Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Физика»

О. И. Проневич, С. В. Пискунов

МЕХАНИКА И МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

ПРАКТИКУМ
по курсу «Физика» для студентов
всех специальностей дневной формы обучения
В трех частях
Часть 1

Гомель 2010

УДК 531/534+539.19(075.8)
ББК 22.2+22.36я73
П81

Рекомендовано научно-методическим советом энергетического факультета ГГТУ им. П. О. Сухого (*протокол № 9 от 01.06.2010 г.*)

Рецензент: зав. каф. «Физика» БелГУТа канд. физ.-мат. наук, доц. *В. А. Зыкунов*

Проневич, О. И.

П81 Механика и молекулярная физика: практикум по курсу «Физика» для студентов всех специальностей днев. формы обучения : в 3 ч. Ч. 1 / О. И. Проневич, С. В. Пискунов. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2010. – 69 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: http://lib.gstu.local. – Загл. с титул. экрана.

Содержит задачи к практическим занятиям по разделу «Механика и молекулярная физика», примеры решения задач и основные формулы.

Для студентов всех специальностей дневной формы обучения.

УДК 531/534+539.19(075.8)
ББК 22.2+22.36я73

Предисловие

Предлагаемое практическое пособие предназначено для самостоятельной работы студентов дневного факультета.

Включает два раздела программы курса общей физики для инженерно-технических специальностей вузов: «Физические основы классической механики» и «Молекулярная физика и термодинамика».

Практическое пособие включает краткие теоретические сведения по указанным разделам курса физики, примеры решения задач, список задач по темам, список литературы.

В конце пособия в качестве приложения даются таблицы физических констант и величин, используемых при решении задач, и математические формулы.

1. Физические основы механики

1.1. Кинематика

В кинематике движение тел рассматривается формально, без объяснения причин вызывающих движение.

Простейшей физической системой является материальная точка. Положение материальной точки относительно какой-либо системы отсчета в произвольный момент времени t определяется радиусом – вектором $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

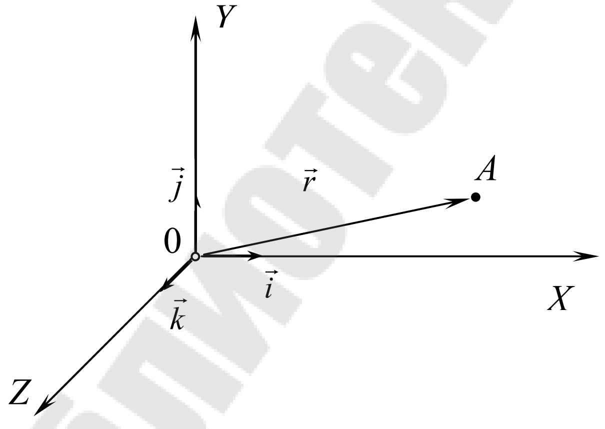
Радиус – вектор можно представить в виде:

$$\vec{r}(t) = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}, \quad (1)$$

где x, y, z – компоненты радиус – вектора $\vec{r}(t)$;

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы, направленные соответственно по осям x, y, z.

Уравнение (1) определяет положение материальной точки в любой момент времени и называется законом движения материальной точки. Зная закон движения, можно определить скорость, ускорение через соответствующие производные:



$$\vec{\mathrm{v}}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}; \quad \vec{a}(t) = \frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2};$$

$$\mathrm{v}_x(t) = \frac{dx}{dt}; \mathrm{v}_y(t) = \frac{dy}{dt}; \mathrm{v}_z(t) = \frac{dz}{dt};$$

$$a_x(t) = \frac{d^2x}{dt^2}; \ a_y(t) = \frac{d^2y}{dt^2}; a_z(t) = \frac{d^2z}{dt^2}$$

Рис. 1.1.

Тогда вектор скорости и вектор ускорения будут:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}, \ (2)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k}. \ (3)$$

В случае прямолинейного равномерного движения ($\vec{v} = const$) выполняется соотношение $\Delta\vec{r} = \vec{v}\Delta t$.

В случае прямолинейного равнопеременного движения ($\vec{a} = const$) уравнения движения имеют вид:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 \pm \vec{a}t,$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t \pm \frac{\vec{a}t^2}{2}, \ (4)$$

где v_0 – начальная скорость.

При криволинейном движении вектор скорости в каждой точке траектории направлен по касательной к траектории, а вектор ускорения разлагают на два составляющих вектора: тангенциальное ускорение $\vec{a}_\tau$ и нормальное ускорение $\vec{a}_n$ (рис. 1.2)

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n.$$

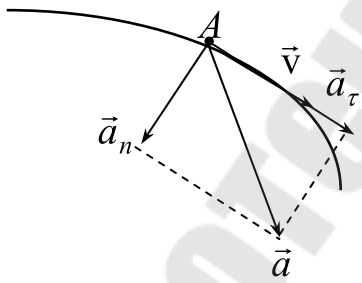


Рис. 1.2.

Модуль вектора полного ускорения равен

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \ (5)$$

при этом

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}, \ (6)$$

$$a_n = \frac{v^2}{R}, \ (7)$$

где R – радиус кривизны траектории в данной точке.

При вращательном движении выражение вида $\varphi = f(t)$ называется кинематическим уравнением вращения.

Угловая скорость тела есть производная от угла поворота по времени:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}. \quad (8)$$

Угловое ускорение тела есть производная от угловой скорости по времени

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}. \quad (9)$$

В случае равномерного вращательного движения ($\vec{\omega} = const$) выполняются соотношения

$$\omega = \frac{\varphi}{t}; \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}; \qquad \omega = 2\pi\nu,$$

где T – период обращения;

ν – частота вращения.

В случае равнопеременного вращательного движения ($\vec{\varepsilon} = const$)

$$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon \cdot t,$$

$$\varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2}, \quad (10)$$

где ω_0 - начальная угловая скорость.

Формулы (8) – (10) аналогичны формулам (2) – (4) для прямолинейного движения.

Связь между линейными и угловыми величинами выражается формулами:

линейный путь, пройденный точкой

$dS = Rd\varphi$, (11)

где $d\varphi$ - угловой путь точки;

R – радиус вращения точки;

линейная скорость точки

$\mathrm{v} = \omega R$, (12)

тангенциальное ускорение точки

$a_\tau = \varepsilon R$, (13)

нормальное ускорение точки

$a_n = \omega^2 R$, (14)

модуль полного ускорения

$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\varepsilon^2 R^2 + \omega^4 R^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$. (15)

1.2. Динамика материальной точки

Уравнение движения материальной точки массой m имеет вид

$\vec{F} = m\dfrac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt}$, (16)

где $\vec{\mathrm{v}}$ – скорость точки;

$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$ – векторная сумма сил, действующая на точку со стороны окружающих тел.

Произведение массы точки на ее скорость – импульс точки.

Тогда:

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt},$$

$\vec{p} = m\vec{v}$ – импульс точки.

Если $\vec{F} = 0$, то $\frac{d\vec{p}}{dt} = 0$ или $\vec{p} = const$ - закон сохранения импульса.

<u>При неупругом центральном ударе</u> двух тел с массами m_1 и m_2, и движущимися со скоростями соответственно $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ справедлив закон сохранения импульса:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{u},$$

откуда

$$\vec{u} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}. \quad (17)$$

<u>При упругом центральном ударе</u> тела будут двигаться с различными скоростями и в этом случае выполняются законы сохранения импульса и механической энергии

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2,$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}. \quad (18)$$

Решая совместно систему уравнений (18) найдем

$$\vec{u}_1 = \frac{(m_1 - m_2)\vec{v}_1 + 2m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}, \quad \vec{u}_2 = \frac{(m_2 - m_1)\vec{v}_2 + 2m_1\vec{v}_1}{m_1 + m_2}.$$

Работа, совершаемая силой $\vec{F}$ при элементарном перемещении $\Delta\vec{r}$

$$\Delta A = \vec{F}\Delta\vec{r} = F\Delta S\cos\alpha,$$

где $\Delta S = |\Delta\vec{r}|$ – элементарный путь;

α – угол между векторами $\vec{F}$ и $\Delta\vec{r}$.

Работа переменной силы

$$A = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r}. \quad (19)$$

Работа, совершаемая внешними силами, действующими на тело, и изменение его кинетической энергии связаны соотношением

$$A = \Delta E_к = E_{к2} - E_{к1}. \quad (20)$$

Работа, совершаемая внешними силами, действующими на тело и его потенциальная энергия связаны соотношением

$$A = -\Delta E_п = E_{п1} - E_{п2}. \quad (21)$$

Потенциальная энергия упруго деформированного тела

$$E_п = \frac{kx^2}{2},$$

где k – жесткость пружины;

x – величина абсолютной деформации.

Потенциальная энергия тела, поднятого на высоту h

$$E_п = mgh.$$

Кинетическая энергия тела, движущегося поступательно

$$E_к = \frac{m\text{v}^2}{2}.$$

Силы, рассматриваемые в механике:

а) сила упругости

$$F = -kx,$$

где k – коэффициент упругости, $[k] = 1$ Н·м$^{-1}$.

б) сила тяжести

$F_{тяж} = mg$.

Из сравнения силы гравитационного взаимодействия $F = G\dfrac{Mm}{R^2}$ со вторым законом Ньютона $F = ma$ получим: $G\dfrac{M}{R^2} = g$.

в) сила трения

$F = \mu N$,

где μ – коэффициент трения;

N – сила реакции опоры.

$N = mg$ – на горизонтальной поверхности,

$N = mg\,cos\,\alpha$ – на наклонной плоскости.

1.3. Динамика вращательного движения

Момент силы материальной точки относительно центра вращения

$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]$, (22)

где $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный из центра вращения в точку приложения силы.

Момент импульса материальной точки относительно центра вращения

$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] = m[\vec{r}, \vec{\mathrm{v}}]$, (23)

где $\vec{p} = m\vec{\mathrm{v}}$ – импульс точки;

$\vec{r}$ – ее радиус-вектор.

Модули момента силы и момента импульса соответственно равны:

$M = Fr\,sin\alpha$; $L = m\text{v}r\,sin\alpha$,

где α – угол между направлением действия силы (импульса) и радиус–вектором $\vec{r}$, проведенным от центра вращения к точке приложения силы (импульса).

Основное уравнение динамики вращательного движения:

$$\vec{M} = \frac{d\left(J\vec{\omega}\right)}{dt}, (24)$$

где $J\vec{\omega} = \vec{L}$ – момент импульса тела;

$\vec{M}$ – момент силы, действующей на тело;

J - момент инерции тела.

В случае постоянного момента инерции твердого тела основное уравнение динамики вращательного движения имеет вид:

$$\vec{M} = J\vec{\varepsilon}, (25)$$

где $\vec{\varepsilon}$ - угловое ускорение.

Момент инерции системы N материальных точек относительно оси вращения

$$J = \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2 . (26)$$

Момент инерции твердого тела относительно оси

$$J = \int_{(m)} R^2 dm = \int_{(V)} \rho R^2 dV , (27)$$

где ρ, dV - плотность тела и элемент объема соответственно;

R – расстояние от элемента объема до оси.

Таблица 1

Моменты инерции некоторых тел

Форма тела	**Положение оси**	**Момент инерции**
Однородный диск (цилиндр)	Ось проходит через центр диска (цилиндра) перпендикулярно к плоскости основания	$J = \frac{1}{2} mR^2$
Однородный шар	Ось проходит через центр шара	$J = \frac{2}{5} mR^2$
Однородный стержень	а) ось проходит через его центр масс перпендикулярно к его оси б) ось проходит через конец стержня перпендикулярно к стержню	$J = \frac{1}{12} ml^2$ $J = \frac{1}{3} ml^2$
Тонкое кольцо, обруч	Ось проходит через центр кольца перпендикулярно его плоскости	$J = mR^2$

Если для какого-либо тела известен его момент инерции J_0 относительно оси, проходящей через центр инерции, то момент инерции относительно произвольной оси, параллельной первой, может быть найден по формуле (теорема Штейнера)

$J = J_0 + md^2$, (28)

где m – масса тела;

d – расстояние между осями.

Закон сохранения момента импульса: если результирующий момент внешних сил равен нулю ($\vec{M} = 0$), то момент импульса этой системы есть величина постоянная, т.е.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0, \qquad \vec{L} = const.$$

Для тела, момент инерции которого может меняться

$$J_1\vec{\omega}_1 = J_2\vec{\omega}_2,$$

где J_1, J_2 – начальное и конечное значение момента инерции;

ω_1, ω_2 - начальная и конечная угловая скорость.

