнике и технике связи широкое применение находят активные невзаимные четырехполюсники с зависимыми источниками напряжения или тока. Это цепи, содержащие электронные лампы, транзисторы, операционные усилители и другие активные элементы. Известны четыре типа управляемых источников.

**Источник напряжения, управляемый напряжением** (ИНУН) (рис. 1.11*а*).

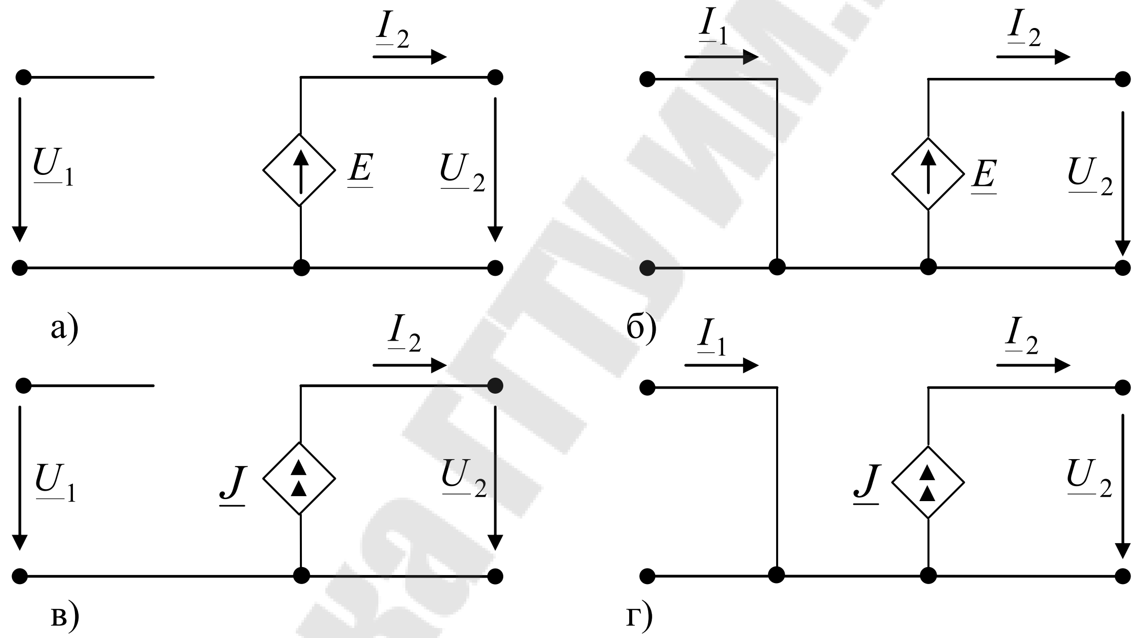



Рис.1.11

В ИНУН входное сопротивление бесконечно велико, входной ток равен $\underline{I}_1 = 0$. Управляемый источник ЭДС $\underline{E} = \underline{U}_2 = \underline{H}_U \cdot \underline{U}_1$, где $\underline{H}_U$ - коэффициент передачи по напряжению. Его $\underline{A}$ - матрица равна:

$$[\underline{A}] = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\underline{H}_U} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Источник напряжения, управляемый током (ИНУТ) (рис. 1.11*б*)

Входное сопротивление равно нулю, напряжение $\underline{U}_1 = 0$. Напряжение управляемого источника $\underline{E} = \underline{U}_2 = \underline{Z}_{21} \cdot \underline{I}_1$. Его $\underline{A}$ - матрица равна:

$$[\underline{A}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{1}{\underline{Z}_{21}} & 0 \end{bmatrix}.$$

Источник тока, управляемый напряжением (ИТУН) (рис. 1.11*в*).

В ИТУН входное сопротивление бесконечно велико, $\underline{I}_1 = 0$. Управляемый источник тока $\underline{J} = \underline{I}_2 = \underline{Y}_{21}\underline{U}_1$. Его $\underline{A}$ -матрица равна:

$$[\underline{A}] = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{\underline{Y}_{21}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

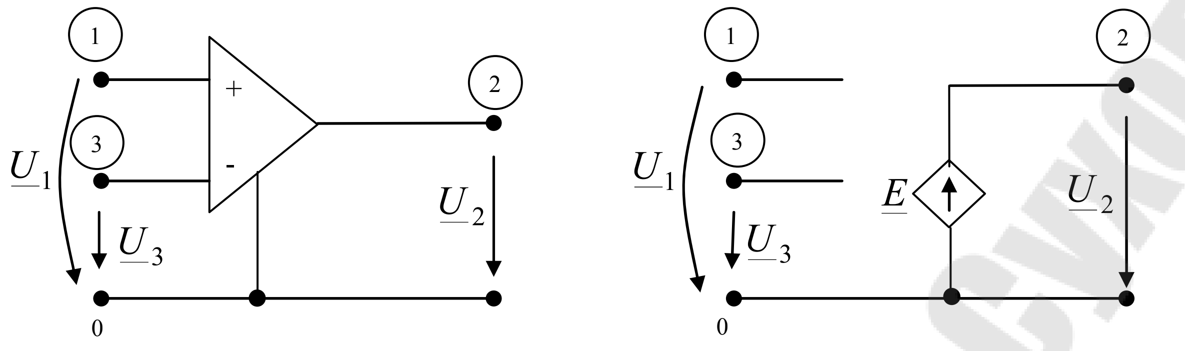
Источник тока, управляемый током (ИТУТ) (рис. 1.11*г*).

Входное сопротивление ИТУТ равно 0, напряжение $\underline{U}_1 = 0$, ток источника тока $\underline{J} = \underline{I}_2 = \underline{H}_i \underline{I}_1$, Его матрица $\underline{A}$ равна: $[\underline{A}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\underline{H}_i} \end{bmatrix}$.

Отличительной особенностью зависимых источников является их необратимость. Четырехполюсники имеют четко выраженный вход и выход. Сигнал проходит только от входа к выходу (прямое прохождение сигнала). Обратное прохождение сигнала отсутствует.

14. *Операционный усилитель* (ОУ)

В последние годы многие задачи синтеза электрических цепей с заданными свойствами решаются с помощью операционных усилителей. Условное графическое изображение операционного усилителя приведена на рис. 1.12*а*. Усилитель имеет два входа: 1- неинвертирующий, 3- инвертирующий. При подаче напряжения $\underline{U}_1$ на вход 1 напряжение выходное $\underline{U}_2$ имеет ту же полярность, что и $\underline{U}_1$, а при подаче напряжения на вход 3 напряжение $\underline{U}_2$ меняет свою полярность на противоположную.




