Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Техническая механика»

С. Ф. Андреев

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

КУРС ЛЕКЦИЙ
по одноименной дисциплине для студентов инженерно-технических специальностей заочной формы обучения
В трех частях
Часть 2
Кинематика

Гомель 2010

УДК 531(075.8)
ББК 22.21я73
А65

Рекомендовано научно-методическим советом
машиностроительного факультета ГГТУ им. П. О. Сухого
(*протокол № 2 от 27.10.2009 г.*)

Рецензент: канд. техн. наук, доц. каф. «Технология машиностроения»
ГГТУ им. П. О. Сухого *Э. И. Дмитриченко*

Андреев, С. Ф.

А65 Теоретическая механика : курс лекций по одноим. дисциплине для студентов инженер.-техн. специальностей заоч. формы обучения : в 3 ч. Ч. 2. Кинематика / С. Ф. Андреев. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2010. – 100 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: http://lib.gstu.local. – Загл. с титул. экрана.

Содержит материал по основным темам кинематики точки и кинематики твердого тела. Значительное место отводится истолкованию элементарных понятий кинематики и векторной алгебры, приводятся иллюстрированные примеры.

Для студентов инженерно-технических специальностей заочной формы обучения.

УДК 531(075.8)
ББК 22.21я73

1. ВВЕДЕНИЕ В КИНЕМАТИКУ

1.1. Основные понятия кинематики

Кинематикой называется раздел теоретической механики, в котором изучаются зависимости между величинами, характеризующими состояние материальных тел, но не рассматриваются причины, вызывающие изменение этого состояния, то есть не учитывается взаимодействие тел.

Слово «кинематика» происходит от греческого слова «кинема», что означает движение, то есть изменение положения тела в пространстве.

Подобно геометрии, изучающей пространственные свойства тел, и не рассматривающей их материальные признаки (вес, цвет, твердость и т. д.), кинематика, рассматривает движение тел, оставляя в стороне вопрос о связи этого движения с материальной структурой тел и их свойствами. Движущееся тело рассматривается в кинематике лишь как некоторый геометрический образ.

Кинематика целиком основывается на аксиомах и положениях геометрии, но отличается от нее тем, что, кроме пространства, проходимого движущимся телом, она рассматривает еще и время, за которое совершается это движение.

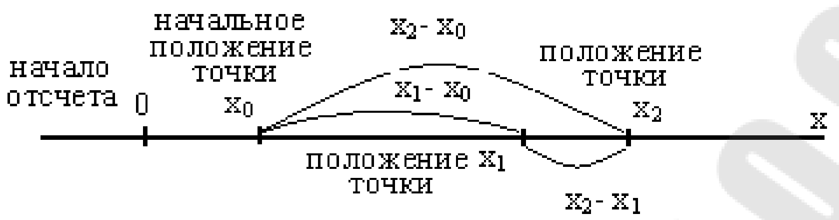
Кинематика – это геометрия четырех измерений. Первые три измерения определяют пространство, связанное с системой отсчета. Четвертое измерение - время.

Время является скалярной непрерывно изменяющейся величиной и рассматривается в задачах кинематики как независимая переменная величина (аргумент). Все другие величины, изменяющиеся с течением времени, рассматриваются как функции времени - $f(t)$.

Положение точки на координатной оси, как известно, определяется расстоянием ее от некоторой другой точки- точки отсчета. Аналогично, на оси можно изобразить данный момент времени t_k, который определяется промежутком времени $\Delta t_k = t_k - t_0$, $(k=1,2,3,...)$, протекающим от некоторого начального момента времени t_0 (рис.1.1.1).

Для начального момента времени во многих задачах можно принять $t_0=0$.

Моменты времени $t_1, t_2, t_3, \dots$ определяются соответственно промежутками времени $\Delta t_1 = t_1 - t_0$, $\Delta t_2 = t_2 - t_0$ отделяющими их от начального момента времени, а промежуток времени между двумя моментами времени - разностью $\Delta t_{2-1} = t_2 - t_1$.



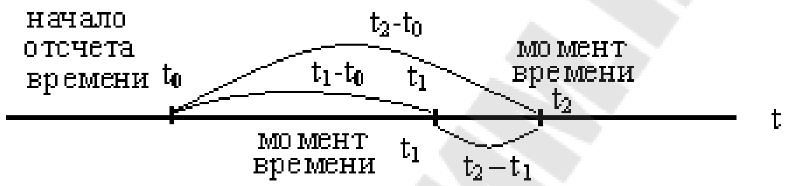


Рис.1.1.1.

Всякое механическое движение материального тела мы можем наблюдать и изучать лишь по отношению к каким-либо другим телам. Невозможно определить кинематическое состояние данного тела, не принимая во внимание другие тела.

Движение одного и того же тела относительно разных систем отсчета может быть различным. Например, для наблюдателя, находящегося на палубе быстроходного катера движущегося по реке, какой-нибудь лежащий на ней предмет неподвижен, в то время как для наблюдателя, находящегося на берегу, он движется. Мяч, подброшенный вертикально вверх на палубе катера, падает на то же место и, следовательно, движется по прямолинейной траектории по отношению к палубе. Для наблюдателя же, стоящего на берегу, мяч движется по параболе (рис. 1.1.2.).

Абсолютно неподвижных тел в природе не существует, и потому принципиально невозможно установить какую-либо абсолютно неподвижную систему отсчета. Если наблюдатель на берегу неподвижен относительно поверхности Земли, то он движется вместе с Землей относительно Солнца.

Понятия «движение» и «покой» являются относительными понятиями и имеют смысл только при указании системы отсчета, относительно которой они рассматриваются. В технической практике за основную или «неподвижную» систему отсчета обычно берется неподвижная относительно поверхности Земли система, и движение тел по отношению к этой системе условно принимается как абсолютное. С системой отсчета связывают различные системы координат (прямоугольные, сферические, цилиндрические, полярные, и т.д.), определяющие относительное положение тела в пространстве.

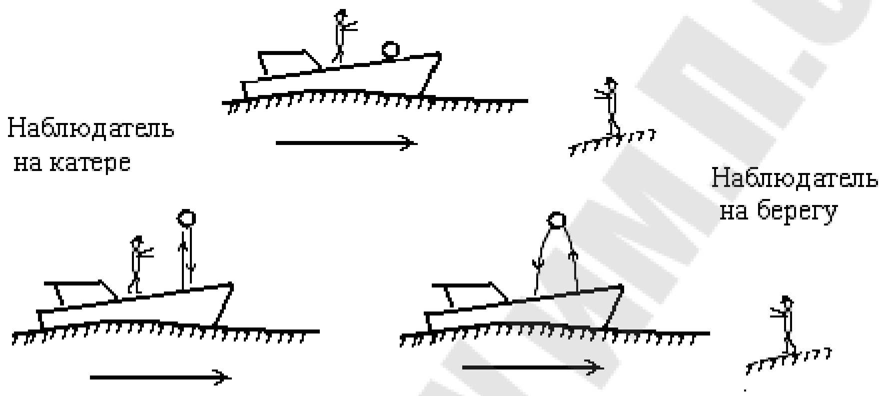


Рис.1.1.2.

Всякое тело можно рассматривать как механическую систему материальных точек. Чтобы определить движение тела, необходимо знать перемещение каждой его точки. Поэтому, прежде всего, следует определить кинематические характеристики отдельной материальной точки.

Движение точки считается известным тогда, когда мы имеем возможность определить его положение относительно выбранной системы отсчета в каждый данный момент времени. В процессе своего движения точка последовательно занимает различные положения относительно выбранной системы координат, причем эти положения непрерывно следуют одно за другим.

Линия, описываемая движущейся точкой в координатном пространстве, называется траекторией точки. *Траектория – это непрерывная последовательность точек пространства, занимаемая движущейся точкой М.*

В зависимости от формы траектории движение точки называется прямолинейным, если ее траектория - прямая линия, и криволинейным, если ее траектория - кривая линия, например, движение точки по окружности или по эллипсу (рис.1.1.3).

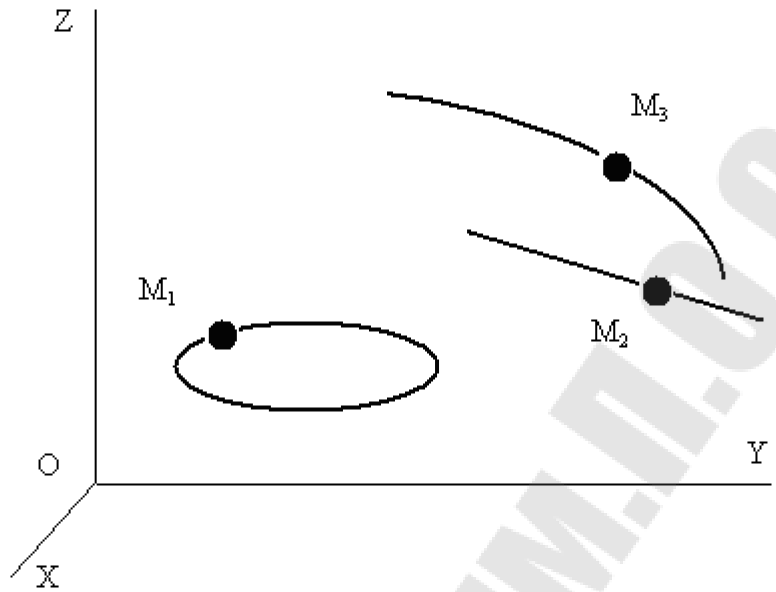


Рис.1.1.3.

Форма траектории зависит от выбора системы отсчета. Это ясно из приведенного выше примера с мячом, подброшенным на палубе движущегося катера.

1.2. Задачи кинематики

Движение твердого тела и движение отдельной его точки характеризуется линейными и угловыми кинематическими величинами: координаты, скорости, ускорения. Все кинематические величины рассматриваются как функции времени.

Связь между временем и положениями движущейся в пространстве точки определяет *закон движения точки*. Если можно определить положение точки в пространстве в любой момент времени,- её закон движения известен.

Основной задачей кинематики является изучение законов движения материальных точек и их систем.

Задачи кинематики важны для исследования движения звеньев различных механизмов. При исследовании траекторий точек звеньев следует учитывать также конструктивные особенности данного механизма, ограничивающие движение звеньев.

2. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

2.1. Способы задания движения точки.

Существуют три способа задания законов движения материальной точки: координатный, векторный и естественный.

Векторный способ. Положение точки M однозначно определяется заданием радиуса-вектора $\vec{r}$, проведенного из некоторого неподвижного центра O в данную точку M (рис.2.1.1).

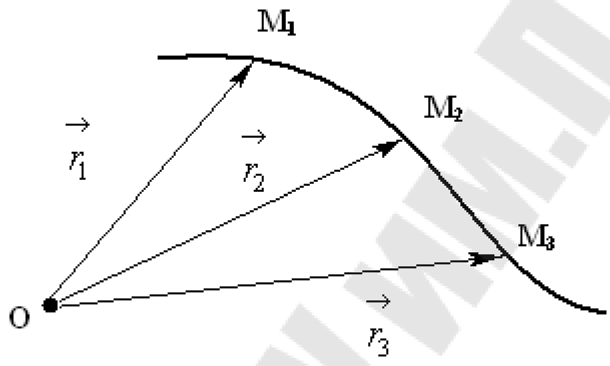


Рис. 2.1.1.

Положение точки $M(x, y, z)$ в этом случае в любой момент времени будет определяться радиус-вектором $\vec{r}$, проведенным из начала отсчета O в данную точку M. Радиус-вектор движущейся точки изменяется по величине (по модулю) и по направлению. Закон этого изменения характеризуется векторной функцией

$$\vec{r} = \vec{r}(t)\ ,$$

которая является *векторным уравнением движения точки*.

Кривая, которая вычерчивается концом изменяющегося вектора, называется годографом этого вектора. Траектория точки $M(x, y, z)$ является годографом радиус-вектора этой точки.

Координатный способ. Координатный способ задания движения точки основан на том, что положение точки относительно некоторой системы отсчета всегда может быть найдено при помощи определенной совокупности чисел, называемых ее координатами.

Системы координат могут быть различными, их выбор определяется условиями решаемой задачи:

- положение точки на поверхности Земли принято определять с помощью так называемых географических координат: широты и долготы;

- положение точки на поверхности сферы можно также определять сферическими координатами, а на поверхности цилиндра;

- цилиндрическими координатами, частным случаем которых являются полярные координаты.

Наибольшее применение на практике имеет прямоугольная система координат (рис.2.1.2.).

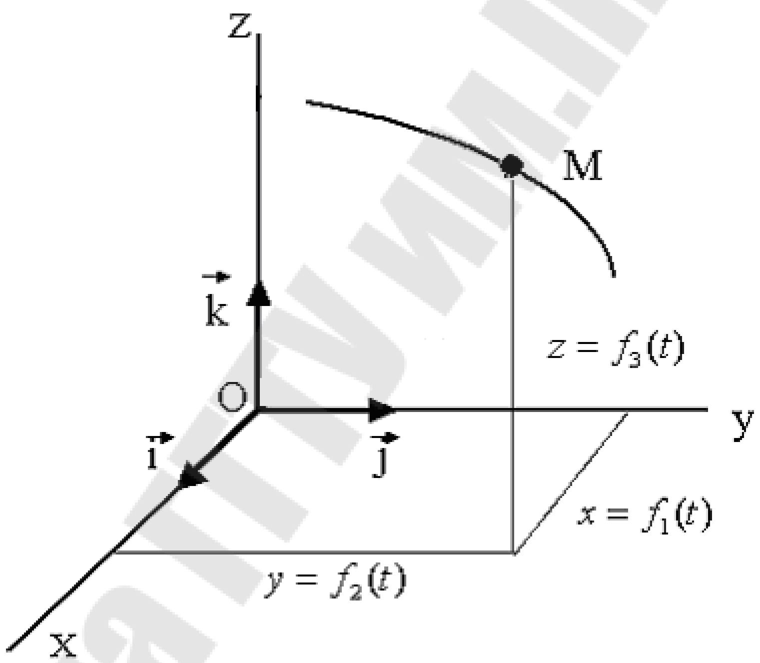


Рис 2.1.2.

Положение точки M в любой момент времени t относительно данной системы координат вполне определяется функциями

$$x = x(t);\ y = y(t);\ z = z(t). \tag{2.1.1}$$

Если во время движения точка остается в одной плоскости, то, расположив систему двух взаимно перпендикулярных осей OX и OY в этой плоскости, мы получим возможность определять положение точки в данной плоскости только двумя ее координатами:

$$x = f_1(t);\ y = f_2(t). \tag{2.1.2}$$

Если точка совершает прямолинейное движение, то направление одной из координатных осей, например оси *OX*, выбирается параллельно траектории точки. Положение точки *M* на этой оси определяется одной координатой

$$x = f_1(t). \qquad (2.1.3)$$

Уравнения (2.1.1) (2.1.2) и (2.1.3) представляют собой *уравнения движения точки* в декартовых координатах. Они одновременно являются уравнениями траектории точки в параметрической форме.

Если заданы уравнения движения точки, то для любого момента времени можно определить ее положение относительно данной системы координат.

Функции времени $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$ непрерывны и дважды дифференцируемы.

Исключив из уравнений (2.1.1) параметр $t = func(x)$, получим непараметрические уравнения кривой, по которой движется точка:

$$y = F_1(x),\ z = F_2(x).$$

В случае движения материальной точки в плоскости XOY, исключаем время из уравнений (2.1.2) , и получаем одно уравнение траектории

$$y = F_1(x).$$

Рассмотрим два примера на определение траектории точки.

Пример 2.1.1.

Движение точки заданно уравнениями

$$x = 4t\,, y = 5t^2 + 3;$$

Исключаем время методом подстановки $t = \dfrac{x}{4}$, и получаем уравнение параболы, (рис.2.1.3),

$$y = 5\left(\frac{x}{4}\right)^2 + 3 = \frac{5}{16}x^2 + 3.$$

Пример 2.1.2.

Уравнения движения, заданы тригонометрическими функциями

$$x = 4\cos(\frac{\pi}{3}t) + 2, \quad y = 2\sin(\frac{\pi}{3}t).$$

Для исключения параметра t воспользуемся известной формулой тригонометрии

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

В нашей задаче $\alpha = \frac{\pi}{3}t$, поэтому выполняем следующие действия:

$$\frac{x-2}{4} = \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right), \ \frac{y}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right) \quad \Rightarrow$$

$$\left(\frac{x-2}{4}\right)^2 = \cos^2\left(\frac{\pi}{3}t\right), \quad \left(\frac{y}{2}\right)^2 = \sin^2\left(\frac{\pi}{3}t\right).$$

Суммируем правые и левые части двух последних формул и получаем уравнение эллипса (рис.2.1.4):

$$\left(\frac{x-2}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1.$$

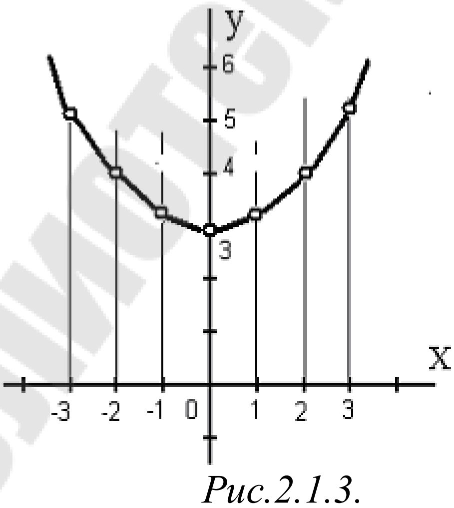


Рис.2.1.3.

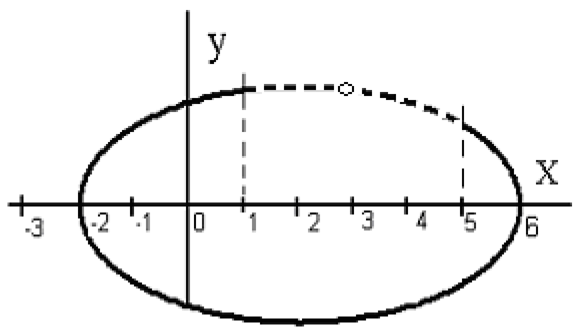


Рис.2.1.4.

Траекторией точки может быть вся полученная кривая или ее часть. Для определения траектории по заданным уравнениям движения следует установить области изменения координат x, y и z. При известном уравнении кривой, по которой движется точка, траектория может быть выделена заданием области изменения координат. Например, для рис.2.1.4, можно задать $1 \le x \le 5$, $y \ge 0$. В этом случае траектория точки совпадает с частью верхней дуги AB эллипса.

Траекторию точки можно определить графически, вычислив координаты точки для множества последовательных моментов времени и соединив их плавной кривой. Например,

$$x_k = 4\cos\left(\frac{\pi}{3} t_k\right) + 2, \quad y_к = 2\sin\left(\frac{\pi}{3} t_к\right), \quad t_к = 0,1,2,3,\ldots.$$

Для графических построений можно использовать компьютерные математические пакеты: MATHCAD, MATLAB, MAPLE, и др.

Рассмотрим пример расчета координат точек в движущемся механизме.

Пример 2.1.3.

В кривошипно-ползунном механизме точки A и B совершают движение по замкнутым криволинейным траекториям (окружность и эллипс).

Точка C совершает прямолинейное движение в ограниченной области $X_{MIN} \le x \le X_{MAX}$, где - X_{MIN} и X_{MAX} - координаты крайних положений точки C (ползуна) (рис.2.1.5.).

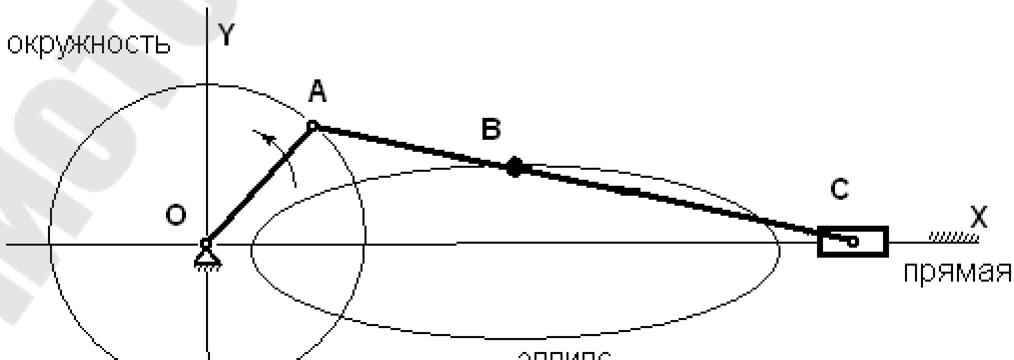


Рис.2.1.5.

Считая заданными размеры звеньев, для любого положения механизма, то есть для любого значения угла $\varphi = \varphi(t)$, характеризующего положение кривошипа OA, можем вычислить координаты точек A, B и C (рис.2.1.6). С этой целью рассматриваются катеты прямоугольных треугольников ΔAKO и ΔAKC:

$$x_A = OK, \quad y_A = AK, \quad x_B = OK + KP, \; y_B = OK - DA,$$

$$x_C = OK + KC, \quad y_C = 0.$$

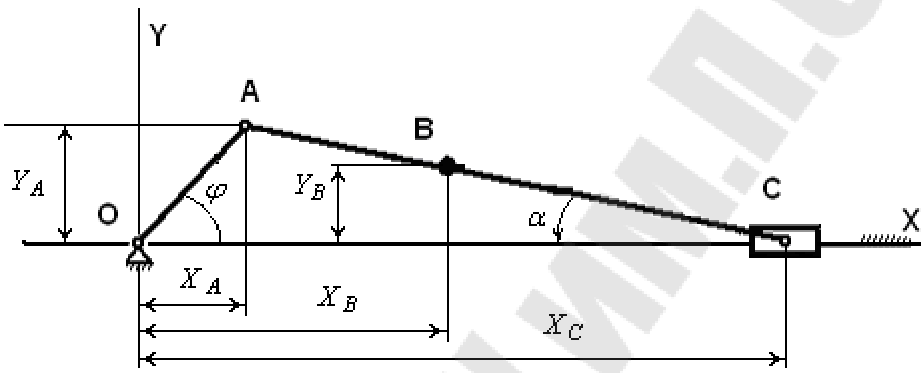


Рис. 2.1.6.

Из прямоугольных треугольников получаем

$$x_A(t) = OA \cdot \cos\varphi(t), \quad y_A(t) = OA \cdot \sin\varphi(t),$$

$$x_B(t) = x_A(t) + AB \cdot \cos\alpha(t), \quad y_B(t) = BC \cdot \sin\alpha(t), \tag{2.1.4}$$

$$x_C(t) = x_A(t) + AC \cdot \cos\alpha(t), \quad y_C(t) = 0. \tag{2.1.5}$$

Здесь угол α, характеризующий движение звена AC, находим из условия

$$y_A = OA \cdot \sin\varphi(t) = AC \cdot \sin\alpha(t):$$

$$\alpha(t) = \arcsin\left(\frac{OA}{AC}\sin\varphi(t)\right).$$

Последовательно изменяя значения угла $\varphi(t), (0 \le \varphi \le 2\pi)$, получаем последовательность координат, графически определяющих траектории точек *A*, *B* и *C*.

Для того, чтобы установить связь радиус-вектора точки и её координатами x, y, z, введем три единичных вектора $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, направленных вдоль осей *X, Y, Z,* соответственно. Как любая векторная величина, радиус- вектор точки может быть записан в виде:

$$\vec{OM} = \vec{r} = \vec{i}\, x + \vec{j}\, y + \vec{k}\, z. \qquad (2.1.6)$$

Модуль радиус–вектора $\vec{r}$ определяется как диагональ параллелепипеда (рис.2.1.7)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

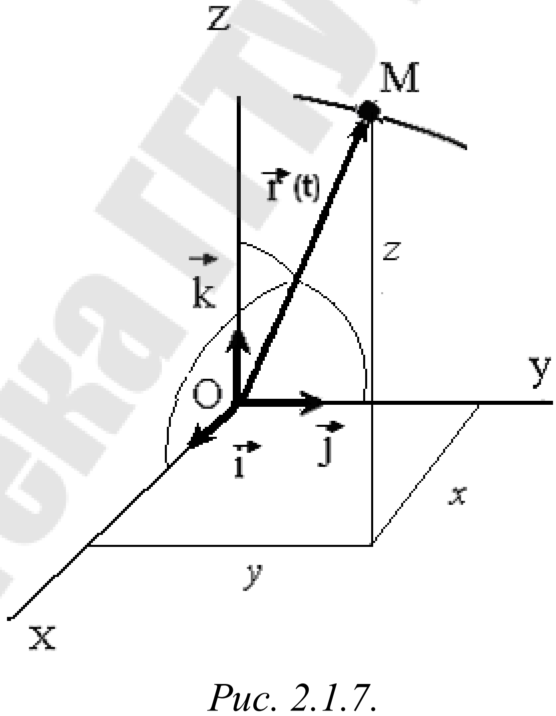


Рис. 2.1.7.

Направляющие косинусы радиус–вектора находим по формулам:

$$\cos(X, \vec{r}) = \frac{X}{r}, \ \cos(Y, \vec{r}) = \frac{Y}{r}, \ \cos(Z, \vec{r}) = \frac{Z}{r}.$$

Естественный способ. При естественном способе задания движения положение точки M в любой момент времени определяется ее дуговой координатой S, измеряемой по траектории точки от начала отсчета O_1 до точки M.

Пусть точка M совершает движение по некоторой траектории AB. Возьмем на этой траекторий какую-либо произвольную неподвижную точку O_1 и назовем ее началом отсчета расстояний. Выбирается положительное направление отсчета. Выбор положительного направления отсчета произволен (рис.2.1.8).