Работа момента силы, действующего на вращающееся тело

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M d\varphi, \ (29)$$

где $d\varphi$ - угол поворота.

Кинетическая энергия вращающегося тела

$$E_к = \frac{J\omega^2}{2}. \ (30)$$

1.4. Механические колебания

Дифференциальное уравнение движения тела, совершающего свободные колебания

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \ (31)$$

где x – смещение тела от положения равновесия;

$\dot{x} = v$ - первая производная смещения по времени – скорость колеблющейся точки;

$\ddot{x} = a$ - вторая производная смещения по времени – ускорение колеблющейся точки;

β - коэффициент затухания;

ω_0 - собственная циклическая частота колебаний.

Общим решением этого уравнения является уравнение вида

$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0)$, (32)

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$.

При $\beta \neq 0$ колебания называются затухающими.

Логарифмический декремент затухания

$\lambda = \ln \dfrac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T$, (33)

где $A(t)$, $A(t+T)$ - амплитуды двух последовательных колебаний.

Если $\beta = 0$, то колебания называются незатухающими гармоническими. Тогда дифференциальное уравнение незатухающих колебаний

$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ (34)

его решение

$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ или $x = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$. (35)

Оба эти уравнения гармонического колебания эквивалентны и легко преобразуются одно в другое путем соответствующего выбора начальной фазы.

Если смещение определяем уравнением:

$x = A cos(\omega_0 t + \varphi_0)$,

то скорость точки, совершающей гармонические колебания

$$\mathrm{v} = \frac{dx}{dt} = \dot{x} = -A\omega_0 \, sin(\omega_0 t + \varphi_0),$$

ускорение $a = \frac{d\mathrm{v}}{dt} = \ddot{x} = -A\omega_0^2 \, cos(\omega_0 t + \varphi_0)$.

Гармонические колебания происходят под действием силы $F = -kx$,

где $k = m\omega_0^2$.

Период колебаний тела, подвешенного на пружине

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, \text{ (36)}$$

где k – жесткость пружины;

m – масса тела.

Период колебаний физического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgd}}, \text{ (37)}$$

где J – момент инерции тела относительно оси колебаний;

d – расстояние от оси колебания до его центра масс;

$\frac{J}{md} = l_{np}$ - приведенная длина физического маятника.

Период колебаний математического маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \text{ (38)}$$

где l – длина маятника.

Полная энергия тела, совершающего гармонические колебания, постоянна и равна

$$E = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2}. \quad (39)$$

При сложении двух одинаково направленных гармонических колебаний одинакового периода получается гармоническое колебание того же периода, амплитуда которого A и начальная фаза φ_0 определяются уравнениями:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}, \quad (40)$$

$$tg\varphi_0 = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2}. \quad (41)$$

Траектория точки, участвующей в двух взаимно перпендикулярных колебаниях $x = A_1 \cos(\omega t)$ и $y = A_2 \cos(\omega t + \varphi)$

а) если разность фаз складываемых колебаний $\varphi = 0$, $\pm\pi$ - прямая линия;

б) если разность фаз $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ - уравнение эллипса.

Чтобы найти траекторию результирующего колебания надо исключить время.

1.5. Примеры решения задач

Пример 1. Скорость материальной точки изменяется по закону $\vec{v} = \alpha\left(2t^3 - \beta\right)\vec{i} - \gamma\, sin\left(\frac{2\pi}{3}t\right)\vec{j}$, где $\alpha = 1$ $\frac{\text{м}}{\text{с}^4}$, $\beta = 1$ с^3, $\gamma = 1$ $\frac{\text{м}}{\text{с}}$. Определить закон движения, если в начальный момент времени t=0 тело находилось в начале координат, т.е. $\vec{r}_0 = (0,0,0)$. Определить вектор ускорения.

Решение. Закон движения $\vec{r} = \vec{r}(t)$ и вектор скорости $\vec{v}$ связаны дифференциальным уравнением

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}\,.$$

В нашем случае из условия $\vec{v} = \alpha\left(2t^3 - \beta\right)\vec{i} - \gamma\, sin\left(\frac{2\pi}{3}t\right)\vec{j}$ запишем компоненты скорости v_x, v_y, v_z

$$v_x = \alpha\left(2t^3 - \beta\right);\; v_y = -\gamma\, sin\left(\frac{2\pi}{3}t\right); \qquad v_z = 0\,.$$

По определению:

$$v_x = \frac{dx}{dt}; \quad v_y = \frac{dy}{dt}; \quad v_z = \frac{dz}{dt}.$$

$$\frac{dx}{dt} = \alpha\left(2t^3 - \beta\right);\; \frac{dy}{dt} = -\gamma\, sin\left(\frac{2\pi}{3}t\right); \qquad \frac{dz}{dt} = 0\,.$$

Разделим переменные и проинтегрируем

$$dx = \alpha\left(2t^3 - \beta\right)dt\,; \qquad dy = -\gamma\, sin\left(\frac{2\pi}{3}t\right)dt\,.$$

$$\int dx = \int 2\alpha t^3 dt - \int \alpha\beta dt\,; \qquad \int dy = -\int \gamma\, sin\left(\frac{2\pi}{3}t\right)dt\,;$$

$z = c_3$.

Получим:

$$x = \alpha \frac{t^4}{2} - \alpha\beta t + c_1 = \alpha\left(\frac{t^4}{2} - \beta t\right) + c_1;$$

$$y = \frac{3\gamma}{2\pi} cos\left(\frac{2\pi}{3} t\right) + c_2,$$

где c_1, c_2 – постоянные интегрирования, которые определяются из начальных условий. Учитывая, что x=0, y=0 при t=0 получаем, c_1=0, $c_2 = -\frac{3\gamma}{2\pi}$, c_3=0. Тогда закон движения материальной точки:

$$\vec{r}(t) = \alpha\left(\frac{t^4}{2} - \beta t\right)\vec{i} + \frac{3\gamma}{2\pi}\left(cos\left(\frac{2\pi}{3} t\right) - 1\right)\vec{j}.$$

Зная компоненты вектора скорости найдем компоненты вектора ускорения

$$a_x = \frac{d\mathrm{v}_x}{dt}; \; a_y = \frac{d\mathrm{v}_y}{dt}; \; a_z = \frac{d\mathrm{v}_z}{dt};$$

$$a_x = 6\alpha t^3; \; a_y = -\frac{2\pi}{3}\gamma\, cos\left(\frac{2\pi}{3} t\right); \; a_z = 0;$$

$$\vec{a} = 6\alpha t^3 \vec{i} - \frac{2\pi}{3}\gamma\, cos\left(\frac{2\pi}{3} t\right)\vec{j}.$$

Пример 2. Тело вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = 10 + 20t - 2t^2$. Найти величину и направление полного ускорения точки, находящейся на расстоянии R = 0,1 м от оси вращения, для момента времени t = 4 с.

<u>Решение.</u> Точка вращающегося тела описывает окружность. Полное ускорение точки:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}\ ;$$

$$a_\tau = \varepsilon R; \qquad a_n = \omega^2 R,$$

где a_τ, a_n - тангенциальное и нормальное ускорение точки;

ε - угловое ускорение;

ω - угловая скорость.

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 20 - 4t,$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = -4.$$

Согласно полученному выражению, угловое ускорение не зависит от времени, т.е. $\varepsilon = const$.

Тогда

$$a = \sqrt{\omega^4 R^2 + \varepsilon^2 R^2} = R\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2} = 0{,}1\sqrt{4^4 + (-4)^2} = 1{,}65\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Из рис. 1.2 найдем направление полного ускорения

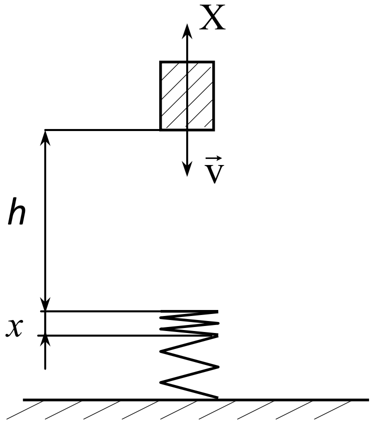
$$cos\,\alpha = \frac{|a_n|}{a} = \frac{1{,}6}{1{,}65} = 0{,}97, \text{ т.е. } \alpha = 14^0.$$

Пример 3. Гиря, положенная на верхний конец пружины, сжимает ее на x_0 = 1 мм. На сколько сожмет пружину эта же гиря, падающая вертикально вниз с высоты h = 0,2 м с начальной скоростью $v_0 = 1\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$?

Решение. Воспользуемся законом сохранения энергии. За нулевой уровень отсчета высоты выберем верхний край деформированной пружины.

Механическая энергия системы в начальном положении

$$E_1 = mg(h + x) + \frac{m\mathrm{v}^2}{2}.$$



В конечном положении система обладает энергией E_2

$$E_2 = \frac{kx^2}{2},$$

где k – коэффициент жесткости пружины и согласно определению $F = kx_0$

Рис. 1.3.

$$k = \frac{F}{x_0} = \frac{mg}{x_0}.$$

Тогда согласно закону сохранения механической энергии $E_1 = E_2$

$$mg(h + x) + \frac{m\mathrm{v}^2}{2} = \frac{mgx^2}{2x_0}.$$

Решаем уравнение

$$\frac{mgx^2}{2x_0} - mgx - mgh - \frac{m\mathrm{v}^2}{2} = 0,$$

$$x^2 - 2x_0 x - \left(2x_0 h + \frac{\mathrm{v}^2}{g} x_0\right) = 0,$$

$$x_{1,2} = x_0 \pm \sqrt{x_0^2 + 2x_0 h + \frac{\mathrm{v}^2}{g} x_0}\ .$$

В данном случае x>0 соответствует сжатию пружины, а x<0 – растяжению пружины.

Итак,

$$x = x_0 + \sqrt{x_0^2 + 2x_0 h + \frac{v^2}{g} x_0} = 8 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Пример 4. Стержень массой m = 6 кг и длиной l = 2 м может вращаться в вертикальной плоскости относительно горизонтальной оси, проходящей через точку O (рис. 1.4). В конец стержня попадает пуля массой m_0 = 10 г, летевшая со скоростью $v_0 = 1 \cdot 10^3 \ \frac{\text{м}}{\text{с}}$, направленной перпендикулярно стержню и оси, и застревает в нем. Определить кинетическую энергию стержня после удара.

Решение. Система состоит из двух тел: стержня и пули. Для решения применим законы сохранения.

По закону сохранения момента импульса

$$m_0 v_0 l = J\omega,$$

где $m_0 v_0 l$ - момент импульса пули относительно оси вращения до удара,

$J\omega$ - момент импульса стержня и пули относительно оси вращения после удара.

$$\omega = \frac{m_0 v_0 l}{J}.$$

Момент инерции стержня

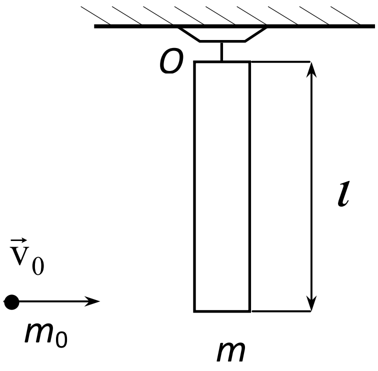


Рис. 1.4.

$$J_{ст} = \frac{1}{3}ml^2 .$$

Момент инерции пули

$$J_п = m_0 l^2 .$$

т.к. $m >> m_0$, то

$J_п << J_{ст}$, то $J = J_{ст} = \frac{1}{3}ml^2$.

Кинетическая энергия стержня

$$E_к = \frac{J\omega^2}{2} = \frac{m_0^2 v_0^2 l^2}{2J} = \frac{3m_0^2 v_0^2}{2m} .$$

$E_к = 25$ Дж.

Заметим, что начальная кинетическая энергия пули до удара $E_0 = \frac{m_0 v_0}{2} = 5 \cdot 10^3$ Дж, что значительно больше кинетической энергии системы после удара, т.е. в результате неупругого удара большая часть начальной механической энергии превратилась в немеханические виды энергии.

Пример 5. Материальная точка участвует одновременно в двух колебаниях вдоль оси OX: $x_1 = \frac{a}{2}\sqrt{3}\,cos\left(2\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$ и $x_2 = \frac{a}{2}cos\left(2\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$, а также вдоль оси OY: $y = b\,cos\,\omega t$. Найти траекторию результирующего колебания.