а) б)

Рис. 1.12

Идеальный ОУ представляет собой ИНУН, схема замещения которого приведена на рис. 1.12*б*. Входное сопротивление идеального ОУ равно бесконечности (на практике - десятки и сотни кОм). Выходное сопротивление равно 0 (на практике десятки Ом). Коэффициент передачи по напряжению $\mu \to \infty$ (на практике $\mu \approx 10^4 \equiv 10^5$) Выходное напряжение ОУ равно: $\underline{E} = \underline{U}_2 = \mu(U_1 - U_3)$.

14. *Обратная связь*

Обратная связь обеспечивает воздействие выходного напряжения (тока) на входное. Обратная связь обеспечивается включением дополнительного четырехполюсника. В качестве примера на рис. 1.13 представлено последовательно-параллельное включение двух четырехполюсников. Первый четырехполюсник с коэффициентом передачи $\underline{H}'_U$ является основным. Четырехполюсник обратной связи с коэффициентом передачи $\underline{H}_U''$ подключается параллельно к выходному напряжению основного четырехполюсника.

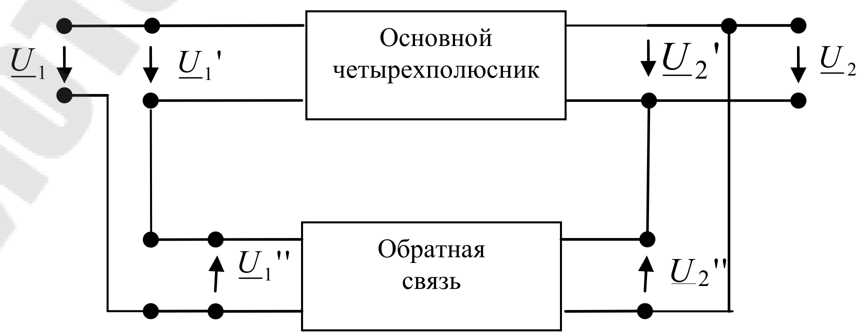



Рис. 1.13

Передаточная функция основного четырехполюсника равна $\underline{H}_u^{'} = \dfrac{\underline{U}_2^{'}}{\underline{U}_1^{'}}$, передаточная функция обратно связи $H_u^{''} = \dfrac{\underline{U}^{''}_1}{\underline{U}''_2}$. Передаточная функция всей системы:

$$\underline{H}_u = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}$$

Очевидно, что $\underline{U}_1 = \underline{U}_1' - \underline{U}_1''$. Тогда

$$\underline{H}_U = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1^{''} - \underline{U}_1^{''}}$$

Разделим числитель и знаменатель на $\underline{U}_1^{'}$, получим:

$$\underline{H}_U = \frac{\dfrac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1'}}{1 - \dfrac{\underline{U}_1^{''}}{\underline{U}_1^{'}} \cdot \dfrac{\underline{U}_2}{\underline{U}_2'}} = \frac{\underline{H}_U'}{1 - \underline{H}_U' \cdot \underline{H}_U''} \, . \tag{50}$$

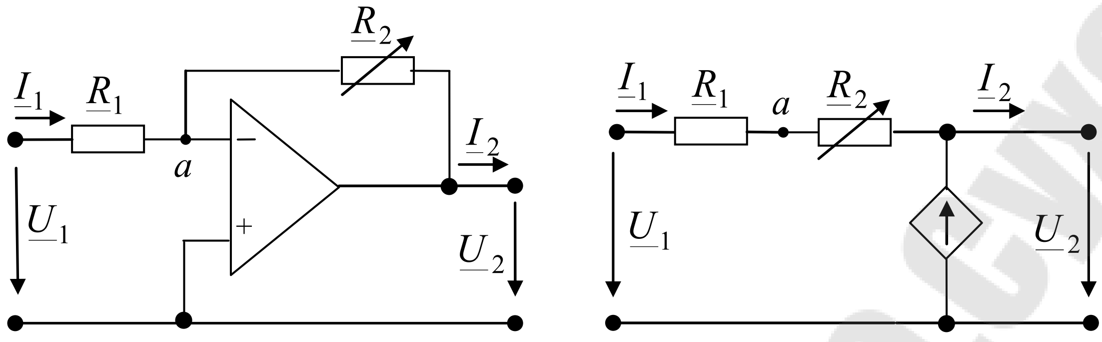
Если поменять полярность одной из пар зажимов устройства обратной связи, то в знаменателе (50) вместо знака минус получится плюс. В общем случае:

$$\underline{H}_U = \frac{\underline{H}_U^{'}}{1 \pm \underline{H}_U^{'} \cdot \underline{H}_U^{''}} \, . \tag{51}$$

При введении обратной связи в зависимые источники появляется путь обратного прохождения сигнала с выхода на вход. При этом в активных четырёхполюсниках проявляются ряд важных качеств, позволяющих моделировать различные функции. Например, суммирование, интегрирование, дифференцирование, генерирование и усиление колебаний, моделирование пассивных элементов *R*, *L*, *C* и др.

Рассмотрим примеры расчёта цепей с операционным усилителем.

**Пример №1**




а) б)

Рис. 1.14

На рис. 1.14*а* показана схема с операционным усилителем. В качестве обратной связи выступает переменное сопротивление $R_2$. Рассчитать входное сопротивление и передаточную функцию четырёхполюсника.

Схема замещения активного четырёхполюсника показана на рис. 1.14*б*, управляемая ЭДС.

