

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования  
«Гомельский государственный технический  
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Физика»

**П. С. Шаповалов**

## **ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ**

**ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ  
по курсу «Физика» для студентов  
инженерно-технических специальностей  
дневной формы обучения**

Гомель 2010

УДК 534(075.8)  
ББК 22.213я73  
Ш24

*Рекомендовано научно-методическим советом  
энергетического факультета ГГТУ им. П. О. Сухого  
(протокол № 6 от 09.02.2010 г.)*

Рецензент: канд. техн. наук, доц. каф. «Высшая математика» ГГТУ им. П. О. Сухого  
*Л. Л. Великович*

**Шаповалов, П. С.**  
Ш24 Гармонические колебания и волны : лаборатор. практикум по курсу «Физика» для студентов инженер.-техн. специальностей днев. формы обучения / П. С. Шаповалов. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2010. – 46 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: <http://lib.gstu.local>. – Загл. с титул. экрана.

Содержит краткие теоретические сведения по разделу «Гармонические колебания», даны методика измерений и порядок выполнения лабораторных работ.

Для студентов инженерно-технических специальностей дневной формы обучения.

УДК 534(075.8)  
ББК 22.213я73

© Учреждение образования «Гомельский  
государственный технический университет  
имени П. О. Сухого», 2010

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Лабораторный практикум содержит работы, которые входят в программу обучения студентов инженерно-технических специальностей вузов по разделу «Гармонические колебания» курса физики.

Цель практикума – научить студентов самостоятельно анализировать физические явления и законы, положенные в основу выполняемых лабораторных работ.

В практикуме описаны работы по основам: гармонических колебаний, сложение гармонических колебаний, образование стоячих звуковых волн. Изложена сущность изучаемых явлений и приведена литература, в которой эти явления описаны подробно.

Перед выполнением лабораторной работы студент обязан разобраться в том, какое явление будет изучать, и что будет измерять. Для этого он должен изучить, помимо материала, изложенного в данном практикуме, соответствующий раздел учебника и конспект лекций.

## Лабораторная работа № 1-7

### Изучение механических гармонических колебаний

#### **Цель работы:**

1. Изучить теорию гармонических колебаний.
2. Определение ускорение свободного падения при помощи математического и физического маятника.

**Приборы и принадлежности:** Универсальный прибор РМ-04.

### 1. Теоретическая часть

#### 1.1. Введение

Одним из важнейших видов движений материальных тел изучаемых в физике является колебательные движения (колебания).

*Колебаниями называются движения обладающие свойством повторяемости.* Простейшими колебательными движениями являются гармонические колебания. *Колебания совершаемые по гармоническому закону (закону синуса, косинуса) называются гармоническими колебаниями.* Физические системы совершающие гармонические колебания называются гармоническими осцилляторами. В механике, с хорошей степенью точности, гармоническими осцилляторами можно считать пружинные, математические и физические маятники.

- *Пружинным маятником является тело совершаемое колебания под действием упругой силы.*
- *Математический маятник – материальная точка подвешенная на невесомой нерастяжимой нити и совершающая колебания в вертикальной плоскости под действием сил тяжести.*
- *Физический маятник – твердое тело способное колебаться под действием силы тяжести вокруг неподвижной горизонтальной оси не совпадающей с его центром масс.*

## 1.2. Свободные незатухающие колебания

Свободными или собственными колебаниями называются такие колебания, которые происходят в системе без внешних воздействий.

Рассмотрим пружинный маятник, т.е. тело массой  $m$  подвешенное на упругой пружине. На тело действует постоянная сила тяжести  $F_m = mg$ . Она вызывает постоянную силу упругости, которая равна по величине и противоположной по направлению действующей силе тяжести. Действие этих сил компенсируют друг друга и в дальнейшем можно не учитывать.

Пусть направление координатной оси  $X$  совпадает с направлением колебания тела, а начало отсчета с точкой равновесия. Отклоним тело от положения равновесия на расстояния  $x$ . Тогда на тело начнет действовать сила упругости равная  $F_{уп} = -kx$  ( $k$  – коэффициент жесткости пружины), и направленная в сторону равновесия. Согласно второму закону Ньютона, если на тело действует сила, то тело начнет двигаться с ускорением равным  $a = F_{уп}/m$ . Или записывая в другой форме, имеем

$$ma = F_{уп} = -kx.$$

Так как  $a = d^2x/dt^2$ , то получим

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0, \quad (1)$$

где  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ .

Дифференциальное уравнение (1) описывает не только движения пружинного маятника, но и движения всех гармонических осцилляторов совершающие свободные незатухающие гармонические колебания. В случае математического маятника  $x$  – угол отклонения нити маятника от положения равновесия,  $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ ; где  $g$  – ускорения свободного падения,  $l$  – длина маятника. Для физического маятника  $x$  – угол отклонения от положения равновесия линии соединяющей центр масс маятника с точкой подвеса, а  $\omega_0 = \sqrt{mgr_c/I}$ ; где  $m$  – масса маятника,  $r_c$  – расстояние от центра масс до точки подвеса,  $I$  – момент инерции маятника относительно оси подвеса.

Уравнение (1) относится к обыкновенным линейным дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами. Из

теории дифференциальных уравнений известно, что общее решение уравнения (1) имеет вид:

$$x = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (2)$$

Здесь  $A_0$ ,  $\varphi_0$  – постоянные интегрирования.  $A_0$  – амплитуда колебания. Амплитуда колебания – максимальное отклонения системы, совершающей колебания, от положения равновесия.  $\omega_0$  – циклическая (круговая) частота свободных колебаний;  $\omega_0 = 2\pi\nu$ ,  $\nu$  – частота колебаний. Частота колебаний – число полных колебаний системы совершаемых в единицу времени. Частота колебаний связана с периодом собственных колебаний ( $T_0$ ) соотношением  $\nu = 1/T_0$ . Период колебаний – время за который совершается один полный цикл колебаний. Аргумент гармонической функции описывающей колебательное движение  $\varphi = \omega_0 t + \varphi_0$  называется фазой колебаний,  $\varphi_0$  – начальная фаза колебаний (фаза в момент времени  $t = 0$ ). График свободных незатухающих колебаний (зависимость отклонения  $x$  от времени  $t$ ) приведен на рис. 1

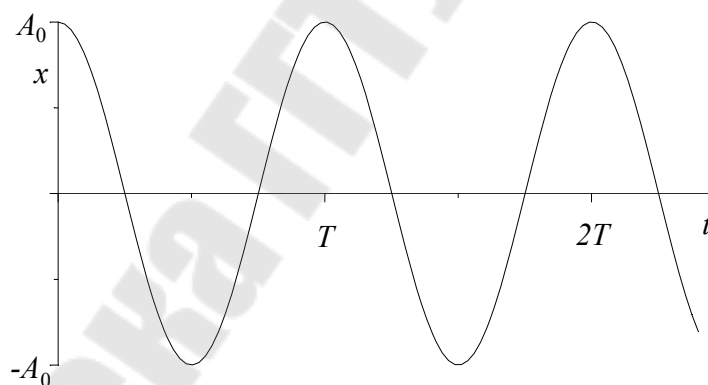


Рис. 1. График свободных гармонических колебаний.

Продифференцировав (2) по времени, получим закон изменение скорости тела ( $V$ ) совершающего гармонические колебания

$$V = \frac{dx}{dt} = -A_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (3a)$$

Используя формулу приведения  $\cos(\alpha + \pi/2) = -\sin \alpha$ , данное выражение можно записать в другом виде:

$$V = A_0 \omega_0 \cos\left(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right). \quad (3б)$$

Из (7.3) следует, что скорость тела, совершающего гармонические колебания, также изменяется по гармоническому закону, с амплитудой  $A = A_0 \omega_0$ . Аналогично, закон изменения ускорения тела (а), совершающего гармонические колебания, имеет вид:

$$a = \frac{d^2 x}{dt^2} = -A_0 \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = A_0 \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi). \quad (4)$$

При выводе (7.4) использована формула приведения  $\cos(\alpha + \pi) = -\cos \alpha$ . Амплитуда колебаний (7.4)  $A = A_0 \omega_0^2$ .

### 1.3. Энергия свободных колебаний

Рассмотрим пружинный маятник совершающий гармонические колебания описываемые функцией  $x = A_0 \cos \omega_0 t$  (начальная фаза  $\varphi_0$  равна нулю). Полная механическая энергия системы ( $E$ ) равна сумме кинетической ( $E_k$ ) и потенциальной ( $E_{\text{п}}$ ) энергии;  $E = E_k + E_{\text{п}}$ . Силы, действующие в рассматриваемой системе, являются консервативными. Поэтому полная энергия гармонического колебания должна оставаться постоянной.

В системе пружинный маятник, пренебрегая массой пружины, кинетическая энергия будет равна  $E_k = mV^2/2$ . Подставляя значения для скорости тела (3а), имеем

$$E_k = \frac{m\omega_0^2 A_0^2}{2} \sin^2 \omega_0 t = \frac{kA_0^2}{2} \sin^2 \omega_0 t, \quad (5)$$

где  $k = m\omega_0^2$  – жесткость пружины.

Потенциальная энергия упругих сил равна  $E_{\text{п}} = kx^2/2$ , поэтому закон изменения потенциальной энергии пружинного имеет вид:

$$E_{\text{п}} = \frac{kA_0^2}{2} \cos^2 \omega_0 t = \frac{m\omega_0^2 A_0^2}{2} \cos^2 \omega_0 t. \quad (6)$$

Полная механическая энергия гармонических колебаний, учитывая (5) и (6), равна:

$$E = \frac{kA_0^2}{2} \sin^2 \omega_0 t + \frac{kA_0^2}{2} \cos^2 \omega_0 t = \frac{kA_0^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 A_0^2}{2}.$$

В процессе колебаний происходит превращение кинетической энергии в потенциальную и обратно, причем в моменты когда колеблющее тело проходит положения равновесия ( $x = 0$ ), полная энергия  $E$  состоит только из кинетической энергии, которая достигает своего наибольшего значения  $E_{\text{к}} = mV_{\text{max}}^2 / 2 = kA_0^2 / 2$ . А в моменты наибольшего отклонения из положения равновесия полная энергия  $E$  состоит только из потенциальной энергии, которая достигает своего наибольшего значения  $E_{\text{п}} = mx_{\text{max}}^2 / 2 = kA_0^2 / 2$ .