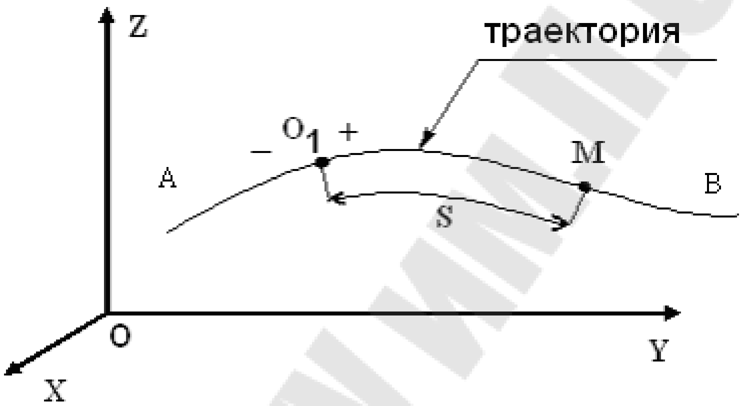


Рис.2.1.8.

Измеренная в линейных единицах длина дуги O_1M называется расстоянием точки M от начала отсчета O_1, или ее дуговой координатой S.

Координата S является алгебраической величиной: положительной, если расстояние откладывается по траектории в одну какую-либо сторону от начала отсчета O_1 и отрицательной, если оно откладывается в противоположную сторону.

В каждый данный момент времени точка может занимать только одно определенное положение на траектории, и, следовательно, ее расстояние S от начала отсчета есть некоторая однозначная функция времени t . Зависимость между переменными S и t может быть выражена уравнением

$$S = f(t). \qquad (2.1.7)$$

Если закон движения точки по данной траектории установлен, то есть, известна функция (2.1.7), то, мы можем для любого момента времени определить расстояние точки от начала отсчета и тем самым определить ее положение на траектории.

При естественном способе должны быть заданы траектория точки, закон движения по этой траектории (уравнение движения), начало отсчета дуговой координаты и его положительное направление.

При прямолинейном движении точки параллельном, например, оси *OX*, закон движения определяется изменением координаты

$$x = f(t).$$

В задаче о кривошипно-шатунном механизме, преобразованное уравнение (2.1.5) (уравнение движения точки C), будет иметь вид тригонометрической функции

$$x_C = x_{0C} + A \cdot \cos(\omega t),$$

где: x_{0C} - координата точки *C* при $\varphi = 0$,

A- амплитуда колебательного движения поршня C.

Расстояние S , отмеренное по траектории точки от начала отсчета, нельзя смешивать с длиной пути *L*, пройденного точкой за соответствующий промежуток времени.

Так как движущаяся точка может изменить направление движения по траектории, то путь *L*, пройденный точкой за промежуток времени Δt, определяют как сумму длин дуг отдельных участков, на каждом из которых скорость сохраняет направление движения точки.

Если в момент времени $t=0$ точка находилась не в начале O_1 отсчета, а в положении M_0 (рис.2.1.9), определяемом дуговой координатой S_0 (величина S_0 называется начальной координатой), то путь, пройденный точкой за промежуток времени t_0 до t_1 ($\Delta t_1 = t_1 - t_0$) переместилась по своей траектории из начала отсчета O_1 в положение M_1, а за промежуток времен $\Delta t_1 = t_1 - t_0$ будет равен $L_1 = S_1 - S_0$.

Если направление движения точки по траектории изменяется, то ее расстояние *S* от начала отсчета будет с течением времени то увеличиваться, то уменьшаться, тогда как путь *L*. пройденный точкой, может только возрастать. Пусть, например, точка за промежуток времени $\Delta t_2 = t_2 - t_1$ вернулась из положения M_1 обратно в положение M_2, определенное дуговой координатой S_2.

Путь, пройденный точкой за промежуток времени $\Delta t_1 + \Delta t_2 = t_2 - t_0$ равен

$$L = M_0M_1 + M_1M_2, \quad \text{или} \quad L = (S_1 - S_0) + (S_1 - S_2).$$

Путь L,. пройденный точкой за некоторый промежуток времени Δt легко находится в том случае, когда точка движется по траектории в одну сторону. Если при этом в начальный момент времени (в момент *t=0*) точка находилась в начале отсчета, то, очевидно, путь L, пройденный точкой, равен ее расстоянию S от начала отсчета, т. е. в этом случае $L=S$. (рис.2.1.9)

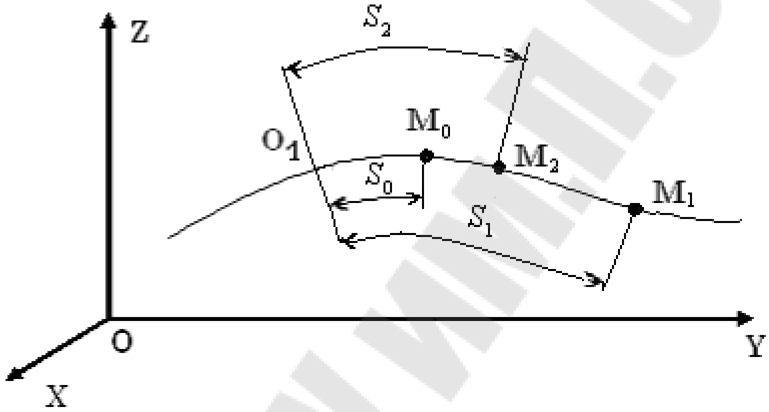


Рис.2.1.9.

Дуговую координату *S(t)* можно выразить через прямоугольные координаты. Переход от координатного способа к естественному можно выполнить по формуле:

$$S(t) = \int_0^t \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2}\, dt + S_0 .$$

Наглядное представление о характере движения точки дают графики функций. Для построения графиков по оси абсцисс откладывают последовательные значения времени t, а по оси ординат - соответствующие им значения функции. Для построения графика функции $S = f(t)$ (графика движения точки) по оси ординат откладывают значения дуговой координаты *S(t)*.

Например, на рис.2.1.10 представлен график изменения дуговой координаты $S = S_0 + A \cdot \cos(\omega t)$, по которому можно определить (в масштабе) значение величины S_k для любого момента времени t_k,

$k=0,1,2,3,\ldots$. Этот график дает наглядное представление о периодическом характере движения точки.

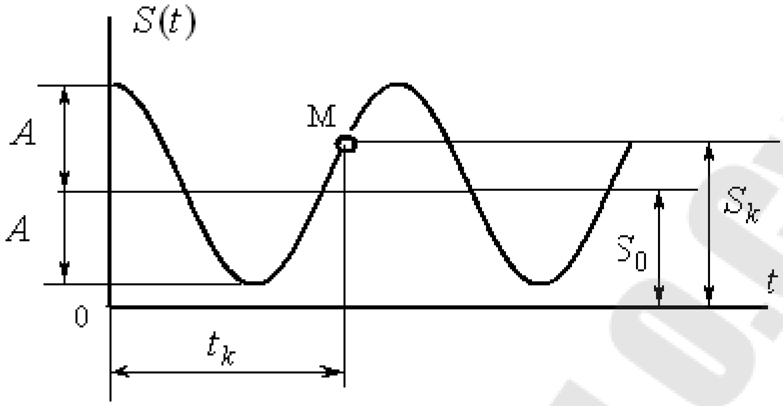


Рис.2.1.10.

График движения не надо путать с траекторией точки. Так, периодическое движение точки *M*, соответствующее графику на рис. 2.1.10 может быть осуществлено по любой траектории, криволинейной или прямолинейной.

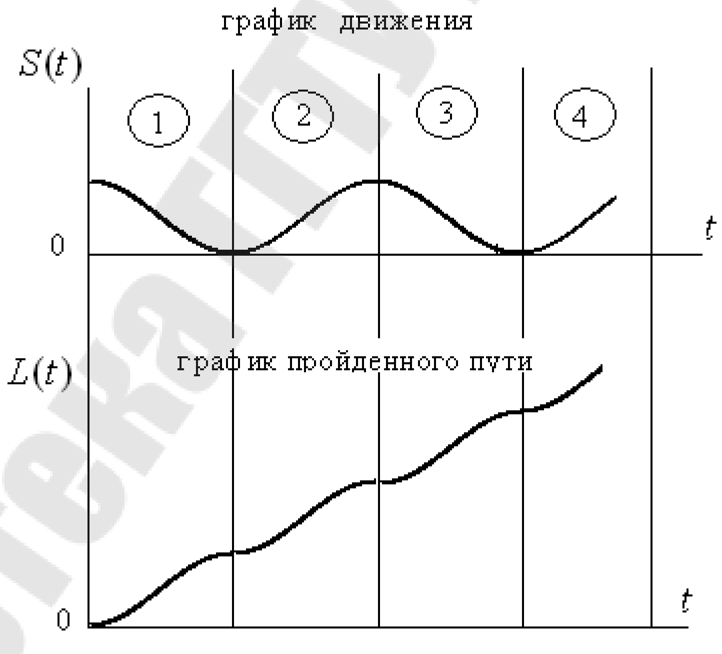


Рис.2.1.11.

График пройденного пути строится по графику движения (рис.2.1.11). Путь, пройденный точкой за некоторый промежуток времени, представляет собой сумму абсолютных значений элементарных перемещений точки. Линия такого графика непрерывно поднимается вверх независимо от направления движения точки:

- участки 1 и 3 - движение точки M к началу отсчета;
- участки 2 и 4 - движение точки M от начала отсчета.

Важность графического построения функций состоит в том, что она дает возможность найти её приближенную зависимость от аргумента в том случае, когда нам известны её значения лишь для отдельных моментов времени t_k, а аналитическая зависимость между S и t нам не известна.

2.2. Вектор перемещения. Скорость точки

Введём понятие вектора перемещения точки (рис.2.2.1).

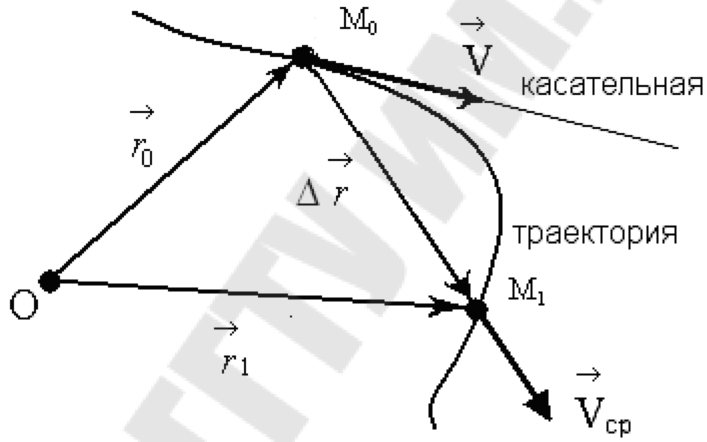


Рис.2.2.1

Пусть для момента времени t –материальная точка находится в положении M_0. Положение точки в момент времени t определяем радиус-вектором $\vec{r}_0$.

За время Δt материальная точка перемещается в положении M_1, то есть $M_0 \to M_1$. В момент времени $t + \Delta t$ – материальная точка находится в положении M_1. Положение точки в этот момент времени определяем радиус-вектором. То есть радиус-вектор точки M_1 равен геометрической сумме

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_0 + \Delta \vec{r}.$$

Вектор перемещения - это прямолинейный отрезок, проведенный из точки M_0 в точку M_1. Вектор перемещения

$\Delta \vec{r} = \overrightarrow{M_0 M_1}$, не зависит от траектории, он зависит от координат точек пространства M_0 и M_1 .

Модуль вектора перемещения вычисляется по формуле

$$\left|\Delta \vec{r}\right| = \sqrt{(x_M - x_M)^2 + (y_M - y_M)^2 + (z_M - z_M)^2}\ .$$

Введём понятие средней скорости материальной точки за время Δt как отношение

$$\vec{V}_{cp} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}.$$

Из формулы следует, что скорость имеет размерность

$$[V] = \frac{длина}{[время]}.$$

Каждому выбору единицы длины и единицы времени соответствует своя единица скорости. Скорость может выражаться в м/с, см/с, м/мин, км/час и т. д.

Так, например, в международной системе единиц: $[V] = \frac{м}{с}$.

Вектор $\vec{V}_{cp}$ направлен вдоль вектора перемещения $\Delta \vec{r}$.

Как известно из математики, предел отношения приращения функции к соответствующему приращению аргумента, когда приращение аргумента последнее стремится к нулю, называется производной данной функции.

Вычисляя предел от средней скорости, получаем мгновенную скорость точки в момент времени *t*. Соответственно принятым обозначениям производной, запишем:

$$\vec{V}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d \vec{r}}{dt}.$$

Можно обозначить - $\vec{V}(t) = \dot{\vec{r}}$.

Вектор $\vec{V}(t)$ направлен по касательной к траектории точки.

Скорость точки M в момент времени t равна производной по времени от радиуса – вектора точки и направлена по касательной к траектории.

Скорость точки определяется проекциями скорости точки на оси координат (рис.2.2.2).

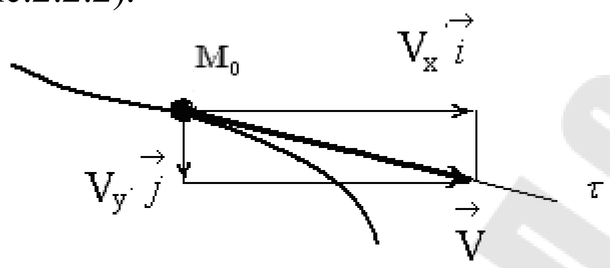


Рис.2.2.2.

Учитывая формулу (2.1.6) для радиус-вектора, можем записать

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V} = \vec{i}\frac{dx}{dt} + \vec{j}\frac{dy}{dt} + \vec{k}\frac{dz}{dt}, \qquad (2.2.1)$$

$$V_x = \frac{dx}{dt} \equiv \dot{x}; \quad V_y = \frac{dy}{dt} \equiv \dot{y}, \quad V_z = \frac{dz}{dt} \equiv \dot{z} \quad . \qquad (2.2.2)$$

Проекции скорости точки на неподвижные координатные оси равны первым производным от соответствующих координат движущейся точки по времени.

Вычисленные проекции вектора скорости точки на координатные оси позволяют найти модуль вектора скорости и его направление.

Модуль вектора скорости определяем как диагональ параллелепипеда, построенного на векторах скоростей $V_X \vec{i}$, $V_Y \vec{j}, V_Z \vec{k}$:

$$\left|\vec{V}\right| = \sqrt{V_x^{\,2} + V_y^{\,2} + V_z^{\,2}}, \text{или} \quad \left|\vec{V}\right| = \sqrt{\left(\dot{x}\right)^2 + \left(\dot{y}\right)^2 + \left(\dot{z}\right)^2} .$$

Модуль вектора можно обозначать как алгебраическую величину, без стрелки сверху, например, модуль вектора скорости может быть обозначен буквой V.

Направление вектора его направляющими косинусами. Направляющие косинусы определяют углы наклона вектора $\vec{V}$ к осям координат:

$$\cos(X,\vec{V}) = \frac{V_X}{V}, \quad \cos(Y,\vec{V}) = \frac{V_Y}{V}, \quad \cos(Z,\vec{V}) = \frac{V_Z}{V}$$

При естественном способе задания движения применяем понятие алгебраического значения скорости $V = \dfrac{dS}{dt}$ или $V = \dot{S}$.

Так как вектор $\vec{V}$ направлен по касательной к траектории, то для определения направления вектора введем единичный вектор касательной $\vec{\tau}$ и запишем

$$\vec{V} = V \cdot \vec{\tau}\ , \text{или}\ \vec{V} = \frac{ds}{dt}\vec{\tau}\,. \qquad (2.2.3)$$

Рассмотрим пример вычисления скорости точки координатным способом.

Пример 2.2.1.

Для точки B шатуна кривошипно-ползунного механизма (рис.2.1.6) определены уравнения движения (2.1.4) как параметрические уравнения эллипса.

Предположим, что угол поворота кривошипа изменяется пропорционально времени

$$\varphi(t) = \omega \cdot t\,,$$

где ω - коэффициент пропорциональности.

Уравнения (2.1.4) перепишем в виде

$$x_B(t) = OA \cdot \cos(\varphi(t)) + AB \cdot \cos(\alpha(\varphi(t))),$$

$$y_B(t) = BC \cdot \sin\bigl(\alpha(\varphi(t))\bigr).$$

Вычислим производные по времени от уравнений движения, как от сложных функций:

$$\frac{dx_B(t)}{dt} = OA \cdot \frac{d\cos(\varphi)}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi(t)}{dt} + AB \cdot \frac{d\cos(\alpha)}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha(\varphi)}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi(t)}{dt},$$

$$\frac{dy_B(t)}{dt} = BC \cdot \frac{d\sin(\alpha)}{d\alpha} \cdot \frac{d\varphi(t)}{dt},$$

или,

$$\frac{dx_B(t)}{dt} = -\left[OA \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t) + AB \cdot \omega \cdot \sin(\alpha) \cdot \frac{d\alpha(\varphi)}{d\varphi}\right],$$

$$\frac{dy_B(t)}{dt} = BC \cdot \omega \cdot \cos(\alpha).$$

Здесь

$$\sin(\alpha) = \frac{OA}{AC}\sin(\omega \cdot t), \qquad \alpha(t) = \arcsin\left(\frac{OA}{AC}\sin(\varphi(t))\right).$$

Вычислим производную

$$\frac{d\alpha(\varphi)}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi}\left[\arcsin\left(\frac{OA}{AC}\sin(\varphi)\right)\right].$$

Обозначим

$$U(\varphi) = \left(\frac{OA}{AC}\sin(\varphi)\right).$$

Тогда

$$\alpha(\varphi) = \arcsin U(\varphi),$$

$$\frac{d\alpha(\varphi)}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi}\left[\arcsin(U(\varphi))\right] = \frac{dU(\varphi)}{d\varphi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - U(\varphi)}},$$

$$\frac{dU(\varphi)}{d\varphi} = \frac{OA}{AC} \cdot \cos(\varphi).$$

Окончательно имеем алгоритм вычисления скорости точки *B*:

$$V_{B_X}(t) = -[OA \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t) + F(t) \cdot],$$

$$V_{B_Y}(t) = BC \cdot \omega \cdot \sqrt{1 - \left[\frac{OA}{AC}\sin(\omega \cdot t)\right]^2},$$

где

$$F(t) = AB \cdot \omega \cdot \sin(\alpha) \cdot \frac{d\alpha(\varphi)}{d\varphi},$$

или

$$F(t) = AB \cdot \left(\frac{OA}{AC}\right)^2 \omega \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \cos(\omega \cdot t) \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{OA}{AC}\sin(\omega \cdot t)\right)^2\right]}}.$$

Далее определяется модуль вектора скорости и его направление:

$$V_B(t) = \sqrt{V_{B_X}^2(t) + V_{B_Y}^2(t)},$$

$$\cos(X, \vec{V}_B) = \frac{V_{B_X}(t)}{V_B(t)}, \qquad \cos(Y, \vec{V}_B) = \frac{V_{B_Y}(t)}{V_B(t)}.$$

2.3. Ускорение точки

Определим вектор приращения точки при её перемещении из положения M_0 в положение M_1 (рис.2.3.1.).

Совмещая начало векторов $\vec{V}(t)$ и $\vec{V}(t + \Delta t)$ в точке *M*, получаем вектор приращения скорости $\Delta\vec{V}$ за время Δt.

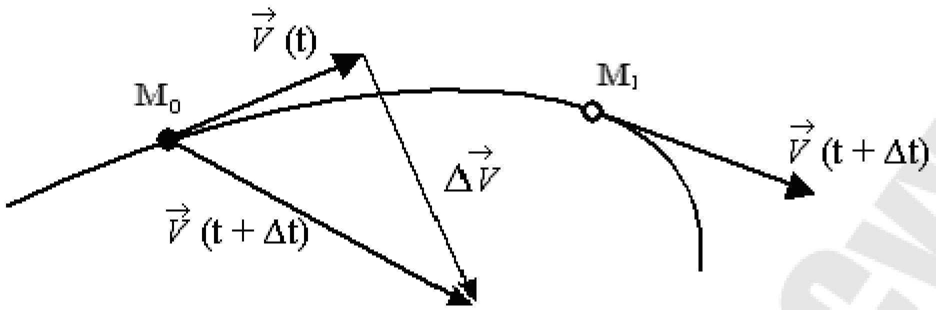


Рис.2.3.1.

Величина, характеризующая быстроту изменения вектора скорости, как по модулю, так и по направлению, называется ускорением.

Вектор среднего ускорения равен:

$$\vec{a}_{cp} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}.$$

Из формулы следует, что ускорение имеет размерность

$$[a] = \frac{[скорость]}{[время]}.$$

Каждому выбору единицы длины и единицы времени соответствует своя единица ускорения. Ускорение может выражаться в м/с^2, см/с^2, м/мин^2 и т. д.

В международной системе единиц: $[a] = \frac{м}{c^2}$

Средним ускорением точки за данный промежуток времени называется вектор, равный отношению вектора приращения скорости к величине этого промежутка времени.

Этот вектор направлен в сторону вогнутости траектории.

Среднее ускорение точки позволяет судить только о конечном изменении вектора скорости точки за рассматриваемый промежуток времени и не дает представления о действительном изменении величины и направления скорости точки в каждый данный момент. Каждому новому промежутку времени Δt будет соответствовать новое положение точки M на траектории и новые направление и величина вектора $\vec{V}$. Изменению вектора $\vec{V}$ будет соответствовать изменение и вектора $\Delta\vec{V}$.

Ускорение точки в момент времени t получаем в пределе, при $\Delta t \to 0$:

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt}.$$

Ускорение точки в данный момент времени t равно пределу ее среднего ускорения за промежуток времени Δt, когда величина этого промежутка времени стремится к нулю.

Ускорение можно выразить как вторую производную от радиус-вектора точки:

$$\vec{a}(t) = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}},$$

или как первую производную от скорости $\vec{a}(t) = \dot{\vec{V}}$.

Ускорение точки в некоторый момент времени равно производной по времени от вектора скорости, или второй производной по времени от радиуса – вектора точки в этот момент времени.

Ускорение точки определяется проекциями вектора ускорения на оси координат:

$$\vec{a}(t) = \vec{i}\,a_X + \vec{j}\,a_Y + \vec{k}\,a_Z,$$

$$\vec{a}(t) = \vec{i}\frac{dV_X}{dt} + \vec{j}\frac{dV_Y}{dt} + \vec{k}\frac{dV_Z}{dt},$$

$$\vec{a}(t) = \vec{i}\frac{d^2x}{dt^2} + \vec{j}\frac{d^2y}{dt^2} + \vec{k}\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Где

$$a_X = \frac{dV_X}{dt} = \dot{V}_X,\ a_Y = \frac{dV_Y}{dt} = \dot{V}_Y,\ a_Z = \frac{dV_Z}{dt} = \dot{V}_Z,$$

или

$$a_X = \frac{d^2 x}{dt^2} \equiv \ddot{x}, \;\; a_Y = \frac{d^2 y}{dt^2} \equiv \ddot{y}, \;\; a_Z = \frac{d^2 z}{dt^2} \equiv \ddot{z}.$$

Модуль ускорения

$$\left| \vec{a} \right| = \sqrt{a_X^2 + a_Y^2 + a_Z^2}.$$

$$\left| \vec{a} \right| = \sqrt{\dot{V}_X^{\,2} + \dot{V}_Y^{\,2} + \dot{V}_Z^{\,2}}, \quad \text{или} \quad \left| \vec{a} \right| = \sqrt{\left(\ddot{x}\right)^2 + \left(\ddot{y}\right)^2 + \left(\ddot{z}\right)^2}.$$

Можно обозначать: $\left| \vec{a} \right| = a$.

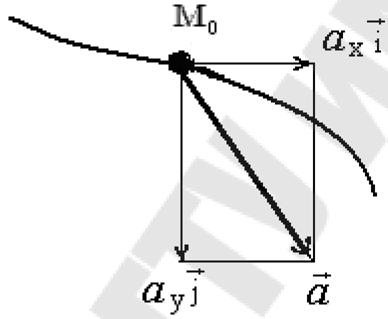


Рис.2.3.2.

Для плоской траектории в системе координат *ХОУ* имеем (рис.2.3.2)

$$\overleftarrow{a} = \vec{i} \cdot a_X + \vec{j} \cdot a_Y \;, \qquad a = \sqrt{a_X^2 + a_Y^2} \;,$$

$$\cos(X, \vec{a}) = \frac{a_X}{a}, \quad \cos(Y, \vec{a}) = \frac{a_Y}{a}.$$

2.4. Естественные координаты. Касательное и нормальное ускорения

Рассмотрим естественную систему координатных осей, определяемую траекторией точки (рис.2.4.1).

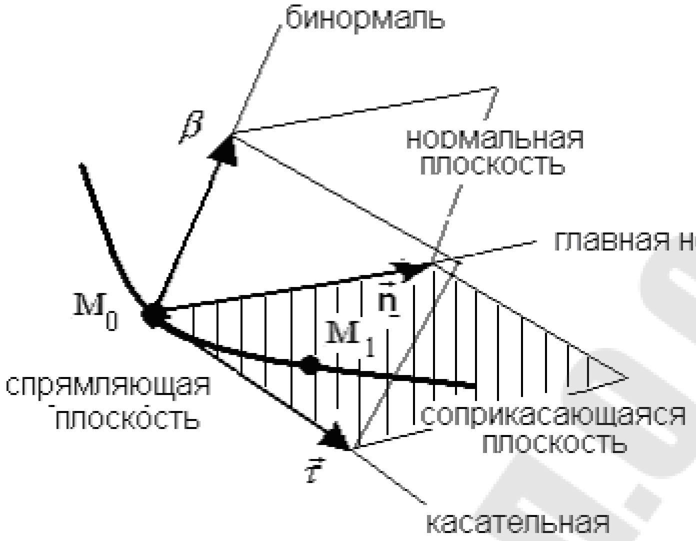


Рис.2.4.1.