$\underline{E} = \underline{U}_2 = -\mu\varphi_a$ Отсюда при $\mu \to \infty$

$$\underline{\varphi}_a = \left.\frac{\underline{U}2}{\mu}\right|_{\mu\to\infty} = 0$$

Решим задачу методом узловых потенциалов:

$$\varphi_a\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)-\underline{U}_2\cdot\frac{1}{R_2}=\frac{\underline{U}_1}{R_1}$$

Так как $\underline{\varphi}_a = 0$ то $-\underline{U}_2\cdot\frac{1}{R_2}=\frac{\underline{U}_1}{R_1}$. Отсюда коэффициент передачи по напряжению:

$$\underline{H}_U = \frac{\underline{U}2}{\underline{U}1} = -\frac{R_2}{R_1}$$

Входное сопротивление четырёхполюсника

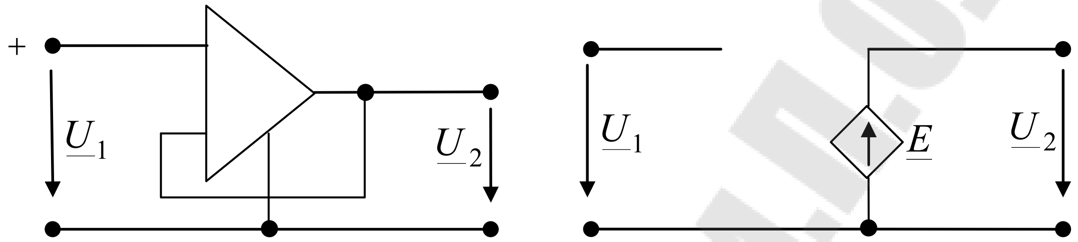
$$\underline{Z}_{вх.1} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1}; \qquad \underline{I}1 = \frac{-\varphi_a + \underline{U}1}{R1} = \frac{\underline{U}1}{R1};$$

Следовательно, $\underline{Z}_{вх.1} = R_1$.

Изменяя сопротивление обратной связи $R_2$ можно регулировать коэффициент передачи по напряжению $\underline{H}_U$, при этом входное сопротивление четырёхполюсника остаётся неизменным.

**Пример №2**

На рис.1.15*а* приведена схема электронного повторителя. Показать, что передаточная функция $\underline{H}_U = 1$




а) б)

Рис.1.15

$$\underline{E} = \mu \cdot (\underline{U}_1 - \underline{U}_2)$$

Электрическая схема замещения устройства представлена на рис.1.15*б*.

$\underline{E} = \underline{U}_2 = \mu \cdot (\underline{U}_1 - \underline{U}_2)$, отсюда: $\underline{U}_1 - \underline{U}_2 = \left.\dfrac{\underline{U}_2}{\mu}\right|_{\mu \to \infty} = 0$ Следовательно,

$\underline{U}_1 = \underline{U}_2$, $\underline{H}_U = \dfrac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = 1$. Входное сопротивление электронного повторителя $\underline{Z}_{вх.1} = \infty$, что позволяет использовать данный активный четырёхполюсник в тех случаях, когда необходимо подключить нагрузку так, чтобы это не нарушало работу схемы.

## 2. Задачи к разделу “Пассивные взаимные четырёхполюсники”

*2.1.Коэффициенты и параметры четырёхполюсника*

**Задача №1**

Для четырёхполюсника рис. 2.1 рассчитать А-параметры и передаточную функцию $\underline{H}_U$ при $\underline{Z}_H = 20$ Ом.

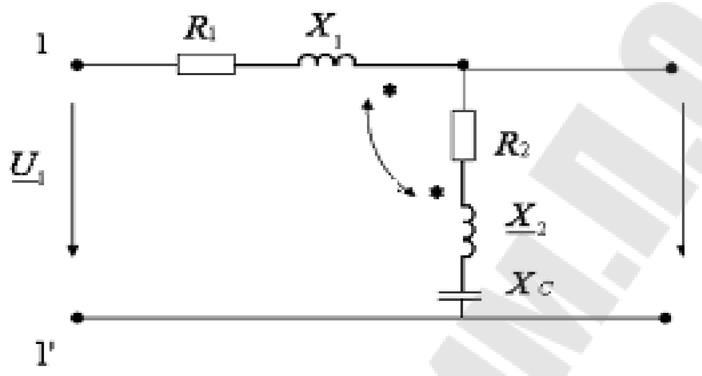



Рис. 2.1

$R_1 = R_2 = 5$ Ом; $X_1 = X_2 = 20$ Ом;
$X_M = 10$ Ом; $X_C = 30$ Ом.

*Решение*

Схема замещения без индуктивных связей показана на рис.2.2.

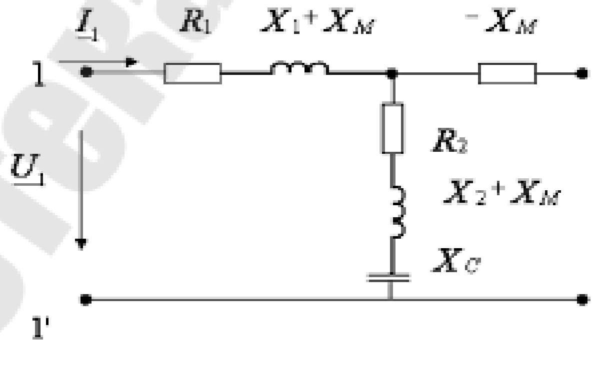



Рис.2.2

Рассчитаем комплексные сопротивления ветвей

$\underline{Z}_1 = R_1 + j(X_1 + X_M) = 5 + j30$Ом;

$\underline{Z}_2 = R_2 + j(X_2 + X_M) - jX_c = 5$ Ом;

$\underline{Z}_3 = -jX_M = -j10$ Ом.

В результате схема упрощается (2.2*б*).

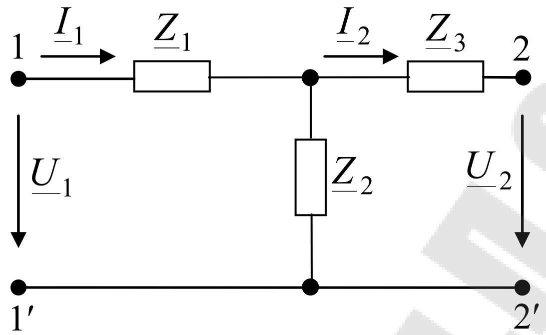



Рис. 2.2*б*

Уравнения в А-форме:

$$\left.\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{A}\cdot\underline{U}_2 + \underline{B}\cdot\underline{I}_2 \\ \underline{I}_1 &= \underline{C}\cdot\underline{U}_2 + \underline{D}\cdot\underline{I}_2 \end{aligned}\right\}$$

Используя законы Кирхгофа, составим уравнения, связывающие напряжения и токи $\underline{U}_1, \underline{I}_1, \underline{U}_2, \underline{I}_2$ по схеме рис.2.2*б*.