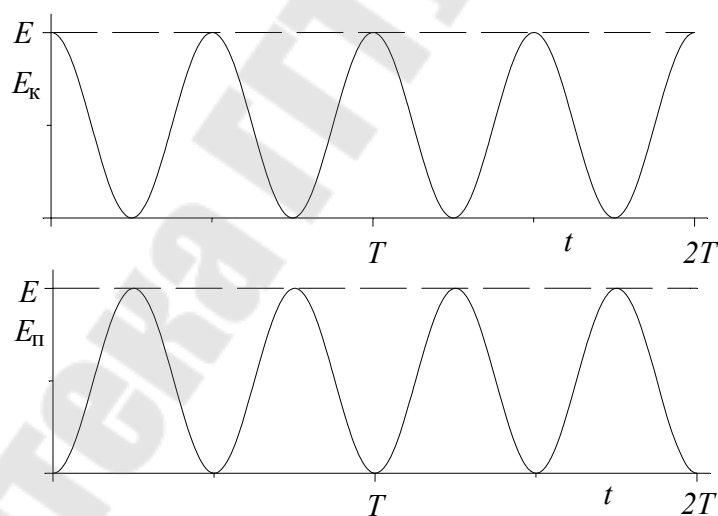


Рис. 2. Графики изменения кинетической и потенциальной энергии гармонического осциллятора. Штриховой линией обозначена полная энергия системы.



#### 1.4. Свободные затухающие колебания

Выше рассматривались механические гармонические осцилляторы в которых действуют только консервативные силы. В реальных колебательных системах всегда присутствуют силы трения, которые приводят к уменьшению энергии колебаний и к их затуханию. При малых скоростях движения сила трения равна  $F_{\text{тр}} = -\mu V = -\mu dx/dt$ . Постоянная  $\mu$  называется коэффициентом сопротивления, знак минус указывает, что сила трения противоположна направлению движения тела при колебании. Учитывая второй закон Ньютона, уравнение колебания запишем в виде:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\mu \frac{dx}{dt} - kx.$$

Данное уравнение можно представить в следующем виде:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \quad (7)$$

где  $\beta = \mu/2m$  - коэффициент затухания колебаний,  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  - собственная частота гармонического осциллятора в отсутствии трения. Решением уравнения (5), при небольшом сопротивлении ( $\beta^2 < \omega_0^2$ ) является функция

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (8)$$

Здесь  $A = A_0 e^{-\beta t}$  - амплитуда колебаний,  $A_0$  - начальная амплитуда колебаний ( $t = 0$ ),  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  - частота затухающих колебаний,  $\varphi = \omega t + \varphi_0$  - фаза колебаний,  $\varphi_0$  - начальная фаза колебаний (фаза колебаний при  $t = 0$ ). Из уравнения (7.8) следует, что частота затухающих колебаний будет меньше, чем при отсутствии трения. График затухающих колебаний представлен на рис. 3. Период затухающих колебаний, как следует из (8), равен  $T = 2\pi/\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ .

Амплитуда затухающих гармонических колебаний  $A$  с течением времени уменьшается по экспоненциальному закону. Величина  $\beta$ , называемая коэффициентом затухания, характеризует скорость уменьшения амплитуды колебаний. Если обозначить через  $\tau$  промежуток времени в течении которого амплитуда уменьшилась в

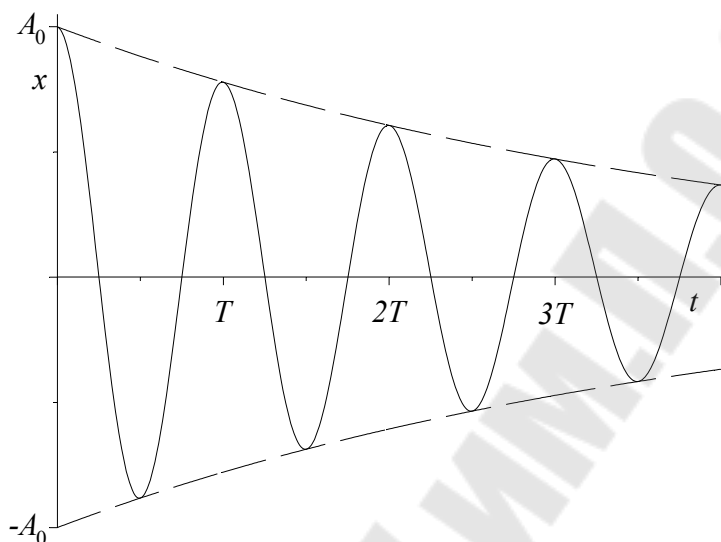


Рис. 3. График затухающих гармонических колебаний. Штриховой линией представлено изменение амплитуды колебаний.

« $e$ » раз, т.е.  $A_0 e^{-\beta\tau} = A_0 e^{-1} \Rightarrow \beta = 1/\tau$ . Т.е., коэффициент затухания – величина обратная промежутку времени, за который амплитуда уменьшилась в « $e$ » раз.

Для характеристики скорости затухания колебаний используют величину называемую декрементом затухания. Декремент затухания – отношение значений амплитуд, соответствующих моментам времени, отличающихся на период, т.е.  $D = A(t)/A(t+T)$ . Подставляя значения для амплитуды затухающих колебаний, получим  $D = e^{-\beta T}$ . Величину  $\lambda = \ln D = -\beta T$  называют логарифмическим декрементом затухания, т.е. логарифмический декремент затухания – натуральный логарифм отношения значений амплитуд, соответствующих моментам времени, отличающихся на период. Также для характеристики затухания часто употребляется величина  $Q = \pi/\lambda$  называемую добротностью колебательной системы.

### 1.5. Вынужденные гармонические колебания

Вынужденными колебаниями называются такими колебаниями, которые возникают в колебательной системе под действием внешней периодической изменяющейся силы, называемой вынуждающей силой. Если вынуждающая сила изменяется по гармоническому закону, то такие колебания называются вынужденными гармоническими колебаниями. Пусть вынуждающая сила изменяется по закону  $F_{\text{вын}} = F_0 \cos \Omega t$ , где  $F_0$  – амплитуда вынуждающей силы,  $\Omega$  – циклическая частота её изменения.

Запишем второе уравнения Ньютона для колебательной системы, учитывая, что кроме вынуждающей силы, в системе действуют упругая сила подчиняющаяся закону Кулона ( $F_{\text{уп}} = -kx$ ) и сила трения – пропорциональная скорости движения тела ( $F_{\text{тр}} = -\mu v$ ).

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\mu \frac{dx}{dt} - kx + F_0 \cos \Omega t .$$

Разделив уравнения на  $m$  и перенеся члены содержащие  $x$  в левую часть, получим неоднородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \Omega t , \quad (9)$$

где  $\beta = \mu/2m$  – коэффициент затухания,  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  – собственная частота колебаний системы.

Из теории дифференциальных уравнений известно, что общее решение линейного неоднородного уравнения есть сумма общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения, т.е. решение уравнения (9) есть  $x_{\text{общ}} = x_{\text{од}} + x_{\text{неод}}$ . Для общего решения однородного уравнения используем решение вида (8):

$$x_{\text{од}} = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (10a)$$

где  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  – частота затухающих колебаний. В качестве частного решения неоднородного уравнения используем функцию вида:

$$x_{\text{неод}} = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \cos(\Omega t - \Phi_0). \quad (10б)$$

Здесь  $\Phi_0 = \text{arctg}\left(\frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right)$ . Подставляя (10б) в уравнение (9), легко проверить, что она является решением уравнения.

Сумма функций (10) дают общее решение неоднородного дифференциального уравнения (9). Слагаемое (10а), из-за экспоненциальной функции  $e^{-\beta t}$ , с течением времени быстро уменьшается, и в установившихся вынужденных колебаниях его можно не учитывать. Следовательно, установившиеся вынужденные колебания описываются уравнением (10б).

Амплитуда вынужденных колебаний пропорционально вынуждающей силе и зависит от собственной частоты колебательной системы, частоты вынуждающей силы и коэффициента затухания колебаний

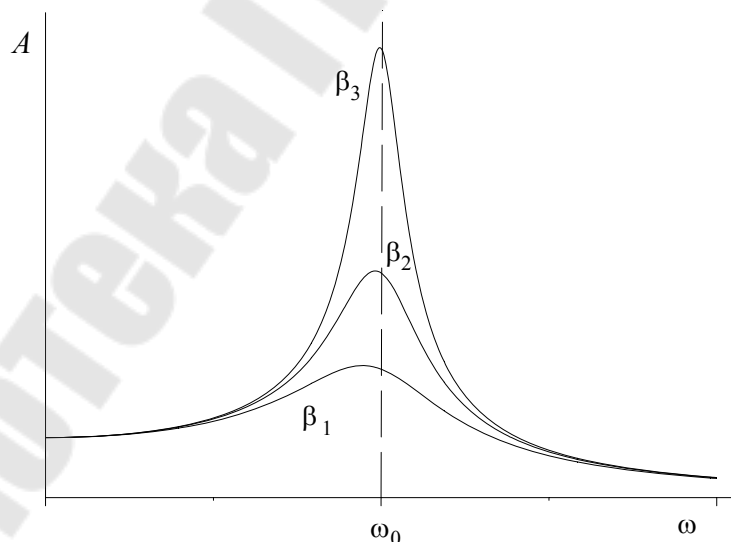


Рис. 4. Зависимость амплитуды вынужденных колебаний ( $A$ ) от частоты вынуждающей силы ( $\Omega$ ) при разных коэффициентах затухания ( $\beta_1 > \beta_2 > \beta_3$ ).

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}. \quad (11)$$

График зависимости амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы для разных коэффициентов затухания  $\beta$  представлен на рис 4. Из графика следует, что при определенной частоте вынуждающей силы, близкой к собственной частоте колебаний системы, наблюдается максимум вынужденных колебаний. Такое явление называется резонансом, а частота при которой наблюдается резонанс – резонансной частотой. Исследуя функцию (11) на максимум (находим первую производную функции по  $\omega$  и приравнявая её нулю), получим резонансную частоту вынужденных колебаний  $\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ . При малых значениях затухания в системе ( $\beta \rightarrow 0$ ) резонансная частота совпадает с собственной частотой системы. Подставляя значения резонансной частоты в (11), получим амплитуду резонанса

$$A_{\text{рез}} = \frac{F_0}{2\beta m\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (12)$$

Из (12) следует, что при отсутствии сопротивления в колебательной системе ( $\beta \rightarrow 0$ ) амплитуда резонанса стремится к бесконечности.

С явлением резонанса необходимо считаться при конструировании машин, станков, зданий, мостов. Собственная частота колебаний устройств не должна быть близка к частоте внешней силы. Например, при проектировании высотных зданий необходимо учитывать, чтобы собственная частота колебаний зданий отличалась от частоты вынужденных колебаний, вызываемых сильным ветром.