Здесь единичные векторы $\vec{\beta}, \vec{\tau}, \vec{n}$ образуют правую тройку ортогональных векторов. Они определяют направление естественных (натуральных) осей координат в том месте траектории, где находится движущаяся точка *M*.

Ось, направленная вдоль вектора $\vec{\tau}$, называется касательной к траектории, направлена в сторону возрастания дуговой координаты *S*.

Ось, направленная вдоль вектора $\vec{n}$, называется главной нормалью траектории, направлена в сторону вогнутости кривой.

Ось, направленная вдоль вектора $\vec{\beta}$, называется бинормалью траектории, образует правую систему координат с осями $\vec{\tau}$ и $\vec{n}$.

Оси естественной системы координат образуют трехгранник Френе (естественный трехгранник) с плоскостями:

$(\vec{\tau}, \vec{n})$ - соприкасающаяся плоскость;

$(\vec{\beta}, \vec{n})$ - нормальная плоскость;

$(\vec{\beta}, \vec{\tau})$ - спрямляющая плоскость.

Соприкасающаяся плоскость образована единичными векторами $\vec{\tau}$ и $\vec{n}$ при $M_1 \Rightarrow M_0$.

Рассмотрим некоторые формулы дифференциальной геометрии.

Производная от радиус-вектора точки по дуговой координате S равна единичному вектору касательной к траектории:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{dS},$$

Дифференцируя $\vec{\tau}$ по S, получим произведение

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = K\vec{n},$$

где

$\vec{n}$ - единичный вектор главной нормали;

$K = \dfrac{1}{\rho} \geq 0$ – кривизна траектории в точке M;

ρ - радиус кривизны траектории.

Вектор $\vec{n} \perp \vec{\tau}$ и направлен в сторону вогнутости траектории (если $K = 0$, то траектория – прямая линия).

Единичный вектор бинормали $\vec{\beta}$ определяется векторным произведением $\vec{\beta} = \vec{\tau} \times \vec{n}$.

Найдем проекции ускорения точки на естественные оси.

Так как

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = V \cdot \vec{\tau}$$

то:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\tau} \cdot V) = \vec{\tau}\frac{dV}{dt} + \frac{d\vec{\tau}}{dt}V.$$

Вычислим производную от единичного вектора касательной

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = k \cdot \vec{n}\frac{ds}{dt} = \frac{\vec{n}}{p}V.$$

Вычислим ускорение

$$\vec{a} = \tau \frac{dV}{dt} + \vec{n}\frac{V^2}{p} + \beta \cdot 0.$$

Получили, что проекции ускорения на естественные оси координат будут равны:

на касательную - касательное ускорение

$$a_\tau = \frac{dV}{dt};$$

на главную нормаль - нормальное ускорение

$$a_n = \frac{V^2}{p};$$

на бинормаль $a_b = 0$.

Таким образом, вектор ускорения расположен в соприкасающейся плоскости (рис.2.4.2), и определяется векторной суммой двух ускорений:

$$\vec{a} = a_\tau \cdot \vec{\tau} + a_n \cdot \vec{n}, \text{ или } \quad \vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n \quad .$$

Модуль ускорения определяется как диагональ прямоугольника, построенного на векторах $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$ (рис.2.4.3)

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}, \quad \mu = arctn\frac{a_\tau}{a_n}.$$

Касательное ускорение $\vec{a}_\tau$ характеризует численное изменение вектора скорости $\vec{V}$. Нормальное ускорение $\vec{a}_n$ характеризует изменение направления вектора скорости $\vec{V}$ и возникает только при криволинейном движении точки.

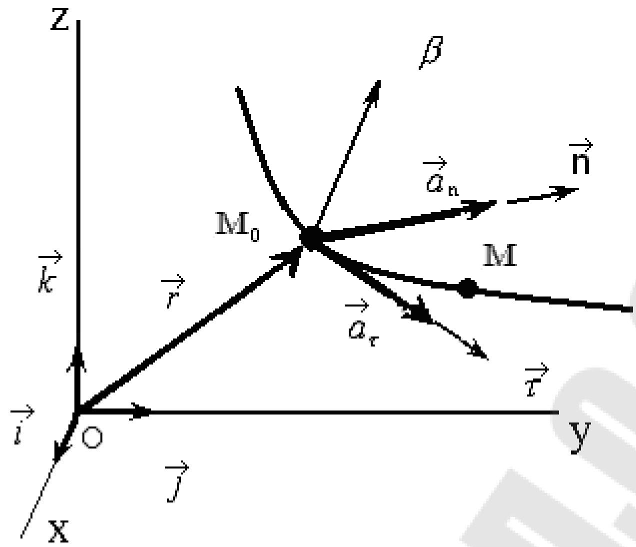


Рис.2.4.2.

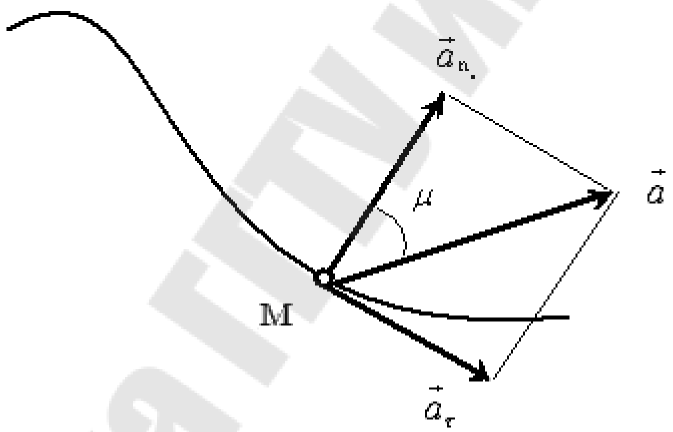


Рис.2.4.3.

Пример 2.4.1.

Даны уравнения движения точки

$$x = x(t)\,,.\ y = y(t)\,.$$

Для заданного момента времени t_1. найти радиус кривизны траектории.

Решение:

$$\rho = \frac{V^2}{a_n} = \frac{\left(\dot{x}\right)^2 + \left(\dot{y}\right)^2}{\sqrt{a^2 - a_\tau^2}}.$$

Здесь

$$a^2 = \left(\ddot{x}\right)^2 + \left(\ddot{y}\right)^2; \quad a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{\left(\dot{x}\right)^2 + \left(\dot{y}\right)^2}\right).$$

2.5. Равномерное прямолинейное движение точки

Пусть точка движется по прямой, параллельной оси OX. Уравнение движения точки будет определяться изменением координаты

$$x = f(t).$$

Если точка в равные, произвольно взятые, промежутки времени проходит пути одинаковой длины, то движение точки называется равномерным, в противном случае движение точки называется неравномерным или переменным. Такое движение возможно, если выполняется условие

$$V_X = const,$$

то есть точка должна двигаться с постоянной скоростью, заданной. Следовательно, $a_X = 0$.

Скорость точки задается по начальным условиям,

$$t = 0, \quad V = V_{0X}.$$

Чтобы найти уравнение движения точки, надо решить дифференциальное уравнение первого порядка

$$V_X = \frac{dx}{dt}.$$

Разделим переменные x и t, после чего проинтегрируем, учитывая, что $V_X = V_{0X} = const.$

$$\int dx = \int V_X dt \Rightarrow x = V_{0X} \cdot t + C_1 .$$

Постоянная интегрирования находится по начальным условиям

$$t = 0, \quad x = x_0, \quad x_0 = V_{0X} \cdot 0 + C_1, \quad C_1 = x_0 .$$

Тогда уравнение равномерного движения можем записать в виде

$$x = V_{0x} \cdot t + x_0.$$

2.6. Равнопеременное прямолинейное движение точки

Рассмотрим прямолинейное движение точки с постоянным ускорением

$$a_X = const.$$

Запишем дифференциальное уравнение

$$a_X = \frac{dV_X}{dt}.$$

Разделим переменные V_X и t

$$a_X \cdot dt = \frac{dV_X}{dt} \cdot dt = dV_X.$$

Чтобы определить уравнение скорости точки, вычислим неопределенный интеграл (первый интеграл движения):

$$\int dV_X = \int a_X \cdot dt = a_X \int dt \Rightarrow V_X = a_X \cdot t + C_1 . \qquad (2.6.1)$$

Здесь C_1-постоянная интегрирования, соответствующая начальному условию $t = 0$ и $V_X = V_{0X}$.

Подставим начальные условия в уравнение (2.6.1)

$$V_{0X} = a_X \cdot 0 + C_1 \Rightarrow V_{0X} = C_1.$$

Получаем уравнение скорости равнопеременного прямолинейного движения точки:

$$V_X = a_X \cdot t + V_{0X}. \qquad (2.6.1)$$

Чтобы получить уравнение движения, выполним следующие действия:

$$V_X = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = V_X \cdot dt \Rightarrow dx = (a_X \cdot t + V_{0X})dt;$$

$$\int dV_X = \int (a_X \cdot t + V_{0X})dt \Rightarrow x = a_X \frac{t^2}{2} + V_{0X} \cdot t + C_2.$$

Здесь C_2 - постоянная интегрирования, которая, как и в предыдущем интегрировании, определяется по начальным условиям:

$$x_0 = a_X \cdot \frac{t^2}{2} + V_{0X} \cdot 0 + C_2 \Rightarrow x_0 = C_2.$$

Получаем уравнение равнопеременного прямолинейного движения точки:

$$x = a_X \cdot \frac{t^2}{2} + V_{0X} \cdot t + x_0. \qquad (2.6.2)$$

2.7. Движение точки по окружности

Пусть заданы параметрические уравнения окружности

$$x = R \cdot \cos(\varphi(t)) \quad , \quad x = R \cdot \sin(\varphi(t)).$$

Здесь

R- радиус окружности,

$\varphi(t)$ - угол поворота радиуса, измеряемый от оси OX (рис.2.7.1)

φ_0 - начальное положение радиуса OM_0.

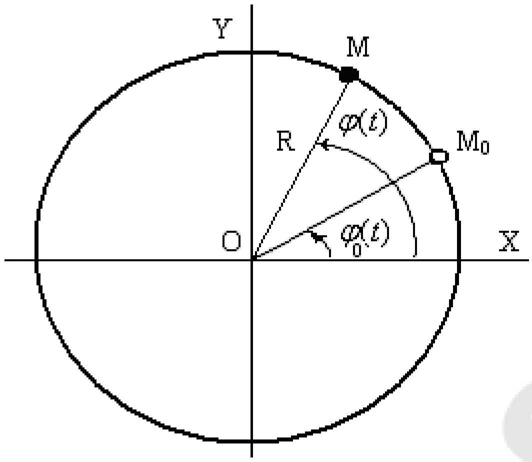


Рис.2.7.1.

Вычислим скорость и ускорение точки *M*.

Находим сначала проекции скорости на координатные оси:

$$V_X = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \qquad V_X = -\dot{\varphi}(t) R \sin(\varphi(t)) \ ,$$

$$V_Y = \frac{dy}{dt} = \dot{y} \ , \ V_X = \dot{\varphi}(t) R \cos(\varphi(t)) .$$

Здесь величина $\dot{\varphi}(t)$ характеризует скорость изменения угла $\varphi(t)$, то есть – скорость вращения радиуса *OM*.

Так как $V_X < 0$, то вектор $\vec{V}_X = V_X \vec{i}$ изображаем на рисунке направленным против положительного направления оси *OX* (рис 2.7.2).

Складываем векторы $\vec{V}_X = V_x \vec{i}$ и $\vec{V}_Y = Vy \vec{j}$:

$$\vec{V} = V_x \cdot \vec{i} + V_y \cdot \vec{j} .$$

По теореме Пифагора находим модуль вектора $\vec{V}$ как диагональ параллелограмма

$$V = \sqrt{V_X^2 + V_Y^2} = \sqrt{\left[-\dot{\varphi}(t) R \sin(\varphi(t))\right]^2 + \left[\dot{\varphi}(t) R \cos(\varphi(t))\right]^2}$$

$$V=\sqrt{\left[\dot{\varphi}(t)R\right]^2+\left[\cos^2(\varphi(t))+\sin^2(\varphi(t))\right]}=\dot{\varphi}(t)\cdot R\,.$$

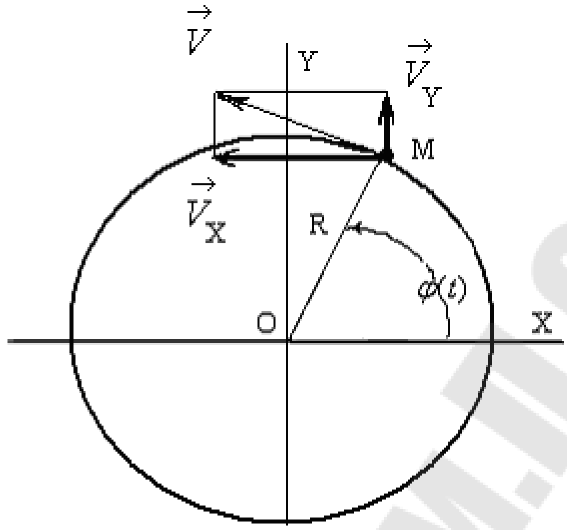


Рис 2.7.2.

Аналогично находим проекции ускорения:

$$a_X=\frac{dV_X}{dt}=\dot{V}_X\,,\qquad a_Y=\frac{dV_Y}{dt}=\dot{V}_Y\,,$$

$$a_X=\dot{\varphi}^2(t)R\cos(\varphi(t))-\ddot{\varphi}(t)R\sin(\varphi(t))\,,$$

$$a_Y=-\dot{\varphi}^2(t)R\sin(\varphi(t))+\ddot{\varphi}(t)R\cos(\varphi(t))\,.$$

Здесь $\ddot{\varphi}(t)$ - ускорение вращения радиуса *OM*.

Так как $a_Y<0$, то вектор $a_Y\,\vec{j}$ изображаем на рисунке направленным против положительного направления оси *OY*.

Складываем векторы $a_X\,\vec{i}$ и $a_Y\,\vec{j}$, (рис.2.7.3):

$$\vec{a}=a_X\cdot\vec{i}+a_Y\cdot\vec{j}$$

По теореме Пифагора находим модуль вектора $\vec{a}$ как диагональ параллелограмма

$$a = \sqrt{a_X^2 + a_Y^2} \qquad ,$$

$$a = \sqrt{\begin{gathered}\left[\dot{\varphi}^2(t) R \cos(\varphi(t)) - \ddot{\varphi}(t) R \sin(\varphi(t)\right]^2 + \\ + \left[-\dot{\varphi}^2(t) R \sin(\varphi(t)) + \ddot{\varphi}(t) R \cos(\varphi(t)\right]^2\end{gathered}}$$

$$a = \sqrt{\begin{gathered}\left[\left(\dot{\varphi}(t)\right)^4 R^2\right] \cdot (\cos^2(\varphi(t) + \sin^2(\varphi(t)) + \\ \left[\left(\ddot{\varphi}(t)\right)^2 R^2\right] \cdot (\cos^2(\varphi(t) + \sin^2(\varphi(t)^2)\end{gathered}}$$

$$a = \sqrt{\left[\dot{\varphi}^2(t) R\right]^2 + \left[\ddot{\varphi}(t) R\right]^2}$$

Здесь

$a_n = \dot{\varphi}^2(t) R$ - нормальное (центростремительное) ускорение,

$a_\tau = \ddot{\varphi}(t) R$ - касательное (вращательное) ускорение.

Поэтому получаем уже известную формулу, (рис.2.7.4),

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} \; .$$

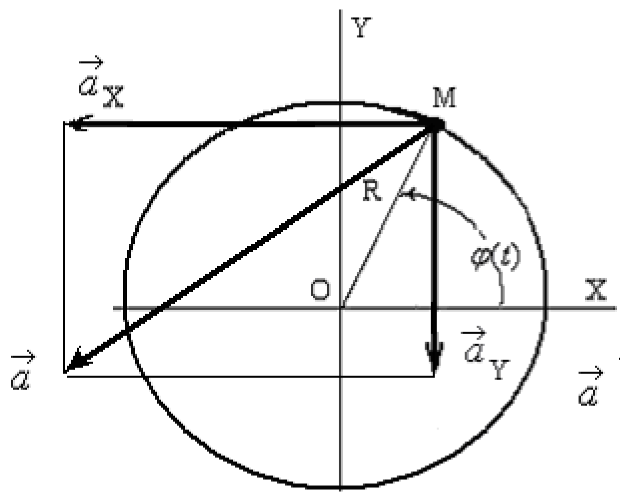


Рис.2.7.3

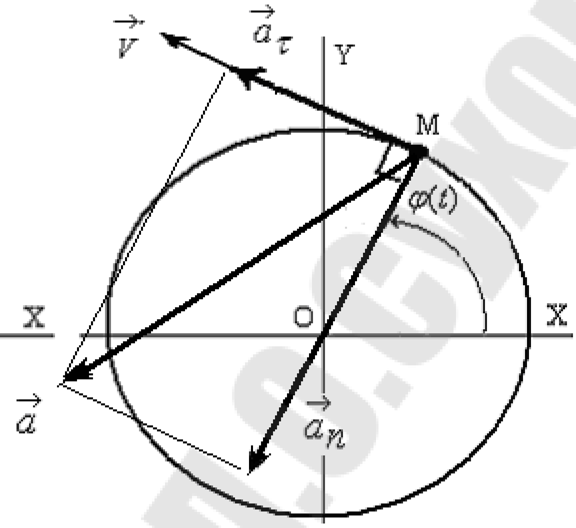


Рис.2.7.4

3. ПРОСТЕЙШИЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

3.1. Поступательное движение твердого тела

Поступательное движение - это такое движение, при котором любая прямая, связанная с движущимся телом, остается параллельной самой себе (рис.3.1.1).

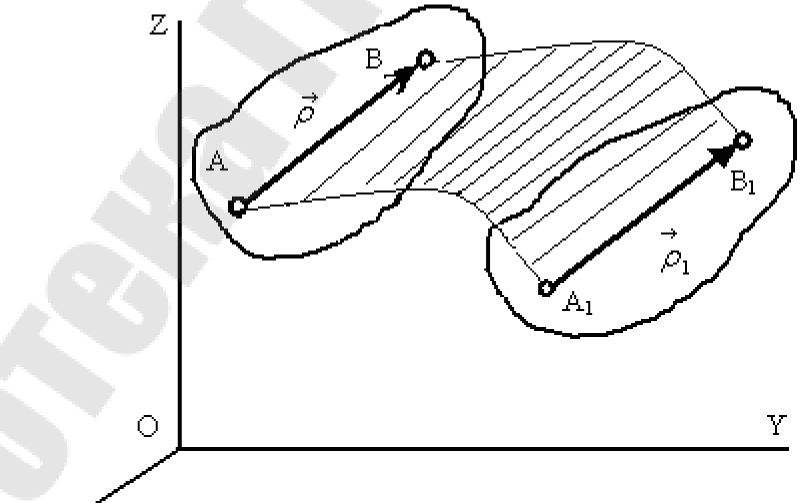


Рис.3.1.1.

Термин «поступательное движение» не применим к движению материальной точки, не имеющей размеров, и, следовательно, не имеющей прямой.

Примерами поступательного движения тела могут быть: движение кузова автомашины, движущейся по прямолинейному пути; движение поршня кривошипно-ползунного механизма двигателя (рис.2.1.5) и т. д.

Прямолинейное движение тела (прямолинейные траектории точек тела) есть только частный случай поступательного движения. При поступательном движении тела траекториями его точек могут быть любые кривые.

Так, например, звено *AB* , соединяющее кривошипы O_1A и O_2B в механизме ,изображенном на рис.3.1.2, совершает поступательное движение, хотя его точки движутся по окружностям радиуса $R=O_1A=O_2B$. При равенстве длин кривошипов четырехугольник O_1ABO_2 будет всегда оставаться параллелограммом, и, следовательно, звено *AB* будет всегда параллельно основанию O_1O_2, т.е. будет двигаться параллельно самому себе. Все точки звена *AB* (например, точка *C*) тоже движутся по окружностям, радиусы которых равны длине кривошипа O_1A.

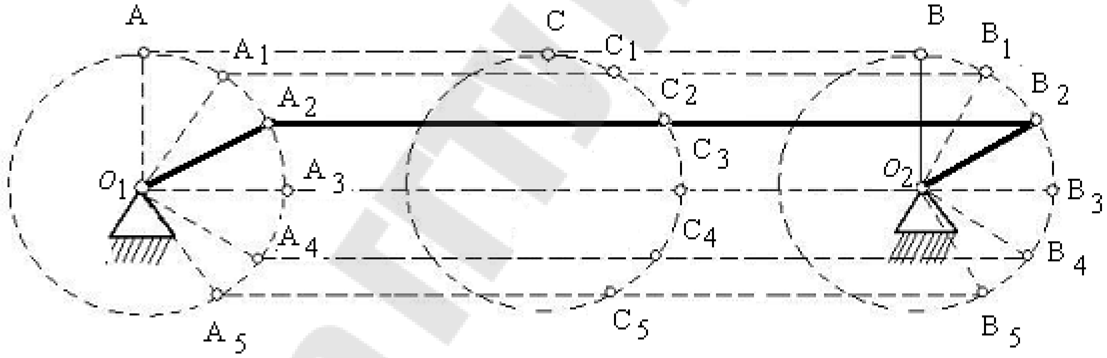


Рис.3.1.2.

Докажем что все точки тела движущегося поступательно в каждый момент времени имеют одинаковые скорости и ускорения, а их траектории полностью совмещаются при параллельном переносе (рис.3.1.3).

По определению твердого тела имеем $AB=A_1B_1$.

По определению поступательного движения $AB \parallel A_1B_1$.

Следовательно $\vec{\rho} = \vec{\rho}_1$, то есть $\vec{\rho} = const$, и поэтому можно утверждать, что траектории точек *A* и *B* одинаковы и совпадают при наложении.

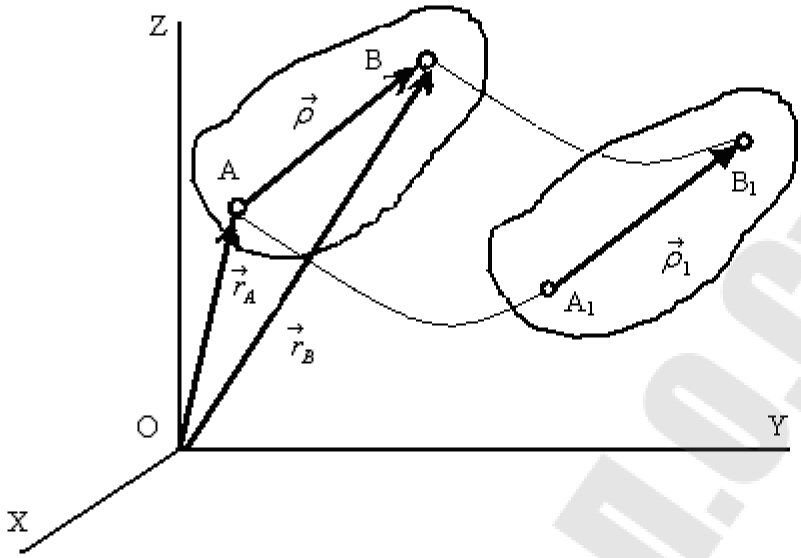


Рис.3.1.3.

Из ΔOAB имеем векторное равенство

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{\rho}\ .$$

Вычислим производную по времени:

$$\frac{d\,\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\,\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\,\vec{\rho}}{dt} = \frac{d\,\vec{r}_A}{dt},$$

Здесь $\quad \dfrac{d\,\vec{\rho}}{dt} = 0$.

Так как скорости точек определяются производными

$$\vec{V}_A = \frac{d\,\vec{r}_A}{dt}, \qquad \vec{V}_B = \frac{d\,\vec{r}_B}{dt}\ ,$$

то получаем

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A\,.$$

Аналогично можно доказать равенство ускорений

$$\vec{a}_A = \frac{d^2\,\vec{r}_A}{dt^2}, \qquad \vec{a}_B = \frac{d^2\,\vec{r}_B}{dt^2}, \qquad \frac{d^2\,\vec{\rho}}{dt^2} = 0\,.$$

То есть, $$\vec{a}_B = \vec{a}_A .$$

Таким образом, точки *A* и *B* движутся одинаково. Так как эти точки тела были выбраны произвольно, то можно утверждать, что все другие *точки твердого тела движущегося поступательно также имеют одинаковые скорости и ускорения, а их траектории совпадают при наложении.*

Можно утверждать обратное: *если скорости и ускорения всех точек твердого тела равны между собой в каждый момент времени, то тело движется поступательно.*

Поступательное движение тела вполне определяется движением какой-либо одной его точки, например центра тяжести тела.