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \frac{\underline{I}_2\underline{Z}_3 + \underline{U}_2}{\underline{Z}_2} = \frac{1}{\underline{Z}_2}\underline{U}_2 + \left(1 + \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2}\right)\cdot\underline{I}_2; \qquad (1)$$

$$\underline{U}_1 = \underline{I}_1\underline{Z}_1 + \underline{I}_2\underline{Z}_3 + \underline{U}_2 = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}\underline{U}_2 + \left(\underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2}\right)\underline{I}_2 + \underline{I}_2\underline{Z}_3 + \underline{U}_2.$$

Объединим коэффициенты передач $\underline{U}_2$ и $\underline{I}_2$, получим:

$$\underline{U}_1 = \left(1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}\right)\underline{U}_2 + \left(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 + \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2}\right)I_2. \qquad (2)$$

Сравнивая (1) и (2) с системой (3), получим

$$\underline{A} = 1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = 1 + \frac{5 + j30}{5} = 2 + j6, \text{Ом};$$

$$\underline{B} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 + \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2} = 5 + j30 - j10 + \frac{(5 + j30)(-j10)}{5} = 65 + j10, \text{Ом};$$

$$\underline{C} = \frac{1}{\underline{Z}_2} = \frac{1}{5} = 0{,}2 \ \text{Ом}^{-1};$$

$$\underline{D} = 1 + \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2} = 1 + \frac{-j10}{5} = 1 - j2.$$

Проверим решение. У взаимного четырёхполюсника должно выполняться условие:

$$\underline{A} \cdot \underline{D} - \underline{B} \cdot \underline{C} = 1$$

$$(2 + j6)(1 - j2) - 0{,}2(65 + j10) = 14 + j2 - 13 - j2 = 1$$

$\underline{A}$ - параметры рассчитаны верно.

Теперь рассчитаем коэффициент передачи по напряжению:

$$\underline{H}_U = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{A}\underline{U}_2 + \underline{B}\underline{I}_2} = \frac{\underline{Z}_H}{\underline{A}\underline{Z}_H + \underline{B}} = \frac{20}{(2 + j6)20 + (65 + j10)} = 0.12e^{-j51}$$

**Задача №2**

Для четырёхполюсника задачи №1 рассчитать ЭДС генератора с внутренним сопротивлением $R_1 = 5$ Ом, если напряжение на входе четырёхполюсника $\underline{U}_1 = 100$ В.

*Решение*

Схема замещения для входа четырёхполюсника показана на рис.2.3.

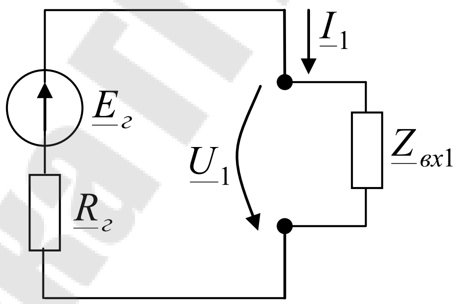



Рис. 2.3

Входное сопротивление согласно закону Ома:

$$\underline{Z}_{вх.1} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{A}\underline{U}_2 + \underline{B}\underline{I}_2}{\underline{C}\underline{U}_2 + \underline{D}\underline{I}_2} = \frac{\underline{A}\underline{Z}_H + \underline{B}}{\underline{C}\underline{Z}_H + \underline{D}}$$

Подставив цифры, получим:

$$\underline{Z}_{вх.1} = \frac{(2 + j6)20 + 65 + j10}{0{,}2 \cdot 20 + 1 - j2} = 30{,}9e^{j72{,}8}, \text{ Ом}$$

Рассчитаем ток $\underline{I}_1$:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_{вх.1}} = \frac{100}{30{,}9e^{j72{,}8}} = 3{,}23e^{-j72{,}8}, \text{ А}$$

По второму закону Кирхгофа:

$$\underline{E}_Г = \underline{U}_1 + \underline{I}_1 R_Г = 100 + 3{,}23e^{-72{,}8} \cdot 5 = 107e^{-j8}, \text{ В}$$

$$e(t) = 107\sqrt{2}\sin(\omega \cdot t - 8), \text{ В}$$

Напряжение на нагрузке:

$$\underline{U}_2 = \underline{H}_U \cdot \underline{U}_1 = 107\,e^{-j8} \cdot 0{,}12\,e^{-j51} = 12{,}81\,e^{-j59}, \text{ В}$$

Ток нагрузки:

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_Н} = \frac{12{,}81\,e^{-j59}}{20} = 0{,}64\,e^{-j59}, \text{ А}$$

Мощность нагрузки:

$$P_Н = \underline{I}_2^2 \cdot R_Н = 0{,}64^2 \cdot 20 = 8{,}19, \text{ Вт}$$

**Задача №3**

Для составления схемы замещения линии передачи, были выполнены опыты холостого хода и короткого замыкания. Опыты показали:

$U_{1x} = 10\,\text{кВ}$, $I_{1x} = 2\,\text{А}$, $P_{1x} = 9$ кВт, $\varphi_{1x} < 0$; $U_{1к} = 4{,}5$ кВт, $I_{1к} = 10\,\text{А}$, $P_{1к} = 23\,\text{кВт}$, $\varphi_{1к} > 0$.

Рассчитать П-образную схему замещения линии передач.

*Решение*

Линия передач может рассматриваться как симметричный четырёхполюсник. Рассчитаем А- параметры по значениям сопротивлений в режиме холостого хода и короткого замыкания:

$$\underline{Z}_{1x} = \frac{U_{1x}}{I_{1x}} \cdot e^{j\varphi_{1x}}, \qquad \varphi_{1x} = \arccos\frac{P_1}{U_1 I_1} = \arccos\frac{9 \cdot 10^3}{10^4 \cdot 2} = 63{,}26;$$

$$\underline{Z}_{1x} = \frac{10^4}{2} e^{j63{,}26} = 5000\,e^{j63{,}26}, \text{ Ом}$$

$$\underline{Z}_{1к} = \frac{U_{1к}}{I_{1к}} e^{j\varphi_{1к}}, \qquad \varphi_{1к} = \arccos\frac{P_{1к}}{U_{1к} \cdot I_{1к}} = \arccos\frac{23 \cdot 10^3}{4{,}5 \cdot 10^4} = 59{,}26;$$

$$\underline{Z}_{1к} = 450e^{j59{,}26}, \text{ Ом}$$

$\underline{A}$–параметры четырёхполюсника:

$$\underline{A} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1x}}{\underline{Z}_{2x} - \underline{Z}_{2\kappa}}} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{x}}{\underline{Z}_{x} - \underline{Z}_{\kappa}}}$$