### **1.6. Физический и математический маятники**

*Физический маятник – твердое тело способное колебаться под действием силы тяжести вокруг неподвижной горизонтальной оси не совпадающей с его центром масс.* Рассмотрим физический

маятник, колеблющийся в плоскости  $XOY$ , вокруг неподвижной оси  $O$  (см. рис. 5). Пусть, центр инерции (центр масс) маятника находится в точке  $C$ . Центр инерции твердого тела движется так, как двигалась бы материальная точка с массой, равной массе твердого тела, под действием всех приложенных к телу сил. На тело действует сила тяжести  $\vec{F}_T = m\vec{g}$ ,  $\vec{g}$  - ускорение свободного падения. Следовательно относительно оси вращения  $O$  действует момент сил равный  $|\vec{M}| = [\vec{r}_C, \vec{F}_T] = mgr_C \sin \varphi$ . Учитывая, что гармонические колебания наблюдаются только при малых углах отклонения  $\varphi$ , поэтому с хорошей точностью можно заменить в формуле  $\sin \varphi$  на  $\varphi$ . Тогда момент сил действующий на точку  $C$  будет равен:

$$M \approx mgr_C \varphi \quad (13)$$

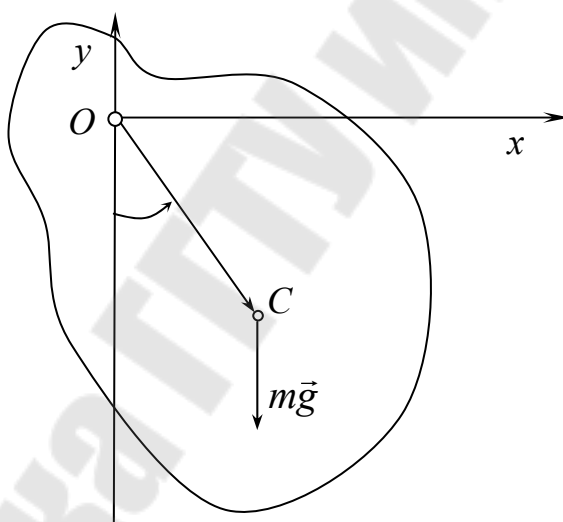


Рис. 5. Физический маятник

Под действием момента силы  $\vec{M}$  маятник совершает вращательное движение. Используя основной закон динамики вращательного движения, имеем:

$$M = I\varepsilon = I \frac{d^2\varphi}{dt^2}, \quad (14)$$

где  $I$  – момент инерции тела относительно оси  $O$ ,  $\varepsilon = d^2\varphi/dt^2$  – угловое ускорение. Подставляя значения для момента силы (13) в уравнение (14), имеем:  $I \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -r_c mg \varphi$ , или преобразуя получим:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{r_c mg}{I} \cdot \varphi = 0 \quad (15)$$

Сравнивая уравнение (15) с уравнением (1), описывающее свободные гармонические колебания, заключаем, что физический маятник будет колебаться по гармоническому закону (2) с

циклической частотой колебания  $\omega_0 = \sqrt{\frac{r_c mg}{I}} = \sqrt{\frac{g}{l_{\text{пр}}}}$ , а период

колебания физического маятника  $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{r_c mg}} = 2\pi \sqrt{\frac{l_{\text{пр}}}{g}}$ , где

$l_{\text{пр}} = \frac{I_0}{r_c mg}$  – приведенная длина физического маятника.

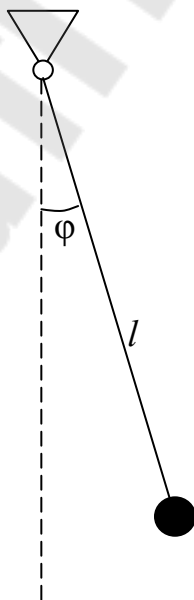


Рис. 6. Математический маятник.

Математический маятник (см. рис. 6) можно рассматривать, как частный случай физического маятника вся масса которого

сконцентрирована в одной точке, которая будет совпадать с точкой центра инерции маятника. Тогда в этом случае  $r = l$ , где  $l$  – длина математического маятника (расстояние от точки подвеса до колеблющейся материальной точки), момент инерции материальной точки относительно оси  $O$  равен  $I = ml^2$ . Тогда циклическая частота с которой математический маятник будет колебаться равна:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{I mg}{ml^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}},$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Сравнивая данные выражения с выражениями для физического маятника, заключаем, что физический маятник колеблется как математический, длина которого равна приведенной

$$l_{\text{пр}} = \frac{I}{r_c mg}.$$

## 2. Описание установки и методика проведения измерений

Экспериментальная установка состоит из штанги со специальной линейкой, на которой крепится поворотный кронштейн с опорами для физического и математического маятников (рис.7). Количество колебаний ( $N$ ) и их время ( $t$ ) фиксируются полуавтоматически при помощи фотодатчика на нижнем кронштейне. При колебаниях математического маятника его шарик (или шток для физического маятника) должен периодически перекрывать свет, идущий от источника к фотоприёмнику.

Для измерения ускорения свободного падения используем формулу для циклической частоты математического маятника:  $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ , где  $l$  – расстояние от оси подвеса маятника до центра шарика,  $g$  – ускорение свободного падения. Период колебаний маятника вычисляем по формуле  $T = t/N$ , а так как  $\omega_0 = 2\pi/T$ , то для ускорения свободного падения верно выражение

$$g = \omega_0^2 l = \frac{4\pi^2 l}{T^2} = \frac{4\pi^2 l N^2}{t^2}. \quad (16)$$



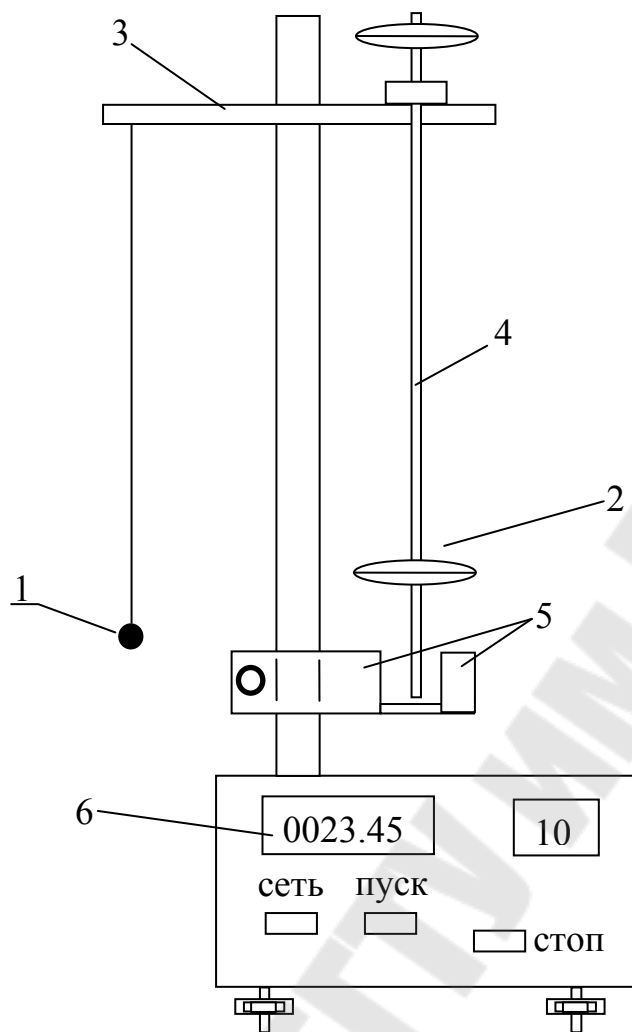


Рис. 7. Схема измерительной установки.

1 – математический маятник, 2 – физический маятник,  
3 – кронштейн, 4 – штوك, 5 – фотодатчик, 6 – секундомер.

Поскольку основная погрешность измерения промежутка времени допускается при пуске и при остановке секундомера, то желательно, чтобы на этом промежутке времени маятник совершил побольше колебаний. Действительно, погрешность измерения времени одного колебания (если нет ошибки в подсчёте их количества) будет связана с погрешностью измерения всего промежутка времени.

Погрешность косвенных измерений вычисляем по формуле:

$$\Delta g = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)^2 \Delta t^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial l}\right)^2 \Delta l^2}, \text{ где } \frac{\partial g}{\partial t}, \frac{\partial g}{\partial l} - \text{частные производные}$$

функции (16), учитывая, что систематическая погрешность измерений

мала, то  $\Delta t = \sqrt{\frac{\sum (t_i - \bar{t})^2}{n(n-1)}} t(\alpha, n)$ ,  $\Delta l = \sqrt{\frac{\sum (l_i - \bar{l})^2}{n(n-1)}} t(\alpha, n)$  погрешность прямых измерений. Здесь  $t_i, l_i$  – значения времени и длины нити при  $i$  – измерении,  $\bar{t}, \bar{l}$  – средние арифметические значения,  $t(\alpha, n)$  – коэффициент Стьюдента,  $\alpha$  – надежность эксперимента.

Для нахождения момента инерции физического маятника, используем формулу для циклической частоты собственных колебаний физического маятника  $\omega_0 = \sqrt{r_c mg / I}$ , где  $r_c$  – расстояние

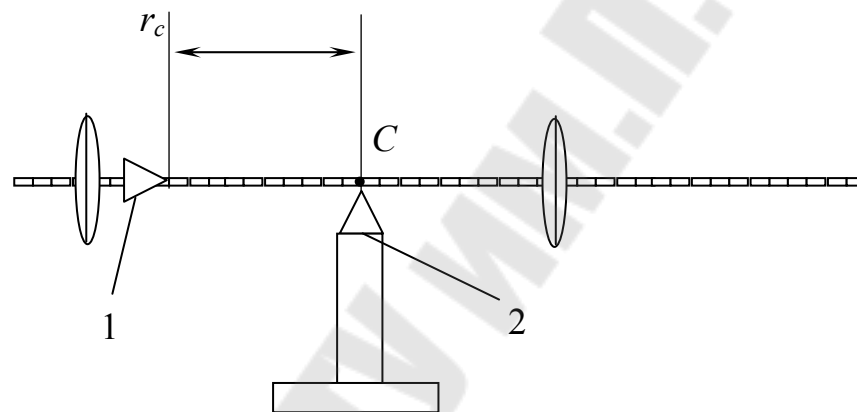


Рис. 8. Определение центра масс физического маятника.

1 – призма подвеса, 2 – опорная призма.

от центра инерции (центра масс) физического маятника до точки подвеса,  $m$  – масса маятника,  $g$  – ускорение свободного падения,  $I$  – момент инерции маятника относительно оси подвеса. Так как период колебаний ( $T$ ) связан с циклической частотой соотношением  $\omega_0 = 2\pi/T$ , то период колебаний находим из соотношения  $T = t/N$ . Здесь  $N$  – число колебаний маятника за время  $t$ . Отсюда получаем

$$\text{расчётную формулу: } I = mgr_c T^2 / (4\pi^2) = \frac{mgr_c t^2}{4\pi^2 N^2}$$

Расстояние от точки подвеса физического маятника до центра масс определяется экспериментально, путём размещения маятника горизонтально на опорной призме (см. рис. 8). Маятник будет в равновесии только в том случае, если его центр масс находится над

опорной гранью (или очень близок к ней). Измерив прямо по штоку, имеющему сантиметровые риски, расстояние от оси колебаний до центра масс (т.е. между рёбрами двух призм), получим длину радиус-вектора центра масс. При вычислениях рекомендуется считать  $g = 9,8 \frac{\text{М}}{\text{с}^2}$ . Масса физического маятника :  $m = 2,600 \text{ кг} \pm 0,001 \text{ кг}$ .