В общем случае поступательно движущееся тело обладает, как и материальная точка, тремя степенями свободы (рис.3.1.4) связанные с независимыми друг от друга координатами любой точки твердого тела, которые называются уравнениями поступательного движения

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

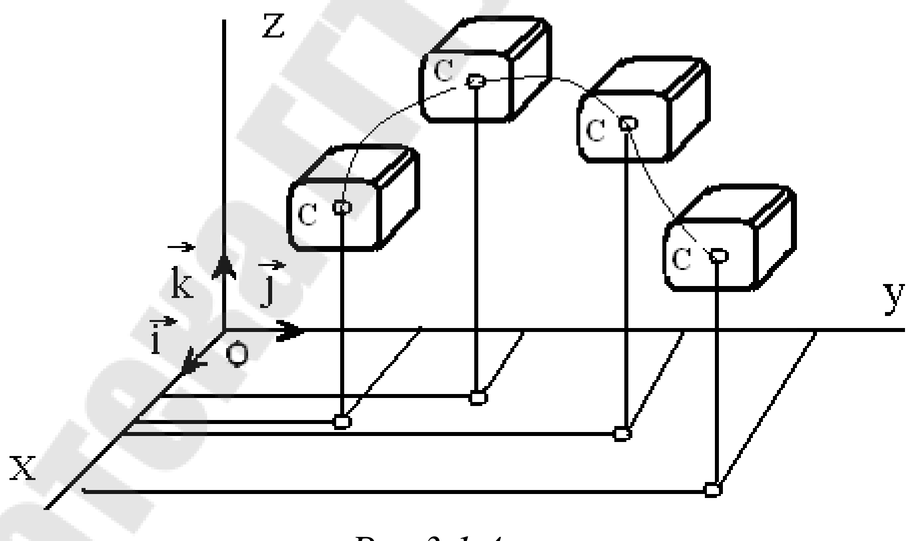


Рис.3.1.4.

Скорость и ускорение, общие для всех точек поступательно движущегося тела, называются скоростью и ускорением этого тела.

3.2 Вращательное движение твердого тела

Движение абсолютно твердого тела, при котором две его точки *O* и O_1 остаются неподвижными, называется вращением, или вращательным движением вокруг неподвижной оси *OO*.

Термин «вращательное движение» не применим к движению материальной точки, не имеющей размеров, и, следовательно, не имеющей двух неподвижных точек.

Вращательное движение – это такое движение, при котором все точки тела движутся по концентрическим окружностям, центры которых лежат на оси вращения, а плоскости перпендикулярны этой оси. Ось вращения может находиться и вне тела (рис.3.2.1).

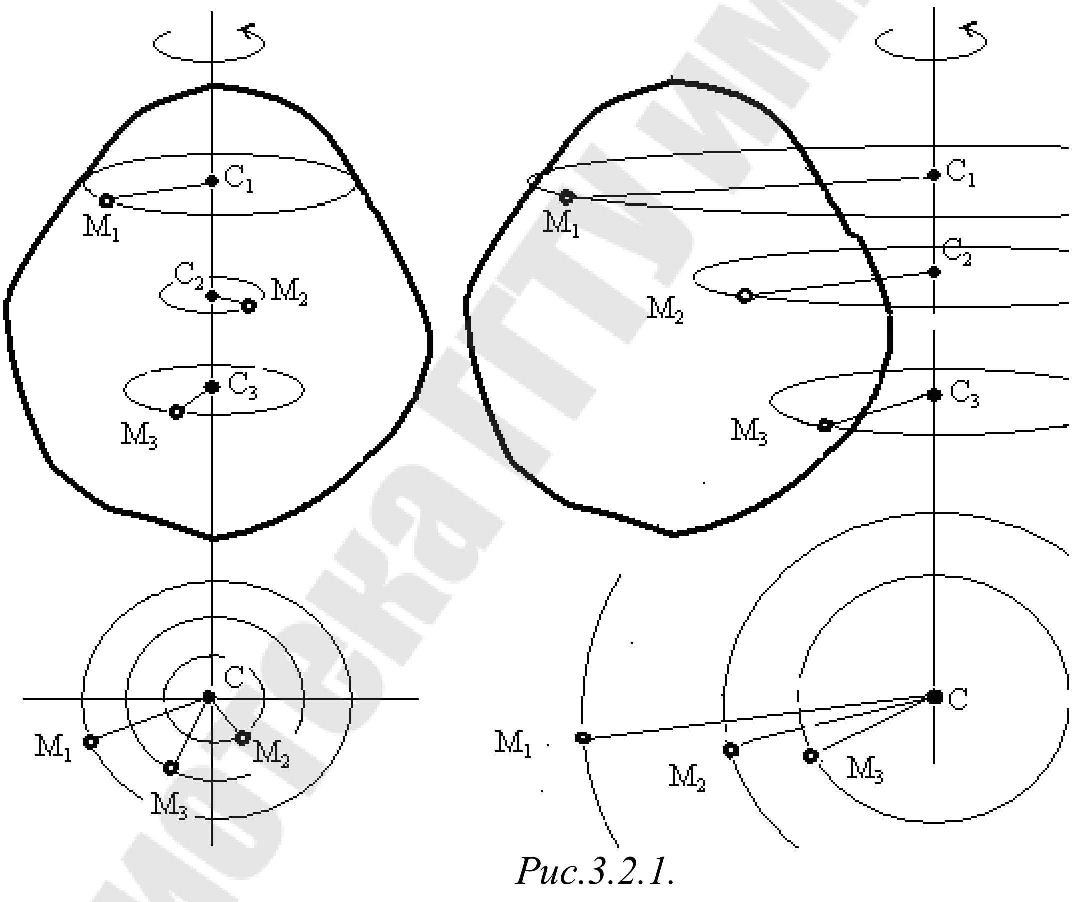


Рис.3.2.1.

Для того чтобы осуществить вращательное движение тела, достаточно закрепить тело на оси вращения, например при помощи подшипника *A* и подпятника *B* (рис.3.2.2).

Положение вращающегося тела может быть определено двухгранным углом φ между плоскостями, проходящими через ось вращения, одна из которых P, неподвижна относительно системы отсчета, а другая Q, неизменно связана с телом. Угол φ называется углом поворота или угловым перемещением данного тела. Условимся считать угол поворота тела положительным, если он отсчитывается от неподвижной плоскости P в сторону, противоположную вращению часовой стрелки, если смотреть на него с положительного конца оси вращения. Заданием величины и знака угла поворота φ вполне определяется положение плоскости Q и неизменно связанного с ней вращающегося тела.

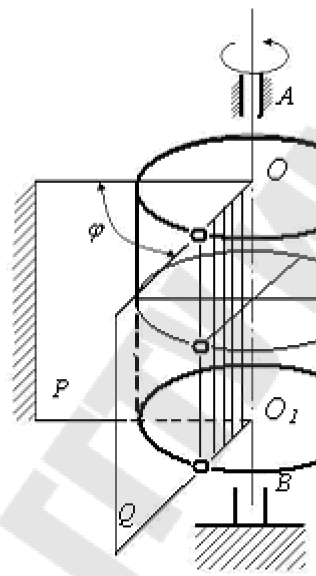


Рис. 3.2.2.

При вращении тела угол поворота тела изменяется с течением времени, следовательно, он является некоторой функцией времени

$$\varphi = f(t) \ . \qquad (3.2.1)$$

Уравнение (3.2.1), устанавливающее зависимость между углом поворота тела и временем его движения, называется уравнением вращательного движения тела. Зная зависимость $\varphi = f(t)$, можно для любого момента времени t определить положение тела. Тело, вращающееся вокруг неподвижной оси, обладает одной степенью свободы, и, следовательно, его положение в пространстве характеризуется одним уравнением движения.

Угол поворота в механике обычно измеряют в радианах. Иногда в практических задачах угол поворота выражают числом оборотов $N_{об}$ тела. Принимая во внимание, что один оборот тела, т. е. его поворот на *360°*, соответствует 2π радиан, получаем зависимость между углом φ поворота тела в радианах и числом $N_{об}$ оборотов:

$$\varphi = 2\pi \cdot N_{об}$$

Величина, характеризующая быстроту вращения твердого тела, называется его угловой скоростью.

Пусть в момент *t* положение тела определяется углом поворота φ, а в момент $t + \Delta t$ - углом поворота $\varphi + \Delta\varphi$.

Отношение приращения угла $\Delta\varphi$, *характеризующего поворот тела за некоторый промежуток времени* Δt, *к величине этого промежутка времена называется средней угловой скоростью тела за промежуток, времени* Δt.

Обозначая среднюю угловую скорость символом $\omega_{ср}$, будем иметь:

$$\omega_{ср} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

Средняя угловая скорость тела не дает представления о быстроте вращения тела в данный момент. Угловой скоростью тела в данный момент времени называется предел, к которому стремится средняя угловая скорость тела за промежуток времени Δt, при $\Delta t \to 0$.

Обозначая угловую скорость тела в данный момент буквой ω, будет иметь:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \omega_{ср} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$$

Угловая скорость тела равна производной от угла поворота тела по времени.

Значение угловой скорости может быть положительным или отрицательным, в зависимости от того, в какую сторону вращается тело. Когда тело вращается против часовой стрелки, если смотреть с положительного конца оси вращения, то $\Delta\varphi > 0$ и угловая скорость ω положительна. Если тело вращается по часовой стрелке, то угловая скорость отрицательна.

Определим размерность угловой скорости:

$$[\omega] = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[\Delta\varphi]}{[\Delta t]} = \frac{[угол]}{[время]}.$$

В международной системе единиц имеем

$$[\omega] = \frac{рад}{c} = \frac{1}{c} = c^{-1} .$$

Часто угловую скорость тела выражают не в радианах в секунду, а указывают число оборотов в минуту. Угловую скорость, выраженную числом оборотов в минуту, обозначают буквой *n*.

Запишем зависимость между величинами $[n] = \frac{об}{мин}$ и $[\omega] = \frac{рад}{c}$.

Так как один оборот тела соответствует его повороту на угол в 2π радиан, то

$$\omega = \frac{2\pi n(рад)}{60(сек)} = \frac{\pi n(рад)}{30(сек)} \Rightarrow \omega = \frac{\pi \cdot n}{30}.$$

Рассмотрим ускорение вращательного движения.

Величина, характеризующая быстроту изменения угловой скорости тела, называется его угловым ускорением.

Пусть в момент времени t тело имело угловую скорость ω, а в момент $t + \Delta t$ - угловую скорость $\omega + \Delta\omega$.

Отношение приращения $\Delta\omega$ *угловой скорости тела за некоторый промежуток времени* Δt *к этому промежутку времени называется средним угловым ускорением тела за промежуток времени* Δt.

Обозначая среднее угловое ускорение символом ε_{cp}, будем иметь:

$$\varepsilon_{cp} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}.$$

Предел, к которому стремится среднее угловое ускорение тела за промежуток времени Δt, при $\Delta t \to 0$, называется угловым ускорением тела

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega}.$$

Так как угловая скорость равна производной $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$, то

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad \text{или } \varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}.$$

Угловое ускорение тела равно первой производной от угловой скорости по времени или второй производной от угла поворота по времени.

Если знак углового ускорения тела совпадает со знаком его угловой скорости, то тело вращается ускоренно, если же их знаки различны, то тело вращается замедленно.

Размерность углового ускорения определяется формулой

$$[\varepsilon] = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[\Delta\omega]}{\Delta t} = \frac{\left[\textit{угловая скорость}\right]}{[\textit{время}]},$$

В международной системе единиц:

$$[\varepsilon] = \frac{\textit{рад}}{c^2} = c^{-2}$$

Угловая скорость и угловое ускорение являются векторными величинами, модули которых равны соответственно

$$\left|\vec{\omega}\right| = \omega \quad \text{и} \quad \left|\vec{\varepsilon}\right| = \varepsilon.$$

Вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ направлен вдоль оси, вокруг которой вращается тело. Вектор $\vec{\omega}$ направлен в сторону определяемую правилом правого винта, то есть, если смотреть на острие вектора (конец вектора), то вращение тела должно наблюдаться против движения часовой стрелки.

Направление вектора $\vec{\varepsilon}$ совпадает с направлением вектора $\vec{\omega}$, если $\dot{\omega} > 0$, то есть, при равноускоренном движении тела (рис.3.2.3). При равнозамедленном движении тела, когда $\dot{\omega} < 0$, вектор $\vec{\varepsilon}$ направлен против вектора $\vec{\omega}$.

То есть ,

если, $\vec{\varepsilon} \downarrow\downarrow \vec{\omega}$ — движение ускоренно,

если, $\vec{\varepsilon} \uparrow\downarrow \vec{\omega}$ — движение замедленно.

В общем случае направление оси вращения тела не совпадает с направлением координатных осей *OX, OY* или *OZ* (рис.3.2.3). В этом случае можем выразить векторы угловой скорости и углового ускорения через их проекции на координатные оси

$$\vec{\omega} = \vec{i}\,\omega_x + \vec{j}\,\omega_y + \vec{k}\,\omega_z \quad \text{и} \quad \vec{\varepsilon} = \vec{i}\,\varepsilon_x + \vec{j}\,\varepsilon_y + \vec{k}\,\varepsilon_z .$$

В частном случае предположим, что ось вращения совпадает с координатной осью *OZ* (рис.3.2.4). В этом случае

$$\omega_x = \dot{\varphi},\ \omega_y = 0,\ \omega_z = 0 \quad \text{и} \quad \varepsilon_x = \ddot{\varphi},\ \varepsilon_y = 0,\ \varepsilon_z = 0 .$$

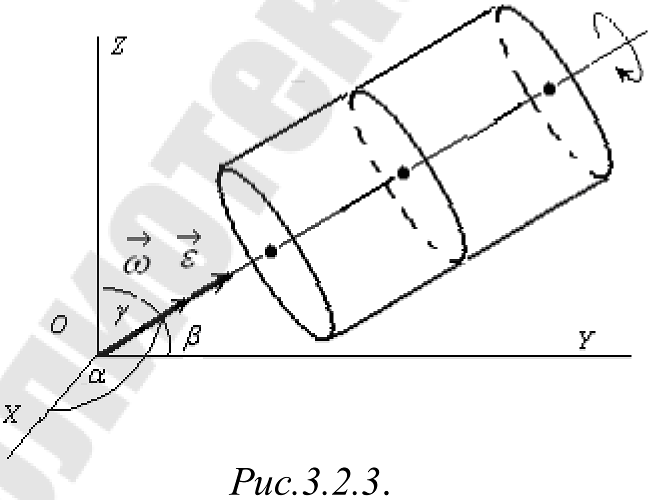


Рис.3.2.3.

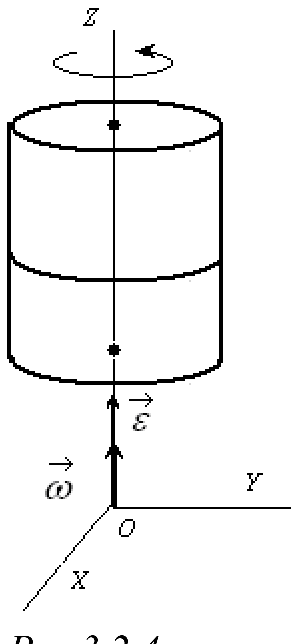


Рис.3.2.4.

Частные случаи вращательного движения.

1. Равномерное вращение - $\varepsilon = 0, \omega = const$, $\omega = \omega_0$.

Для вывода уравнения движения составим дифференциальное уравнение, которое решаем методом разделения переменных:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}, \quad d\varphi = \omega \cdot dt, \quad \int d\varphi = \int \omega \cdot dt, \quad \varphi = \omega \cdot t + C.$$

Постоянную *C* находим по начальным условиям: $t = 0$; $\varphi = \varphi_0$.

$$\varphi_0 = \omega \cdot 0 + C \quad , \quad C = \varphi_0 \quad .$$

Получаем уравнение равномерного вращения

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 \cdot t,$$

где φ_0 - начальный угол поворота тела.

2. Равнопеременное вращение - $\varepsilon = const$.

Аналогично предыдущему примеру выведем уравнение скорости и уравнение движения:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}, \quad d\omega = \varepsilon \cdot dt, \quad , \int d\omega = \int \varepsilon \cdot dt, \quad \omega = \varepsilon \cdot t + C_1 \ .$$

Постоянную C_1 находим по начальным условиям : $t = 0$, $\omega = \omega_0$.

$$\omega_0 = \varepsilon \cdot 0 + C_1, \quad C_1 = \omega_0.$$

Получаем уравнение скорости равнопеременного вращения

$$\omega = \varepsilon \cdot t + \omega_0 \ , \qquad (3.2.2)$$

где ω_0- начальная угловая скорость.

Выведем уравнение движения:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt},\ \ d\varphi = \omega \cdot dt, \qquad\qquad \int d\varphi = \int (\varepsilon \cdot t + \omega_0) \cdot dt,$$

$$\int d\varphi = \int \varepsilon \cdot tdt + \int \omega_0 dt \quad , \qquad\qquad \varphi = \varepsilon \frac{t^2}{2} + \omega_0 t + C_2 .$$

Постоянную C_2 находим по начальным условиям: $t = 0$; $\varphi = \varphi_0$;

$$\varphi_0 = \varepsilon \frac{t^2}{2} + \omega_0 \cdot 0 + C_2,\ \ C_1 = \varphi_0 .$$

Получаем уравнение равномерного вращения

$$\varphi = \varepsilon \frac{t^2}{2} + \omega_0 t + \varphi_0 . \qquad (3.2.3)$$

Заметим, что в случае равномерного и равнопеременного поступательного движения мы получали ранее аналогичные формулы с линейными величинами x, V_X, a_X (2.6.1),(2.6.2).

Уравнения (3.2.3), (3.2.3) для вращательного движения твердого тела и уравнения (2.6.1),(2.6.2) прямолинейного движения точки можно представить в обобщенном виде:

$$q = \ddot{q} \cdot \frac{t^2}{2} + \dot{q}_0 \cdot t + q_0 \quad \text{- уравнение движения ;}$$

$$\dot{q} = \ddot{q}_0 \cdot t + \dot{q}_0 \qquad \text{- уравнение скорости.}$$

Здесь

$q = q(t)$ - обобщенная координата, принимающая значения:

$q = \varphi(t)$ - в случае вращательного движения;

$q = x(t)$ - в случае поступательного движения, параллельного оси OX.

Соответственно имеем обобщенную скорость и обобщенное ускорение.

Для вращательного движения:

$$\dot{q} = \dot{\varphi}(t) = \frac{d\varphi}{dt} = \omega(t),$$

$$\ddot{q} = \ddot{\varphi}(t) = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \dot{\omega}(t) = \frac{d\omega}{dt} = \varepsilon .$$

Для поступательного движения:

$$\dot{q} = \dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = V_X(t),$$

$$\ddot{q} = \ddot{x}(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = \dot{V}_X(t) = \frac{dV_X}{dt} = a_X .$$

3.3. Скорость и ускорение точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси

В отличие от поступательного движения, различные точки вращающегося тела имеют различные линейные скорости $\vec{V}$.

Скорость каждой из точек непрерывно изменяет свое направление. Величина скорости V определяется скоростью вращения тела ω и расстоянием R рассматриваемой точки от оси вращения. Пусть за малый промежуток времени Δt тело повернулось на угол $\Delta\varphi$ (рис.3.3.1). Точка M, находящаяся на расстоянии R_M от оси, проходит при этом путь

$$\Delta S_M = R_M \Delta\varphi .$$

Линейная скорость точки равна

$$V_M = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S_M}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} R_M \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = R_M \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = R_M \frac{d\varphi}{dt} .$$

Получаем, известную из курса физики формулу (см. пункт 2.7)

$$V_M = R_M \cdot \omega . \qquad (3.3.1)$$

Из формулы (3.3.1) видим, что численное значение скорости любой точки вращающегося твердого тела прямо пропорционально расстоянию R точки до оси вращения.

Коэффициентом пропорциональности является угловая скорость $\omega(t)$, в общем случае зависящая от t.

Вектор вращательной скорости направлен по касательной к окружности, и, следовательно, перпендикулярен радиусу R (рис.3.3.2).

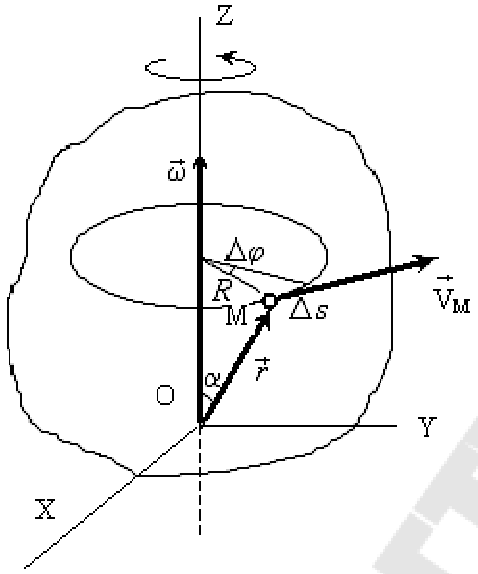


Рис.3.3.1.

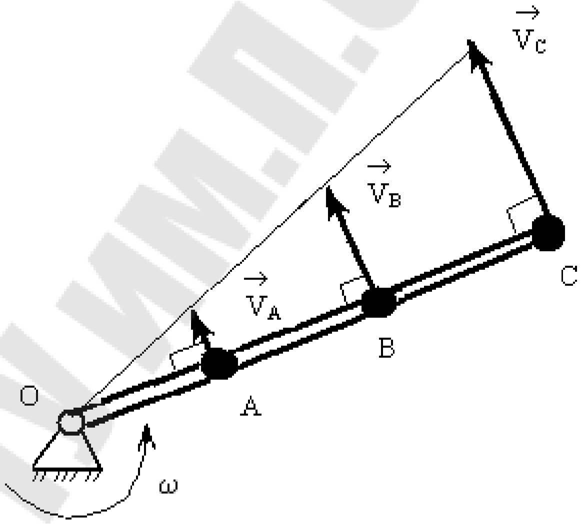


Рис.3.3.2.

Для точек A,B,C вращающегося стержня (рис.3.3.2) запишем формулы:

$$V_A = \omega \cdot OA, \quad \vec{V}_A \perp OA;$$

$$V_B = \omega \cdot OB, \quad \vec{V}_B \perp OB;$$

$$V_C = \omega \cdot OC, \quad \vec{V}_C \perp OC.$$

В общем случае ось вращения твердого тела не совпадает с направлением координатных осей (рис.3.3.3).

Если в точку M из начала координат O, провести радиус вектор $\vec{r}_M$, то из ΔOCM получим

$$V_M = \left|\vec{r}_M\right| \cdot \omega \cdot \sin(\vec{r}, \vec{\omega}) \quad \text{или} \quad V_M = r_M \cdot \omega \cdot \sin(\vec{r}, \vec{\omega}).$$

Так как

$$R_M = \left|\vec{r}_M\right| \cdot \sin(\vec{r}, \vec{\omega}),$$

приходим к формуле (3.3.1).

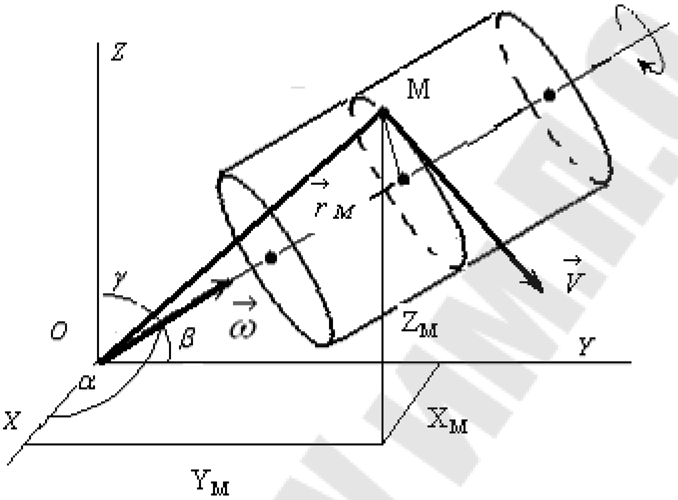


Рис.3.3.3.

Так как $\vec{V}_M \perp \vec{r}_M$ и $\vec{V}_M \perp \vec{\omega}$, представим вектор $\vec{V}_M$ векторным произведением (формулой Эйлера)

$$\vec{V}_M = \vec{\omega} \times \vec{r}_M .$$

Выразим векторы, входящие формулу Эйлера через их проекции на координатные оси:

$$\vec{V}_M = V_X \vec{i} + V_Y \vec{j} + V_Z \vec{k}, \quad \vec{\omega} = \vec{i}\,\omega_x + \vec{j}\,\omega_y + \vec{k}\,\omega_z$$

$$\vec{r} = X \vec{i} + Y \vec{j} + Z \vec{k}.$$

Для формулы Эйлера имеем

$$\vec{\omega}\times\vec{r}_M=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \omega_X & \omega_Y & \omega_Z\\ X_M & Y_M & Z_M\end{vmatrix},$$

и, в результате, получаем проекции скорости точки:

$$V_{MX}=\omega_Y Z_M-\omega_Z Y_M,\qquad V_{MY}=\omega_Z X_M-\omega_X Z_M,$$

$$V_{MZ}=\omega_X Y_M-\omega_Y Z_M.$$

Рассмотрим ускорение точки *M*.

Так как точка *M* движется по окружности, ускорение точки вращающегося тела (рис.3.3.4) представим в виде суммы касательного (вращательного) и нормального (осестремительного) ускорений,

$$\vec{a}_M=\vec{a}_{\tau M}+\vec{a}_{nM}\ ,\text{ или }\quad \vec{a}_M=\vec{\tau}\,a_{\tau M}+\vec{n}\,a_{nM}\ .$$

Здесь $\vec{\tau}$ и $\vec{n}$ единичные векторы касательной и нормали к окружности.