Решение. Сложим сначала колебания происходящие вдоль оси OX

$x = x_1 + x_2$, $x = A\,cos(2\omega t + \varphi)$.

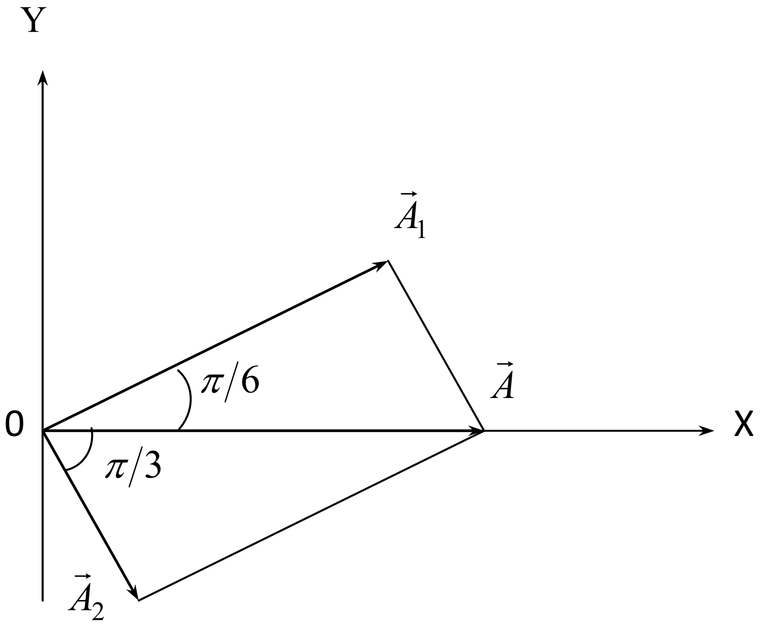


Рис. 1.5.

Для наглядности воспользуемся графическим методом сложения колебаний. Каждому колебанию x_1 и x_2 поставим в соответствие векторы $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$, длины которых равны амплитудам соответствующих колебаний, а углы наклона к оси OX — начальным фазам (рис. 1.5).

Тогда результирующему колебанию ставится в соответствие вектор $\vec{A}$.

Амплитуду результирующего колебания найдем по формулам:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)},$$

$$A = \sqrt{\frac{3a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = a.$$

Тангенс начальной фазы результирующего колебания определим по формулам:

$$tg\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2},$$

$$tg\varphi = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{6} + \frac{a}{2}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{\frac{a}{2}\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6} + \frac{a}{2}\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)} = 0.$$

Итак, результирующее колебание вдоль оси OX

$x = a\cos 2\omega t$

складываем с колебанием вдоль оси OY

$y = b\cos \omega t$.

Чтобы найти траекторию результирующего колебания исключим время.

Уравнение $x = a\cos 2\omega t$ представим в виде:

$x = a\left(2\cos^2 \omega t - 1\right)$,

$\cos \omega t = \dfrac{y}{b}$.

Тогда $x = a\left(\dfrac{2y^2}{b^2} - 1\right)$ - траектория представляет собой параболу (рис. 1.6).

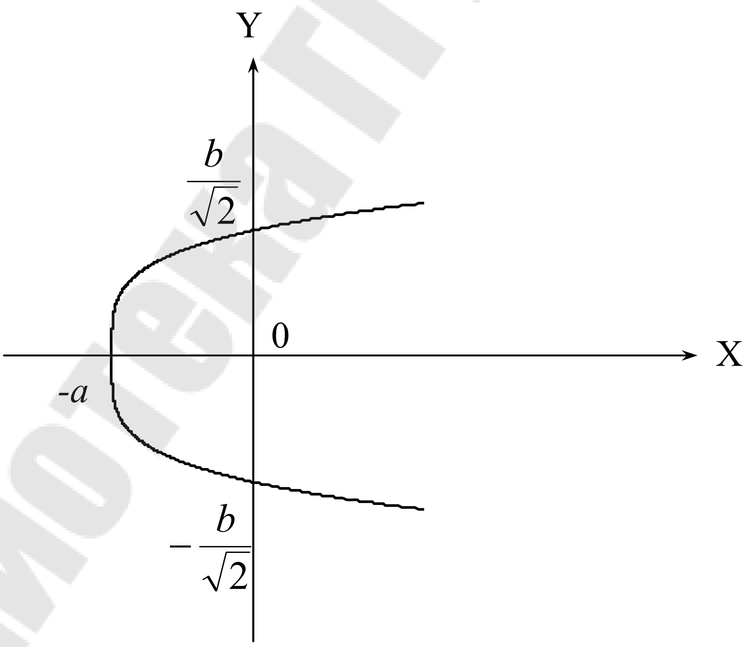


Рис. 1.6.

2. Основы молекулярной физики и термодинамики

2.1. Молекулярно-кинетическая теория

Основное уравнение молекулярно-кинетической теории связывает параметры состояния газа с характеристиками движения его молекул, т.е. устанавливает зависимость между давлением, объемом газа и кинетической энергией поступательного движения его молекул:

$$p = \frac{1}{3} n \cdot m_0 \langle \text{v}_{кв} \rangle^2, \quad (42)$$

$$p = n \cdot k \cdot T, \quad (43)$$

$$p = \frac{2}{3} n \cdot \langle \varepsilon \rangle, \quad (44)$$

где $\langle \text{v}_{кв} \rangle$ - средняя квадратичная скорость молекул;

$\langle \varepsilon \rangle$ - средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул;

$n = \frac{N}{V}$ - концентрация молекул;

m_0 - масса молекулы газа, $m_0 = \frac{\mu}{N_A}$;

$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23} \ \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$ - постоянная Больцмана;

V - объем газа;

$N = \frac{m}{\mu} N_A$ - число молекул газа;

μ - молярная масса;

m - масса газа;

$N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ – постоянная Авогадро;

$\nu = \dfrac{m}{\mu}$ - количество вещества (число молей).

Средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы

$\langle \varepsilon \rangle = \dfrac{3}{2} kT$. (45)

Средняя энергия молекул

$\langle \varepsilon \rangle = \dfrac{i}{2} kT$, (46)

где i - число степеней свободы;

$i = 3$ - одноатомный газ;

$i = 5$ - двухатомный газ;

$i = 6$ - многоатомный газ;

Сравнивая значения

$\langle \varepsilon \rangle = \dfrac{m_0 \langle v_{кв}^2 \rangle}{2}$ и $\langle \varepsilon \rangle = \dfrac{3}{2} kT$ получим:

$\dfrac{m_0 \langle v_{кв}^2 \rangle}{2} = \dfrac{3}{2} \cdot kT$ откуда:

$\langle v_{кв} \rangle = \sqrt{\dfrac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\dfrac{3RT}{\mu}}$, (47)

где $\langle v_{кв} \rangle$ - средняя квадратичная скорость молекул;

$\dfrac{k}{m_0} = \dfrac{R}{\mu}$; $R = k \cdot N_A$; $R = 8{,}31 \dfrac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ - универсальная газовая постоянная.

Средняя арифметическая скорость молекул

$\langle v \rangle = \sqrt{\dfrac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\dfrac{8RT}{\pi \mu}}$. (48)

Наиболее вероятная скорость молекул

$v_в = \sqrt{\dfrac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\dfrac{2RT}{\mu}}$. (49)

Распределение Больцмана для молекул во внешнем потенциальном поле (в поле силы тяжести). График приведен на рис. 2.1

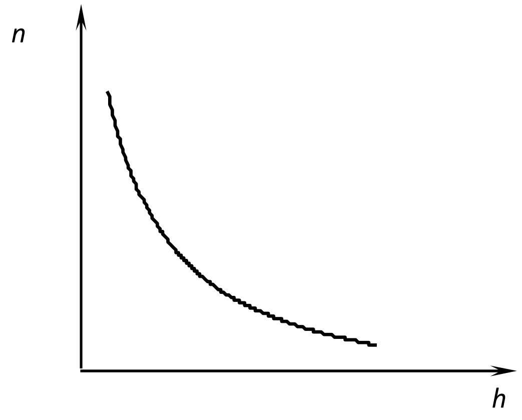


Рис. 2.1.

$$n = n_0 \cdot e^{-\frac{m_0 \cdot g \cdot h}{k \cdot T}} = n_0 \cdot e^{-\frac{\mu \cdot g \cdot h}{R \cdot T}}, \quad (50)$$

где n и n_0 соответственно концентрация молекул на высоте h и h_0.

Выражение для распределения Больцмана можно преобразовать в барометрическую формулу, используя соотношение $p = nkT$:

$$p = p_0 \cdot e^{-\frac{m_0 \cdot g \cdot h}{k \cdot T}} = p_0 \cdot e^{-\frac{\mu \cdot g \cdot h}{R \cdot T}}, \quad (51)$$

где p и p_0 соответственно давление газа на высоте h и h_0.

Среднее число соударений испытываемых одной молекулой в единицу времени:

$$\langle z \rangle = \sqrt{2} \cdot \pi \cdot d^2 n \langle \mathrm{v} \rangle, \quad (52)$$

где d - эффективный диаметр молекулы;

πd^2 - эффективное сечение молекулы.

Средняя длина свободного пробега молекулы газа:

$$\langle l \rangle = \frac{\langle \mathrm{v} \rangle}{\langle Z \rangle} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \pi \cdot d^2 \cdot n}. \quad (53)$$

Уравнения состояния идеального газа:

для одного моля газа - $p \cdot V_\mu = R \cdot T$, (54)

для произвольного числа молей газа - $p \cdot V = \nu \cdot R \cdot T$,

где $\nu = \dfrac{m}{\mu}$ - число молей.

$$\frac{p \cdot V_\mu}{T} = const, \quad (55)$$

где V_μ - объем одного моля.

Изотермический процесс ($T = const$, $m = const$)

$p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2$ или $p \cdot V = const$. (56)

Изобарный процесс ($p = const$, $m = const$)

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \text{ или } \frac{V}{T} = const . (57)$$

Изохорный процесс ($V = const$, $m = const$)

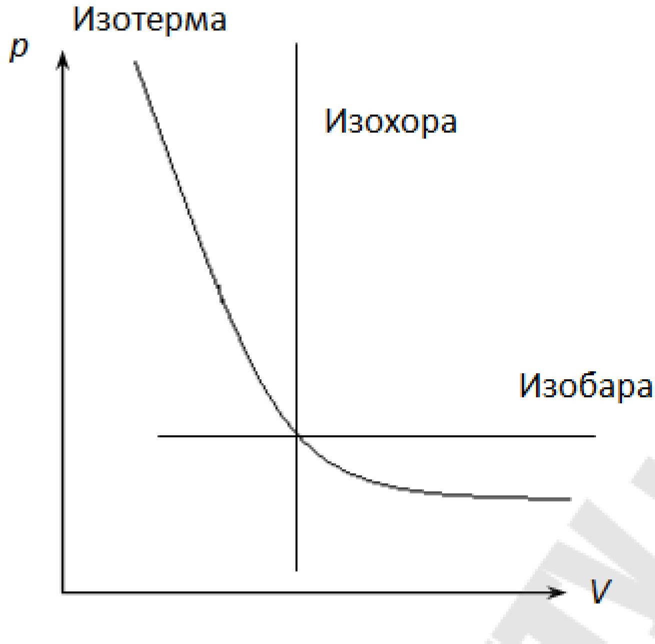


Рис. 2.2.

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \text{ или } \frac{p}{T} = const . (58)$$

Для смеси идеальных газов справедлив закон Дальтона

$$p = \sum_{i=1}^{n} p_i , (59)$$

где p_i - парциальное давление i-го компонента смеси, т.е. давление, которое производил бы газ, если бы только он один находился в сосуде занятой смесью.

2.2. Основы термодинамики

Первое начало термодинамики: количество теплоты, сообщаемое системе δQ, расходуется на изменение внутренней энергии dU и на совершение системой работы δA против внешних сил:

$$\delta Q = dU + \delta A , (60)$$

где δQ - элементарное количество теплоты;

δA - элементарная работа;

dU - бесконечно малое изменение внутренней энергии.

Внутренняя энергия произвольной массы газа:

$$U = \frac{m}{\mu} \cdot \frac{i}{2} \cdot RT . (61)$$

Изменение внутренней энергии идеального газа:

$$dU = \frac{m}{\mu} \cdot \frac{i}{2} \cdot RdT . (62)$$

Работа при изменении объема газа:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV, \ (63)$$

где V_1 и V_2 начальный и конечный объем газа.