### 3. Порядок выполнения работы

#### **Задание 1**

**Измерить ускорение свободного падения при помощи математического маятника.**

1. Поверните верхний кронштейн и отрегулируйте длину нити так, чтобы математический маятник (шарик) попал в зазор фотодатчика, а центр светового пятна – на центр шарика. Шарик должен проходить зазор фотодатчика, в процессе колебания, не задевая его. Запишите значение длины подвеса маятника  $l = \dots$  мм.
2. Включите "сеть"; отклоните шарик на 3 – 5 градуса и отпустите. Нажмите клавишу "сброс", показания секундомера обнулится и он автоматически начинает отсчёт времени и количества колебаний. После нажатия клавиши "стоп" маятника сделает ещё одно колебание и секундомер автоматически прекратит отсчёт времени и количества колебаний. Поэтому, чтобы измерить время 10-ти колебаний нужно нажать клавишу "стоп" после девяти.
3. По формуле  $\bar{g} = \frac{4\pi^2 \bar{l} N^2}{\bar{t}^2}$  вычислить среднее значение ускорения свободного падения,  $\bar{l}, \bar{t}$  – брать среднеарифметическое значение длины нити маятник и времени колебаний.
4. Оценить погрешность измерения «g» с надёжностью  $\alpha = 0,95$ .

#### **Задание 2**

**Определить зависимость момента инерции физического маятника от положения его центра масс.**

1. Поверните верхний кронштейн так, чтобы шток физического маятника попал в зазор фотодатчика.

2. Отклоните маятник на 3 – 5 градусов и отпустите. Нажмите клавишу "сброс", показания секундомера обнулятся и он автоматически начинает отсчёт времени и количества колебаний, если шток периодически перекрывает свет от лампочки. После нажатия клавиши "стоп" секундомер автоматически прекращает отсчёт времени и количества колебаний. Чтобы измерить время десяти колебаний, нужно нажать клавишу "стоп" после девяти колебаний. Запишите значение числа колебаний  $N = \dots$  и их время  $t = \dots$  с.
3. Сняв маятник и, расположив его шток горизонтально на опорную призму, найдите такое положение маятника чтобы он был в положении равновесия (см. рис. 8). Груз маятника можно несколько переместить так, чтобы расстояние между рёбрами призм оказалось равным целому числу сантиметров и измерить это расстояние по шкале штока:  $d = \dots$  см.
4. Повторить измерения по п. 2 – 3 сместив груз 2 на  $2 \div 4$  см.
5. Рассчитать момент инерции маятника по формуле  $I = \frac{mgr_c t^2}{4\pi^2 N^2}$  для каждого опыта.
6. Результаты измерений занести в таблицу

Таблица 1.

№	$N$	$t$	$r_c$	$I$
1				
2				
3				
4				

Построить график зависимости  $I = f(r_c)$ . Для построения графика использовать четыре точки.

По результатам работы сделать выводы.

В выводах дать ответ на следующие вопросы:

1. Записать формулы для периода колебаний математического и физического маятника.
2. Дать вывод ускорения свободного падения через период колебания математического маятника.

3. Дать вывод момента инерции математического маятника относительно центра масс через период колебания маятника.

## Лабораторная работа № 1-8

### Измерение частоты гармонических колебаний с помощью фигур Лиссажу

#### Цель работы:

1. Изучение теории сложения гармонических колебаний.
2. Освоение методики измерения частот при помощи фигур Лиссажу.

**Приборы и принадлежности:** генератор гармонических колебаний с цифровой шкалой ГЗ-131, осциллограф С1-77.

## 1. Теоретическая часть

### 1.1. Введение

При изучении гармонических колебаний тел существует наглядный геометрический способ представления колебания в виде вращения некоторого вектора вокруг его начала. Данный способ представления колебаний называется методом векторных диаграмм.

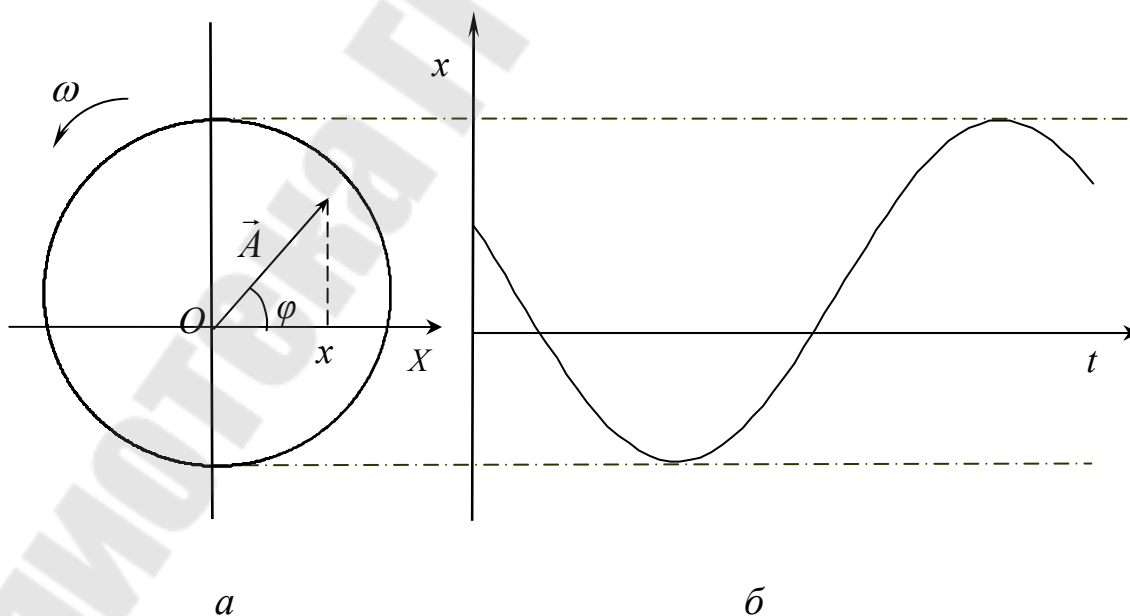


Рис. 1. Векторная диаграмма вектора  $\vec{A}$  (а) и изменение проекции вектора на ось  $Ox$  с течением времени  $t$  (б)

Рассмотрим вектор  $\vec{A}$ , который вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг точки начало координат  $O$ . Пусть в начальный момент времени ( $t_0 = 0$ ) он образует с осью  $X$  некоторый угол  $\alpha_0$ . Угол между вектором и осью будет равномерно увеличиваться по закону:  $\varphi = (\omega t + \alpha_0)$ , а проекция вектора  $\vec{A}$  на ось  $OX$  будет изменяться по гармоническому закону:  $x(t) = A \cos(\omega t + \alpha_0)$ . Модуль вектора  $A$  будет равен амплитуде гармонических колебаний. Таким образом, для графического отображения колебаний вида  $y = A \cos(\omega t + \alpha_0)$  можно использовать вместо бесконечного графика синусоиды (или косинусоиды) вращающийся вектор, длина которого, в избранном масштабе, соответствует амплитуде колебаний, а угол вектора с осью проекции соответствует фазе колебаний (рис. 1).

## 1.2. Сложение колебаний одного направления и одной частоты

При сложении двух колебаний одинаковой частоты  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$  и одного направления (по оси «X») удобно использовать метод векторных диаграмм, так как сложение синусоид (косинусоид) заменяется сложением векторов. Пусть нужно сложить два колебания с одинаковыми частотами  $\omega$   $x_1 = A_1 \cos(\omega t + \alpha_1)$  и  $x_2 = A_2 \cos(\omega t + \alpha_2)$ , но разными амплитудами  $A_1$  и  $A_2$  и начальными фазами  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ . На векторной диаграмме им соответствуют вектора  $\vec{A}_1$  и  $\vec{A}_2$  (см. рис 2). При сложении этих векторов используем правило параллелограмма и результирующий вектор будет равен  $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$ . Так как вектора  $\vec{A}_1$  и  $\vec{A}_2$  вращаются с одной угловой скоростью  $\omega$ , то треугольник образуемый этими векторами будет сохранять свою форму при вращении. Угол  $\beta$  равен  $\beta = \pi - (\varphi_2 - \varphi_1) = \pi - (\alpha_2 - \alpha_1)$ . По теореме косинусов, учитывая формулу приведения  $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$ , длина вектора  $\vec{A}$  равна  $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}$ .

Тогда результирующее колебание, согласно векторной диаграмме имеет вид:

$$x = x_1 + x_2 = A \cdot \cos(\omega t + \varphi), \quad (1)$$

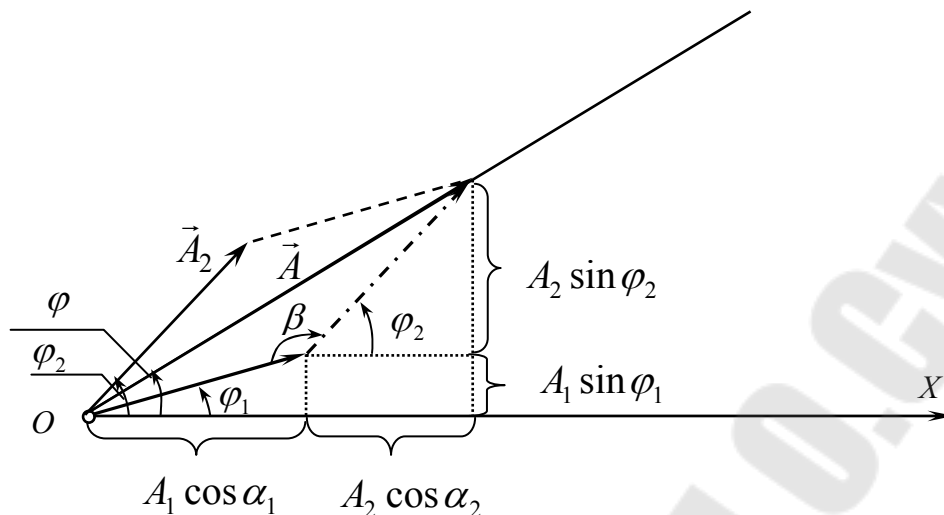


Рис. 2. Векторная диаграмма иллюстрирующая сложение векторов  $\vec{A}_1$  и  $\vec{A}_2$

где амплитуда колебаний равна  $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}$ . Начальную фазу результирующего колебания ( $\alpha$ ) находим по определению тангенса угла прямоугольного треугольника, как отношение противолежащей стороны к прилежащей

$$\operatorname{tg}(\varphi) = \frac{A_1 \sin(\alpha_1) + A_2 \sin(\alpha_2)}{A_1 \cos(\alpha_1) + A_2 \cos(\alpha_2)}.$$

### 1.3. Сложение колебаний одного направления близких частот

Рассмотрим колебания одного направления с частотами, не равными  $\omega_1 \neq \omega_2$ , но различающимися не очень сильно  $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 \ll \omega_1, \omega_2$ . Для упрощения расчетов предположим, что амплитуды колебаний равны, а начальные фазы равны нулю. Т.е.  $x_1 = a \cos \omega_1 t$  и  $x_2 = a \cos \omega_2 t$ . Тогда суммарное колебание равно  $x = x_1 + x_2 = A(\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t)$ . Используя формулу для суммы косинусов  $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$ , получим, что суммарное колебание в этом случае изменяется по закону:



$$x = \left( 2a \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right) \cdot \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t. \quad (2)$$

Решение состоит из произведения двух функций косинус. Поскольку  $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \omega_{cp} \ll \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$ , то период колебаний первой функции во много раз больше периода колебаний второй функции. За время одного колебания первого множителя произойдет большое число колебаний второго множителя. Поэтому колебания такого типа рассматривают, как колебания совершаемые с частотой  $\omega_{cp}$  амплитуда которых медленно изменяется по гармоническому закону. График таких колебаний показан на рис. 3.