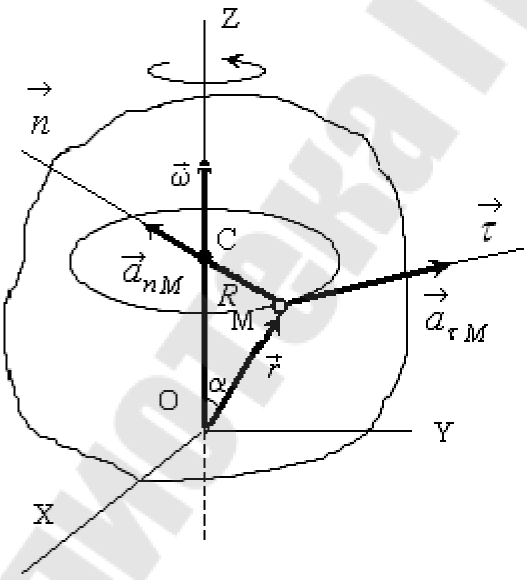


Рис.3.3.4.

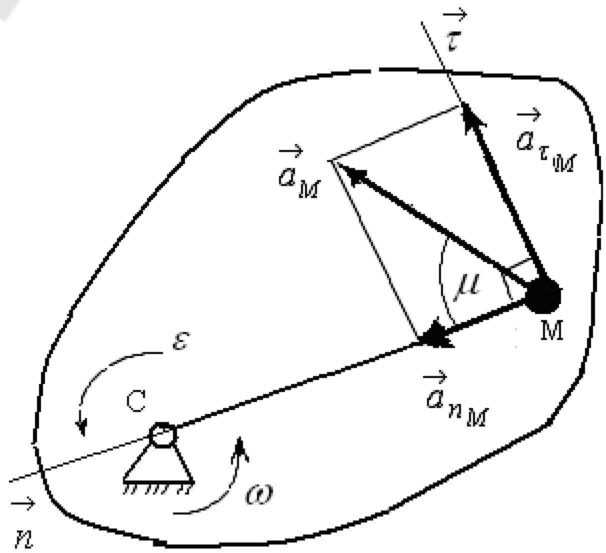


Рис.3.3.5.

Модуль нормального ускорения равен

$$a_{nM} = \frac{V_M^2}{R_M} = \frac{(\omega \cdot R_M)^2}{R_M} = \omega^2 R_M .$$

Модуль касательного ускорения равен

$$a_{\tau M} = \frac{dV_M}{dt} = \frac{d(\omega \cdot R_M)}{dt} = R_M \frac{d\omega}{dt} = R_M \varepsilon .$$

Численные значения касательного и нормального ускорений пропорциональны радиусу вращения точки. Для величины a_{nM} коэффициентом пропорциональности является величина ω^2, а для $a_{\tau M}$ - угловое ускорение ε .

Модуль полного ускорения

$$a_M = \sqrt{a_{\tau M}^2 + a_{nM}^2} = R_M \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} . \qquad (3.3.2)$$

Угол μ, образованный полным ускорением и радиусом вращения (рис.3.3.5), можно найти по формуле

$$tg\mu = \frac{a_{\tau M}}{a_{nM}} = \frac{\varepsilon}{\omega^2} .$$

Значение угла μ не зависит от расстояния точки до оси вращения.

Для точек A ,B и C вращающегося стержня (рис.3.3.5) запишем формулы ускорений:

$$a_{nA} = \omega^2 \cdot OA ,\ \vec{a}_{nA} \| OA , \qquad a_{\tau A} = \varepsilon \cdot OA ,\ a_{\tau A} \perp OA$$

$$a_{nB} = \omega^2 \cdot OB ,\ \vec{a}_{nB} \| OB , \qquad a_{\tau B} = \varepsilon \cdot OB ,\ a_{\tau B} \perp OB$$

$$a_{nC} = \omega^2 \cdot OC,\ \vec{a}_{nC} \| OC, \qquad a_{\tau C} = \varepsilon \cdot OC,\ a_{\tau C} \perp OC$$

Таким образом, скорость и ускорение любой точки вращающегося твердого тела будем находить по формулам:

$V = R \cdot \omega$ - модуль вектора скорости,

$\vec{V} \perp R$ - направление вектора скорости;

$a_n = \omega^2 R$ - модуль нормального ускорения;

$a_\tau = \varepsilon \cdot R$ - модуль касательного ускорения;

$a = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$ - модуль полного ускорения

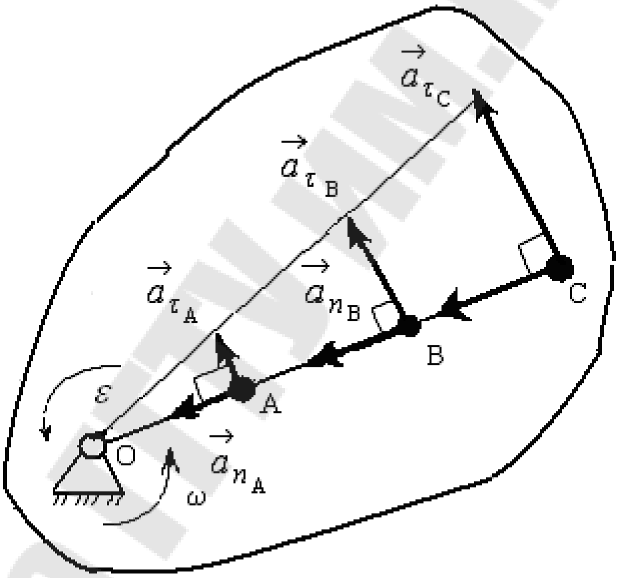


Рис.3.3.6.

4. ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

4.1. Плоскопараллельное движение. Основные понятия. Уравнения движения.

Плоскопараллельным (плоским) движением называется такое движение абсолютного твердого тела, при котором все его точки движутся параллельно некоторой неподвижной плоскости, которую будем называть основной.

При плоскопараллельном движении всякая прямая принадлежащая телу и перпендикулярная основной плоскости, будет двигаться параллельно самой себе. Например, $A_1A_0 \perp \Pi_0$ и $B_1B_0 \perp \Pi_0$ (рис.4.1.1).

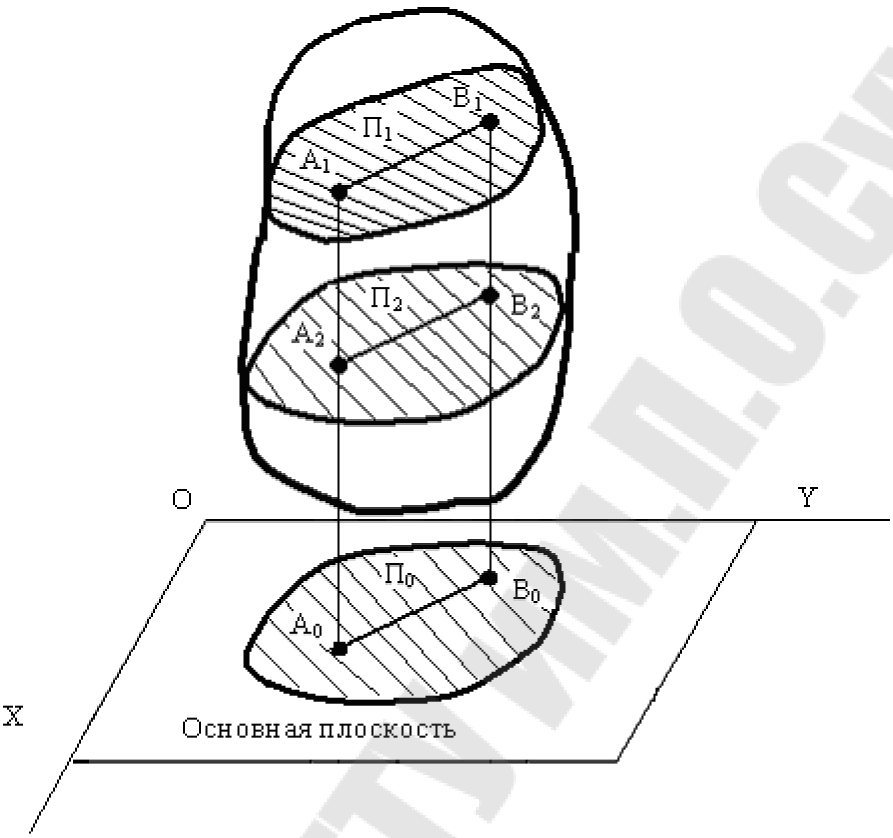


Рис.4.1.1.

Изучение плоскопараллельного движения твердого тела сводится к исследованию движения плоской фигуры, которая является проекцией тела на любую плоскость, параллельную основной, например, плоскости сечения тела Π_1 и Π_2, или площадь проекции тело на основную плоскость Π_{01}.

Положение плоской фигуры в её плоскости характеризуется прямолинейным отрезком AB , соединяющим две точки этой фигуры.

Пусть плоская фигура переместилась из положения A_0B_0 в положение A^*B^*. Будем это перемещение считать элементарным, то есть малым.

Представим, что плоская фигура совершила произвольное элементарное поступательное перемещение из положения A_0B_0 в положение $A^{\Pi}B^{\Pi}$. При этом движении перемещаемый отрезок оставался параллельным самому себе, $A_0B_0 \| A^{\Pi*}B^{\Pi}$, а точки A и B описывали одинаковые произвольные траектории (рис.4.1.2).

Повернем теперь плоскую фигуру (отрезок $A^{П*}B^{П}$) вокруг точки $A^{П}$ по часовой стрелке таким образом, чтобы после поворота плоская фигура заняла конечное положение A^*B^*

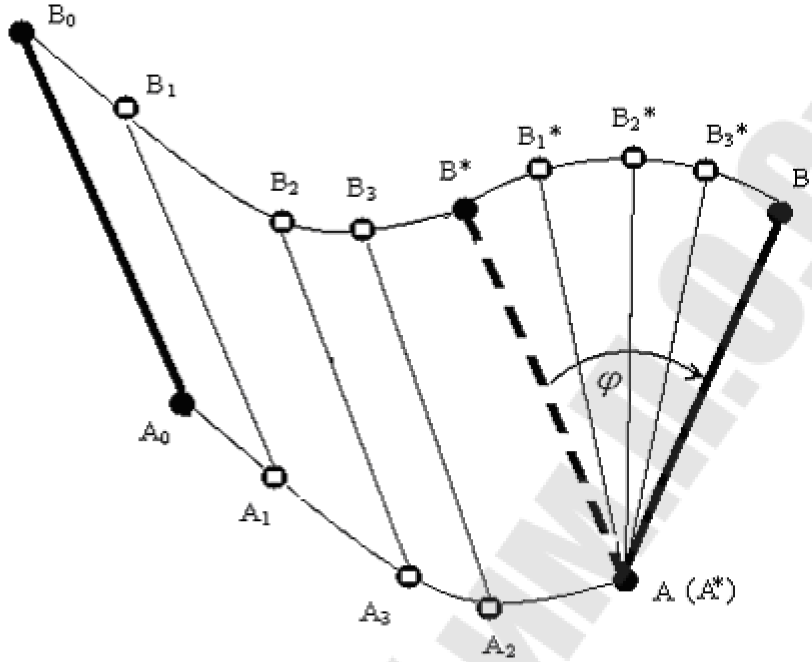


Рис.4.1.2.

На рис.4.1.2. поступательное перемещение выбрано таким образом, что все точки плоской фигуры движутся как точка A. Вращение плоской фигуры происходит вокруг точки $A^{П}$ по часовой стрелке. Точка A в этом случае называется полюсом.

Выберем теперь за полюс точку B, и поступательно переместим плоскую фигуру из положения A_0B_0 в положение $A_ПB_П$. Повернем теперь плоскую фигуру вокруг точки $B_П$ таким образом, чтобы плоская фигура заняла конечное положение A^*B^* (рис.4.1.3) .

Как видно из рис.4.1.2 и рис.4.1.3, направление вращения отрезка и угол поворота в обоих случаях одинаковы и не зависит от выбора полюса.

Всякое непоступательное перемещение плоской фигуры в ее плоскости может быть составлено из совокупности элементарных поступательных движений вместе с выбранным полюсом, и вращательных элементарных перемещений, при этом, вращательное движение не зависит от выбора полюса.

Положение плоской фигуры на её плоскости (положение прямолинейного отрезка) определяется тремя параметрами: двумя координатами X_A, $У_A$ произвольно выбранного полюса A отрезка AB, и углом поворота φ , образуемым отрезком AB с осью координат (рис.4.1.4). Можно говорить, что твердое тело, совершающее плоскопараллельное движение, имеет три степени свободы.

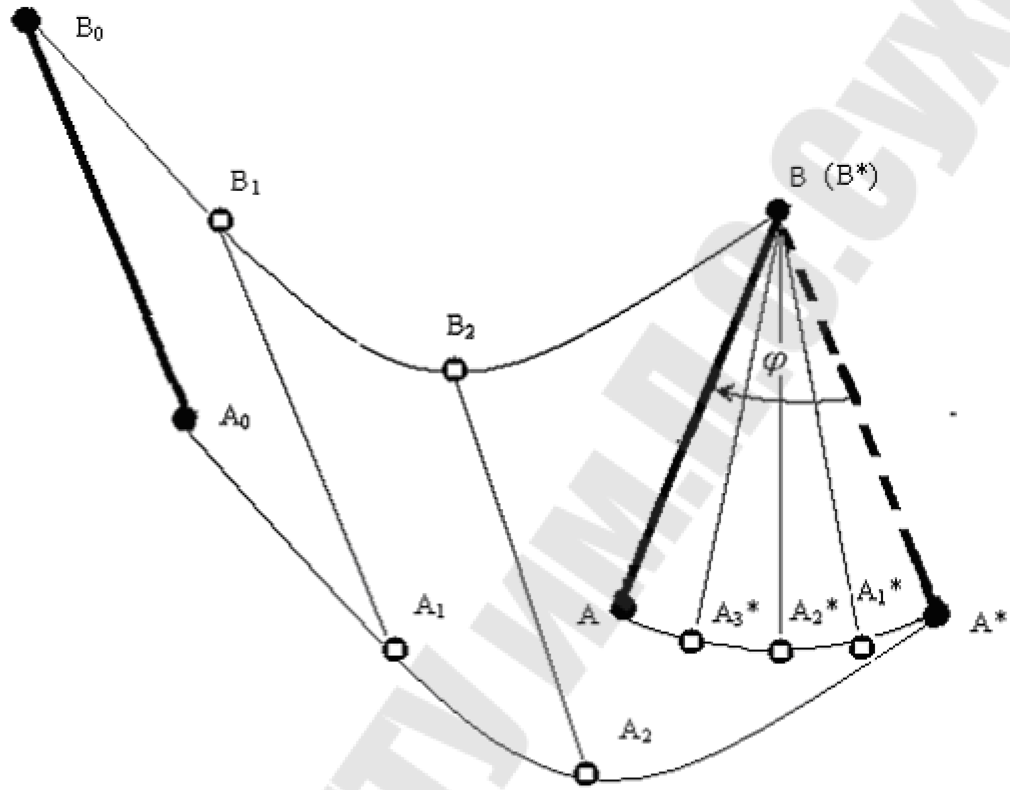


Рис.4.1.3.

Уравнения плоскопараллельного движения твердого тела имеют вид:

$$X_A = X_A(t), \qquad Y_A = Y_A(t), \qquad \varphi = \varphi(t).$$

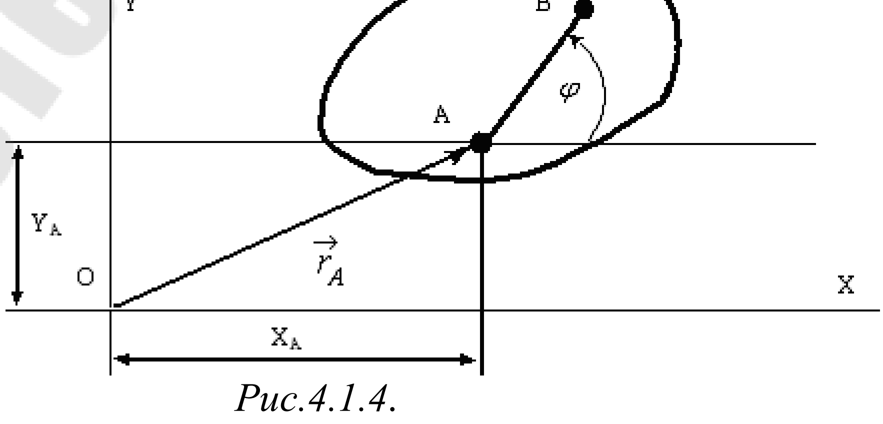


Рис.4.1.4.

4.2. Теорема о скоростях точки плоской фигуры

Так как движение плоской фигуры можно представить последовательным суммированием поступательного движения вместе с полюсом *A*, и вращательным движением вокруг, то очевидно, что скорость любой точки *B* плоской фигуры может быть определена векторной суммой скоростей точки *B*, полученных в двух движениях (рис.4.2.1.):

$$\vec{V}_B = \vec{V}_{B_{ПОСТ}} + \vec{V}_{B_{BP}}.$$

При поступательном движении скорости всех точек одинаковы поэтому

$$\vec{V}_{B_{ПОСТ}} = \vec{V}_A.$$

При вращательном движении плоской фигуры скорости всех её точек пропорциональны радиусам вращения и перпендикулярны к ним, поэтому

$$V_{B_{BP}} = \omega \cdot AB \quad , \qquad \vec{V}_{B_{BP}} \perp AB.$$

Здесь угловая скорость плоской фигуры равна

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}.$$

Обозначим

$$\vec{V}_{B_{BP}} = \vec{V}_{BA},$$

и запишем векторную формулу для сложения скоростей точки плоской фигуры

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA} \quad .$$

Здесь

$$V_{BA} = \omega \cdot BA \;, \quad \vec{V}_{BA} \perp BA.$$

Скорость любой точки плоской фигуры равна геометрической сумме двух скоростей: вектора скорости полюса и вектора вращательной скорости точки вокруг полюса.

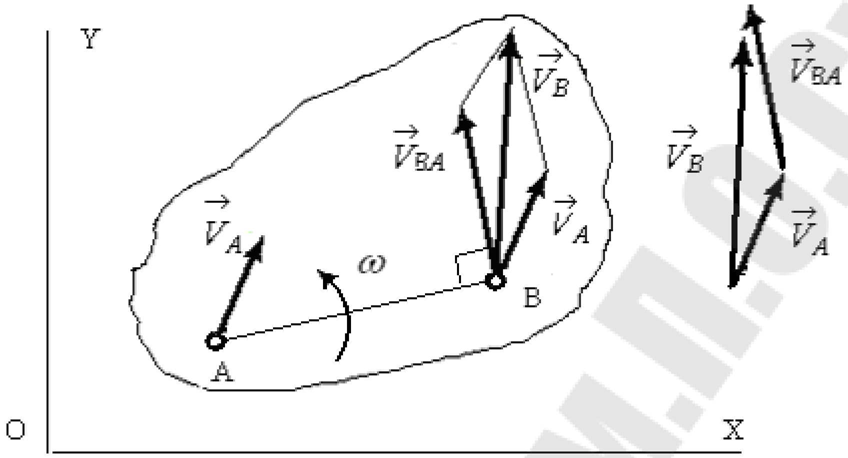


Рис.4.2.1.

Рассмотрим отрезок *AD*, и зная скорость полюса *A*, определим скорости точек *B,C* и *D ,* принадлежащих этому отрезку(рис.4.2.2.):

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}, \qquad \vec{V}_C = \vec{V}_A + \vec{V}_{CA}, \qquad \vec{V}_D = \vec{V}_A + \vec{V}_{DA}.$$

Вычислим проекции векторов $\vec{V}_A$, $\vec{V}_B$, $\vec{V}_C, \vec{V}_D$ на ось *AX,* направленную вдоль отрезка *AD*:

$$V_{B_X} = V_{A_X} + V_{BA_X}, \; V_{C_X} = V_{A_X} + V_{CA_X}, \; V_{D_X} = V_{A_X} + V_{DA_X}.$$

Так как

$$\vec{V}_{BA} \perp DA, \quad \vec{V}_{CA} \perp DA, \quad \vec{V}_{DA} \perp DA,$$

то

$$V_{BA_X} = V_{CA_X} = V_{DA_X} = 0,$$

следовательно

$$V_{B_X} = V_{C_X} = V_{B_X} = V_{A_X}.$$

Получаем теорему о проекциях скоростей точек плоской фигуры.

Проекции скоростей двух точек плоской фигуры на прямую соединяющую эти точки, равны между собой.

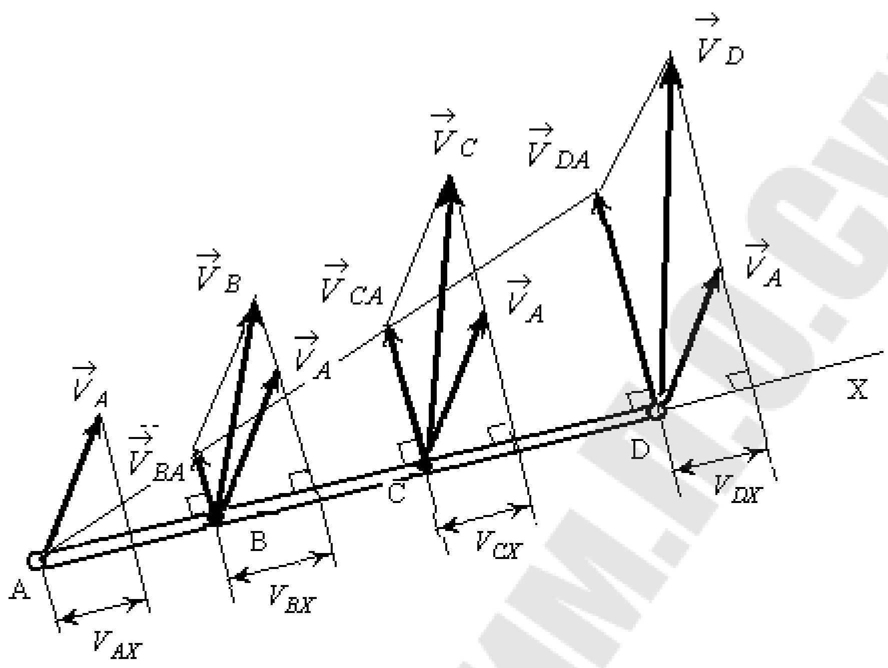


Рис.4.2.2.

В кинематических схемах механизмов звенья изображаются прямолинейными отрезками, которые обозначаются как *AB, DC, BK,* и так далее.

Угловые скорости звеньев принято обозначать соответствующими индексами: ω_{AB}, ω_{DC}, ω_{BK}.

Зная вращательную скорость какой-нибудь точки звена, находим его угловую скорость

$$\omega_{AB} = \frac{V_{BA}}{BA}.$$

Пример 4.2.1.

Колесо радиусом R катится без проскальзывания по неподвижной горизонтальной поверхности. Скорость точки C, центра колеса, задана и равна $\vec{V}_C$. Требуется определить векторы скоростей точек A, B и D, находящихся на ободе колеса (рис.4.2.3.).

Колесо, как плоская фигура, совершает плоскопараллельное движение. За полюс плоской фигуры принимаем точку C, скорость которой известна. Для решения используем формулы векторного сложения:

$$\vec{V}_A = \vec{V}_C + \vec{V}_{AC}, \quad \vec{V}_B = \vec{V}_C + \vec{V}_{BC}, \quad \vec{V}_D = \vec{V}_C + \vec{V}_{DC}.$$

Зная угловую скорость ω колеса, находим вращательные скорости:

$$V_{AC} = V_{BC} = V_{DC} = \omega \cdot R \ .$$

Их направления определяются по условиям

$$\vec{V}_{AC} \perp CA, \ \vec{V}_{BC} \perp CB, \ \vec{V}_{DC} \perp BC.$$

Вычисляем скорости точек

$$V_A = \sqrt{V_C^2 + V_{AC}^2 + 2V_C V_{AC} \cos(\vec{V}_C, \vec{V}_{AC})}, \quad V_B = V_C + V_{BC},$$

$$V_D = \sqrt{V_C^2 + V_{DC}^2 + 2V_C V_{DC} \cos(\vec{V}_C, \vec{V}_{DC})}.$$

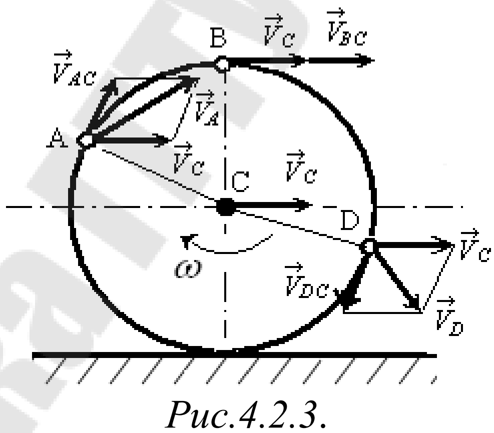


Рис.4.2.3.

Пример 4.2.2.

Кривошипно-ползунный механизм приводится в движение вращением кривошипа *OA*, угловая скорость ω_{OA} которого известна. Предполагая заданными размеры звеньев механизма, определим векторы скоростей шарнира *A* и ползуна *B* для данного положения звеньев (рис.4.2.4).

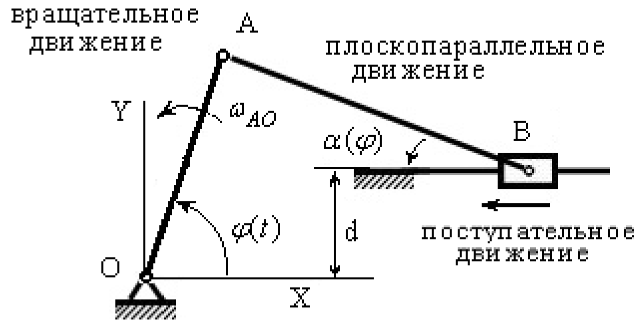


Рис.4.2.4.

Механизм состоит из трех подвижных звеньев, каждое из которых совершает определенный вид движения:

кривошип OA - вращательное;

ползун B - поступательное;

шатун AB - плоскопараллельное.