Работа газа:

при изобарном процессе ($p = const$)

$$A = p(V_2 - V_1) = \frac{m}{\mu} \cdot R(T_2 - T_1), \ (64)$$

при изотермическом процессе ($T = const$)

$$A = \frac{m}{\mu} \cdot RT \ ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{\mu} \cdot RT \ ln \frac{p_1}{p_2}, \ (65)$$

при адиабатном процессе ($\delta Q = 0$)

$$A = \frac{m}{\mu} \cdot \frac{i}{2} R(T_1 - T_2) = \frac{RT_1}{\gamma - 1} \cdot \frac{m}{\mu} \left(1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right), \ (66)$$

где T_1, T_2 и V_1, V_2 - соответственно начальная и конечная температуры и объемы газа.

Процесс, протекающий без теплообмена с внешней средой ($\delta Q = 0$) называется адиабатным.

Уравнение адиабатного процесса:

$$pV^{\gamma} = const, \ TV^{\gamma - 1} = const, \ T^{\gamma} p^{1-\gamma} const, \ (67)$$

где $\gamma = \frac{C_p^{\mu}}{C_V^{\mu}}$ - показатель адиабаты.

График адиабатного процесса рис. 2.3.

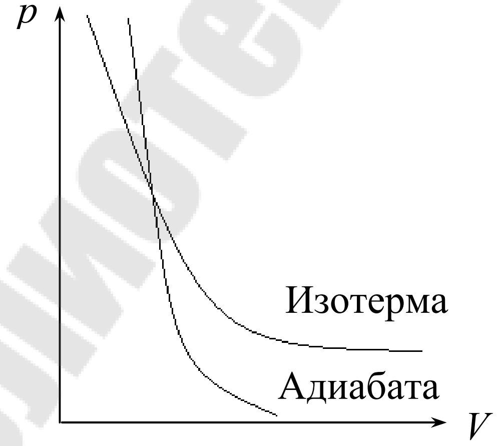


Рис. 2.3.

Количество теплоты при малом изменении температуры:

$\delta Q = cmdT$, (68)

где c - удельная теплоемкость.

Теплоемкость массы газа:

$$C^m = \frac{\delta Q}{dT}.$$

Удельная теплоемкость:

$$c = \frac{\delta Q}{mdT}.$$

Связь между молярной C^μ и удельной теплоемкостями газа:

$$C^\mu = c\mu.$$

Молярные теплоемкости газа при постоянном объеме и постоянном давлении:

$$C_V^\mu = \frac{i}{2}R,\ \ C_p^\mu = \frac{i+2}{2}R. \quad (69)$$

Уравнение Майера:

$$C_p^\mu = C_V^\mu + R = \frac{i+2}{2}R. \quad (70)$$

Количество теплоты сообщаемое термодинамической системе в изопроцессах:

при изохорном процессе ($\delta A = 0$):

$$dQ = \frac{m}{\mu}C_V^\mu dT; \quad (71)$$

при изобарном процессе:

$$dQ = \frac{m}{\mu}C_V^\mu dT + \frac{m}{\mu}RdT. \quad (72)$$

Термический коэффициент полезного действия для кругового процесса (цикла):

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_1}{Q_2}, \quad (73)$$

где Q_1 - количество теплоты, полученное системой от нагревателя;

Q_2 - количество теплоты, отданное системой холодильнику;

A - полезная работа совершаемая за цикл.

Термический коэффициент полезного действия цикла Карно:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}, \quad (74)$$

где T_1 - температура нагревателя;

T_2 - температура холодильника.

Термодинамический процесс называется обратимым, если он может происходить как в прямом направлении ($A = \oint pdV > 0$), так и в обратном направлении ($A = \oint pdV < 0$), без каких-либо изменений в окружающей среде и самой системе. Процесс, не удовлетворяющий этим условиям является необратимым.

Энтропия S - функция состояния, которая определяется параметрами состояния системы и не зависит от пути, каким система пришла в это состояние.

Энтропия замкнутой системы может либо возрастать (в случае необратимых процессов), либо оставаться неизменной (в случае обратимых процессов):

$\Delta S \geq 0$. (75)

Изменения энтропии при равновесном переходе системы из состояния 1 в состояние 2:

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \frac{dU + \delta A}{T}. \quad (76)$$

2.3. Примеры решения задач

Пример 1. В баллоне объемом $V = 10 \cdot 10^{-3}$ м^3 находился гелий под давлением $p_1 = 1$ МПа при температуре $T_1 = 300$ К. После того как из баллона был израсходован гелий массой $m = 0{,}01$ кг, давление в баллоне понизилось до $p_2 = 0{,}364$ МПа. Определить среднюю кинетическую энергию $\langle \varepsilon \rangle$ поступательного движения молекулы гелия оставшейся в баллоне.

Решение. Средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы определяется формулой:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{3}{2} kT,$$

где k - постоянная Больцмана.

Для нахождения температуры воспользуемся уравнением состояния идеального газа для начального и конечного состояния газа:

$$p_1 V = \frac{m_1}{\mu} RT_1, \qquad p_2 V = \frac{m_2}{\mu} RT_2,$$

где m_1 и m_2 - масса гелия в начальном и конечном состоянии.

$$m_1 = \frac{\mu p_1 V}{RT_1}, \qquad m_2 = \frac{\mu p_2 V}{RT_2}.$$

Масса израсходованного гелия:

$$m = m_1 - m_2 = \frac{\mu V}{R}\left(\frac{p_1}{T_1} - \frac{p_2}{T_2}\right).$$

Из последнего уравнения найдем температуру T_2:

$$T_2 = \frac{\mu p_2 V T_1}{\mu p_1 V - mRT_1}$$

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{3}{2} k \frac{\mu p_2 V T_1}{\mu p_1 V - mRT_1}.$$

Подставляя численные значения, получим:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{\frac{3}{2} \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 10^{6}}{\frac{1 \cdot 10^{6}}{300} - \frac{1 \cdot 10^{-2} \cdot 8{,}31}{4 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 10^{-3}}} = 6{,}13 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}.$$

Пример 2. Барометр в кабинете летящего самолета все время показывает одинаковое давление $p = 79$ кПа, благодаря чему летчик считает высоту h_1 полета неизменной. Однако температура воздуха за бортом самолета изменилась с $T = 278$ К до $T = 274$ К. Какую ошибку Δh в определении высоты допустил летчик? Давление p_0 у поверхности Земли считать нормальным.

Решение. Для решения задачи воспользуемся барометрической формулой: $p = p_0 \cdot e^{-\frac{\mu \cdot g \cdot h}{RT}}$. Барометр может показывать неизменное давление при различных температурах T_1 и T_2 за бортом только в том случае, если самолет находился не на высоте h_1 (которую летчик считает неизменной), а на некоторой другой высоте h_2.

$$p_1 = p_0 \cdot e^{-\frac{\mu \cdot g \cdot h_1}{RT_1}}, \; p_2 = p_0 \cdot e^{-\frac{\mu \cdot g \cdot h_2}{RT_2}}, \; p_1 = p_2 = p.$$

Найдем отношение $\frac{p_0}{p}$ и обе части полученного равенства прологарифмируем:

$$ln\frac{p_0}{p} = \frac{\mu \cdot g \cdot h_1}{RT_1}; \; ln\frac{p_0}{p} = \frac{\mu \cdot g \cdot h_2}{RT_2}.$$

Из полученных соотношений выразим высоты h_1 и h_2, и найдем их разность:

$$\Delta h = h_2 - h_1 = \frac{R}{\mu \cdot g} ln\left(\frac{p_0}{p}\right)(T_2 - T_1).$$

Подставляя численные значения, получим:

$$\Delta h = \frac{8{,}31 \cdot ln\left(\frac{101}{79}\right)}{29 \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}8}(1 - 5) = -28{,}5 \text{ м}.$$

Самолет находился ниже на 28,5 м по сравнению с начальной высотой h_1.

Пример 3. Средняя длина свободного пробега молекулы углекислого газа при нормальных условиях $\langle l \rangle = 40$ нм. Определить среднюю арифметическую скорость $\langle \mathrm{v} \rangle$ молекул и число соударений $\langle Z \rangle$, которое испытывает молекула за 1 с.

Решение. Средняя арифметическая скорость молекулы определяется по формуле:

$$\langle \mathrm{v} \rangle = \sqrt{\frac{8 \cdot R \cdot T}{\pi \cdot \mu}}.$$

Подставляя численное значение, получим:

$$\langle \mathrm{v} \rangle = \sqrt{\frac{8 \cdot 8{,}3 \cdot 293}{3{,}14 \cdot 44 \cdot 10^{-3}}} = 362 \ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Среднее число соударений в 1 с:

$$\langle Z \rangle = \frac{\langle \mathrm{v} \rangle}{\langle l \rangle} = \frac{362}{40 \cdot 10^{-9}} = 9{,}05 \cdot 10^{9} \ \text{с}^{-1}.$$

Пример 4. Кислород массой $m = 2$ кг занимает объем $V_1 = 1$ м^3 и находится под давлением $p_1 = 0{,}2$ МПа. Был нагрет сначала при постоянном давлении до объема $V_2 = 3$ м^3, а затем при постоянном объеме до давления $p_2 = 0{,}5$ МПа. Найти изменение ΔU внутренней энергии газа, совершенную им работу A и теплоту Q, переданную газу.

Решение. Построим график процесса (рис. 2.4). На графике точками 1, 2, 3 обозначим состояние газа, характеризуемое параметрами (p_1, V_1, T_1), (p_1, V_2, T_2), (p_2, V_2, T_3).

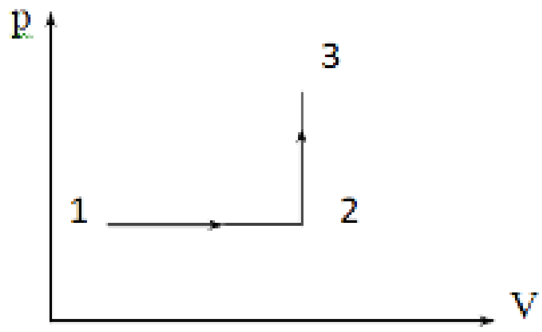


Рис. 2.4.

Изменение внутренней энергии газа

$$\Delta U = C_V m \Delta T_1 = \frac{i}{2}\frac{R}{\mu}\Delta T_1,$$

где i - число степеней свободы молекул газа (для кислорода $i = 5$);

$\Delta T_1 = T_3 - T_1$ - разность температур газа в конечном (третьем) и начальном состояниях.

Работа расширения газа при постоянном давлении выражается формулой:

$$A = p(V_2 - V_1).$$

Из уравнения Менделеева-Клапейрона:

$$pV = \frac{m}{\mu}RT, \qquad pV_1 = \frac{m}{\mu}RT_1, \qquad pV_2 = \frac{m}{\mu}RT_2,$$

$$A_{12} = \frac{m}{\mu}R\Delta T_2,$$

где $\Delta T_2 = T_2 - T_1$ - разность температур при постоянном давлении.

Воспользовавшись уравнением Менделеева-Клапейрона, определяем температуру:

$$T = \frac{pV\mu}{mR}.$$

Работа газа, нагреваемого при постоянном объеме равна нулю

$A_{2-3} = 0$.

Полная работа, совершаемая газом

$$A = A_{1-2} + A_{2-3} = A_{1-2},$$

тогда согласно первому началу термодинамики:

$$Q = \Delta U + A.$$

Подставляя численные значения, получим:

$$T_1 = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 32 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 8{,}31} = 385 \text{ К};$$

$$T_2 = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 32 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 8{,}31} = 1155 \text{ К};$$

$$T_3 = \frac{5 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 32 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 8{,}31} = 2887 \text{ К};$$

$$A = A_{1-2} = \frac{8{,}31 \cdot 2 \cdot (1155 - 385)}{32 \cdot 10^{-3}} = 0{,}4 \cdot 10^6 \text{ Дж} = 0{,}40 \text{ МДж};$$

$$\Delta U = \frac{5}{2} \frac{8{,}31 \cdot 2 \cdot (2887 - 385)}{32 \cdot 10^{-3}} = 3{,}24 \cdot 10^6 \text{ Дж} = 3{,}24 \text{ МДж};$$

$$Q = (3{,}24 + 0{,}4) \cdot 10^6 = 3{,}64 \cdot 10^6 \text{ Дж} = 3{,}64 \text{ МДж}.$$

Пример 5. Вычислить удельные теплоемкости c_V и c_p смеси неона и водорода, если масса неона $m_1 = 11 \cdot 10^{-3}$ кг и водорода $m_2 = 21 \cdot 10^{-3}$ кг.