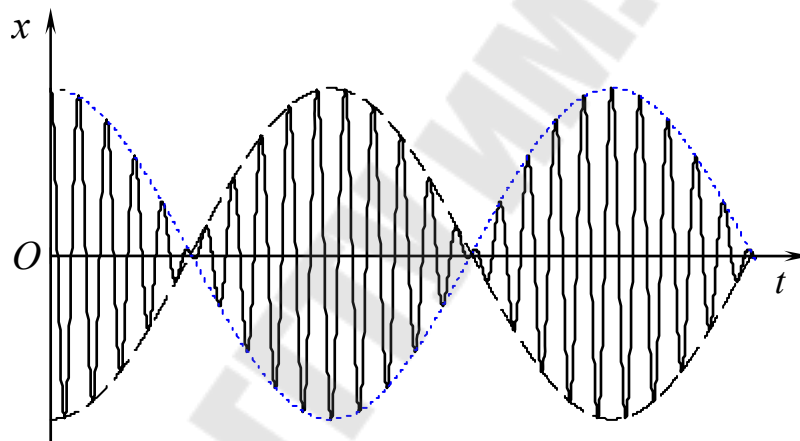


Рис. 3. Колебания при сложении близкорасположенных частот одного направления

Результирующее движение при сложении колебаний близких частот являются пульсирующей амплитудой. Такое колебание называется биением. Первый множитель в формуле (3) является знакопеременной функцией, поэтому он не может быть амплитудой колебаний. Аналитическое выражение для амплитуды имеет вид:

$$A = \left| 2a \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right|. \quad (3)$$

Частота колебаний функции (3) в два раза больше частоты колебаний функции стоящей под знаком модуля, т.е. частота биений

(2) равна  $\Delta\omega$ . Таким образом, частота пульсаций амплитуды – ее называют частотой биений – равна разности частот складываемых колебаний.

Если складываемые колебания имеют не одинаковые амплитуды, то в узловых точках биения не будут обращаться в ноль, и амплитуда биений будет изменяться в пределах:  $A_{\min} = a_2 - a_1$ ,  $A_{\max} = a_2 + a_1$ .

#### **1.4. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний.**

Рассмотрим сложения взаимно перпендикулярных колебаний. Предположим, что материальная точка совершает колебательные движения, как вдоль оси  $X$ , так и вдоль перпендикулярной к ней оси  $Y$  и необходимо найти траекторию движения  $y(x)$  материальной точки.

Пусть вдоль оси  $X$  и  $Y$  материальная точка движется по закону:

$$x = a \cos \omega t, \quad (4a)$$

$$y = b \cos(\omega t + \alpha). \quad (4б)$$

В данном случае, рассматривается сложение взаимно перпендикулярных колебаний одинаковых частот, амплитуды колебаний  $a$  и  $b$  разные, разность их фаз равна  $\alpha$  (без потери общности можно предположить, что начальная фаза колебаний вдоль оси  $X$  равна нулю).

а) рассмотрим случай, когда разность фаз равна нулю ( $\alpha = 0$ ). Тогда из уравнения (4а) получим  $\cos \omega t = x/a$ , а из (4б)  $\cos \omega t = y/b$ . Приравнивая их имеем:

$$y = \frac{b}{a} x.$$

Данное выражение описывает прямую линию лежащую в первом и третьем квадранте координатной плоскости (на рис. 4 она обозначена «а»).

б) случай, когда разность фаз равна  $\alpha = \pi$ . Из первого уравнения (3) имеем  $\cos \omega t = x/a$ , а из второго  $\cos(\omega t + \pi) = -\cos \omega t = y/b$  (использовалась формула приведения

$\cos(\alpha + \pi) = -\cos \alpha$ ). Приравнявая  $\cos \omega t$  из данных выражений, получим, что траектория движения точки имеет вид:

$$y = -\frac{b}{a}x$$

Данное выражение описывает прямую линию лежащую во втором и четвертом квадранте координатной плоскости (на рис. 4 она обозначена «д»).

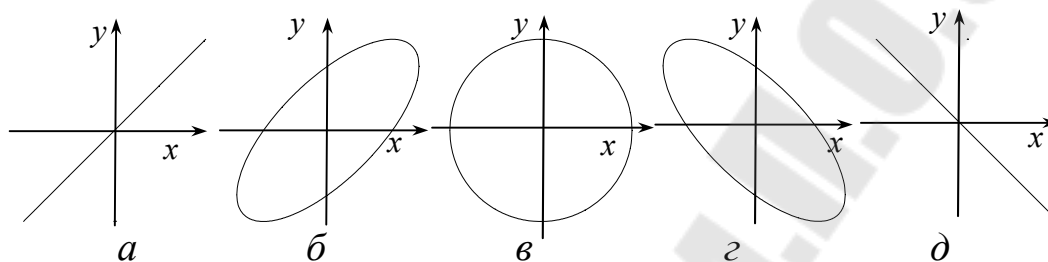


Рис. 4. Траектории движения тела при сложении колебаний одинаковых частот и при разности фаз:  $a - 0$ ,  $б - \pi/4$ ,  $в - \pi/2$ ,  $г - 3\pi/4$ ,  $д - \pi$

б) случай, когда разность фаз равна  $\alpha = \pi/2$ .

Из уравнения (4а) имеем  $\cos \omega t = x/a$ , а из (4б), используя формулу приведения, получим  $\cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) = -\sin \omega t = y/b$ . Возводим косинус и синус в квадрат, используя тригонометрическую формулу  $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ , получим, что траектория движения в этом случае описывается формулой:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 .$$

Это уравнения описывает кривую второго порядка - эллипс, оси которого лежат на осях координат. В частном случае, когда амплитуды колебаний равны, получаем окружность (на рис. 4 она обозначена «в»).

В случаях, когда разность фаз складываемых колебаний принимает промежуточное значение, то будут получаться, наклонные к осям координат, эллипсы (на рис. 4 они обозначены буквами «б» и «г»).

Если же частоты складываемых колебаний близки, но не равны ( $\omega_1 \neq \omega_2$ ), то тогда уравнения (4а), (4б) можно представить в виде:

$$x = a \cos \omega t, \quad (5a)$$

$$y = b \cos(\omega t + (\alpha + \Delta\omega t)), \quad (5б)$$

где  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ ,  $\omega = \omega_1$ . Выражение  $(\alpha + \Delta\omega t)$ , можно рассматривать как разность фаз, медленно изменяющихся по линейному закону. Результирующее движение, в этом случае, происходит по медленно видоизменяющейся кривой, которая будет последовательно принимать формы, отвечающие всем значениям разности фаз от  $-\pi$  до  $+\pi$ . По скорости изменения фигуры можно судить о величине несовпадения частот. Чем больше разность частот колебаний, тем с большей скоростью будет изменяться форма фигуры.

Если частота взаимно перпендикулярных колебаний не одинакова, то траектория результирующего колебания имеет вид сложных кривых, называемых фигурами Лиссажу.

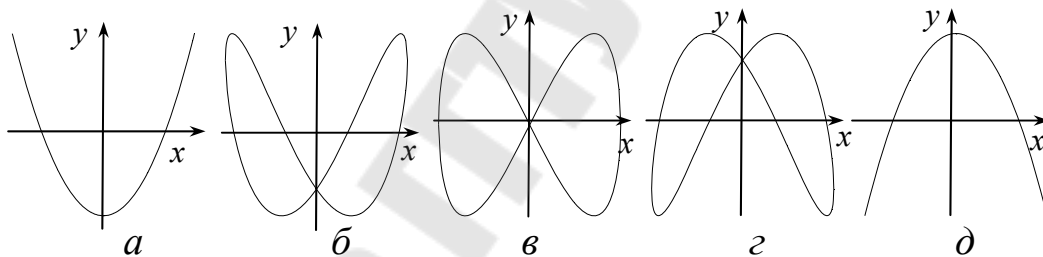


Рис. 5. Фигуры Лиссажу при отношении частот  $\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{1}{2}$  и при разности

фаз:  $a - 0$ ,  $б - \pi/4$ ,  $в - \pi/2$ ,  $г - 3\pi/4$ ,  $д - \pi$

Если частоты складываемых, взаимно перпендикулярных колебаний не одинаковы, то траектория движения имеет вид довольно сложных кривых, называемых фигурами Лиссажу. При отношении частот складываемых колебаний как отношение целых чисел  $\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{n}{m}$ , точка описывает стабильную кривую. На рис. 5 приведены фигуры Лиссажу получаемые при отношении частот  $\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{1}{2}$  и различных

разности фаз между ними. Если отношения складываемых частот относятся как  $\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{2}{1}$ , то получатся аналогичные, что и на рис. 5

только повернутые на  $90^\circ$  градусов.

Чем больше целые числа входящие в отношения частот, тем сложнее получается фигура Лисажу. Для примера приведены на рис. 6 фигуры Лисажу получаемые при соотношении частот  $\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{1}{3}$ .

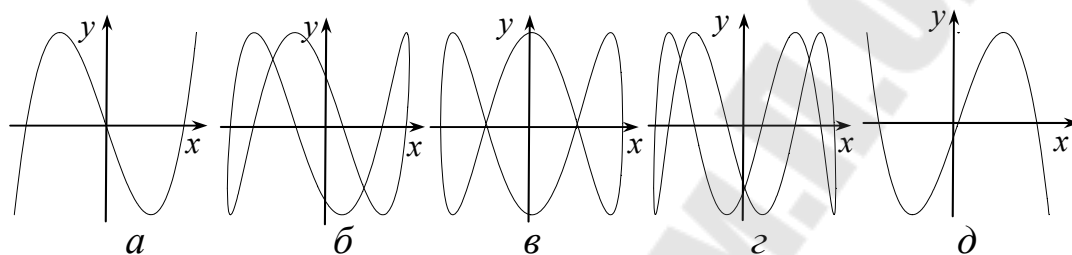


Рис. 8.6 Фигуры Лисажу при отношении частот  $\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{1}{3}$  и при разности фаз:  $a - 0$ ,  $б - \pi/4$ ,  $в - \pi/2$ ,  $г - 3\pi/4$ ,  $д - \pi$

Здесь рассматривались отношения циклических частот складываемых колебаний, но все вышесказанное верно и для отношения обычных частот колебаний, так как  $\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{\nu_x}{\nu_y}$ .