Укажем на схеме механизма направления векторов $\vec{V}_A$, $\vec{V}_B$ и $\vec{V}_{BA}$(рис.4.2.5).

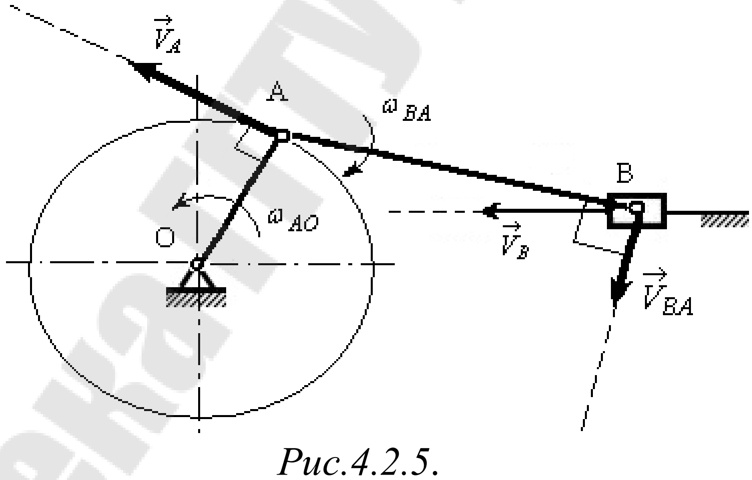


Рис.4.2.5.

По заданному вращательному движению кривошипа находим скорость шарнира A, соединяющего кривошип OA с шатуном AB.

$$V_A = \omega_{OA} \cdot OA, \quad \vec{V}_A \perp OA.$$

Рассматривая плоскопараллельное движение звена AB , принимаем точку A за полюс и записываем векторную формулу

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}, \quad \text{где} \quad \vec{V}_{BA} \perp AB, \; \vec{V}_B \| OX \qquad (4.2.1).$$

Для решения можно использовать три способа.

1. Графическое решение

Зная направления векторных величин построим для формулы (4.2.1) векторный треугольник. Зная скорость $\vec{V}_A$, по сторонам треугольника определяем модули векторов $\vec{V}_B$ и $\vec{V}_{BA}$ (рис.4.2.6.).

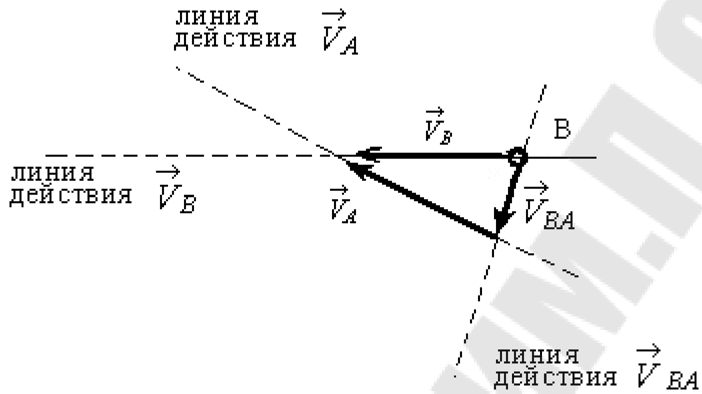


Рис.4.2.6

2. Аналитическое решение (метод проекций).

Так как направления векторов скоростей точек *A* и *B* определены, то, векторное уравнение (4.2.1) можно решить, определив проекции скоростей на координатные оси (рис.4.2.7).

$$V_{B_X} = V_{A_X} + V_{BA_X}, \qquad V_{B_Y} = V_{A_Y} + V_{BA_Y}.$$

Если для данного положения механизма известны углы φ и α, определяющие положение звеньев *OA* и *AB,* то :

$$V_{B_X} = -V_B, \quad V_{B_Y} = 0,$$

$$V_{A_X} = -V_A \cdot \sin\varphi^*, \quad V_{A_Y} = V_A \cdot \cos\varphi^*,$$
$$V_{BA_X} = -V_{BA} \cdot \sin\alpha^*, V_{BA_Y} = -V_{BA} \cdot \cos\alpha^*.$$

Здесь $\varphi^* = \varphi$ и $\alpha^* = \alpha$, как углы, имеющие взаимно перпендикулярные стороны.

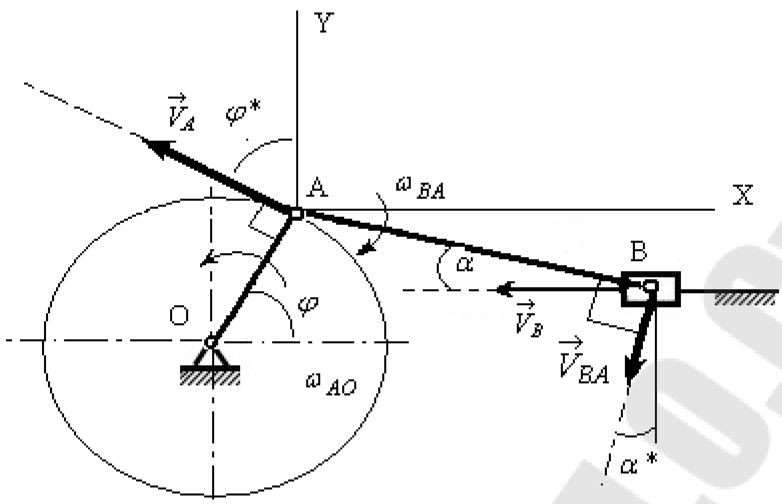


Рис.4.2.7.

Решая систему двух уравнений

$$V_B = V_A \cdot \sin\varphi + V_{BA} \cdot \sin\alpha$$

и

$$0 = V_A \cdot \cos\varphi - V_{BA} \cdot \cos\alpha ,$$

находим модули скоростей V_B, V_{BA} и угловую скорость шатуна

$$\omega_{AB} = \frac{V_{BA}}{AB} .$$

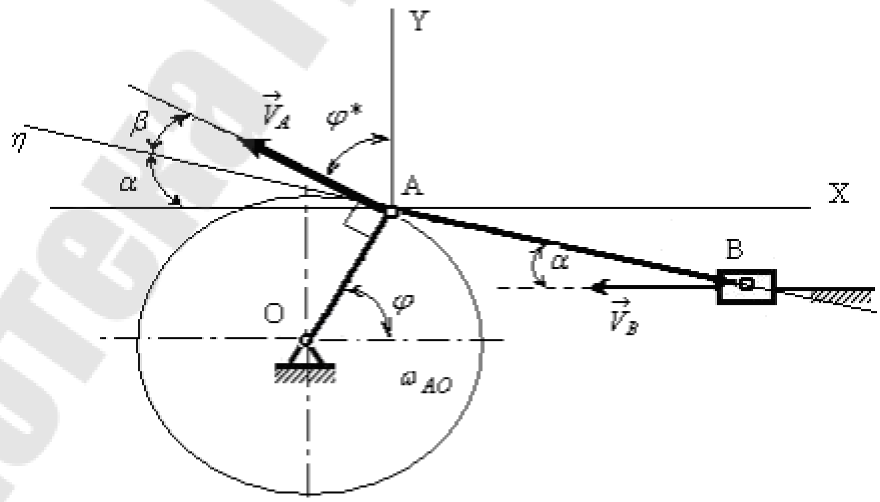


Рис.4.2.8

3. Аналитическое решение (теорема о проекциях скоростей). Выберем направление оси $B\eta$ вдоль звена AB (рис.4.2.8). Следуя теореме, запишем

$$V_{A\eta} = V_{B\eta}\text{ , или } V_A \cdot \cos\beta = V_B \cdot \cos\alpha .$$

Находим $$V_B = V_A \cdot \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} .$$

Здесь $\beta = \frac{\pi}{2} - \varphi * - \alpha$.

4.3. Мгновенный центр скоростей

Мы установили, что скорость любой точки плоской фигуры, движущейся плоскопараллельно, в любой момент времени равна векторной сумме двух скоростей: скорости полюса плоской фигуры и вращательной скорости этой точки вокруг полюса. Причем, полюс плоской фигуры выбирается произвольно. Эта произвольность выбора позволяет представить движение плоской фигуры в более простой форме, как вращательное движение.

Пусть задана скорость точки A и угловая скорость ω. Примем точку A за полюс плоской фигуры.

Для точек C и P имеем векторные равенства:

$$\vec{V}_C = \vec{V}_A + \vec{V}_{CA} \quad \text{и} \quad \vec{V}_P = \vec{V}_A + \vec{V}_{PA} .$$

Здесь численные значения вращательных скоростей пропорциональны расстояниям данных точек до полюса

$$V_{CA} = \omega \cdot CA \quad \text{и} \quad V_{PA} = \omega \cdot PA .$$

Для точки P подберем расстояние AP таким образом, чтобы выполнялось условие

$$V_{CP} = V_A .$$

Вычислим

$$PA = \frac{V_A}{\omega} .$$

Учитывая направление вращения плоской фигуры (рис.4.3.1), имеем

$$\vec{V}_{PA} = -\vec{V}_A .$$

Тогда скорость точки P будет равна

$$\vec{V}_P = \vec{V}_A + \vec{V}_{PA} = 0.$$

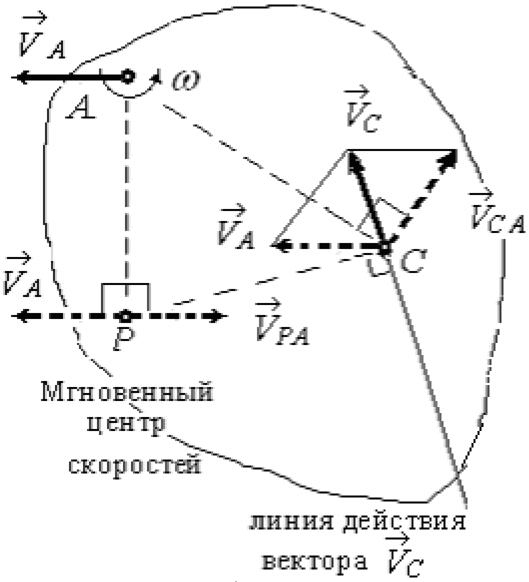


Рис.4.3.1.

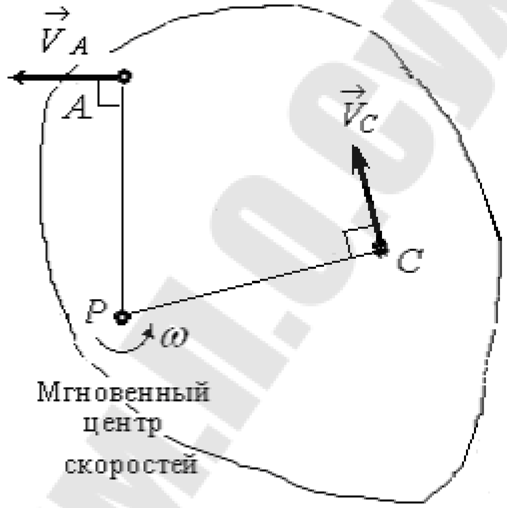


Рис.4.3.2.

Таким образом, мы установили, что в любой момент времени на плоской фигуре (или на её мысленном продолжении) всегда найдется точка, скорость которой в этом положении плоской фигуры равна нулю. Принимая точку P за полюс, определим скорости точек A и C, как вращательные, при вращении плоской фигуры вокруг неподвижной в данный момент точки P (рис.4.3.2):

$$\vec{V}_A = \vec{V}_P + \vec{V}_{AP}, \qquad \vec{V}_C = \vec{V}_P + \vec{V}_{CP}.$$

Так как

$$\vec{V}_P = 0, \text{ то } \vec{V}_A = \vec{V}_{AP},\ \vec{V}_C = \vec{V}_{CP},$$

то есть,

$$V_A = \omega \cdot AP,\ \vec{V}_A \perp AP; \quad \text{и} \quad V_C = \omega \cdot CP,\ \vec{V}_C \perp CP.$$

Очевидно, что в следующем, другом положении плоской фигуры, векторы скоростей точек A, B С изменят свои направления и численные значения, и, следовательно, изменится положение точки Р, расстояния AP, BP,CP и угловая скорость ω (рис.4.3.4). То есть, каждое мгновенье в движении плоской фигуры, каждое её новое положение, характеризуется новым распределением линейных скоростей и новым значением угловой скорости.

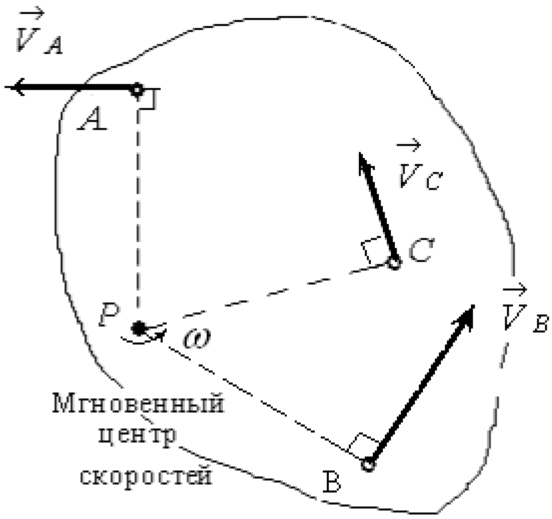


Рис.4.3.3..

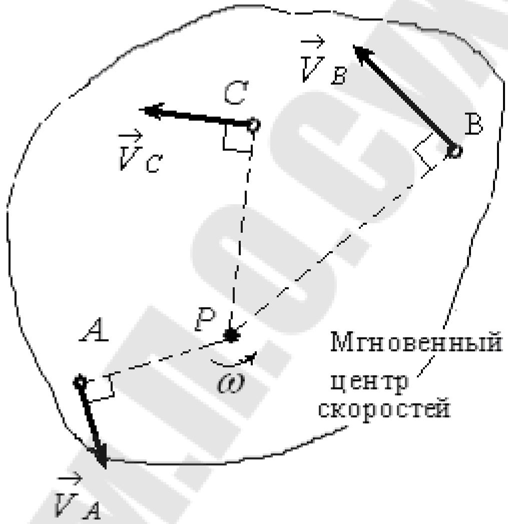


Рис.4.3.4.

Точка P плоской фигуры, скорость которой в данный момент равна нулю, называется мгновенным центром скоростей (МЦС). Угловая скорость плоской фигуры называется мгновенной угловой скоростью.

Рассмотрим способы определения положения мгновенного центра скоростей.

Первый способ. Непрерывное движение плоской фигуры можно представить как непрерывный ряд последовательных вращений плоской фигуры вокруг мгновенного центра скоростей, занимающего в различные моменты времени различные положения. То есть, точка P будет перемещаться по плоской фигуре по траектории, которая называется *центроидой*.

Рассмотрим цилиндр, катящийся по некоторой неподвижной поверхности (рис.4.3.5). Мгновенным центром скоростей P в данном случае является точка касания поверхности цилиндра и неподвижной поверхности качения. Пусть за точкой P следят два наблюдателя, один движется вместе с цилиндром - подвижный наблюдатель, второй находится на неподвижной поверхности - неподвижный наблюдатель.

С каждым наблюдателем связываем систему координат.

Геометрическое место мгновенных центров скоростей относительно подвижной системы координат, связанных с плоской фигурой, называется *подвижной центроидой.*

Геометрическое место мгновенных центров скоростей относительно неподвижных осей координат называется *неподвижной центроидой.*

При плоскопараллельном движении подвижная центроида катится по неподвижной без скольжения (Теорема Пуансо).

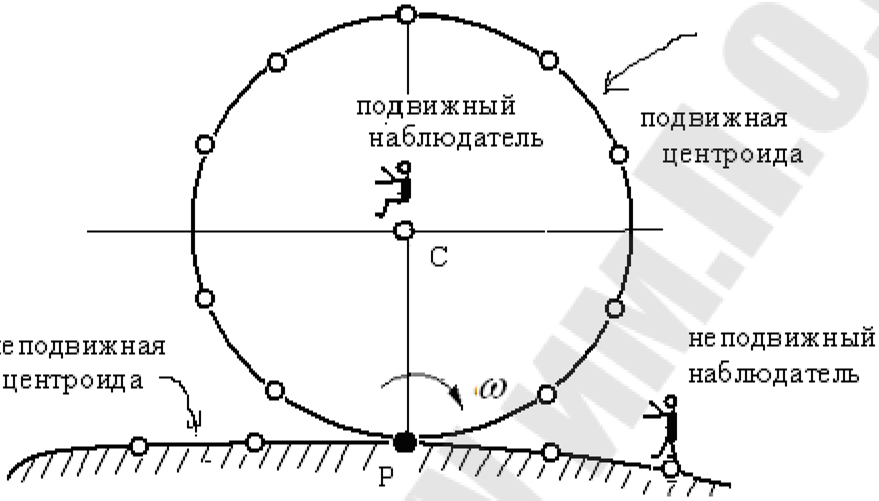


Рис.4.3.5.

Пример 4.3.1.

Цилиндр катится без скольжения по неподвижной поверхности другого тела. Скорость общей точки P касания цилиндра и поверхности в каждый момент времени равна нулю. Точка P является мгновенным центром скоростей цилиндра. Скорости всех точек цилиндра перпендикулярны к отрезкам, соединяющих их с точкой P (рис.4.3.6).

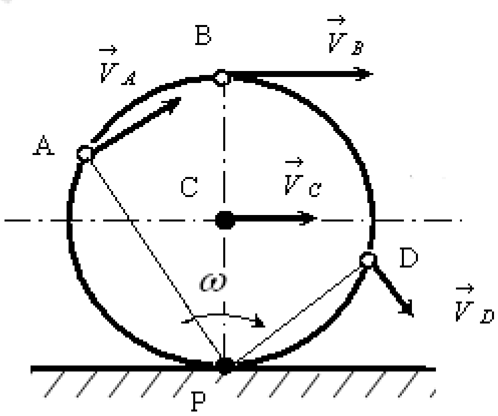


Рис.4.3.6.

Второй способ. Так как скорость точки плоской фигуры определяются как вращательная, то вектор скорости перпендикулярен к радиусу её вращения, то есть к отрезку, соединяющему точку с центром вращения. Тогда очевидно, что мгновенный центр скоростей будет находиться в точке пересечения перпендикуляров, восстановленных из данных точек к векторам их скоростей. Для определения положения точки P надо знать линии действия скоростей двух точек плоской фигуры (рис.4.3.7).

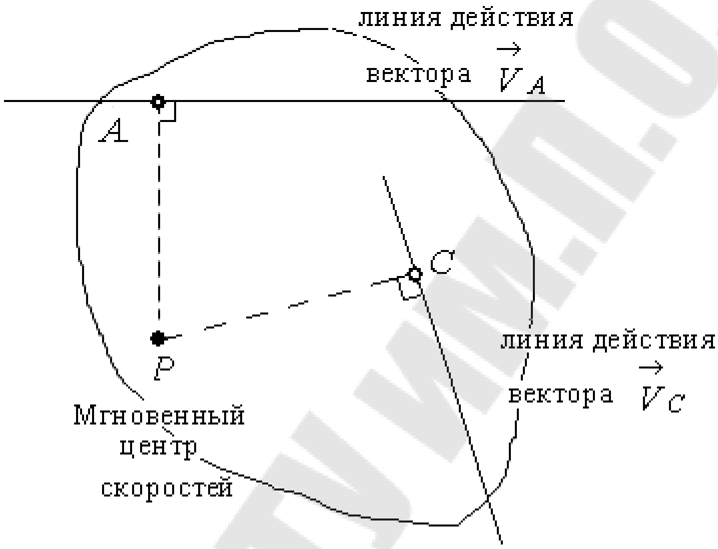


Рис.4.3.7.

Пример 4.3.2.

Определено направление скорости общей точки A кривошипа OA и шатуна AB, и известна траектория точки B,

$$\vec{V}_A \perp OA, \qquad \vec{V}_B \| OX \ .$$

МЦС звена AB (точка P) находится в точке пересечения перпендикуляров, восстановленных к векторам скоростей в точках A и B (рис.4.3.8):

Третий способ. Модуль вращательной скорости точки, как известно, пропорционален радиусу вращения. То есть, численные значения скорости точек A, B и C плоской фигуры пропорциональны их расстояниям до мгновенного центра скоростей.

Коэффициентом пропорциональности является угловая скорость ω плоской фигуры.

$$\frac{V_A}{AP} = \frac{V_C}{CP} = \frac{V_B}{BP} = \omega \qquad (4.3.1)$$

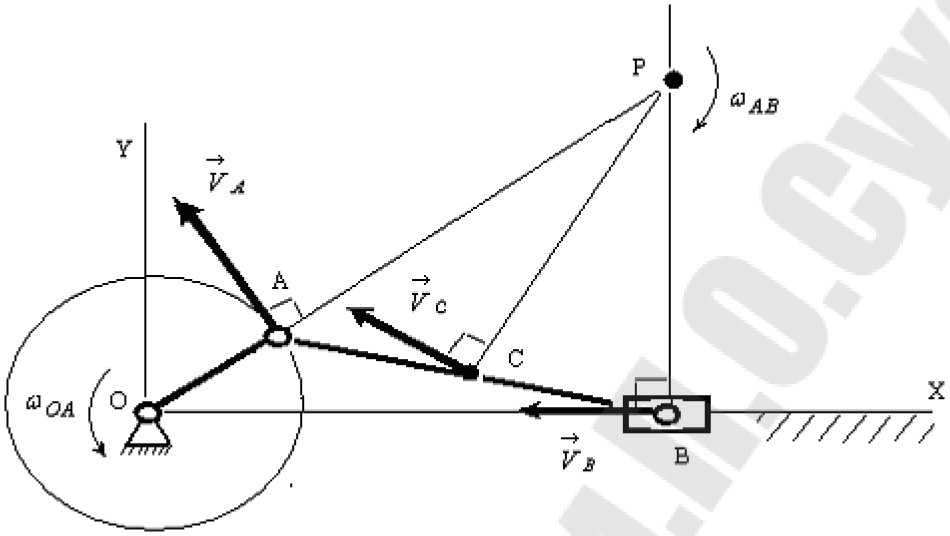


Рис.4.3.8.

Если скорости точек A и B плоской фигуры параллельны друг другу и при этом линия AB перпендикулярна к вектору $\vec{V}_A$, то мгновенный центр скоростей определяется из условия пропорциональности скоростей.

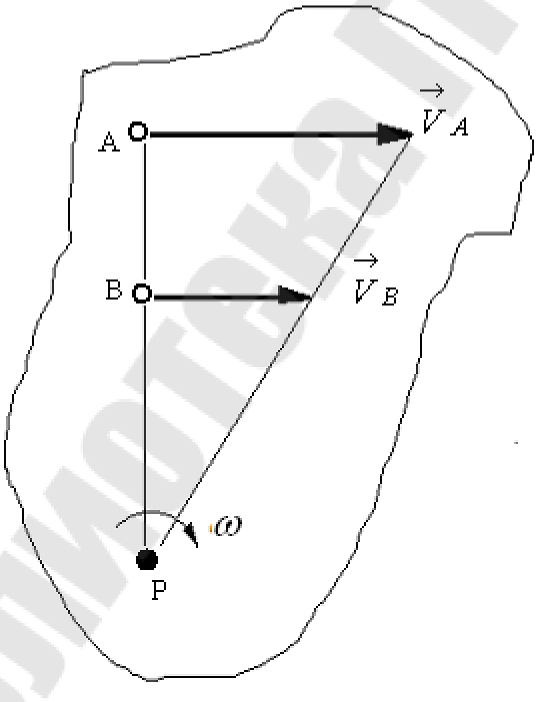


Рис.4.3.9.

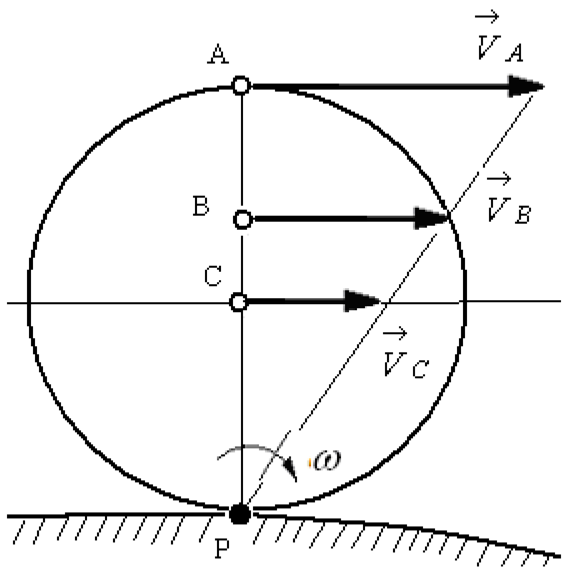


Рис.4.3.10.

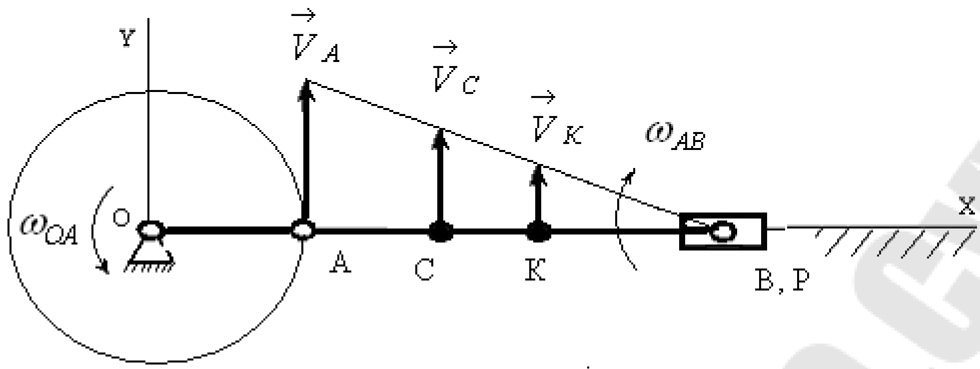


Рис.4.3.11.