Решение. Удельные теплоемкости идеальных газов находятся по формулам:

$$c_V = \frac{i}{2}\frac{R}{\mu} \quad \text{и} \quad c_p = \frac{i+2}{2}\frac{R}{\mu},$$

где i - число степеней свободы молекул газа;

μ - молярная масса.

Для неона $i = 3$ - одноатомный газ, $\mu = 20 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$.

Для водорода $i = 5$ - двухатомный газ, $\mu = 2 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$.

$$c_V^{неона} = \frac{3}{2} \cdot \frac{8{,}31}{20 \cdot 10^{-3}} = 6{,}24 \cdot 10^2\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}},$$

$$c_p^{неона} = \frac{3+2}{2} \cdot \frac{8{,}31}{20 \cdot 10^{-3}} = 1{,}04 \cdot 10^3\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}},$$

$$c_V^{водорода} = \frac{5}{2} \cdot \frac{8{,}31}{2 \cdot 10^{-3}} = 1{,}04 \cdot 10^4\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}},$$

$$c_p^{водорода} = \frac{5+2}{2} \cdot \frac{8{,}31}{2 \cdot 10^{-3}} = 1{,}46 \cdot 10^4\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}.$$

Для нахождения удельной теплоемкости c_V смеси при постоянном объеме теплоту, необходимую для нагревания смеси на ΔT, выразим $Q = c_V(m_1 + m_2)\Delta T$ и с другой стороны $Q = \left(c_V^{неона} m_1 + c_V^{водорода} m_2\right)\Delta T$.

$$c_V(m_1 + m_2)\Delta T = \left(c_V^{неона} m_1 + c_V^{водорода} m_2\right)\Delta T$$

$$c_V(m_1 + m_2) = c_V^{неона} m_1 + c_V^{водорода} m_2$$

$$c_V = c_V^{неона} \frac{m_1}{m_1 + m_2} + c_V^{водорода} \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

$\frac{m_1}{m_1 + m_2} = \omega_1$ - массовая доля неона,

$$\frac{m_2}{m_1 + m_2} = \omega_2$$ - массовая доля водорода.

$$c_V = 6{,}24 \cdot 10^2 \frac{11 \cdot 10^{-3}}{(11+21) \cdot 10^{-3}} + 1{,}04 \cdot 10^4 \frac{21 \cdot 10^{-3}}{(11+21) \cdot 10^{-3}} = 7{,}025 \cdot 10^3 \ \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}.$$

Аналогично

$$c_p = c_p^{неона} \frac{m_1}{m_1 + m_2} + c_p^{водорода} \frac{m_2}{m_1 + m_2} = 1{,}04 \cdot 10^3 \frac{11 \cdot 10^{-3}}{(11+21) \cdot 10^{-3}} +$$

$$+ 1{,}46 \cdot 10^4 \frac{21 \cdot 10^{-3}}{(11+21) \cdot 10^{-3}} = 9{,}94 \cdot 10^3 \ \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}.$$

Пример 6. Тепловая машина работает по обратному циклу Карно. Температура теплоотдатчика $T_1 = 500$ К. Определить термический КПД η и температуру T_2 теплоприемника тепловой машины, если за счет каждого килоджоуля теплоты, полученной от теплоотдатчика, машина совершает работу $A = 350$ Дж.

Решение. Термический КПД тепловой машины показывает, какая доля теплоты, полученной от теплоотдатчика, превращается в механическую работу

$$\eta = \frac{A}{Q_1},$$

где Q_1 - теплота полученная от теплоотдатчика;

A - работа совершенная рабочим телом тепловой машины.

$$\eta = \frac{350}{1000} = 0{,}35.$$

КПД цикла Карно

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Следовательно

$$T_2 = T_1(1 - \eta).$$

Произведем вычисление

$$T_2 = 500(1 - 0{,}35) = 325 \text{ К}.$$

Пример 7. Найти изменение ΔS энтропии при нагревании воды от температуры $T_1 = 273$ К до температуры $T_2 = 373$ К.

Решение. Изменение энтропии выражается общей формулой

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}.$$

При бесконечно малом изменении dT температуры нагреваемого тела количество теплоты

$$\delta Q = mcdT,$$

где m - масса тела;

c - его удельная теплоемкость.

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} \frac{mcdT}{T} = mc\int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T}.$$

$$\Delta S = mc\,ln\frac{T_2}{T_1}.$$

Подставляя численные значения, получим:

$$\Delta S = 100 \cdot 10^{-3} \cdot 2{,}1 \cdot 10^3 \cdot ln\frac{373}{273} = 132\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}}.$$

3. Задачи для самостоятельного решения

3.1 Кинематика поступательного движения

Радиус-вектор:

3.1.1 Радиус-вектор материальной точки изменяется со временем по закону $\vec{r} = t^3\vec{i} + 3t^2\vec{j}$, где *i*, *j*- орты осей x и y. Определите для момента времени $t = 1$ с: 1) модуль скорости; 2) модуль ускорения.

3.1.2 Радиус-вектор материальной точки изменяется со временем по закону $\vec{r} = (2 + 3t + 5t^3)\vec{i} + (4 + 4t^4)\vec{j} + 3t\vec{k}$. Найти зависимость от времени векторов скорости и ускорения и модулей этих величин для момента времени $t = 1$ с.

3.1.3 Материальная точка движется в плоскости *XY* со скоростью $\vec{\upsilon} = 3\vec{i} + 5t\vec{j}$. В начальный момент времени координаты частицы $x_0 = 3$ м и $y_0 = 1$ м. Найти зависимость от времени радиуса-вектора $\vec{r}$ точки и уравнение траектории *y(x)*. Вектор ускорения и модуль вектора для момента времени $t = 4$ с.

3.1.4 Ускорение материальной точки изменяется по закону $\vec{a} = 2t^3\vec{i} + 4t\vec{j} + 3\vec{k}$. Найти, на каком расстоянии от начала координат она будет находиться в момент времени $t = 2$ с, если $\upsilon_{0x} = 1$ м/с, $\upsilon_{0y} = 4$ м/с, $\upsilon_{0z} = 5$ м/с и $r_{0x} = 0$, $r_{0y} = 1$ м, $r_{0z} = 3$ м при $t = 0$.

3.1.5 Движение материальной точки задано уравнением $\vec{r} = A(\vec{i}\cos\omega t + \vec{j}\sin\omega t)$, где $A = 1$ м и $\omega = 5$ рад/с. Начертить траекторию точки. Определить модуль скорости $|\vec{\upsilon}|$ и модуль нормального ускорения $|\vec{a}_n|$.

Связь пути, скорости, ускорения:

3.1.6 Зависимость пройденного телом пути s от времени *t* дается уравнением $s = At^2 - Bt^2 + Ct^3$, где $A = 2$ м/с, $B = 3$ м/с^2 и $C = 4$ м/с^3. Найти: 1) зависимость скорости υ и ускорения *a* от времени *t*, 2) расстояние, пройденное телом, скорость и ускорение тела через 2 с после начала движения. Построить график пути, скорости и ускорения для $0 \le t \le 3$ с через 0,5 *с*.

3.1.7 Зависимость пройденного телом пути s от времени t дается уравнением $s = A - Bt + Ct^2$, где A = 6 м, B = 3 м/с и C = 2 м/с^2. Найти: среднюю скорость и среднее ускорение тела в интервале времени от 1 до 4 с. Построить график пути, скорости и ускорения для $0 \le t \le 5$ с через 1 с.

3.1.8 Зависимость пройденного телом пути s от времени t дается уравнением $s = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, где C = 0,14 м/с^2 и D = 0,01 м/с^3. Через какое время t после начала движения тело будет иметь ускорение a = 1 м/с^2? Найти среднее ускорение тела за этот промежуток времени.

Криволинейное движение (в поле силы тяжести):

3.1.9 С башни высотой h = 25 м горизонтально брошен камень со скоростью υ_x = 15 м/с. Какое время t камень будет в движении? На каком расстоянии S от основания башни он упадет на землю? С какой скоростью υ он упадет на землю? Какой угол α составит траектория камня с горизонтом в точке его падения на землю?

3.1.10 Мяч бросили со скоростью υ_0 = 10 м/с под углом α = 40° к горизонту. Найти: 1) на какую высоту h поднимется мяч, 2) на каком расстоянии S от места бросания он упадет на землю, 3) сколько времени он будет в движении. Сопротивление воздуха не учитывать.

3.1.11 Тело брошено горизонтально со скоростью υ_0 = 5 м/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите радиус кривизны траектории тела через t = 2 с после начала движения.

3.1.12 Камень брошен в горизонтальном направлении. Через 0,5 с после начала движения числовое значение скорости камня стало в 1,5 раза больше его начальной скорости. Найти начальную скорость камня. Сопротивление воздуха не учитывать.

3.1.13 Камень брошен горизонтально со скоростью υ_x = 15 м/с. Найти нормальное и a_n и тангенциальное a_τ ускорения камня через время t = 1 с после начала движения.

Криволинейное движение (равномерное и равноускоренное):

3.1.14 Нормальное ускорение точки, движущейся по окружности радиусом R = 4 м, задается уравнением $a_n = A + Bt + Ct^2$ (A = 1 м/с^2, B

= 6 м/с^3, C = 9 м/с^4). Определите: 1) тангенциальное ускорение точки; 2) путь, пройденный точкой за время t_1 = 5 с после начала движения; 3) полное ускорение для момента времени t_2 = 1 с.

3.1.15 Точка движется по окружности так, что зависимость пути от времени дается уравнением $s = A - Bt + Ct^2$, где B = 2 м/с и C = 1 м/с^2. Найти линейную скорость точки, ее тангенциальное, нормальное и полное ускорения через время t = 3 с после начала движения, если известно, что при t' = 2 с нормальное ускорение точки a_n' = 0,5 м/с^2.

3.2 Кинематика вращательного движения

Равноускоренное:

3.2.1 Колесо радиусом R = 10 см вращается с угловым ускорением ε = 3,14 рад/с^2. Найти для точек на ободе колеса к концу первой секунды после начала движения: а) угловую скорость ω; б) линейную скорость υ; в) тангенциальное ускорение a_τ; г) нормальное ускорение a_n; д) полное ускорение a; е) угол α, составляемый вектором полного ускорения с радиусом колеса.

3.2.2 Колесо вращается с постоянным угловым ускорением ε = 3 рад/с^2. Определите радиус колеса, если через t = 1 с после начала движения полное ускорение колеса a = 7,5 м/с^2.

3.2.3 Колесо, вращаясь равноускоренно, достигло угловой скорости ω = 20 рад/с через N = 10 оборотов после начала вращения. Найти угловое ускорение ε колеса.

3.2.4 Якорь электродвигателя, имеющий частоту вращения ν = 50 с$^{-1}$ после выключения тока, сделав N = 628 оборотов, остановился. Определите угловое ускорение ε якоря.

3.2.5 Колесо, вращаясь равнозамедленно, за время t = 1 мин уменьшило свою частоту с ν_1 = 300 об/мин до ν_2 = 180 об/мин. Найти угловое ускорение ε колеса и число оборотов N колеса за это время.

3.2.6 Вентилятор вращается с частотой ν = 900 об/мин. После выключения вентилятор, вращаясь равнозамедленно, сделал до остановки N = 75 оборотов. Какое время t прошло с момента выключения вентилятора до полной его остановки?

Неравномерное:

3.2.7 Диск вращается вокруг неподвижной оси так, что зависимость угла поворота радиуса диска от времени задается уравнением $\varphi = At^2$ (A = 0,5 рад/с^2). Определите к концу второй секунды после начала движения: 1) угловую скорость диска; 2) угловое ускорение диска; 3) для точки, находящейся на расстоянии 80 см от оси вращения, тангенциальное a_τ, нормальное a_n и полное a ускорения.

3.2.8 Диск вращается вокруг неподвижной оси так, что зависимость угла поворота радиуса диска от времени задается уравнением $\varphi = At^2$ (A = 0,1 рад/с^2). Определите полное ускорение a точки на ободе диска к концу второй секунды после начала движения, если в этот момент линейная скорость этой точки υ = 0,4 м/с.

3.2.9 Колесо радиусом R = 0,1 м вращается так, что зависимость угла поворота радиуса колеса от времени дается уравнением $\varphi = A + Bt + Ct^3$, где B = 2 рад/с и C = 1 рад/с^3. Для точек, лежащих на ободе колеса, найти через время t = 2 с после начала движения: а) угловую скорость ω; б) линейную скорость υ; в) угловое ускорение ε; д) тангенциальное a_τ и нормальное a_n ускорения.