Так, как для симметричного четырёхполюсника:

$$\underline{Z}_{1x} = \underline{Z}_{2x} = \underline{Z}_{x}, \quad \underline{Z}_{1\kappa} = \underline{Z}_{2x} = \underline{Z}_{\kappa}$$

Подставим цифры, получим:

$$\underline{A} = \sqrt{\frac{5000\, e^{j63,26}}{5000\, e^{j63,26} - 450\, e^{j59,26}}} = \sqrt{1,099\, e^{-j0,39}} = 1,048\, e^{-j0,19}$$

$$\underline{D} = \underline{A}$$

$$\underline{B} = \underline{A} \cdot \underline{Z}_{\kappa} = 471,6 e^{j59,07}, \text{ Ом}$$

$$\underline{C} = \underline{A}\frac{1}{\underline{Z}_{x}} = 0,21 \cdot 10^{-3} e^{-j4,19}, \text{ Ом}^{-1}$$

Проверим правильность расчёта А –параметров:

$$\underline{A}\underline{D} - \underline{B}\underline{C} = (1,048 e^{-j0,19})^2 - 471,6 e^{j59,07}\, 0,21 \cdot 10^{-3} e^{-j4,19} = 1,004 + j0,0017 \approx 1$$

Теперь рассчитаем параметры П- образной схемы замещения (рис. 2.4).

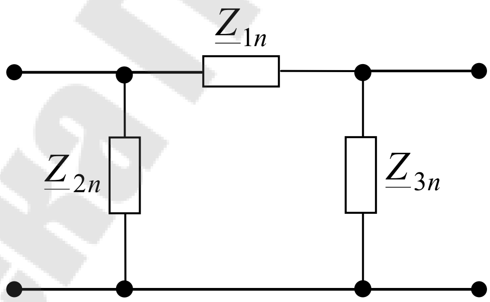



Рис. 2.4

$$\underline{Z}_{2n} = \underline{Z}_{3n} = \frac{\underline{B}}{\underline{A} - 1} = \frac{471,6 e^{j59,07}}{1,048 e^{-j0,19} - 1} = 9825 e^{j63,24}, \text{ Ом}$$

$$\underline{Z}_{1n} = \underline{B} = 471,6 e^{j59,07}, \text{ Ом}$$

**Задача №4**

По цепочечной матрице четырёхполюсника определить, является ли он обратимым. Какие из обратимых четырёхполюсников являются симметричными?

$$1.\ \begin{bmatrix} 0{,}75 & 0{,}5 \\ 0{,}125 & 0{,}75 \end{bmatrix} \qquad 2.\ \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}75 \\ -1 & 0{,}5 \end{bmatrix} \qquad 3.\ \begin{bmatrix} 1{,}5 & 1{,}25 \\ 1 & 1{,}5 \end{bmatrix}$$

Для обратимого четырёхполюсника матрица $\underline{A}$ равна 1.

1. $[\underline{A}] = 0{,}75 \cdot 0{,}75 - 0{,}5 \cdot 0{,}125 = 0{,}5625 - 0{,}075 = 0{,}4875 \neq 1$

Четырёхполюсник необратимый

2. $[\underline{A}] = 0{,}5^2 + 0{,}75 = 1$ четырёхполюсник обратимый симметричный $\underline{A} = \underline{D} = 0{,}5$.

3. $[\underline{A}] = 1{,}5^2 - 1{,}25 = 1$ четырёхполюсник обратимый симметричный.

Характеристические параметры четырёхполюсника.

**Задача №5**

Для схем задачи №1 рассчитать характеристические сопротивления $\underline{Z}_{C1}$, $\underline{Z}_{C2}$, постоянную передачи $g = a + jb$. Записать условие согласованного режима четырёхполюсника. Определить функцию передачи в этом режиме.

*Решение.*

$$\underline{Z}_{C1} = \sqrt{\frac{\underline{A} \cdot \underline{B}}{\underline{C} \cdot \underline{D}}} = \sqrt{\frac{(2 + j6)(65 + j10)}{0{,}2(1 - j2)}} = \sqrt{930 e^{j144}} = 30{,}5 e^{j72} = 9{,}5 + j29, \text{ Ом}$$

$$\underline{Z}_{C2} = \sqrt{\frac{\underline{D} \cdot \underline{B}}{\underline{C} \cdot \underline{A}}} = \sqrt{\frac{(1 - j2)(65 + j10)}{0{,}2(2 + j6)}} = \sqrt{116{,}25 e^{-126{,}25}} = 10{,}77 e^{-j63{,}1} = 4{,}87 - j9{,}6, \text{ Ом}$$

Условие согласованного режима:

$\underline{Z}_Г = \overset{*}{\underline{Z}}_{C1} = 9{,}5 - j29$,Ом - со стороны первичных зажимов.

Сопротивление генератора: $R_Г$=9,5 Ом; $X_{СГ}$ =29 Ом.

Со стороны вторичных зажимов:

$\underline{Z}_H = \underline{Z}_{C2} = 4{,}87 - j9{,}6$ Ом.

$R_H = 4{,}87$ Ом; $X_{CH} = 9{,}6$ Ом.

1. Постоянная передачи четырёхполюсника:

$$\underline{g} = \ln(\sqrt{\underline{A} \cdot \underline{D}} + \sqrt{\underline{B} \cdot \underline{C}}) = \ln(\sqrt{(2 + j6)(1 - j2)} + \sqrt{(65 + j10)0{,}2}) = \ln(4{,}898 e^{-j2{,}46}) =$$

$$= \ln 4{,}898 - j2{,}46 = 1{,}59 - j2{,}46$$

Постоянная ослабления $a = 1{,}59 H_и = 13{,}82$ дБл;

Коэффициент фазы $b = -2{,}46^\circ = -0{,}043$ рад.