Возможны два случая.

1. Скорости точек A и B параллельны и одинаково направлены, и не равны,

$$(\vec{V}_A \uparrow\uparrow \vec{V}_B) \perp AB \ , \quad V_A \neq V_B .$$

Мгновенный центр скоростей звена AB (точка P) находится в точке пересечения линии, проходящей через точки A и B, и линии, соединяющей концы векторов скоростей (рис.4.3.9).

2. Скорости точек A и B параллельны и направлены в противоположные стороны, $\vec{V}_A \uparrow\downarrow \vec{V}_B$ (рис.4.3.12, рис.4.3.13). В этом случае также выполняется условие пропорциональности (4.3.1).

Пример 4.3.3.

Задана скорость центра катящегося по неподвижной поверхности цилиндра. Скорости точек, находящихся на вертикальном диаметре цилиндра подчиняются линейному распределению, то есть их численные значения пропорциональные линейному размеру- радиусу мгновенного вращения, (рис.4.3.10).

Пример 4.3.4.

Определено направление скорости общей точки A кривошипа OA и шатуна AB. Кривошип расположен горизонтально и ползун В находится в крайнем правом положении. Скорость точки B равна нулю, и, следовательно, точка B – мгновенный центр скоростей звена AB (рис.4.3.11).

Следовательно, $\vec{V}_C \perp AB$ и $\vec{V}_K \perp AB$.

Пример 4.3.5..

Задана скорость центра катящегося по неподвижной поверхности цилиндрического блока.

Точка P касания цилиндрической поверхности малого радиуса и неподвижной является мгновенным центром скоростей

Как и в примере 4.3.3 скорости точек, находящихся на вертикальном диаметре подчиняются линейному распределению. Скорость точки K в этом случае имеет противоположное скорости $\vec{V}_C$ направление (рис.4.3.13).

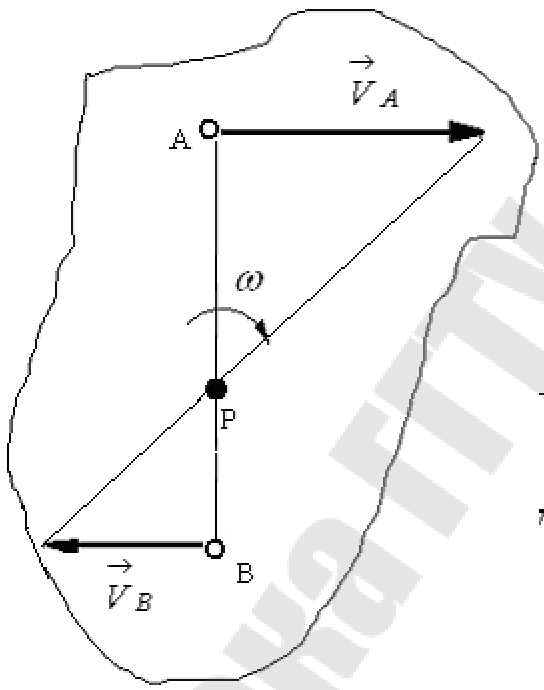


Рис.4.3.12.

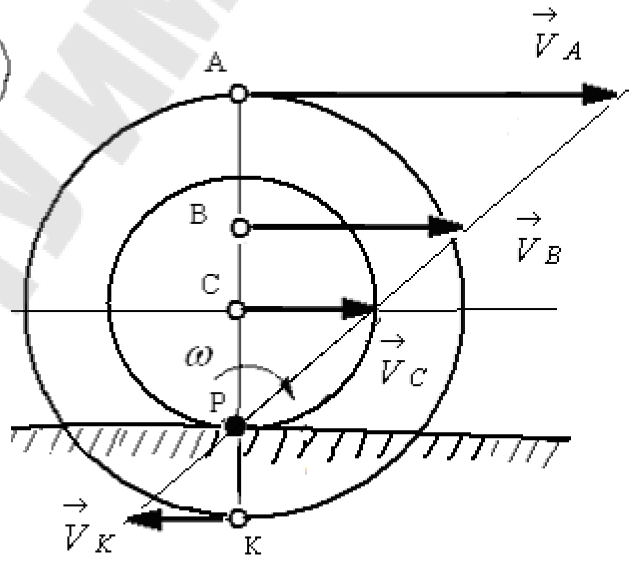


Рис.4.3.13.

Четвертый способ. Если плоская фигура занимает положение при котором скорости точек A и B плоской фигуры параллельны друг другу $\vec{V}_A \uparrow\uparrow \vec{V}_B$, причем линия AB не перпендикулярна к $\vec{V}_A$ (рис.4.3.14), то перпендикуляры , восстановленные к этим скоростям не пересекутся, и поэтому говорят, что мгновенный центр скоростей находится в бесконечности и скорости всех остальных точек плоской фигуры параллельны вектору $\vec{V}_A$.

Если все точки тела имеют параллельные скорости, то тело, как нам известно, совершает поступательное движение, то есть скорости всех точек тела не только параллельны, но и равны. В нашем случае плоская фигура занимает такое положение какой-то краткий момент времени, поэтому принято говорить о мгновенном поступательном движении.

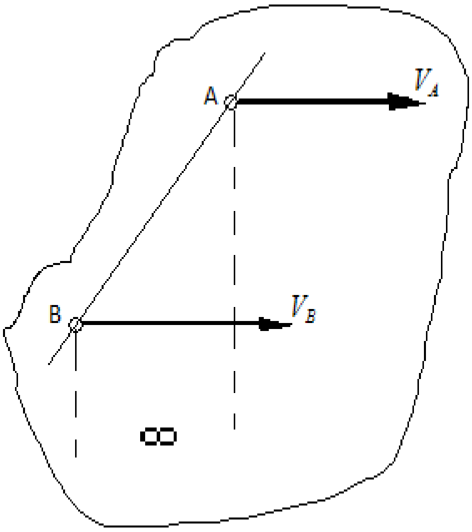


Рис.4.3.14

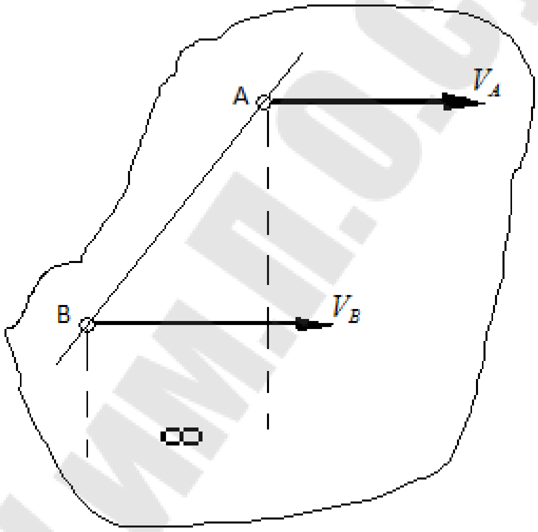


Рис.4.3.15 .

Пятый способ. Две точки *A* и *B* плоской фигуры находятся на отрезке AB, перпендикулярном скорости точки *A*, причем

$$\vec{V}_A = \vec{V}_B .$$

Линия, проходящая вдоль отрезка *AB*, и линия, соединяющая концы вектор $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ будут параллельны, и поэтому мгновенный центр скоростей окажется в бесконечности. Плоская фигура будет совершать мгновенное поступательное движение, и все её точки будут в этот момент иметь одинаковые скорости (рис.3.1.5).

Пример 4.3.4.

При вертикальном положении кривошипа (рис.4.3.16) векторы скоростей точек *A* и *B* горизонтальны, и перпендикуляры, восстановленные к ним не пересекаются, то есть шатун в данном положении движется мгновенно- поступательно.

Следовательно, для такого положения шатуна имеем

$$\vec{V}_A = \vec{V}_B = \vec{V}_C = \vec{V}_K .$$

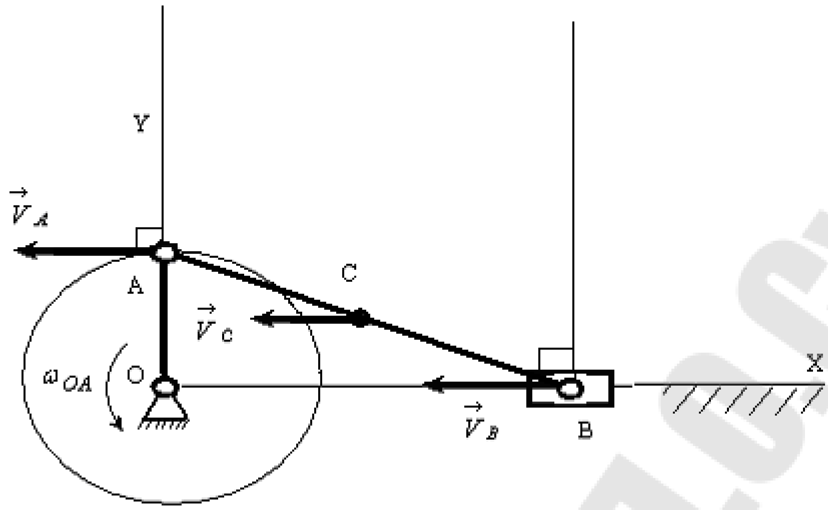


Рис.4.3.16.

Рассмотрим способы численного расчета скоростей точек плоской фигуры.

Модуль скорости любой точки плоской фигуры равен скорости этой точки, полученной при вращении плоской фигуры вокруг мгновенного центра скоростей (рис.4.3.3-рис 4.3.4):

$$V_A = \omega \cdot AP,\ \vec{V}_A \perp AP; \qquad V_C = \omega \cdot CP,\ \vec{V}_C \perp CP\ ;$$

$$V_B = \omega \cdot BP,\ \vec{V}_B \perp BP.$$

где

ω - мгновенная угловая скорость плоской фигуры,

P – мгновенный центр скоростей,

AP , BP и CP – расстояния точек A и C до мгновенного центра скоростей, то есть мгновенные радиусы вращения.

Допустим, что известно численное значение скорости точки A.

Мгновенная угловая скорость плоской фигуры может быть найдена как частное от деления известной скорости точки плоской фигуры на ее расстояние до МЦС,

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AP}.$$

Зная мгновенную угловую скорость и расстояние точки B до МЦС (точка P), применяем формулу вращательной скорости

$$V_B = \omega_{OA} \cdot BP\,.$$

Пример 4.3.5.

В кривошипно-ползунном механизме (рис.4.3.2) кривошип вращается относительно неподвижного шарнира *O* с заданной угловой скоростью ω_{OA}. Надо вычислить значения скоростей точек C и B шатуна для заданного положения механизма.

Определим скорость точки *A*,

$$V_A = \omega_{OA} \cdot OA\,.$$

Если определена скорость общей точки *A* кривошипа *OA* и шатуна *AB*, то мгновенная угловая скорость шатуна будет определяться по формуле

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AP}\,.$$

Скорости точек шатуна будут равны

$$V_B = \omega_{AB} \cdot BP\,, \quad V_C = \omega_{AB} \cdot CP\,.$$

Расстояния *AP*, *BP* находятся при решении задачи о прямоугольном треугольнике ΔOPB с использованием известных формул геометрии и тригонометрии (рис.4.3.8):

$$(OA + AP) = \sqrt{OB^2 + BP^2}\,, \qquad OB = (OA + AP) \cdot \cos(\varphi)\,,$$

Длину отрезка *CP* вычисляем из ΔAPC:

$$CP = \sqrt{AP^2 + AC^2 - 2 \cdot AP \cdot AC \cdot \cos(AP, AC)}$$

4.4. Теорема об ускорениях точки плоской фигуры

Представляя движение плоской фигуры суммой элементарных поступательных и вращательных движений, аналогично скоростям, найдем ускорения точек плоской фигуры.

Так как поступательное движение характеризуется движением полюса A, то ускорение любой точки B плоской фигуры равно геометрической сумме ускорения полюса A и ускорений, полученных при вращении вокруг полюса

$$\vec{a}_B = \vec{a}_{B_{ПОСТ}} + \vec{a}_{B_{ВР}}. \qquad (4.4.1)$$

При поступательном движении тела ускорения всех его точек одинаковы поэтому

$$\vec{a}_{B_{ПОСТ}} = \vec{a}_A.$$

Здесь:

$\vec{a}_A$ - ускорение полюса.

Для вращательного движения обозначим

$$\vec{a}_{B_{ВР}} = \vec{a}_{BA},$$

и перепишем формулу (4.4.1)

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}. \qquad (4.4.2)$$

Так как при вращательном движении тела точка B движется по окружности вокруг полюса A, то

$$\vec{a}_{BA} = \vec{a}_{BA}{}^n + \vec{a}_{BA}{}^\tau,$$

где

$\vec{a}_{BA}{}^n$ - касательное ускорение точки B по отношению к точке A, направленно перпендикулярно к отрезку BA в сторону вращения фигуры, если это вращение ускоренное, и в обратную сторону, если оно замедленное,

$\vec{a}_{BA_n}$ - нормальное (центростремительное) ускорение точки B по отношению к точке A, направлено от B к A.

Ускорения $\vec{a}_{BA}{}^\tau$ и $\vec{a}_{BA}{}^n$ точки B, полученные при вращении плоской фигуры вокруг полюса, пропорциональны величине отрезка AB.

$$a_{BA}{}^n = \omega^2 \cdot BA \qquad \text{и} \qquad a_{BA}{}^\tau = \varepsilon \cdot BA.$$

Коэффициентами пропорциональности являются :

$$\omega = \sqrt{\frac{a_{BA}{}^{n}}{BA}}$$ - угловая скорость плоской фигуры;

$$\varepsilon = \frac{a_{BA}{}^{\tau}}{BA}$$ - угловое ускорение плоской фигуры.

Окончательно ускорение точки B представляем векторной суммой трех ускорений

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}{}^{n} + \vec{a}_{BA}{}^{\tau}. \qquad (4.4.3)$$

Ускорение точки плоской фигуры равно геометрической сумме ускорения полюса и ускорения данной точки во вращательном движении плоской фигуры вокруг полюса.

Так как полюс A в общем случае имеет криволинейную траекторию, то ускорение полюса также можно представить векторной суммой нормального и касательного ускорений,

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A{}^{n} + \vec{a}_A{}^{\tau}.$$

Тогда в уравнении (4.4.1)суммируется четыре вектора .

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A{}^{n} + \vec{a}_A{}^{\tau} + \vec{a}_{BA}{}^{n} + \vec{a}_{BA}{}^{\tau} \qquad (4.4.4)$$

Это векторное уравнение решаем сначала геометрическим методом, построив векторный многоугольник ускорений (рис.4.4.1).

Как известно, любое векторное выражение можно записать в координатной форме, удобной для численного решения, поэтому для уравнения (4.4.4) получим систему двух уравнений, из которой, можем найти значения двух любых неизвестных ускорений:

$$\begin{cases} a_{B_X} = a_{A_X}{}^{n} + a_{A_X}{}^{\tau} + a_{BA_X}{}^{n} + a_{BA_X}{}^{\tau}; \\ a_{B_Y} = a_{A_Y}{}^{n} + a_{A_Y}{}^{\tau} + a_{BA_Y}{}^{n} + a_{BA_Y}{}^{\tau}. \end{cases}$$

Для вычисления проекции вектора на координатную ось необходимо знать направляющие косинусы, задающие направление вектора.

Проведем через точки и линии параллельные осям координат и определим углы наклона векторов ускорений (рис.4.4.2).

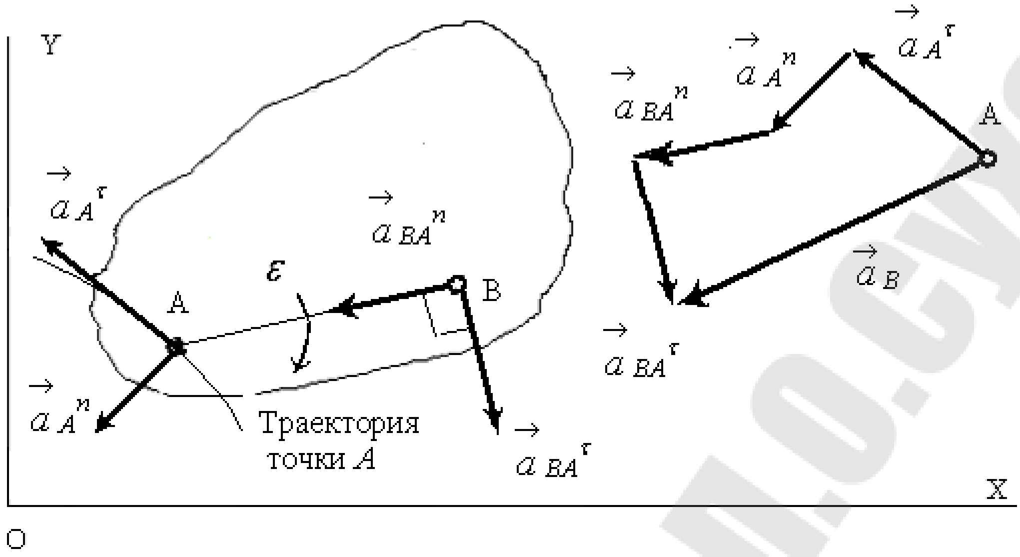


Рис.4.4.1.

Теперь можем записать выражения для проекций ускорений:

$$a_{A_X}{}^{n} = -a_A^n \cdot \cos\varphi\,, \quad a_{A_Y}{}^{n} = -a_A^n \cdot \sin\varphi\ ,$$

$$a_{A_X}{}^{\tau} = -a_A^{\tau} \cdot \sin\varphi\,^*, \quad a_{A_Y}{}^{\tau} = a_A^{\tau} \cdot \cos\varphi\,^*,$$

$$a_{BA_X}{}^{n} = -a_{BA}{}^{n} \cdot \cos\beta\,, \quad a_{BA_Y}{}^{n} = -a_{BA}{}^{n} \cdot \sin\beta$$

$$a_{BA_X}{}^{\tau} = a_{BA}{}^{\tau} \cdot \sin\beta\,^*, \quad a_{BA_Y}{}^{\tau} = -a_{BA}{}^{\tau} \cdot \cos\beta\,^*.$$

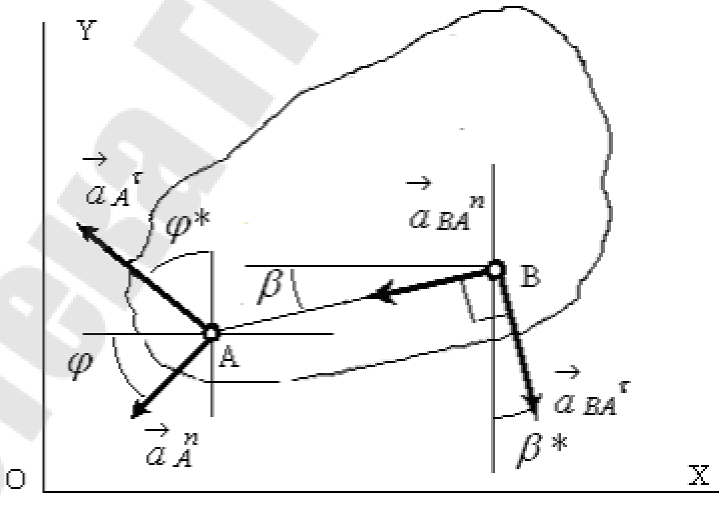


Рис.4.4.2.

Из рис.4.4.2. видим, что $\varphi = \varphi^*$, как углы с взаимно-перпендикулярными сторонами.

В результате получаем систему двух уравнений:

$$\begin{cases} a_{B_X} = -a_A^n \cdot \cos\varphi - a_A^\tau \cdot \sin\varphi - a_{BA}{}^n \cdot \cos\beta + a_{BA}{}^\tau \cdot \sin\beta; \\ a_{B_Y} = -a_A^n \cdot \sin\varphi + a_A^\tau \cdot \cos\varphi - a_{BA}{}^n \cdot \sin\beta - a_{BA}{}^\tau \cdot \cos\beta. \end{cases} \qquad (4.4.5)$$

Эта система уравнений позволяет определить численные значения двух любых ускорений, входящих в векторное уравнение (4.4.4).

Пример 4.4.1.

В задаче определения ускорений звеньев кривошипно-ползунного механизма решая систему двух уравнений, определяем

$$a_{BA}{}^\tau = \frac{\left[a_A^n \cdot \sin\varphi - a_A^\tau \cdot \cos\varphi + a_{BA}{}^n \cdot \sin\beta + a_{B_Y}\right]}{\cos\beta}$$

Можно теперь вычислить угловое ускорение звена

$$\varepsilon_{AB} = \frac{a_{BA}{}^\tau}{AB}$$

Так как в нашем примере (рис.4.4.3) точка движется горизонтально то $a_{B_Y} = 0$.

Ускорения точки A определяем по заданному движению кривошипа

$$a_A^n = \omega_{OA}{}^2 \cdot OA, \qquad \vec{a}_A{}^n \downarrow\downarrow OA,$$

$$a_A^\tau = \varepsilon_{OA} \cdot OA, \qquad \vec{a}_A{}^\tau \perp OA.$$

Нормальное ускорение вращательного движения шатуна находим по формуле

$$a_{BA}^n = \omega_{BA}{}^2 \cdot BA.$$

Здесь угловая скорость звена AB определена раньше при решении задачи о скоростях

$$\omega_{BA} = \frac{V_{BA}}{AB}.$$

Решаем уравнение (5), и находим ускорение ползуна $a_B = a_{B_X}$.

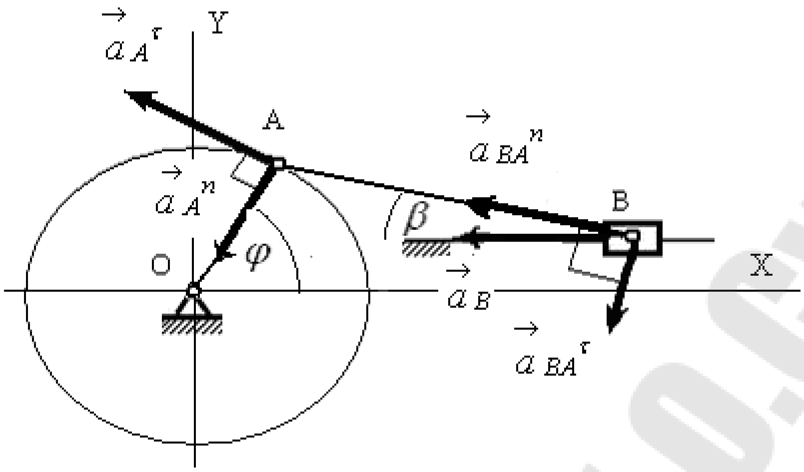


Рис.4.4.3.

4.5. Мгновенный центр ускорений

В каждый момент времени при движении плоской фигуры в своей плоскости, если угловая скорость и угловое ускорение не равны нулю одновременно, существует точка плоской фигуры, или её продолжения, ускорение которой равно нулю. Такая точка называется мгновенным центром ускорений (МЦУ).

Рассмотрим способы нахождения мгновенного центра ускорений.

Пусть известны вектор ускорения $\vec{a}_A$ какой-либо точки A, угловая скорость ω и угловое ускорение ε плоской фигуры. Мгновенный центр ускорений находится на отрезке (рис.4.5.1), составляющем с вектором $\vec{a}_A$ угол

$$\mu = arctg\frac{a_\tau}{a_n} = arctg\frac{\varepsilon}{\omega^2}. \qquad (4.5.1)$$

Этот угол откладывается от вектора $\vec{a}_A$ в строну, положительного направления углового ускорения ε на расстоянии AQ от точки A,

$$AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}.$$

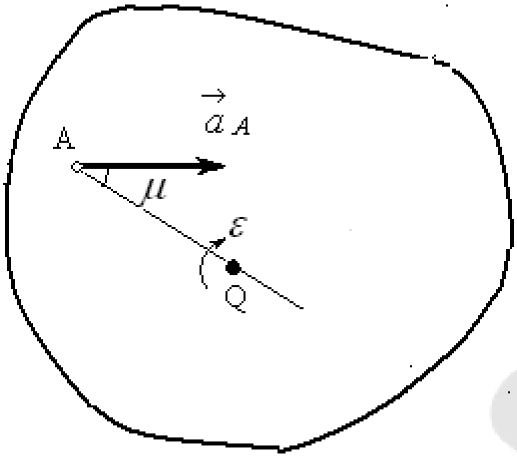


Рис.4.5.1.

При решении задач кинематики механизмов чаще всего бывают известны направления ускорений двух точек плоской фигуры, например точек A и B. Предварительно определив угловую скорость и угловое ускорение фигуры, по формуле (4.5.1) вычисляем угол μ. Через точки A и B проводим прямые линия под углом μ к линиям действия векторов $\vec{a}_A$ и $\vec{a}_B$. Точка Q пересечения прямых является мгновенным центром ускорений для данного положения фигуры (рис.4.5.2). То есть, мгновенный центр ускорений находится на пересечении прямых линий, проведенных к ускорениям точек под одним и тем же углом μ.

С помощью мгновенного центра ускорений можно вычислить определить ускорения точек плоской фигуры.