3.2.10 Колесо вращается так, что зависимость угла поворота радиуса от времени дается уравнением $\varphi = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, где B = 1 рад/с, C = 1 рад/с^2 и D = 1 рад/с^3. Найти радиус колеса, если известно, что к концу второй секунды движения нормальное ускорение точек, лежащих на ободе колеса, равно a_n = 346 м/с^2.

3.3 Динамика поступательного движения

Второй Закон Ньютона:

3.3.1 Тело массой m = 0,5 кг движется прямолинейно, причем зависимость пройденного телом пути s от времени t дается уравнением $s = A - Bt + Ct^2 - Dt^3$, где C = 5 м/с^2 и D = 1 м/с^3. Найти силу F, действующую на тело в конце первой секунды движения.

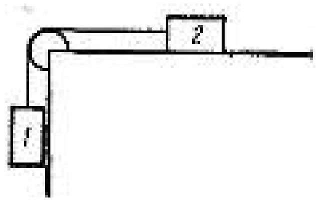
3.3.2 Тело массой m = 0,5 кг движется так, что зависимость пройденного телом пути s от времени t дается уравнением $s = A\sin\omega t$, где A = 5 см и $\omega = \pi$ рад/с. Найти силу F, действующую на тело через время $t = \frac{1}{6}c$ после начала движения.

3.3.3 Тело массой m движется в плоскости xy по закону $x = A\cos\omega t$, $y = A\sin\omega t$, где A, B и ω - некоторые постоянные. Определите модуль силы, действующей на это тело.

Блок:

3.3.4 Две гири с массами m_1 = 2 кг и m_2 = 1 кг соединены нитью и перекинуты через невесомый блок. Найти ускорение a, с которым движутся гири, и силу натяжения нити T. Трением в блоке пренебречь.

3.3.5 Невесомый блок укреплен на конце стола. Гири 1 и 2 одинаковой массы $m_1 = m_2$ = 1 кг соединены нитью и перекинуты через блок. Коэффициент трения гири 2 о стол μ = 0,1. Найти ускорение a, с которым движутся гири, и силу натяжения нити T. Трением в блоке пренебречь.

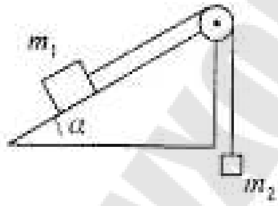


Наклонная плоскость

3.3.6 Тело скользит по наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол α = 45°. Пройдя путь s = 36,4 см, тело приобретает скорость υ = 2 м/с. Найти коэффициент трения μ тела о плоскость.

3.3.7 Наклонная плоскость, образующая угол α = 25° с плоскостью горизонта, имеет длину l = 2 м. Тело, двигаясь равноускоренно, соскользнуло с этой плоскости за время t = 2 с. Определить коэффициент трения μ тела о плоскость.

3.3.8 В установке на рисунке угол α наклонной плоскости с горизонтом равен 20°, массы тел m_1 = 200 г и m_2 = 150 г. Считая нить и блок невесомыми и пренебрегая силами трения, определите ускорение, с которым будут двигаться эти тела, если тело m_2 опускается.



Динамика материальной точки, движущейся по окружности:

3.3.9 Грузик, привязанный к нити длиной l = 1 м, описывает окружность в горизонтальной плоскости. Определить период T обращения, если нить отклонена на угол 60° от вертикали.

3.3.10 Акробат на мотоцикле описывает «мертвую петлю» радиусом R = 4 м. С какой наименьшей скоростью $\upsilon_{\min}$ должен проезжать акробат верхнюю точку петли, чтобы не сорваться?

3.4 Работа. Энергия. Мощность. КПД

3.4.1 Найти работу A, которую дано совершить, чтобы увеличить скорость движения тела массой m = 1 т от υ_1 = 2 м/с до υ_2 = 6 м/с на пути s = 10 м. На всем пути действует сила трения $F_{тр}$ = 2 Н.

3.4.2 Тело скользит сначала по наклонной плоскости, составляющей угол α = 8° с горизонтом, а затем по горизонтальной поверхности. Найти коэффициент трения μ на всем пути, если известно, что тело проходит по горизонтальной поверхности то же расстояние, что и по наклонной плоскости.

3.4.3 Автомобиль массой m = 1,8 т движется в гору, уклон которой составляет 3 м на каждые 100 м пути. Определите: 1) работу, совершаемую двигателем автомобиля на пути 5 км, если коэффициент трения μ = 0,1; 2) развиваемую двигателем мощность, если известно, что этот путь был преодолен за 5 мин.

3.4.4 Поезд массой m = 600 т движется под гору с уклоном α = 0,3° и за время t = 1 мин развивает скорость υ = 18 км/ч коэффициент трения μ = 0,01. Определите среднюю мощность локомотива.

3.4.5 Материальная точка массой m = 1 кг двигалась под действием некоторой силы согласно уравнению $s = A - Bt + Ct^2 - Dt^3$ (B = 3 м/с, C = 5 м/с^2, D = 1 м/с^3). Определите мощность P, затрачиваемую на движение точки за время, равное 1 с.

3.4.6 Тело массой m начинает двигаться под действием силы $\vec{F} = 2t \cdot \vec{i} + 3t^2 \cdot \vec{j}$, где $\vec{i}$ и $\vec{j}$ – соответственно единичные векторы координатных осей x и y. Определите мощность $P(t)$, развиваемую силой в момент времени t.

3.4.7 Какую мощность P развивает двигатель автомобиля массой m = 1 т, если известно, что автомобиль едет с постоянной скоростью υ = 36 км/ч: а) по горизонтальной дороге; б) в гору с уклоном 5 м на каждые 100 м пути; в) под гору с тем же уклоном? Коэффициент трения μ = 0,07.

3.4.8 Найти КПД η двигателя автомобиля, если известно, что при скорости движения υ = 40 км/ч двигатель потребляет объем V = 13,5 л бензина на пути S = 100 км и что развиваемая двигателем мощность

P = 12 кВт. Плотность бензина $\rho = 0{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3, удельная теплота сгорания бензина q = 46 МДж/кг.

3.4.9 Зависимость потенциальной энергии U тела в центральном силовом поле от расстояния r до центра поля задается функцией $U(r) = \dfrac{A}{r^2} - \dfrac{B}{r}$ (A = 6 мкДж·м^2, B = 0,3 мДж·м). Определите, при каких значениях максимальное значение принимают: 1) потенциальная энергия тела; 2) сила, действующая на тело.

3.5 Законы сохранения импульса (ЗСИ) и энергии (ЗСЭ)

Импульс. (ЗСИ):

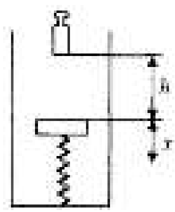
3.5.1 Струя воды сечением S = 6 см^2 ударяется о стенку под углом α = 60° к нормали и упруго отскакивает от нее без потери скорости. Найти силу F, действующую на стенку, если известно, что скорость течения воды в струе υ = 12 м/с.

3.5.2 Снаряд массой m_1 = 100 кг, летящий горизонтально вдоль железнодорожного пути со скоростью υ_1 = 500 м/с, попадает в вагон с песком, масса которого m_2 = 10 т, и застревает в нем. Какую скорость u получит вагон, если: а) вагон стоял неподвижно; б) вагон двигался со скоростью υ_2 = 36 км/ч в том же направлении, что и снаряд; в) вагон двигался со скоростью υ_2 = 36 км/ч в направлении, противоположном движению снаряда?

3.5.3 Граната, летящая со скоростью υ = 10 м/с, разорвалась на два осколка. Больший осколок, масса которого составляла 0,6 массы всей гранаты, продолжал двигаться в прежнем направлении, но с увеличенной скоростью u_1 = 25 м/с. Найти скорость u_2 меньшего осколка.

3.5.4 Конькобежец массой M = 70 кг, стоя на коньках на льду, бросает в горизонтальном направлении камень массой m = 3 кг со скоростью υ_0 = 8 м/с. На какое расстояние S откатится при этом конькобежец, если коэффициент трения коньков о лед μ = 0,02?

Закон сохранения энергии:



3.5.5 Гиря массой m = 10 кг падает с высоты h = 0,5 м на подставку, скрепленную с пружиной жесткостью k = 30 Н/см. Определите при этом смещение x пружины.

3.5.6 Тело брошено вертикально вверх со скоростью υ_0 = 20 м/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите, на какой высоте h кинетическая энергия тела будет равна его потенциальной энергии.

3.5.7 Подвешенный на нити шарик массой m = 200 г отклоняют на угол α = 45°. Определите силу натяжения нити в момент прохождения шариком положения равновесия.

3.5.8 Пренебрегая трением, определите наименьшую высоту h, с которой должна скатываться тележка с человеком по желобу, переходящему в петлю радиусом R = 6 м, и не оторваться от него в верхней точке петли.

Смешанные задачи (ЗСИ + ЗСЭ):

3.5.9 Тело массой m_1 = 2 кг движется со скоростью υ_1 = 3 м/с и нагоняет тело массой m_2 = 8 кг, движущееся со скоростью υ_2 = 1 м/с. Считая удар центральным, найти скорости u_1 и u_2 тел после удара, если удар: а) неупругий; б) упругий.

3.5.10 Пуля, летящая горизонтально, попадает в шар, подвешенный на очень легком жестком стержне, и застревает в нём. Масса пули в 1000 раз меньше массы шара. Расстояние от точки подвеса стержня до центра шара равно 1 м. Найти скорость пули, если известно, что стержень с шаром отклонился от удара пули на угол $\alpha = 10°$.

3.5.11 Два шара массами m_1 = 9 кг и m_2 = 12 кг подвешены на нитях длиной l = 1,5 м. Первоначально шары соприкасаются между собой, затем меньший шар отклонили на угол $\alpha = 30°$ и отпустили. Считая удар неупругим, определите высоту h, на которую поднимутся оба шара после удара.

3.5.12 Два шара массами m_1 = 3 кг и m_2 = 2 кг подвешены на нитях длиной l = 1 м. Первоначально шары соприкасаются между собой, затем больший шар отклонили от положения равновесия на угол α = 60° и отпустили. Считая удар упругим, определите скорость второго шара после удара.

Теплота при ударах. Коэффициент восстановления:

3.5.13 Тело массой 3 кг движется со скоростью 4 м/с и ударяется о неподвижное тело такой же массы. Считая удар центральным и неупругим, найти количество теплоты, выделившееся при ударе.

3.5.14 Деревянным молотком, масса которого m_1 = 0,5 кг, ударяют о неподвижную стенку. Скорость молотка в момент удара υ_1 = 1 м/с. Считая коэффициент восстановления при ударе молотка о стенку k = 0,5, найти количество теплоты Q, выделившееся при ударе. (Коэффициентом восстановления материала тела называется отношение скорости тела после удара к его скорости до удара).

3.6 Динамика вращательного движения (ДВД)

Теорема Штейнера:

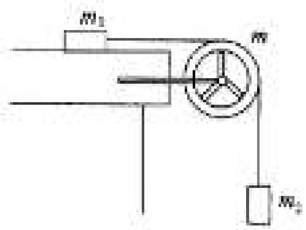
3.6.1 Определить момент инерции J тонкого однородного стержня длиной l = 30 см и массой m = 100 г относительно оси, перпендикулярной ему и проходящей через: 1) его конец; 2) точку, отстоящую от конца стержня на 1/3 его длины.

Основное уравнение ДВД:

3.6.2 Однородный диск радиусом R = 0,2 м и массой m = 5 кг вращается вокруг оси, проходящей через его центр перпендикулярно к его плоскости. Зависимость угловой скорости ω вращения диска от времени t дается уравнением $\omega = A + Bt$, где B = 8 рад/с^2. Найти касательную силу F, приложенную к ободу диска. Трением пренебречь.

3.6.3 На барабан радиусом R = 0,5 м намотан шнур, к концу которого привязан груз массой m = 10 кг. Найти момент инерции J барабана, если известно, что груз опускается с ускорением a = 2 м/с^2.

3.6.4 Две гири с массами m_1 = 2 кг и m_2 = 2 кг соединены нитью, перекинутой через блок массой m = 2 кг. Найти ускорение a, с которым движутся гири, и силы натяжения T_1 и T_2 нитей, к которым подвешены гири. Блок считать однородным диском. Трением пренебречь.