## 2. Описание установки и методики проведения измерений

Установка для проведения лабораторной работы состоит генератора электромагнитных колебаний (звукового генератора) и осциллографа. На вход «у» осциллографа подаются колебания фиксированной частоты. А на вход «х» – колебания частоту которых можно менять ручкой «частота».

С помощью ручки-лимба меняя частоту колебаний подаваемых на вход «х», получаем на экране фигуры Лисажу, соответствующие отношению частот  $\frac{\nu_y}{\nu_x} = \frac{m}{n}$ . Тогда частота колебаний подаваемая на

1

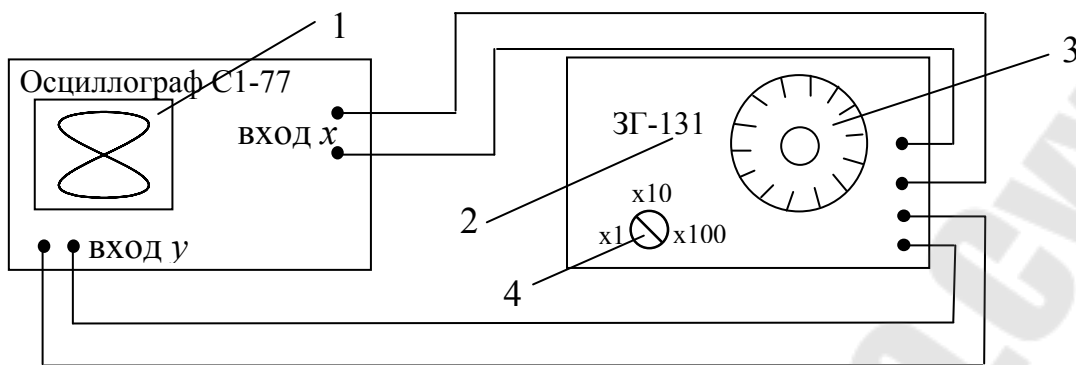


Рис. 7. Схема лабораторной установки  
 1 – осциллограф, 2 – звуковой генератор, 3 – ручка «частота»,  
 4 – ручка регулировки множителя частоты.

вход «у» будет определяться по формуле  $v_y = \frac{m}{n} v_x$ . При известной частоте  $v_x$  можно достаточно точно определить частоту  $v_y$ .

### 3. Порядок выполнения работы

1. Подключить приборы в сеть и включить тумблер «сеть». Дать прогреться осциллографу несколько минут.
2. К входу «x» осциллографа подать с звукового генератора колебания, частота которых задаем ручкой «частота». На вход «у» подаем колебания фиксированной частоты (задается преподавателем).
3. Изменяя частоту генератора колебаний, получить на экране осциллографа устойчивые фигуры Лисажу, соответствующие отношениям частот  $\frac{v_x}{v_y} = \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{1}$ . Полученные значения частот занести в таблицу 1.
4. Вычислите частоту подаваемую на вход «у» по формуле  $v_y = \frac{m}{n} v_x$ . Результаты вычислений занесите в таблицу 1.

Таблица 1

Соотношение частот	1/1	1/2	1/3	2/1
$\nu_x$				
$\nu_y$				

5. Пренебрегая систематической погрешностью прибора, вычислите погрешность измерений частоты по формуле:

$$\Delta \nu_y = \sqrt{\frac{\sum (\nu_{yi} - \bar{\nu}_y)^2}{n(n-1)}} t(\alpha, n).$$

Здесь  $\nu_{yi}$  - искомая частота колебаний генератора в  $i$  – измерении,  $\bar{\nu}_y$  - среднее арифметическое значение искомой частоты,  $t(\alpha, n)$  - коэффициент Стьюдента,  $\alpha$  – надежность эксперимента ( $\alpha = 0,95$ ).

6. В отчете представить рисунки фигур Лисажу для каждого изучаемого отношения частот (не менее 3-х рисунков для каждого отношения).

По результатам работы сделать выводы.

В выводах дать ответ на следующие вопросы:

1. Почему на экране осциллографа фигуры Лисажу медленно меняют свою конфигурацию.
2. Если на входы осциллографа будут подаваться колебания стабильных частот, но отношения частот не будут равны отношению целых чисел, что мы будем наблюдать на экране?

## Лабораторная работа № 1-12

### Определение скорости звука в воздухе методом стоячих волн

#### **Цель работы:**

1. Изучить теорию распространения волн в среде;
2. Изучить стоячие волны и определить скорость звука в воздухе методом стоячих волн.

**Приборы и принадлежности:** звуковой генератор (ГЗ-131), телефон, микрофон, осциллограф (С1-77), трубка переменной длины, линейка.

### 1. Теоретическая часть

#### 1.1. Механические волны.

Если в упругой среде возбудить колебания ее частиц, то вследствие взаимодействия между частицами, эти колебания начнут распространяться в среде. *Процесс распространения колебаний в пространстве называется волной.*

При распространении волны в среде (твердой, жидкой или газообразной) частицы среды не движутся вместе с волной, а совершают колебания около своих положений равновесия. *Основным свойством всех волн независимо от их природы является перенос энергии без переноса вещества.*

В зависимости от направления колебаний частиц по отношению к направлению распространения волны, различают продольные и поперечные волны. В продольной волне частицы среды колеблются вдоль направления распространения волны. В поперечной волне частицы среды колеблются в направлениях, перпендикулярных к направлению распространения волны (см. рис. 1). Механические поперечные волны могут возникнуть лишь в средах, обладающих сопротивлением сдвигу. Поэтому в твердых средах наблюдаются, как продольные механические волны, так и поперечные. В жидких и газообразных средах возможны только продольных волны.



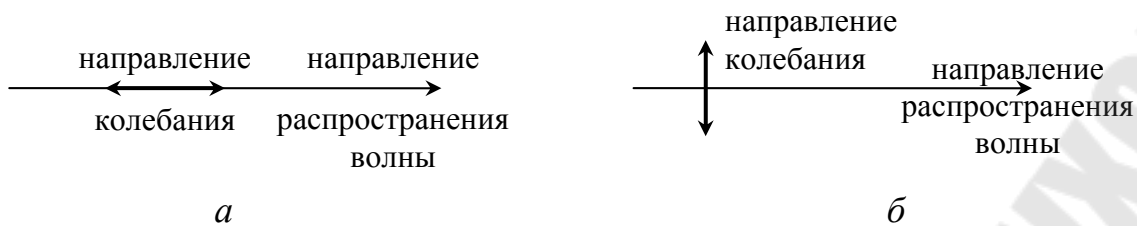


Рис. 1. Направление колебание частиц среды в продольных (а) и поперечных волнах (б)

При распространении поперечной волны наблюдаются колебания частиц среды, от положения равновесия, в направлениях перпендикулярных по отношению к направлению распространению волны (см. рис. 2 б). При прохождении продольной волны создаются периодические сгущения и разрежения частиц среды (см. рис. 2 в).

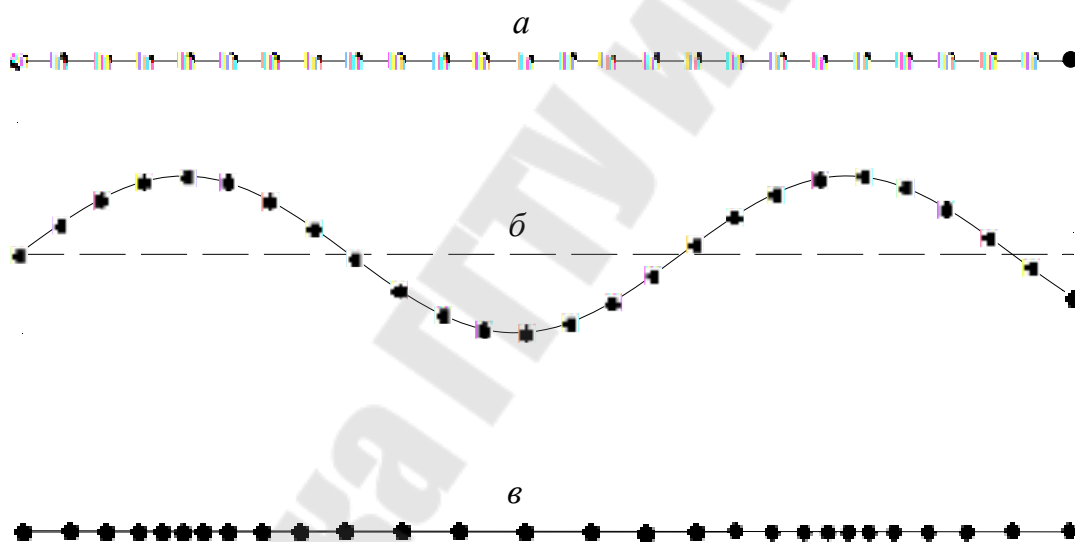


Рис. 2. Расположение частиц среды:  
 а – при отсутствии волн, б – при распространении поперечной волны,  
 в – при распространении продольной волны.

В отличие от волн внутри среды, на границе двух сред волны более сложные. В волнах распространяющихся на границе двух различных сред частицы среды совершают колебания, как вдоль направления распространения волны, так и поперечные колебания. Например, поплавок на поверхности воды, при распространении на ней волн, движется по траектории близкой к форме эллипса.

## 1.2. Плоские и сферические волны

При распространении механических волн в среде смещение частиц среды передается через упругие взаимодействия на соседние частицы, которые также вовлекаются в колебательное движение. Так как скорость передачи упругих сил конечна, то и скорость волн также конечна. Пусть в некоторый момент времени в точке  $O$  возникли колебания которые начали распространяться по всем направлениям. Распространяясь от источника колебаний, волновой процесс охватывает все новые и новые части пространства. Геометрическое место точек, до которых доходят колебания к моменту времени  $t$ , называется фронтом волны (или волновым фронтом). Волновой фронт представляет собой ту поверхность, которая отделяет часть пространства, уже вовлеченную в волновой процесс, от области, в которой колебания еще не дошли.

Геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе, называется волновой поверхностью. В то время как в то время как волновой фронт в каждый момент времени только один, волновых поверхностей существует бесконечное множество. Волновые поверхности остаются неподвижными, а волновой фронт все время перемещается.

Волновые поверхности могут быть любой формы. В простейших случаях они имеют форму плоскости или сферы. Соответственно волна в этих случаях называется плоской или сферической.

**Плоской волной** называется такая волна волновые поверхности которой представляют собой систему параллельных друг другу плоскостей. Уравнение плоской гармонической волны, распространяющейся вдоль оси  $OX$ , имеет вид:

$$\xi = A_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0). \quad (1)$$

Здесь  $\xi$  – смещение частиц среды от положения равновесия,  $A_0$  – амплитуда колебаний,  $\omega$  – циклическая частота колебаний,  $k$  – волновое число,  $t$  – время. Аргумент косинуса (1) называется фазой волны  $\varphi = \omega t - kx + \varphi_0$ , а  $\varphi_0$  – начальная фаза волны. В плоской волне, все частицы лежащие в плоскостях перпендикулярных направлению распространения волны, имеют одинаковую фазу, и следовательно, одно и тоже смещение  $\xi$  от положения равновесия.