Функция передачи в согласованном режиме рассчитывается по формуле:

$$\underline{H}_{UC} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{C2}}{\underline{Z}_{C1}}}\, e^{-g} = \sqrt{\frac{30{,}5\, e^{j72}}{10{,}77\, e^{-j63{,}125}}} \cdot e^{-1{,}59} e^{j2{,}46} =$$

$$= \sqrt{2{,}83\, e^{j135{,}12}} \cdot e^{-1{,}59} e^{+j2{,}46} = 0{,}34\, e^{j70{,}02}$$

$H_u = 0{,}34;\quad \theta = 70{,}02^{\circ}$

**Задача №6**

Четырёхполюсник рис. 2.5 согласован с генератором и нагрузкой. Определить сопротивления $\underline{Z}_1$ и $\underline{Z}_2$.

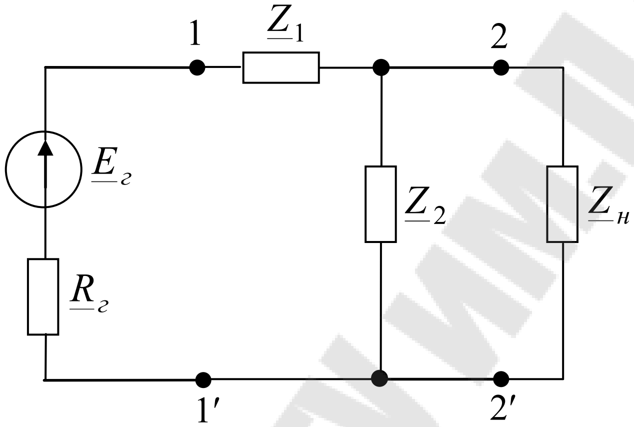



Рис.2.5

Сопротивление нагрузки $\underline{Z}_H = 100$ Ом, внутреннее сопротивление генератора $R_Г = 10$ Ом.

*Решение*

По условию согласования четырёхполюсника:

$$\left.\begin{aligned} \underline{Z}_Г = \underline{Z}_{вх.1} = \frac{\underline{Z}_2 \cdot R_Н}{\underline{Z}_2 + R_Н} + \underline{Z}_1 \\ \underline{Z}_Н = \underline{Z}_{вх.2} = \frac{(\underline{Z}_1 + R_Г)\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + R_Г} \end{aligned}\right\}. \qquad (3)$$

Подставим значения $R_Г$ и $R_Н$ в (3):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\underline{Z}_2 \cdot 100}{\underline{Z}_2 + 100} + \underline{Z}_1 = 10 \\ \frac{(\underline{Z}_1 + 10)\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + 10} = 100 \end{aligned}\right\}.$$

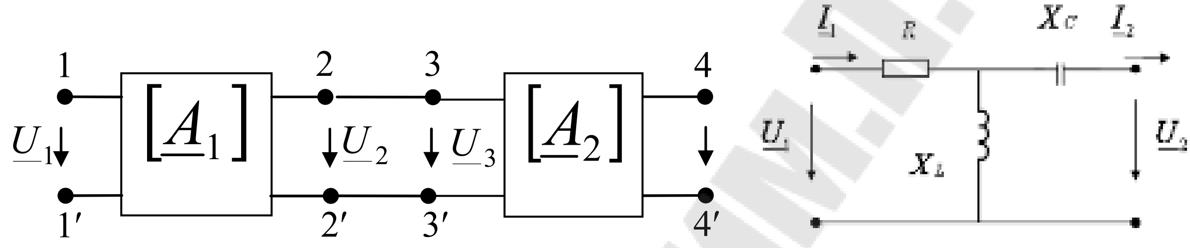
Решая совместно, получим:

$\underline{Z}_1 = -j30$ Ом,  $\underline{Z}_2 = j\dfrac{100}{3}$ Ом.

Схемы соединения четырёхполюсника.

**Задача №7**

Два одинаковых четырёхполюсника рис.2.6*а* соединены каскадно. Рассчитать $\underline{A}$ - матрицу составного четырёхполюсника, если




а) б)

Рис. 2.6

известны схема и параметры четырёхполюсников (рис. 2.6*б*).

*Решение*

При каскадном соединении, $\underline{A}$ - матрицы четырёхполюсников перемножаются:

$$[\underline{A}_э] = [\underline{A}_1]\cdot[\underline{A}_2]$$

Рассчитаем $\underline{A}$ - параметры по сопротивлениям холостого хода и короткого замыкания.

$$\underline{Z}_{1x} = R + jX_L = 100 + j200 = 223{,}6e^{j63{,}4}\text{, Ом}$$

$$\underline{Z}_{1к} = R + \frac{jX_L(-jX_C)}{jX_L + (-jX_C)} = 100 + \frac{j200(-j100)}{j100} = 100 - j200 = 223{,}6e^{-j63{,}4}\text{,Ом}$$

$$\underline{Z}_{2x} = jX_L - jX_C = j200 - j100 = j100\text{, Ом}$$

$$\underline{Z}_{2к} = \frac{R\cdot jX_L}{R + jX_L} - jX_C = \frac{100\cdot j200}{1 + j200} - j100 = 80 - j60 = 100e^{-j36{,}9}\text{, Ом}$$

Проверим правильность расчёта сопротивлений по формуле:

$$\frac{\underline{Z}_{1x}}{\underline{Z}_{1к}}=\frac{\underline{Z}_{2x}}{\underline{Z}_{2к}};\quad \frac{\underline{Z}_{1x}}{\underline{Z}_{1к}}=\frac{223{,}6\,e^{j63{,}4}}{223{,}6\,e^{-j63{,}4}}=1e^{j126{,}8};\quad \frac{\underline{Z}_{2x}}{\underline{Z}_{2к}}=\frac{100e^{j90}}{100e^{-j36{,}8}}=1e^{j126{,}8}.$$

Сопротивления рассчитаны верно.

$$\underline{A}=\sqrt{\frac{\underline{Z}_{1x}}{\underline{Z}_{2x}-\underline{Z}_{2к}}}=\sqrt{\frac{100+j200}{j100-80+j60}}=\sqrt{1{,}25e^{-j53{,}13}}=1{,}12e^{-j26{,}6}=1-j0{,}5;$$

$$\underline{B}=\underline{A}\underline{Z}_{2к}=1{,}12e^{-j26{,}6}\cdot 100e^{-j36{,}8}=112e^{-j63{,}4}=50-j100,\ \text{Ом};$$

$$\underline{C}=\frac{\underline{A}}{\underline{Z}_{1x}}=\frac{1{,}12e^{-j26{,}6}}{223{,}6e^{j63{,}4}}=-j0{,}005\ ,\ \text{Ом}^{-1};$$

$$\underline{D}=\underline{A}\cdot\frac{\underline{Z}_{2x}}{\underline{Z}_{1x}}=1{,}12e^{-j26{,}6}\cdot\frac{223{,}6e^{j63{,}4}}{j100}=0{,}5\ .$$

Проверим правильность расчета $\underline{A}$-параметров по формуле:

$$\underline{A}\cdot\underline{D}-\underline{B}\cdot\underline{C}=1$$

$$(1-j0{,}5)\cdot 0{,}5-(50-j100)(-j0{,}005)=0{,}5-j0{,}25+j0{,}25+0{,}5=1$$

Соотношение выполняется.