3.6.5 На рисунке тело массой m_1 = 0,25 кг, соединенное невесомой нитью посредством блока (в виде полого тонкостенного цилиндра) с телом массой m_2 = 0,2 кг, скользит по поверхности горизонтального стола. Масса блока m = 0,15 кг. Коэффициент трения μ тела о поверхность равен 0,2. Пренебрегая трением в подшипниках, определите: 1) ускорение a, с которым будут двигаться эти тела; 2) силы натяжения T_1 и T_2 нити по обе стороны блока.

Энергия, работа:

3.6.6 Диск массой m = 2 кг катится без скольжения по горизонтальной плоскости со скоростью υ = 4 м/с. Найти кинетическую энергию $W_к$ диска.

3.6.7 Шар диаметром D = 6 см и массой m = 0,25 кг катится без скольжения по горизонтальной плоскости с частотой вращения ν = 4 об/с. Найти кинетическую энергию $W_к$ шара.

3.6.8 Медный шар радиусом R = 10 см вращается с частотой ν = 2 об/с, вокруг оси, проходящей через его центр. Какую работу надо совершить, чтобы увеличить угловую скорость вращения шара вдвое?

3.6.9 Вентилятор вращается со скоростью, соответствующей частоте 900 об/мин. После выключения вентилятор, вращаясь равнозамедленно, сделал до остановки 75 оборотов. Работа сил торможения равна 44,4 Дж. Найти: 1) момент инерции вентилятора, 2) момент сил торможения.

3.6.10 Однородный стержень длиной l = 1 м подвешен на горизонтальной оси, проходящей через верхний конец стержня. На какой угол α надо отклонить стержень, чтобы нижний конец стержня при прохождении положения равновесия имел скорость υ = 5 м/с?

3.6.11 Карандаш длиной l = 15 см, поставленный вертикально, падает на стол. Какую угловую скорость ω и линейную скорость υ будут иметь в конце падения середина и верхний конец карандаша?

Момент импульса. Закон сохранения импульса (ЗСМИ):

3.6.12 Кинетическая энергия вала, вращающегося с частотой ν = 5 об/с, $W_к$ = 60 Дж. Найти момент импульса L вала.

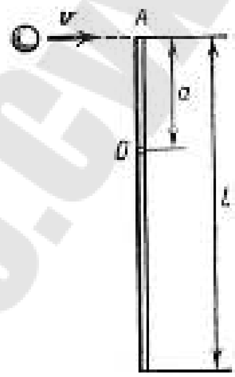
3.6.13 Горизонтальная платформа массой m = 100 кг вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через центр платформы, с частотой ν_1 = 10 об/мин. Человек массой m_0 = 60 кг стоит при этом на краю платформы. С какой частотой ν_2 начнет вращаться платформа, если человек перейдет от края платформы к ее центру? Считать платформу однородным диском, а человека — точечной массой.

3.6.14 Какую работу A совершает человек при переходе от края платформы к ее центру в условиях предыдущей задачи? Радиус платформы R = 1,5 м.

3.6.15 Горизонтальная платформа массой m = 80 кг и радиусом R = 1 м вращается с частотой ν_1 = 20 об/мин. В центре платформы стоит человек и держит в расставленных руках гири. С какой частотой ν_2

будет вращаться платформа, если человек, опустив руки, уменьшит свой момент инерции от J_1 = 2,94 до J_2 = 0,98 кг·м^2? Считать платформу однородным диском.

3.6.16 Однородный тонкий стержень массой m_1 = 0,2 кг и длиной l = 1 м может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси z, проходящей через точку O. В точку A на стержне попадает пластилиновый шарик, летящий горизонтально (перпендикулярно оси z) со скоростью υ = 10 м/с и прилипает к стержню. Масса m_2 шарика равна 10 г. Определить угловую скорость ω стержня и линейную скорость u нижнего конца стержня в начальный момент времени. Вычисления выполнить для следующих значений расстояния между точками A и O: 1) l/2; 2) l/3; 3) l/4.



3.7 Механические колебания и волны

Кинематика гармонических колебаний:

3.7.1 Материальная точка совершает гармонические колебания согласно уравнению $x = 0{,}02\, cos(\pi t + \frac{\pi}{2})$ м. Определите: 1) амплитуду колебаний; 2) период колебаний; 3) начальную фазу колебаний; 4) максимальную скорость точки; 5) максимальное ускорение точки; 6) через какое время после начала отсчета точка будет проходить через положение равновесия?

3.7.2 Дано уравнение движения точки $x = 2\, sin(\frac{\omega}{2} t + \frac{\pi}{4})$ см. Найти период колебаний T, максимальную скорость $\upsilon_{\max}$ и максимальное ускорение $a_{\max}$ точки.

3.7.3 Точка совершает гармоническое колебание. Период колебаний T = 2 с, амплитуда A = 50 мм, начальная фаза $\varphi_0 = 0$. Найти скорость υ точки в момент времени, когда смещение точки от положения равновесия x = 25 мм.

Динамика гармонических колебаний. Маятники:

3.7.4 Уравнение колебаний материальной точки массой m = 10 г имеет вид $x = 5\, sin(\frac{\pi}{5} t + \frac{\pi}{4})$ см. Найти максимальную силу F_{max} действующую на точку, и полную энергию E колеблющейся точки.

3.7.5 Полная энергия тела, совершающего гармоническое колебательное движение, $E_{полн}$ = 30 мкДж; максимальная сила, действующая на тело, F_{max} = 1,5 мН. Написать уравнение движения этого тела, если период колебаний T = 2 с и начальная фаза $\varphi_0 = \pi/3$.

3.7.6 Тонкий обруч радиусом R = 50 см подвешен на вбитый в стену гвоздь и колеблется в плоскости, параллельной стене. Определите период Т колебаний обруча.

3.7.7 Тонкий однородный стержень длиной l = 60 см может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, отстоящей на расстоянии x = 15 см от его середины. Определите период колебаний стержня, если он совершает малые колебания.

Сложение колебаний:

3.7.8 Складываются два гармонических колебания одного направления, описываемых уравнениями $x_1 = 3\cos 2\omega t$ см и $x_2 = 3\cos(2\omega t + \frac{\pi}{4})$ см. Определите для результирующего колебания: 1) амплитуду; 2) начальную фазу. Запишите уравнение результирующего колебания и представьте векторную диаграмму сложения амплитуд.

3.7.9 Найти амплитуду A и начальную фазу φ_0 гармонического колебания, полученного от одинаково направленных колебаний, данных уравнениями $x_1 = 0{,}02\sin(5\pi t + \frac{\pi}{2})$ м и $x_2 = 0{,}03\sin(5\pi t + \frac{\pi}{4})$ м.

3.7.10 Точка участвует в двух взаимно перпендикулярных колебаниях $x = \sin \pi t$ м и $y = 2\sin(\pi t + \frac{\pi}{2})$ м. Найти траекторию результирующего движения точки и начертить ее с нанесением масштаба.

3.7.11 Точка участвует в двух взаимно перпендикулярных колебаниях $x = 2\sin \omega t$ м и $y = 2\cos \omega t$ м. Найти траекторию результирующего движения точки.

3.7.12 Точка участвует в двух взаимно перпендикулярных колебаниях $x = \sin \pi t$ м и $y = 4\sin(\pi t + \pi)$ м. Найти траекторию результирующего движения точки и начертить ее с нанесением масштаба.

Затухающие колебания:

3.7.13 Период затухающих колебаний T = 1 с, логарифмический декремент затухания равен 0,3 и начальная фаза равна нулю. Смещение точки при t = 2T составляет 5 см. Запишите уравнение движения этого колебания.

3.7.14 Найти логарифмический декремент затухания математического маятника, если за время t = 1 мин амплитуда колебаний уменьшилась в 2 раза. Длина маятника l = 1 м.

3.7.15 Амплитуда затухающих колебаний математического маятника за время t_1 = 1 мин уменьшилась вдвое. Во сколько раз уменьшится амплитуда за время t_2 =3 мин?

3.7.16 За время, в течение которого система совершает N = 50 полных колебаний, амплитуда уменьшается в 2 раза. Определите добротность Q системы.

Вынужденные колебания:

3.7.17 Определите резонансную частоту колебательной системы, если собственная частота колебаний ν_0 = 300 Гц, а логарифмический декремент затухания 0,2.

3.7.18 Собственная частота ν_0 колебаний некоторой системы составляет 500 Гц. Определите частоту ν затухающих колебаний этой системы, если резонансная частота $\nu_{рез}$ = 499 Гц.

3.7.19 Гиря массой m = 0,5 кг, подвешенная на спиральной пружине жесткостью k = 50 Н/м, совершает колебания в вязкой среде с коэффициентом сопротивления r = 0,5 кг/с. На верхний конец пружины действует вынуждающая сила, изменяющаяся по закону $F = 0{,}1 \cos \omega t$ Н. Определите для данной колебательной системы: 1) коэффициент затухания β; 2) резонансную амплитуду $A_{рез}$.

Волны:

3.7.20 Две точки лежат на луче и находятся от источника колебаний на расстояниях x_1 = 4 м и x_2 = 7 м. Период колебаний T = 20 мс и скорость υ распространения волны равна 300 м/с. Определите разность фаз колебаний этих точек.

3.7.21 Звуковые колебания с частотой ν = 450 Гц и амплитудой A = 0,3 мм распространяются в упругой среде. Длина волны λ = 80 см. Определите: 1) скорость распространения волн; 2) максимальную скорость частиц среды.

3.7.22 Два когерентных источника колеблются в одинаковых фазах с частотой ν = 400 Гц. Скорость распространения колебаний в среде υ = 1 км/с. Определите, при какой наименьшей разности хода, не равной нулю, будет наблюдаться: 1) максимальное усиление колебаний; 2) максимальное ослабление колебаний.

3.8 Молекулярно-кинетическая теория газов

Уравнение газового состояния:

3.8.1 Найти плотность ρ водорода при температуре t = 15 °С и давлении p = 97,3 кПа.

3.8.2 Какое число молекул N находится в комнате объемом V = 80 м^3 при температуре t = 17 °С и давлении p = 100 кПа?

3.8.3 Сколько молекул будет находиться в 1 см^3 сосуда при 10 °С и давлении $p = 1{,}33\cdot10^{-9}$ Па?

Утечка:

3.8.4 В сосуде вместимостью V = 0,3 л при температуре T = 290 К находится некоторый газ. На сколько понизится давление p газа в сосуде, если из него из-за утечки выйдет $N = 10^{19}$ молекул?

3.8.5 В баллоне находилась масса m_1 = 10 кг газа при давлении p_1 = 10 МПа. Какую массу Δm газа взяли из баллона, если давление стало равным p_2 = 2,5 МПа? Температуру газа считать постоянной.

Основное уравнение МКТ. Энергия молекул:

3.8.6 В колбе вместимостью V = 240 см^3 находится газ при температуре T = 290 К и давлении p = 50 кПа. Определить количество вещества ν газа и число N его молекул.

3.8.7 Давление p газа равно 1 мПа, концентрация n его молекул равна 10^{10} см$^{-3}$. Определить: 1) температуру T газа; 2) среднюю кинетическую энергию поступательного движения молекул газа.

Скорости молекул:

3.8.8 Средняя квадратичная скорость некоторого газа при нормальных условиях равна 480 м/с. Сколько молекул содержит 1 г этого газа?

3.8.9 Определите наиболее вероятную скорость молекул газа, плотность которого при давлении 40 кПа составляет 0,35 кг/м^3.

3.8.10 При какой температуре средняя квадратичная скорость молекул кислорода больше их наиболее вероятной скорости на 100 м/с?

3.8.11 Плотность некоторого газа $\rho = 0{,}06$ кг/м^3, средняя квадратичная скорость его молекул $\langle \upsilon_{кв} \rangle = 500$ м/с. Найти давление p, которое газ оказывает на стенки сосуда.

Смеси газов:

3.8.12 В закрытом сосуде вместимостью 20 л находятся водород массой 6 г и гелий массой 12 г. Определите: 1) давление p; 2) молярную массу газовой смеси M в сосуде, если температура смеси $T = 300$ К.

3.8.13 Баллон вместимостью 20 л содержит смесь водорода и азота при температуре 290 К и давлении 1 МПа. Определите массу водорода, если масса смеси равна 150 г.

3.8.14 Определите плотность смеси газов водорода массой $m_1 = 8$ г и кислорода массой $m_2 = 64$ г при температуре $T = 290$ К и при давлении $p = 0{,}1$ МПа. Газы считать идеальными.