Основные параметры гармонических волн:

**Амплитуда** – максимальное отклонение частиц среды от положения равновесия при распространении механической волны в среде.

**Частота** ( $\nu$ ) – число колебаний частиц за одну секунду. Частота связана с циклической частотой соотношением  $\omega = 2\pi\nu$  (циклическая частота – число колебаний частиц среды за  $2\pi$  секунд).

**Период волны** ( $T$ ) – время за которое происходит одно полное колебание частиц среды. Частота связана с периодом соотношением

$$\nu = \frac{1}{T}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

**Длина волны** ( $\lambda$ ) – расстояние на который распространяется волна за время одного периода  $\lambda = VT$ , где  $V$  – скорость распространения волны. Для длины волны можно дать и второе определение: **Длина волны** – расстояние между ближайшими точками среды, в которых разность фаз колебаний равна  $2\pi$ .

**Волновое число** ( $k$ ) – число длин волн укладывающихся на длине  $2\pi$  метра. Т.е.  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ .

Аргумент косинуса в выражении (1) называется фазой гармонической волны  $\varphi = \omega t - kx + \varphi_0$ , а тогда начальная фаза  $\varphi_0$  это значение фазы в точке  $x = 0$  в момент времени  $t = 0$ . Фаза гармонической волны описывает характер колебаний.

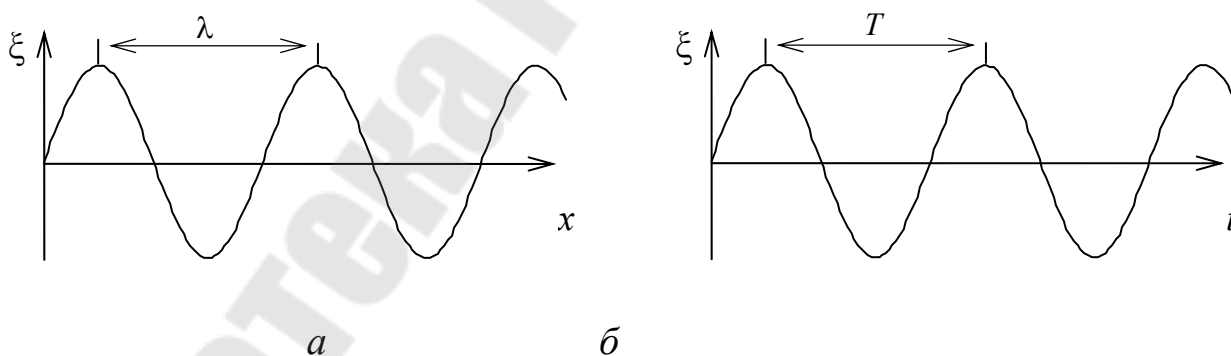


Рис. 3. Зависимость смещение частиц среды  $\xi$  от координаты  $x$  в некоторый момент времени  $t$  (а), и зависимость смещение  $\xi$  некоторой точки среды от времени  $t$  (б).

В непоглощающих средах, амплитуда плоской волны не зависит от координаты, т.е. она одинакова в разных точках пространства.

Если плоская волна распространяется вдоль произвольного направления по отношению к осям координат, то уравнение плоской волны в этом случае имеет вид:

$$\xi = A_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0). \quad (2)$$

Здесь  $\vec{k}$  – волновой вектор,  $\vec{r}$  – радиус вектор рассматриваемой точки,  $\vec{k} \cdot \vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z$  – скалярное произведение волнового вектора на радиус-вектор. Волновой вектор направлен вдоль направления распространения волны, а его модуль равен  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ .

*Волна называется сферической, если ее волновые поверхности имеют вид концентрических сфер. Центр этих сфер называется центром волны.*

Простейшей сферической волной является гармоническая сферическая волна, которая в декартовой системе координат с началом в центре сферической волны, имеет вид:

$$\xi = A(r) \sin(\omega t - kr + \varphi_0), \quad (3)$$

где  $\xi$  – смещение частиц среды от положение равновесия,  $\varphi = \omega t - kr + \varphi_0$  – фаза волны,  $\varphi_0$  – начальная фаза колебаний в центре волны  $r = 0$  в момент времени  $t = 0$ ,  $A(r)$  – амплитуда волны,  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  – расстояния от рассматриваемой точки до центра волны.

Для сферической волны распространяющейся в непоглощающей среде амплитуда обратно пропорционально расстоянию от центра волны, т.е.  $A = \frac{A_0}{r}$ , где параметр  $A_0$  – амплитуда волны на расстоянии один метр от его центра.

*Скорость распространения гармонической волны называется фазовой скоростью ( $V$ ). Она равна скорости перемещения в пространстве, точек поверхности, соответствующих любому фиксированному значению фазы гармонической волны. Приравнивая фазу волны константе  $\varphi = \omega t - kx = \text{const}$  и беря производную по*

времени  $\frac{d}{dt}(\omega t - kx) = \omega - k \frac{dx}{dt} = \omega - kV = 0$ , получим фазовую

скорость волны  $V = \frac{\omega}{k} = \lambda \nu$ , где  $\lambda$  – длина волны,  $\nu$  – частота волны.

В общем случае, фазовая скорость гармонических волн зависит от их частоты. Явление зависимости фазовой скорости упругих волн от их частоты называется *дисперсией* волн.

Уравнения волн являются решением некоторого дифференциального уравнения, называемого волновым уравнением, которое в декартовой системе координат имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0. \quad (4)$$

Любое решение удовлетворяющее волновому уравнению описывает волну. В зависимости от начальных и граничных условий накладываемых на дифференциальное уравнение (4), мы можем получить волны различных видов. Как легко проверить прямой подстановкой функций (1) – (3) в волновое уравнение (4), плоские и сферические волны также являются решением данного уравнения.

### 1.3. Интерференция волн. Стоячие волны.

При изучении наложении волн важным понятием является когерентность волн. Две волны называются *когерентными*, если в каждой из точек среды, они обладают постоянной разностью фаз. Когерентными могут быть лишь волны на одной частоту.

При сложении когерентных волн возникает явление интерференции.

**Интерференция** – явление наложения в пространстве когерентных волн при котором происходит устойчивое во времени их взаимное усиление в одних точках пространства и ослабления в других точках.

Важный случай интерференции наблюдается при наложении двух встречных плоских волн с одинаковой амплитудой. Возникающий в результате колебательный процесс называется стоячей волной. Стоячие волны возникают при отражении волн от

преград. Падающая на преграду волна и бегущая ей навстречу отраженная, налагаясь друг на друга, дают стоячую волну.

Рассмотрим две плоские волны одной амплитуды и частоты распространяющиеся навстречу друг другу.

$$\xi_1 = A \sin(\omega t - kx), \quad (4a)$$

$$\xi_2 = A \sin(\omega t + kx). \quad (4б)$$

Знак минус перед  $k$  в (4a) означает, что волна распространяется в сторону увеличения координаты  $x$ , а знак плюс в (4б) – волна распространяется в сторону уменьшения  $x$ . Суммарная волна равна:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2A \cos(kx) \sin \omega t. \quad (5)$$

При выводе выражения (5) использовалась формула суммы синусов  $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ .

Амплитуда стоячей волны (5) является функцией только координаты  $x$ ,

$$A_{\text{ст}} = |2A \cos kx|. \quad (6)$$

Так как амплитуда стоячей волны является модуль знакопеременной функции косинус, то длина стоячей волны  $\lambda_{\text{ст}}$  будет в два раза меньше интерферируемых волн.

Интенсивность волны пропорциональна квадрату амплитуды, поэтому распределение интенсивности при интерференции встречных волн является стационарным. Из-за этого оно получило название стоячих волн. Точки в которых амплитуда стоячей волны равна нулю, называются *узлами стоячей волны*, а точки, в которых амплитуда  $A_{\text{ст}}$  максимальна, называются *пучностями стоячей волны* (см. рис. 4).

Из формулы (6) следует, что максимум амплитуды наблюдается в точках среды, где  $kx = \pm m\pi$ ,  $m = 1, 2, \dots$ . Отсюда координаты пучностей равны  $x_{\text{пуч}} = \pm \frac{m}{k} \pi = \pm \frac{m\lambda}{2\pi} \pi = \pm m \frac{\lambda}{2}$ . В пучностях амплитуда стоячей волны равна:  $A_{\text{ст}} = 2A$ .

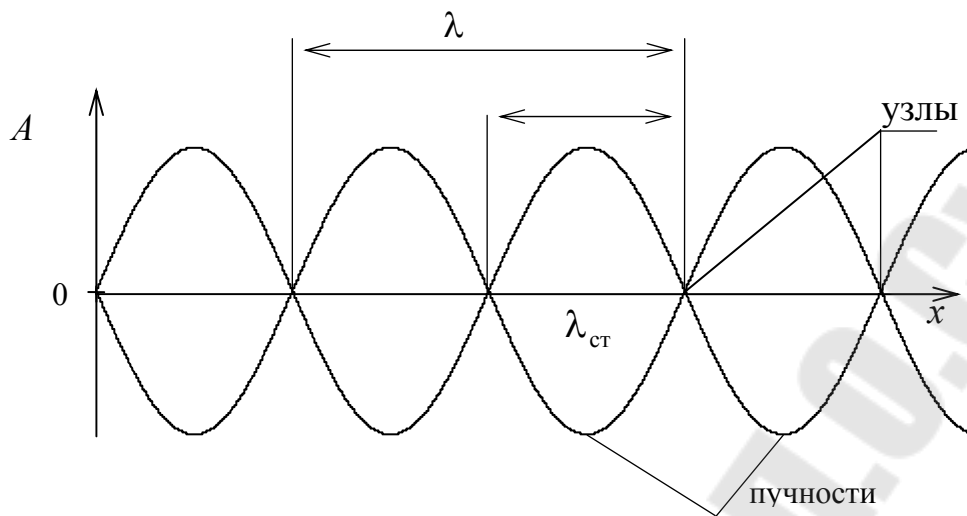


Рис. 4. Распределение амплитуды стоячей волны вдоль координаты  $x$ .

В точках среды, где  $kx = \pm \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi$ , функция (6) минимальна, следовательно координаты узлов стоячей волны равны  $x_{\text{узн}} = \pm \left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}$ . Амплитуда узлов равна:  $A_{\text{ст}} = 0$ .

Расстояние между двумя соседними узлами или двумя соседними пучностями называется длиной стоячей волны. Длина стоячей волны равна  $\lambda_{\text{ст}} = \frac{\lambda}{2}$ , где  $\lambda$  – длина волн участвующих в интерференции. Длина волны связана с скоростью волны ( $V$ ) соотношением  $\lambda = \frac{V}{\nu}$ , где  $\nu$  – частота волны. Для нахождения скорости волны в среде можно использовать выражение:

$$V = 2\lambda_{\text{ст}} \nu . \quad (7)$$

Образование стоячих волн наблюдают при интерференции бегущей и отраженной волн. Если среда, от которой происходит отражение, менее плотная, то в месте отражения получается пучность, если более плотная – узел. Образование узла связано с тем, что волна отражаясь, от более плотной среды, меняет фазу на противоположную и у границы происходит сложение колебаний противоположных направлений, в результате чего получается узел.