Рассчитаем эквивалентные параметры составного четырехполюсника

$$\underline{A}_Э=\underline{A}_1\cdot\underline{A}_2+\underline{B}_1\cdot\underline{C}_2=(1-j0{,}5)^2+(50-j100)(-j0{,}005)=0{,}25-j1{,}25;$$

$$\underline{B}_Э=\underline{A}_1\cdot\underline{B}_2+\underline{B}_1\cdot\underline{D}_2=(1-j0{,}5)(50-j100)+(50-j100)0{,}5=25-j175,\ \text{Ом};$$

$$\underline{C}_Э=\underline{C}_1\cdot\underline{A}_2+\underline{D}_1\cdot\underline{C}_2=-j0{,}005(1-j0{,}5)+0{,}5(-j0{,}005)=-(25+j75)\cdot 10^{-4},\ \text{Ом}^{-1};$$

$$\underline{D}_Э=\underline{C}_1\cdot\underline{B}_2+\underline{D}_1\cdot\underline{D}_2=-j0{,}005(50-j100)+0{,}5^2=-(0{,}25+j0{,}25).$$

Проверим правильность расчета:

$$\underline{A}_Э\cdot\underline{D}_Э-\underline{B}_Э\cdot\underline{C}_Э=(0{,}25-j1{,}25)(-0{,}25-j0{,}25)-(25-j175)(-25-j75)\cdot 10^{-4}=$$
$$=-0{,}375+j0{,}25+1{,}375-j0{,}25=1$$

Условие выполняется.

**Задача 8**

Напишите формулу перемножения матриц каскадного соединения четырехполюсников задачи №7, если они подключены согласно схеме рис. 2.7*а*,*б*.

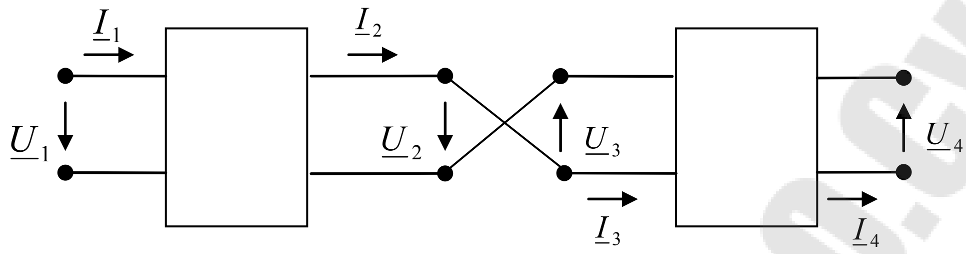



Рис. 2.7а

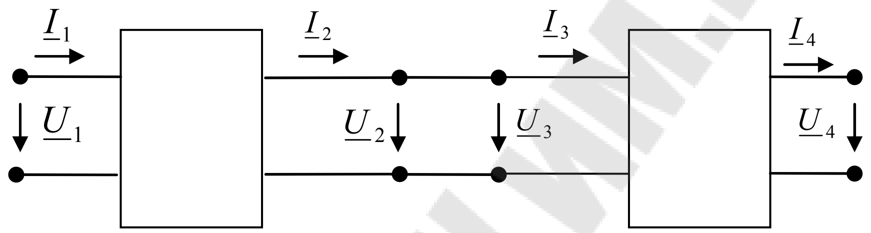



Рис. 2.7*б*

У второго четырехполюсника рис. 2.7*а* направления $\underline{U}_3$, $\underline{I}_3$, $\underline{U}_4$, $\underline{I}_4$ изменились на противоположные. Следовательно,

$$[\underline{A}_{э}]=\begin{bmatrix}\underline{A}_1 & \underline{B}_1\\ \underline{C}_1 & \underline{D}_1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-\underline{A}_2 & -\underline{B}_2\\ -\underline{C}_2 & -\underline{D}_2\end{bmatrix}$$

У второго четырехполюсника рис. 2.7*б* – обратное включение. Следовательно,

$$[\underline{A}_{э}]=\begin{bmatrix}\underline{A}_1 & \underline{B}_1\\ \underline{C}_1 & \underline{D}_1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\underline{D}_2 & \underline{B}_2\\ \underline{C}_2 & \underline{A}_2\end{bmatrix}$$