3.8.15 В сосуде 1 объемом $V_1 = 3$ л находится газ под давлением $p_1 = 0{,}2$ МПа. В сосуде 2 объемом $V_1 = 4$ л находится тот же газ под давлением $p_2 = 0{,}1$ МПа. Температуры газа в обоих сосудах одинаковы. Под каким давлением p будет находиться газ, если соединить сосуды 1 и 2 трубкой?

Барометрическая формула:

3.8.16 На какой высоте h давление воздуха составляет 75 % от давления на уровне моря? Температуру воздуха считать, постоянной и равной $t = 0$ °С.

3.8.17 На какой высоте h плотность газа вдвое меньше его плотности на уровне моря? Температуру газа считать постоянной и равной $t = 0$ °С. Задачу решить для: а) воздуха, б) водорода.

Элементы статистической физики:

3.8.18 Найти среднюю длину свободного пробега молекул углекислого газа при температуре $t = 100$ °С и давлении $p = 13{,}3$ Па. Диаметр молекул углекислого газа $\sigma = 0{,}32$ нм.

3.8.19 Найти среднее число столкновений в единицу времени молекул углекислого газа при температуре t = 100 °C, если средняя длина свободного пробега $\langle l \rangle$ = 870 мкм.

3.8.20 Найти среднюю длину свободного пробега атомов гелия, если известно, что плотность гелия ρ = 0,021 кг/м^3.

3.8.21 Найти среднее число столкновений в единицу времени молекул некоторого газа, если средняя длина свободного пробега $\langle l \rangle$ = 5 мкм, а средняя квадратичная скорость его молекул $\langle \upsilon_{кв} \rangle$ = 500 м/с

3.8.22 Какая часть молекул кислорода при t = 0 °C обладает скоростями υ от 100 до 110 м/с?

3.8.23 Используя закон распределения молекул идеального газа по скоростям, найдите формулу наиболее вероятной скорости $\upsilon_в$.

3.9 Термодинамика

Первое начало термодинамики:

3.9.1 Масса m = 6,5 г водорода, находящегося при температуре t = 27 °С, расширяется вдвое при постоянном давлении за счет притока тепла извне. Найти работу A расширения газа, приращение ΔU внутренней энергии газа и количество теплоты Q, сообщенное газу.

3.9.2. Масса m =10 г кислорода находится при давлении p = 300 кПа и температуре t = 10 °С. После нагревания при p = const газ занял объем V = 10 л. Найти количество теплоты Q, полученное газом, изменение ΔU внутренней энергии газа и работу A, совершенную газом при расширении.

3.9.3 Масса m = 10,5 г азота изотермически расширяется при температуре t = - 23 °С, причем его давление изменяется от p_1 = 250 кПа до p_2 = 100 кПа. Найти работу A, совершенную газом при расширении.

3.9.4 Гелий, находящийся при нормальных условиях, изотермически расширяется от объема V_1 = 1 л до V_2 = 2 л. Найти работу, совершенную газом при расширении, и количество теплоты, сообщенное газу.

3.9.5 При изотермическом расширении газа, занимавшего объем V = 2 м^3, давление его меняется от p_1 = 0,5 МПа до p_2 = 0,4 МПа. Найти работу A, совершенную при этом.

Адиабатный процесс. Уравнение Пуассона:

3.9.6 До какой температуры t_2 охладится воздух, находящийся при t_1 = 0 °С, если он расширяется адиабатически от объема V_1 до $V_2 = 2V_1$?

3.9.7 Объем V_1 = 7,5 л кислорода адиабатически сжимается до объема V_2 = 1 л, причем в конце сжатия установилось давление p_2 = 1,6 МПа. Под каким давлением p_1 находился газ до сжатия?

3.9.8 Воздух в цилиндрах двигателя внутреннего сгорания сжимается адиабатически и его давление при этом изменяется от p_1 = 0,1 МПа до p_2 = 3,5 МПа. Начальная температура воздуха 40 °С. Найти температуру воздуха в конце сжатия.

3.9.9 Количество ν = 1 кмоль азота, находящегося при нормальных условиях, расширяется адиабатически от объема V_1 до $V_2 = 5V_1$. Найти изменение ΔU внутренней энергии газа и работу A, совершенную газом при расширении.

Циклы. Круговые процессы:

3.9.10 Идеальная тепловая машина, работающая по циклу Карно, за цикл получает от нагревателя количество теплоты Q_1 = 2,512 кДж. Температура нагревателя T_1 = 400 К, температура холодильника T_2 = 300 К. Найти работу A, совершаемую машиной за один цикл, и количество теплоты Q_2, отдаваемое холодильнику за один цикл.

3.9.11 Идеальная тепловая машина, работающая по циклу Карно, совершает за один цикл работу A = 73,5 кДж. Температура нагревателя t_1 = 100 °С, температура холодильника t_2 = 0 °С. Найти кпд η цикла, количество теплоты Q_1, получаемое машиной за один цикл от нагревателя, и количество теплоты Q_2, отдаваемое за один цикл холодильнику.

3.9.12 Паровая машина мощностью P = 14,7 кВт потребляет за время t = 1 ч работы массу m = 8,1 кг угля с удельной теплотой сгорания q = 33 МДж/кг. Температура котла t_1 = 200 °С, температура холодильника t_2 = 58 °С. Найти фактический кпд η машины и сравнить его с кпд η_0 идеальной тепловой машины, работающей по циклу Карно между теми же температурами.

Энтропия:

3.9.13 Найти изменение ΔS энтропии при превращении массы m = 10 г льда (t = - 20 °С) в пар (t_n = 100 °С).

3.9.14 Найти изменение ΔS энтропии при переходе массы m = 8 г кислорода от объема V_1 = 10 л при температуре t_1 = 80 °С к объему V_2 = 40 л при температуре t_2 = 300 °С.

3.9.15 Масса m = 6,6 г водорода расширяется изобарически от объема V_1 до объема $V_2 = 2V_1$. Найти изменение ΔS энтропии при этом расширении.

3.9.16 Найти изменение ΔS энтропии при изотермическом расширении массы m = 6 г водорода от давления p_1 = 100 кПа до давления p_2 = 50 кПа.

3.9.17 Масса m = 10 г кислорода нагревается от температуры t_1 = 50 °С до температуры t_2 = 150 °С. Найти изменение ΔS энтропии, если нагревание происходит: а) изохорически; б) изобарически.

3.9.18 Кислород массой m = 2 кг увеличил свой объем в n = 5 раз один раз изотермически, другой – адиабатно. Найти изменения энтропии в каждом из указанных процессов.

Литература

1. Трофимова, Т.И. Курс физики / Т.И. Трофимова. – М.: Высш. шк., 2004. – 542 с.
2. Савельев, И.В. Курс общей физики / И.В. Савельев. – М.: Наука, 1989. – Т.1. – 350 с.
3. Детлаф, А.А. Курс физики / А.А. Детлаф, Б.М. Яворский. – М.: Академия, 2003. – 720 с.
4. Сивухин, Д.В. Общий курс физики / Д.В. Сивухин. – М.: Наука, 1989. – Т.1. – 576 с.

Приложение

1. Некоторые физические константы

Наименование	**Обозначение**	**Числовое значение**
Скорость света в вакууме	c	$3 \cdot 10^{8}$ м·с$^{-1}$
Гравитационная постоянная	G	$6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н·м^{2}·кг$^{-2}$
Постоянная Авогадро	N_A	$6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$
Молекулярная газовая постоянная	R	8,31 Дж·моль$^{-1}$·К$^{-1}$
Объем моля идеального газа при нормальных условиях	V_0	$22{,}4 \cdot 10^{-3}$ м^{3}·моль$^{-1}$
Ускорение свободного падения	g	9,81 м·с$^{-2}$
Постоянная Больцмана	k	$1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж·К$^{-1}$

2. Множители и приставки для образования десятичных кратных и дольных единиц и их наименования

Наименование	**Обозначение**	**Множитель**
гига	Г	10^{9}
мега	М	10^{6}
кило	к	10^{3}
гекто	г	10^{2}
милли	м	10^{-3}
микро	мк	10^{-6}

нано	н	10^{-9}
пико	п	10^{-12}

3. Плотность жидкостей

Жидкость	**Плотность, $10^3\ \frac{кг}{м^3}$**	Жидкость	**Плотность, $10^3\ \frac{кг}{м^3}$**
вода	1,00	ртуть	13,60

4. Плотность газов (при нормальных условиях)

Газ	**Плотность, $\frac{кг}{м^3}$**	Газ	**Плотность, $\frac{кг}{м^3}$**
Азот	1,25	Воздух	1,29
Аргон	1,78	Гелий	0,18
Водород	0,09	Кислород	1,43

5. Эффективный диаметр молекулы

Газ	**Диаметр, 10^{-9} м**	Газ	**Диаметр, 10^{-9} м**
Аргон	0,29	Гелий	0,19
Водород	0,23	Кислород	0,29

6. Некоторые сведения по математике

6.1. Формулы алгебры и тригонометрии

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

$$sin(x \pm y) = sin\,x\,cos\,y \pm sin\,y\,cos\,x,$$

$$cos(x \pm y) = cos\,x\,cos\,y \mp sin\,x\,sin\,y,$$

$$sin\,2x = 2\,sin\,x\,cos\,x,$$

$$cos\,2x = cos^2 x - sin^2 x,$$

$$sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - cos\,2x),$$

$$cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + cos\,2x).$$

6.2. Формулы дифференциального и интегрального исчисления

$$\frac{d}{dx}c = 0, \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2},$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^m\right) = m\,x^{m-1}, \qquad \frac{d}{dx}(cosx) = -sinx,$$

$$\frac{d(uV)}{dx} = V\frac{du}{dx} + u\frac{dV}{dx}, \qquad \frac{d}{dx}(sinx) = cosx,$$

$$\frac{d\left(\frac{u}{V}\right)}{dx} = \frac{V\frac{du}{dx} - u\frac{dV}{dx}}{\upsilon^2}, \qquad \frac{d(ln\,x)}{dx} = \frac{1}{x},$$

$$\frac{d(a^x)}{dx} = a^x \ln a,$$

$$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C,$$

$$\int x^m dx = \frac{1}{m+1} x^{m+1} + C, m \neq -1,$$

$$\int dx = x + C,$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, x \neq 0,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C,$$

$$\int e^x dx = e^x + C,$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C.$$

6.3. Некоторые математические постоянные

$\pi = 3{,}1416$

$\sqrt{2} = 1{,}4142$

$\sqrt{\pi} = 1{,}772$

$\sqrt{3} = 1{,}7321$

$\varepsilon = 2{,}7183$

$\ln 2 = 0{,}6931$

$\sqrt{\varepsilon} = 1{,}6487$

$\ln 3 = 1{,}0986$

1 рад = $\left(\frac{180}{\pi}\right) \approx 57^\circ\ 17'$

$\alpha^\circ = \frac{180}{\pi} \alpha$ рад

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$,

где φ - угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Модуль векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\alpha$.

6.4. Формулы приведения

β	***sinβ***	***cosβ***	***tgβ***	***ctgβ***
$б+\frac{p}{2}$	*cosα*	*-sinα*	*-ctgα*	*-tgα*
$б+p$	*-sinα*	*-cosα*	*tgα*	*ctgα*
$2p+б$	*sinα*	*cosα*	*tgα*	*ctgα*
$-б$	*-sinα*	*cosα*	*-tgα*	*-ctgα*
$p-б$	*sinα*	*-cosα*	*-tgα*	*-ctgα*
$\frac{\pi}{2}-\alpha$	*cosα*	*sinα*	*ctgα*	*tgα*

6.5. Некоторые значения тригонометрических функций

$\boldsymbol{\alpha}$	**sin**$\boldsymbol{\alpha}$	**cos**$\boldsymbol{\alpha}$	**tg**$\boldsymbol{\alpha}$	**ctg**$\boldsymbol{\alpha}$
0°	0	1	0	–
30°	0,5	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0,5	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
90°	1	0	–	0
180°	0	– 1	0	–
360°	0	1	0	–

Содержание

Проневич Олег Иванович
Пискунов Сергей Васильевич

МЕХАНИКА И МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

Практикум
по курсу «Физика» для студентов
всех специальностей дневной формы обучения
В трех частях
Часть 1

Подписано к размещению в электронную библиотеку
ГГТУ им. П. О. Сухого в качестве электронного
учебно-методического документа 05.11.10.

Рег. № 35Е.
E-mail: ic@gstu.by
http://www.gstu.by