Бегущая волна в направлении своего распространения переносит энергию колебательного движения. В случае стоячей волны переноса энергии нет. Полная энергия стоячей волны, заключенная между узлами, остается постоянной.

#### **1.4. Звуковые волны**

Волны распространяющиеся в воздухе могут непосредственно воспринимать слуховым аппаратом человека, они вызывают ощущение звука. *Упругие волны в среде, имеющие частоту, лежащую в пределах от 20 до 20 000 Гц называются звуковыми волнами.* Упругие волны с частотой, меньшей 20 Гц называют инфразвуковыми; а волны с частотами, превышающими 20 000 Гц, называют ультразвуковыми. Инфра- и ультразвуковые волны человеческое ухо не воспринимает.

Воспринимаемые звуки люди различают по высоте, тембру и громкости. Каждой из этих субъективных оценок соответствует определенная физическая характеристика звуковой волны. Всякий реальный звук представляет собой наложение гармонических колебаний с определенным набором частот. Набор частот колебаний, присутствующих в данном звуке, называется его акустическим спектром. Если в звуке присутствуют колебания всех частот то спектр называется сплошным. Если звук состоит из колебаний дискретных (т. е. отделенных друг от друга конечными интервалами) частот  $\nu_1 > \nu_2 > \nu_3$  и т. д., то спектр называется линейчатым.

Сплошным акустическим спектром обладают шумы. Колебания с линейчатым спектром вызывают ощущение звука с определенной высотой. Такой звук называется тональным. Высота тонального звука определяется основной (наименьшей) частотой ( $\nu_1$ ). Относительная интенсивность обертонов, т. е. колебаний с частотами  $\nu_1$ ,  $\nu_2$  и т. д., определяет окраску, или тембр, звука. Различный спектральный состав звуков, возбуждаемых разными музыкальными инструментами, позволяет отличить на слух, например, флейту от скрипки или рояля.

Под интенсивностью звуковых волн понимают среднее значение плотности потока энергии, которую несет с собой волна. Для того чтобы вызвать звуковое ощущение, волна должна обладать интенсивностью большей порога слышимости. **Порог слышимости** –



минимальная интенсивность звуковой волны воспринимаемая человеком.

Наиболее чувствительно человеческое ухо к частотам от 1000 до 4000 Гц. В этой области частот порог слышимости составляет в среднем около  $10^{-12} \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}}$ . При других частотах порог слышимости

лежит выше. При интенсивностях порядка  $1 \div 10 \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}}$  волна

перестает восприниматься как звук, вызывая в ухе ощущение боли и давления. **Болевой порог** – минимальная интенсивность звука вызываемое болевое ощущение. Болевой порог зависит от частоты звуковой волны.

Субъективно оцениваемая громкость возрастает гораздо медленнее, чем интенсивность звуковых волн. При возрастании интенсивности в геометрической прогрессии громкость возрастает линейно. На этом основании уровень громкости  $L$  определяется как десятичный логарифм отношения интенсивности данного звука  $I$  к интенсивности порога слышимости  $I_0 = 10^{-12} \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}}$ :

$$L = \log \frac{I}{I_0}, \quad (8)$$

Единицей уровня громкости  $L$ , определяемой формулой (8), является бел. Обычно пользуются в 10 раз меньшей единицей — децибелом (дБ). Значение громкости звука  $L$  в децибелах определяется формулой  $L = 10 \log \frac{I}{I_0}$ . Отношение уровней громкости

двух любых интенсивностей звуковых волн  $I_1$  и  $I_2$  также может быть выражено в децибелах:

$$L = 10 \cdot \log \frac{I_1}{I_2} \quad (9)$$

По формуле (9), если интенсивности первой звуковой волны  $I_1$  в 100 раз больше интенсивности второй волны  $I_2$ , то уровень громкости первого звука в 20 дБ больше. Если же отношение интенсивностей волн равно 1000 то говорят, что уровень громкости больше на 30 дБ.

Диапазон интенсивностей, при которых волна вызывает в человеческом ухе звуковое ощущение, соответствует значениям уровня громкости от 0 до 130 дБ.

Энергия, которую несут с собой звуковые волны, крайне мала. Если, например, предположить, что стакан с водой полностью поглощает всю падающую на него энергию звуковой волны с уровнем громкости в 70 дБ (в этом случае количество поглощаемой в секунду энергии будет составлять примерно  $60 \cdot 10^{-9} \frac{\text{Дж}}{\text{с}}$ ), то для того, чтобы нагреть воду от комнатной температуры до кипения, потребуется время порядка тридцати тысяч лет.

## 2. Описание установки и методики проведения измерений.

Установка для измерения скорости звука состоит из волнового канала, звукового генератора и осциллографа (рис. 5). Волновой

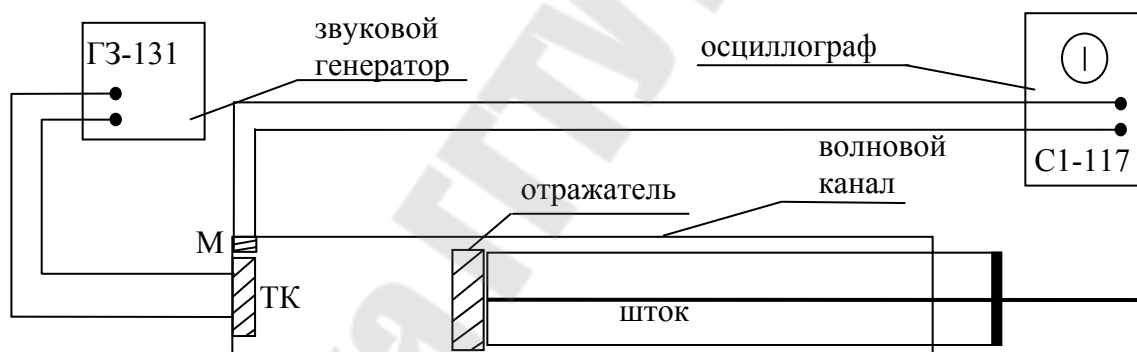


Рис. 5. Схема установки проведения работы по измерению скорости звука.

канал, представляет собой металлическую трубу, в которой может свободно перемещаться поршень с отражателем. Положение поршня определяется длиной выдвинутого штока с помощью миллиметровой линейки. В левой части трубы помещен микрофон М и телефонная капсула ТК, соединенный со звуковым генератором. Электрические колебания звукового генератора в телефонной капсуле преобразуются, с помощью электромагнита, в механические колебания мембраны, которая становится непосредственно источником звука, попадающего в волновой канал. В результате

сложения падающей и отраженной от отражателя волн образуется стоячая волна.

Звуковая стоячая волна, преобразуется в электрический сигнал микрофоном, соединенным со входом осциллографа. Когда у микрофона оказывается пучность стоячей волны, звук усиливается, а длина полоски на экране осциллографа становится максимальной.

Перемещая поршень с отражателем, фиксируем положения штока по шкале линейки при которых наблюдается максимальный сигнал (на экране осциллографа). Расстояния между этими положениями штока определяет длину стоячей волны.

Скорость звука определяют по формуле (7):  $V = 2\lambda_{ст} \nu$ .

### 3. Порядок выполнения работы

#### Задание 1. Определение скорости звука

1. Включить в сеть 220 В электронный осциллограф и звуковой генератор и дайте им прогреться 5-7 минут. На экране осциллографа должен появиться сигнал.
2. Установите частоту генератора, заданную преподавателем.
3. Провести три измерения частоты, каждое через 30 секунд. Найти среднее значение частоты  $\bar{\nu}$ .
4. Плавно перемещая поршень с отражателем, т.е. выдвигая шток, последовательно зафиксировать на линейке всех доступных для наблюдения пучностей сигнала (на экране осциллографа наблюдается максимум амплитуды сигнала). Измерьте расстояния между пучностями. Данные занести в таблицу 1.

Таблица 1

$\lambda_{ст1}$	$\lambda_{ст2}$	$\lambda_{ст3}$	$\lambda_{ст4}$	$\lambda_{ст5}$	$\bar{\lambda}_{ст}$

5. Пренебрегая систематической погрешностью прибора, вычислите погрешность измерений длины стоячей волны и частоты

по формуле:  $\Delta x = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} t(\alpha, n)$ , где  $x$  – измеряемая величина,  $n$

– число измерений,  $t(\alpha, n)$  – коэффициент Стьюдента

6. Вычислить скорость звука в воздухе по формуле:  $\bar{V} = 2\bar{\lambda}_{ст} \bar{\nu}$ .

7. Оценить погрешность косвенных измерений  $V$  по формуле:

$$\Delta V = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial \lambda_{\text{ст}}}\right)^2 \Delta \lambda_{\text{ст}}^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial v}\right)^2 \Delta v^2} .$$

8. Представить результаты измерений с учетом погрешностей.

Сделать выводы по результатам проделанной работы.

В выводах дать ответ на следующие вопросы:

1. Дать определение пучностям и узлам стоячей волны. Записать расстояние между узлами и пучностями.
2. Дать вывод формулы для определения скорости звука от длины стоячей волны?

## Литература

1. Савельев, И.В. Курс общей физики/ И.В. Савельев. – Т 1. – М.: Наука.,1982. – 496 с.
2. Детлаф, А.А., Курс физики/ А.А. Детлаф, Б.М. Яворский. – М.: Высшая школа, 1999. – 718 с.
3. Трофимова, Т.И. Курс физики/ Т.И. Трофимова.– М.: Высшая школа, 1997. – 542 с.
4. Сивухин, Д.В. Общий курс физики. Механика/ Д.В. Сивухин – Т.1 – М.:Наука, 1979. – 756 с.
5. Яворский, Б.М. Справочник по физике/ Б.М. Яворский, А.А. Детлаф. – М.: Наука, 1990. – 624 с.

## Содержание

1. Предисловие	3
2. <i>Лабораторная работа № 1-7</i> Изучение механических гармонических колебаний.....	4
3. <i>Лабораторная работы № 1-8</i> Изучение частоты гармонических колебаний с помощью фигур Лиссажу.....	22
4. <i>Лабораторная работа № 1-12</i> Определение скорости звука в воздухе методом стоячих волн.....	32
5. Литература.....	45

**Шаповалов Петр Степанович**

**ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ  
И ВОЛНЫ**

**Лабораторный практикум  
по курсу «Физика» для студентов  
инженерно-технических специальностей  
дневной формы обучения**

Подписано к размещению в электронную библиотеку  
ГГТУ им. П. О. Сухого в качестве электронного  
учебно-методического документа 24.05.10.

Рег. № 13Е.  
E-mail: [ic@gstu.by](mailto:ic@gstu.by)  
<http://www.gstu.by>