| Тип уравнения | $A$ | $Y$ | $Z$ | $H$ | $G$ | $B$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $\begin{matrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \frac{-Y_{22}}{Y_{21}} & \frac{-1}{Y_{21}} \\ \frac{-\Delta_Y}{Y_{21}} & \frac{-Y_{11}}{Y_{21}} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \frac{Z_{11}}{Z_{21}} & \frac{\Delta_Z}{Z_{21}} \\ \frac{1}{Z_{21}} & \frac{Z_{22}}{Z_{21}} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \frac{-\Delta_H}{H_{21}} & \frac{-H_{11}}{H_{21}} \\ \frac{-H_{22}}{H_{21}} & \frac{-1}{H_{21}} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \frac{1}{G_{21}} & \frac{G_{22}}{G_{21}} \\ \frac{G_{11}}{G_{21}} & \frac{\Delta_G}{G_{21}} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \frac{B_{22}}{\Delta_B} & \frac{B_{12}}{\Delta_B} \\ \frac{B_{21}}{\Delta_B} & \frac{B_{11}}{\Delta_B} \end{matrix}$ |
| $Y$ | $\begin{matrix} \frac{A_{22}}{A_{12}} & \frac{-\Delta_A}{A_{12}} \\ \frac{-1}{A_{12}} & \frac{A_{11}}{A_{12}} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \frac{Z_{22}}{\Delta_Z} & \frac{-Z_{12}}{\Delta_Z} \\ \frac{-Z_{21}}{\Delta_Z} & \frac{Z_{11}}{\Delta_Z} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \frac{1}{H_{11}} & \frac{-H_{12}}{H_{11}} \\ \frac{H_{21}}{H_{11}} & \frac{\Delta_H}{H_{11}} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \frac{\Delta_G}{G_{22}} & \frac{G_{12}}{G_{22}} \\ \frac{-G_{21}}{G_{22}} & \frac{1}{G_{22}} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \frac{B_{11}}{B_{12}} & \frac{-1}{B_{12}} \\ \frac{-\Delta_B}{B_{12}} & \frac{B_{22}}{B_{12}} \end{matrix}$ |
| $Z$ | $\begin{matrix} \frac{A_{11}}{A_{21}} & \frac{\Delta_A}{A_{21}} \\ \frac{1}{A_{21}} & \frac{A_{22}}{A_{21}} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \frac{Y_{22}}{\Delta_Y} & \frac{-Y_{12}}{\Delta_Y} \\ \frac{-Y_{21}}{\Delta_Y} & \frac{Y_{11}}{\Delta_Y} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \frac{\Delta_H}{H_{22}} & \frac{H_{12}}{H_{22}} \\ \frac{-H_{21}}{H_{22}} & \frac{1}{H_{22}} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \frac{1}{G_{11}} & \frac{-G_{12}}{G_{11}} \\ \frac{G_{21}}{G_{11}} & \frac{\Delta_G}{G_{11}} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \frac{B_{22}}{B_{21}} & \frac{1}{B_{21}} \\ \frac{\Delta_B}{B_{21}} & \frac{B_{11}}{B_{21}} \end{matrix}$ |
| $H$ | $\begin{matrix} \frac{A_{12}}{A_{22}} & \frac{\Delta_A}{A_{22}} \\ \frac{-1}{A_{22}} & \frac{A_{21}}{A_{22}} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \frac{1}{Y_{11}} & \frac{-Y_{12}}{Y_{11}} \\ \frac{Y_{21}}{Y_{11}} & \frac{\Delta_Y}{Y_{11}} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \frac{\Delta_Z}{Z_{22}} & \frac{Z_{12}}{Z_{22}} \\ \frac{-Z_{21}}{Z_{22}} & \frac{1}{Z_{22}} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \frac{G_{22}}{\Delta_G} & \frac{-G_{12}}{\Delta_G} \\ \frac{-G_{21}}{\Delta_G} & \frac{G_{11}}{\Delta_G} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \frac{B_{12}}{B_{11}} & \frac{1}{B_{11}} \\ \frac{-\Delta_B}{B_{11}} & \frac{B_{21}}{B_{11}} \end{matrix}$ |
| $G$ | $\begin{matrix} \frac{A_{21}}{A_{11}} & \frac{-\Delta_A}{A_{11}} \\ \frac{1}{A_{11}} & \frac{A_{12}}{A_{11}} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \frac{\Delta_Y}{Y_{22}} & \frac{Y_{12}}{Y_{22}} \\ \frac{-Y_{21}}{Y_{22}} & \frac{1}{Y_{22}} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \frac{1}{Z_{11}} & \frac{-Z_{12}}{Z_{11}} \\ \frac{Z_{21}}{Z_{11}} & \frac{\Delta_Z}{Z_{11}} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \frac{H_{22}}{\Delta_H} & \frac{-H_{12}}{\Delta_H} \\ \frac{-H_{21}}{\Delta_H} & \frac{H_{11}}{\Delta_H} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \frac{B_{21}}{B_{22}} & \frac{-1}{B_{22}} \\ \frac{\Delta_B}{B_{22}} & \frac{B_{12}}{B_{22}} \end{matrix}$ |
| $B$ | $\begin{matrix} \frac{A_{22}}{\Delta_A} & \frac{A_{12}}{\Delta_A} \\ \frac{A_{21}}{\Delta_A} & \frac{A_{11}}{\Delta_A} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \frac{-Y_{11}}{Y_{12}} & \frac{-1}{Y_{12}} \\ \frac{-\Delta_Y}{Y_{12}} & \frac{-Y_{22}}{Y_{12}} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \frac{Z_{22}}{Z_{12}} & \frac{\Delta_Z}{Z_{12}} \\ \frac{1}{Z_{12}} & \frac{Z_{11}}{Z_{12}} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \frac{1}{H_{12}} & \frac{H_{11}}{H_{12}} \\ \frac{H_{22}}{H_{12}} & \frac{\Delta_H}{H_{12}} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \frac{-\Delta_G}{G_{12}} & \frac{-G_{22}}{G_{12}} \\ \frac{-G_{11}}{G_{12}} & \frac{-1}{G_{12}} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{matrix}$ |

Примечание. $\Delta_A = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}$; $\Delta_Y = Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}$; $\Delta_Z = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}$; $\Delta_H = H_{11}H_{22} - H_{12}H_{21}$; $\Delta_G = G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21}$; $\Delta_B = B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21}$.

## Литература

1. Бессонов, Л.А. Теоретические основы электротехники/ Л.А. Бессонов. – М.: Высшая школа, 1978.
2. Нейман, Л.Р., Демирчян, К.С. Теоретические основы электротехники/ Л.Р. Нейман, К.С. Демирчян. – Л.: Энергоиздат, 1981.
3. Зевеке, Г.В., Ионкин, П.А. Основы теории цепей/ Г.В. Зевеке, П.А. Ионкин [и др.]. – М.: Энергоиздат, 1989.
4. Шебес, М.Р. Задачник по теории линейных электрических цепей/ М.Р. Шебес. – М.: Энергия, 1982, 2000.
5. Добротворский, И.Н. Лабораторный практикум по основам теории цепей/ И.Н. Добротворский. –М.: Высшая школа, 1986.

**Бычкова** Лилия Геннадьевна

# РАСЧЕТ ПАССИВНЫХ И АКТИВНЫХ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ

**Практикум**
**по курсу «Теория электрических цепей»**
**для студентов специальности 1-36 04 02**
**«Промышленная электроника»**
**дневной и заочной форм обучения**

Подписано к размещению в электронную библиотеку
ГГТУ им. П. О. Сухого в качестве электронного
учебно-методического документа 11.01.11.

Рег. № 53Е.
E-mail: ic@gstu.by
http://www.gstu.by