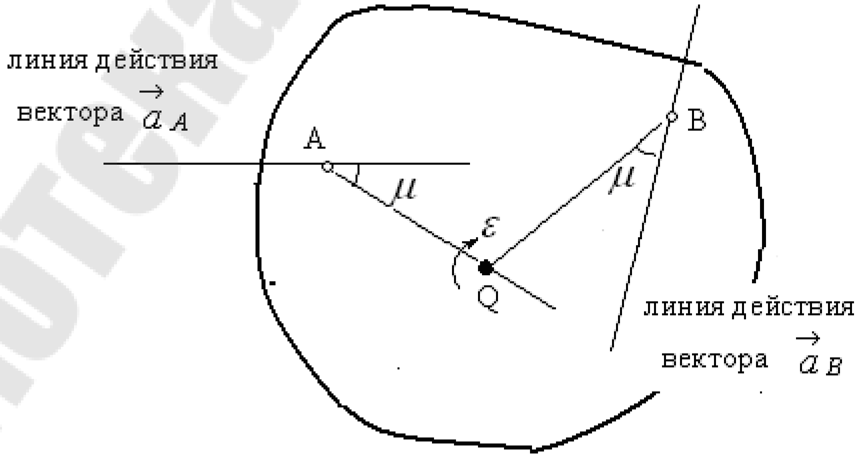


Рис.4.5.2.

Примем мгновенный центр ускорений (точку Q) за полюс. Тогда ускорение любой точки плоской фигуры определяется как ускорение этой точки во вращательном движении фигуры вокруг мгновенного центра ускорений.

Аналогично формулам (3.3.2) запишем

$$a_B = \frac{QB}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^2}}, \quad a_C = \frac{QC}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^2}} \quad .$$

Из формул получим отношение ускорений двух точек плоской фигуры

$$\frac{a_B}{a_C} = \frac{QB}{QC}.$$

В результате получаем.

Модули ускорений точек каждой фигуры пропорциональны расстояниям этих точек до мгновенного центра ускорений, а векторы ускорений составляют с отрезками, соединяющими их с мгновенным центром ускорений, один и тот же угол (рис.4.5.3).

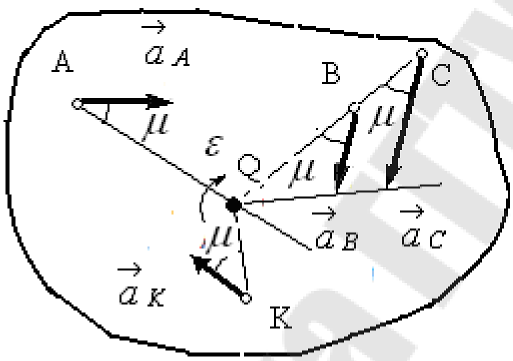


Рис.4.5.3.

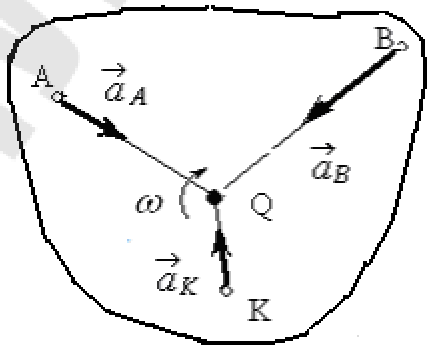


Рис.4.5.4.

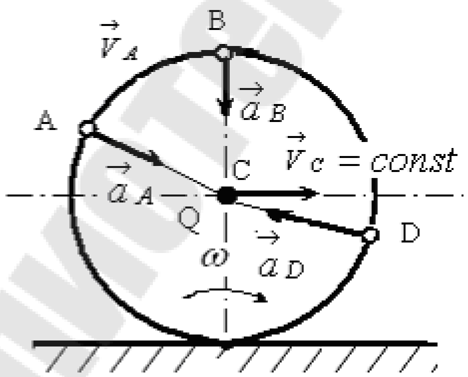


Рис.4.5.5.

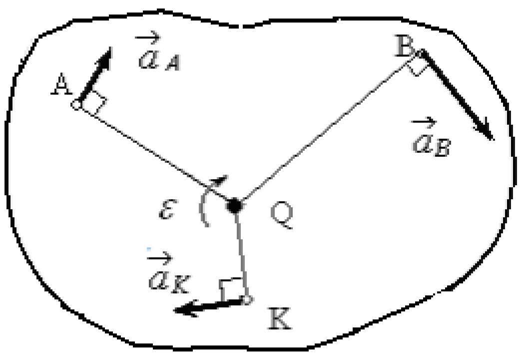


Рис.4.5.6.

Рассмотрим два частных случая.

1. Если $\varepsilon = 0$, то $\mu = 0$, и мгновенный центр ускорений Q находится в точке пересечения прямых, по которым направлены ускорения двух каких-либо точек плоской фигуры (рис.4.5.4-рис.4.5.5).

2. Если $\omega = 0$, то $\mu = 90^{\circ}$, и мгновенный центр ускорений Q можно найти как точку пересечения перпендикуляров, восстановленных из двух каких-либо точек плоской фигуры к ускорениям этих точек (рис.4.5.6).

5. СФЕРИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

5.1. Основные понятия сферического движения твердого тела

Движение твердого тела, при котором все го точки движутся по поверхности концентрических сфер, называется сферическим.

Центром сферических поверхностей является одна единственная неподвижная точка *O* тела, которую будем совмещать с началом системы координат. Такое движение называют движением твердого тела вокруг неподвижной точки. Примером такого движения является знакомая всем детская игрушка “ Волчёк ” или “Юла” (рис.5.1.1).

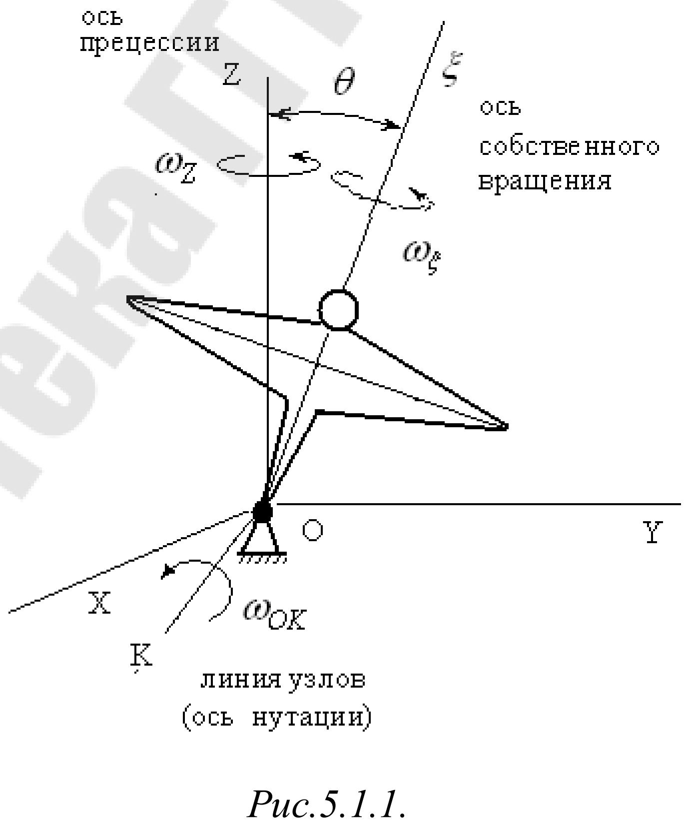


Рис.5.1.1.

Сферическое движение можно наблюдать при движении механизмов, имеющих быстро вращающиеся звенья вокруг подвижных осей (генераторы, моторы, турбины, гироскопы и т.д.).

Положение твердого тела можно определить тремя независимыми угловыми координатами. Поэтому сферическое движение твердого тела можно представить суммированием трех элементарных вращательных движений относительно трех непараллельных осей. Говорят, что тело имеет три степени свободы.

В таком движении наблюдается три вращения:

- относительно неподвижной координатной оси *OZ*;
- относительно подвижной оси $O\xi$, жестко связанной с твердым телом, например, ось симметрии " Волчка ";
- относительно подвижной оси *OK*, перпендикулярной плоскости, образованной осями OZ и $O\xi$.

В качестве угловых координат принимаются углы Эйлера:

- угол собственного вращения φ.
- угол прецессии ψ.
- угол нутации θ.

Угол φ характеризует поворот твердого тела относительно оси $O\xi$, называемой осью собственного вращения.

Угол ψ характеризует поворот оси $O\xi$ относительно неподвижной оси *OZ*, называемой осью прецессии.

Угол θ показывает отклонение оси $O\xi$ от оси *OZ*. Он характеризует поворот тела вместе с осью $O\xi$ относительно подвижной оси *OK*.

Поскольку эти углы изменяются со временем, то есть

$$\psi = \psi(t),\ \theta = \theta(t),\ \varphi = \varphi(t),$$

то их называют уравнениями сферического движения.

Величины

$$\omega_\xi = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi},\quad \omega_Z = \frac{d\psi}{dt} = \dot{\psi},\quad \omega_{OK} = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$$

называются соответственно: угловая скорость собственного вращения, угловая скорость прецессии, угловая скорость нутации.

Так как векторы угловых скоростей направлены вдоль осей вращения, то угловая скорость твердого тела представляется векторной суммой (рис.5.1.2)

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_{\xi} + \vec{\omega}_{Z} + \vec{\omega}_{OK}.$$

Ось Ω, направление которой определено направлением вектора $\vec{\omega}$, называется мгновенной осью вращения.

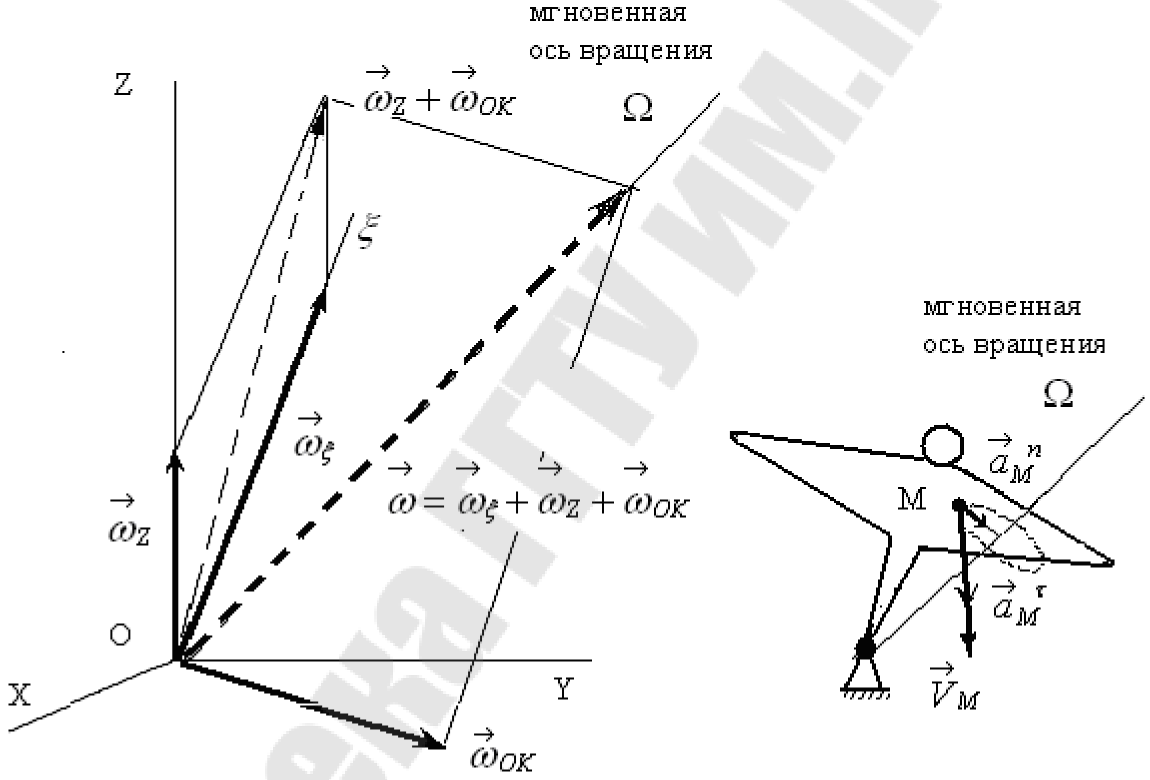


Рис.5.1.2. *Рис.5.1.3.*

Как и в случае плоскопараллельного движения, сферическое движение представляем суммированием элементарных вращательных движений относительно оси Ω.

В этом случае скорости и ускорения любой точки тела будут рассматриваться как вращательные (рис.5.1.3):

$$V_M = \omega \cdot R, \quad \vec{V}_M \perp R,$$

$$a_M^n = \omega^2 \cdot R, \quad \vec{a}_M{}^n \downarrow\downarrow R,$$

$$a^{\tau}_{M} = \varepsilon \cdot R, \qquad \vec{a}_M{}^{\tau} \perp R.$$

Здесь R -мгновенное расстояние точки M до мгновенной оси вращения.

6. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

6.1. Абсолютное, относительное и переносное движения точки.

Из школьного курса физики известно, что всякое движение тела или точки является относительным, т. е. его можно наблюдать по отношению к другим физическим телам и связанным с ними системам отсчета.

Пусть задана система отсчета $O_1X_1Y_1Z_1$,. связанная с каким-нибудь твердым телом, совершающим заданное движение. Пусть точка M движется относительно этой системы. Для наблюдателя, находящегося в этой системе, называемой *подвижной системой отсчета,* точка M совершает так называемое *относительное движение,* которое может быть как прямолинейным, так и криволинейным.

Пусть задана система отсчета $OXYZ$, которую будем считать неподвижной. Для наблюдателя, находящегося в этой системе, точка M совершает так называемое *абсолютное движение.*

Движение твердого тела и связанной с ним системы координат $O_1X_1Y_1Z_1$,.называется переносным движением (рис.6.1.1).

Пример 6.1.1.

Движение подброшенного мячика относительно палубы движущегося катера (рис.1.1.2.) есть движение относительное. Движение наблюдателя на палубе катера относительно берега - переносное движение, а движение мячика относительно берега - абсолютное движение.

Точка M относительно подвижного наблюдателя движется по относительной траектории с относительной скоростью $\vec{V}_{отн}$ и относительным ускорением $\vec{a}_{отн}$. Зная уравнения относительного движения,

$$x_{отн} = x_{отн}(t), \qquad y_{отн} = y_{отн}(t), \qquad z_{отн} = z_{отн}(t);$$

известными методами кинематики точки можем рассчитать эти величины.

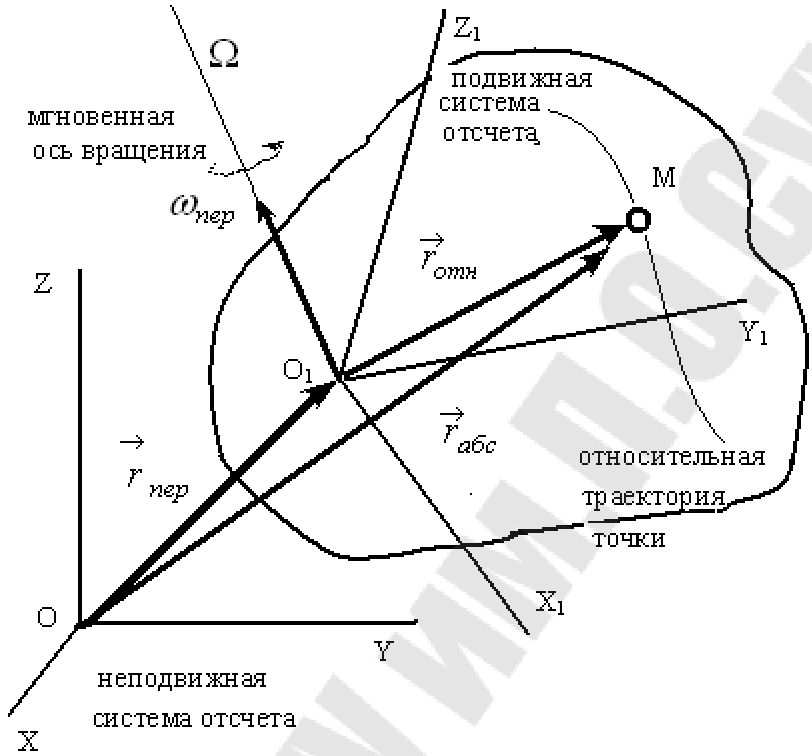


Рис.6.1.1.

Так как подвижная система отсчета жестко связана с движущимся материальным телом, то переносное движение системы координат $O_1X_1Y_1Z_1$, как и движение твердого тела, может быть поступательным, вращательным, плоскопараллельным, сферическим, свободным (рис.6.1.2.- 6.1.3).

В общем случае это свободное движение, которое можно представить суммированием элементарных поступательных и сферических движений.

Следовательно, движение подвижной системы отсчета характеризуется, как и движение твердого тела, переносными линейными и угловыми скоростями и ускорениями:

$$\vec{V}_{пер} = V_{X\,пер} \cdot \vec{i} + V_{Y\,пер} \cdot \vec{j} + V_{Z\,пер} \cdot \vec{k},$$

$$\vec{a}_{пер} = a_{X\,пер} \cdot \vec{i} + a_{Y\,пер} \cdot \vec{j} + a_{Z\,пер} \cdot \vec{k},$$

$$\vec{\omega}_{пер} = \omega_{X\,пер} \cdot \vec{i} + \omega_{Y\,пер} \cdot \vec{j} + \omega_{Z\,пер} \cdot \vec{k},$$

$$\vec{\varepsilon}_{пер} = \varepsilon_{X\,пер} \cdot \vec{i} + \varepsilon_{Y\,пер} \cdot \vec{j} + \varepsilon_{Z\,пер} \cdot \vec{k}.$$

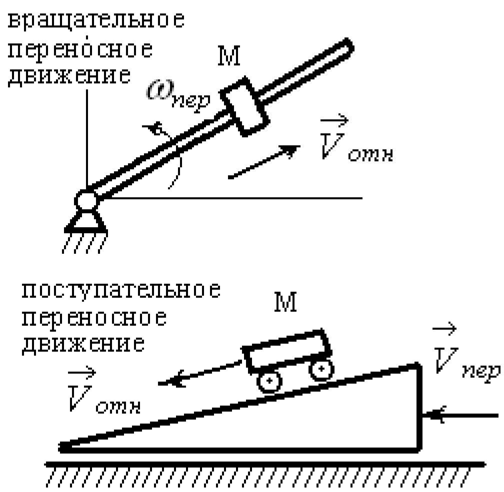


Рис.6.1.2.

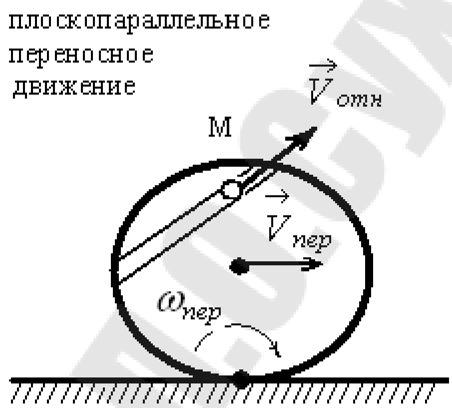


Рис.6.1.3

Переносное движение точки *M* представляется как движение точки, принадлежащей твердому телу. То есть, считаем, что точка *M* остановилась в относительном движении и движется вместе с системой координат $O_1X_1Y_1Z_1$, вместе с твердым телом жестко связанным с этой системой. Поэтому переносные скорость и ускорение точки *M* определяются как скорость и ускорение точки, принадлежащей твердому телу.

Абсолютное движение точки *M* рассматривается, как сложное движение, состоящее из двух одновременных движений: движения точки по отношению к подвижной системе отсчета и движения точки вместе с подвижной системой отсчета по отношению к неподвижной.

6.2. Теорема о сложении скоростей

На рис.6.1.1. показаны радиус-вектор $\vec{r}_{отн}$ точки *M* в относительном движении и радиус-вектор $\vec{r}_{абс}$ точки *M* в абсолютном движении.

Радиус- вектор $\vec{r}_{пер}$ характеризует движение точки O_1, то есть переносное поступательное движение твердого тела и связанной с ним системы координат

Из векторного треугольника, построенного на этих векторах, получаем

$$\vec{r}_{абс} = \vec{r}_{пер} + \vec{r}_{отн}.$$

Абсолютную скорость находим, вычисляя производные по времени;

$$\vec{V}_{абс} = \frac{d\vec{r}_{абс}}{dt} = \frac{d\vec{r}_{пер}}{dt} + \frac{d\vec{r}_{отн}}{dt}. \qquad (6.2.1)$$

Рассмотрим производные от векторов $\vec{r}_{пер}$ и $\vec{r}_{отн}$.

Так как вектор

$$\vec{r}_{пер} = x_{O_1}\vec{i} + y_{O_1}\vec{j} + z_{O_1}\vec{k},$$

определяет положение точки O_1, то переносная скорость поступательного движения подвижной системы отсчета равна

$$\vec{V}_{O_1} = \frac{d\vec{r}_{ntp}}{dt} = \dot{x}_{O_1}\vec{i} + \dot{y}_{O_1}\vec{j} + \dot{z}_{O_1}\vec{k}. \qquad (6.2.2)$$

Радиус-вектор относительного движения запишем в координатах подвижной системы отсчета,

$$\vec{r}_{отн} = x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1 + z_1\vec{k}_1.$$

Единичные векторы $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$ изменяют своё направление при вращении системы координат $O_1X_1Y_1Z_1$ и поэтому непостоянны, производные от них не равны нулю:

$$\frac{d\vec{r}_{отн}}{dt} = \left(\vec{i}_1\frac{dx_1}{dt} + \vec{j}_1\frac{dy_1}{dt} + \vec{k}_1\frac{dz_1}{dt}\right) + \left(x_1\frac{d\vec{i}_1}{dt} + y_1\frac{d\vec{j}_1}{dt} + z_1\frac{d\vec{k}_1}{dt}\right).$$

Выражение в первой скобке определяет относительную скорость точки M,

$$\vec{V}_{отн} = \left(\vec{i}_1\frac{dx_1}{dt} + \vec{j}_1\frac{dy_1}{dt} + \vec{k}_1\frac{dz_1}{dt}\right) = \dot{x}_1\vec{i} + \dot{y}_1\vec{j} + \dot{z}_1\vec{k}. \qquad (6.2.3)$$

Выражение во второй скобке определяет вращение подвижной системы относительно мгновенной оси Ω в сферическом переносном движении.

Здесь производная от переменного единичного вектора $\vec{i}_1$ определяет линейную скорость точки D_I , радиус-вектором которой является вектор $\vec{i}_1$ (рис.6.1.4).

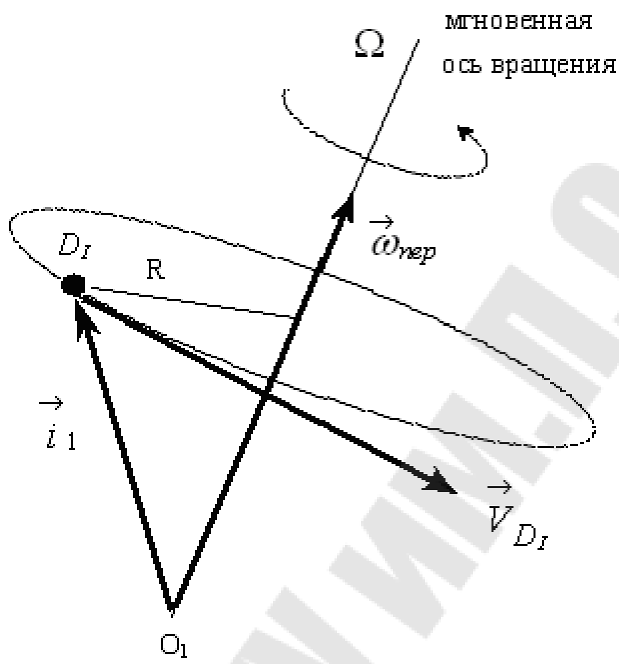


Рис.6.1.4

Аналогично можно определить скорости точек D_J и D_K, радиус-векторами являются единичные векторы $\vec{j}_1$ и $\vec{k}_1$:

$$\vec{V}_{D_I} = \frac{d\,\vec{i}_1}{dt} = \vec{\omega}_{пер} \times \vec{i}_1, \qquad \vec{V}_{D_J} = \frac{d\,\vec{j}_1}{dt} = \vec{\omega}_{пер} \times \vec{j}_1, \tag{6.2.4}$$

$$\vec{V}_{D_K} = \frac{d\,\vec{k}_1}{dt} = \vec{\omega}_{пер} \times \vec{k}_1$$

Тогда

$$\left(x_1 \frac{d\,\vec{i}_1}{dt} + y_1 \frac{d\,\vec{j}_1}{dt} + z_1 \frac{d\,\vec{k}_1}{dt} \right) =$$

$$= x_1(\vec{\omega}_{пер} \times \vec{i}_1) + y_1(\vec{\omega}_{пер} \times \vec{j}_1) + z_1(\vec{\omega}_{пер} \times \vec{k}_1) = \tag{6.2.5}$$

$$= \vec{\omega}_{пер} \times (x_1\,\vec{i} + y_1\,\vec{j}) + z_1\,\vec{k}) = \vec{\omega}_{пер} \times \vec{r}_{отн}$$

То есть мы получили формулу Эйлера для переносной скорости точки *M*, возникающую при вращении подвижной системы отсчета вокруг оси Ω.

$$\vec{V}_{пер}^{вр} = \vec{\omega}_{пер} \times \vec{r}_{отн}. \qquad (6.2.6)$$

Модуль этого векторного произведения определяет модуль вращательной скорости

$$V_{пер} = \omega_{пер} \cdot R.$$

Здесь $R = r_{отн} \cdot \sin(\vec{\omega}_{пер}, \vec{r}_{отн})$ - радиус переносного вращения точки *M*.

Таким образом, из (6.2.1) получаем векторное выражение для абсолютной скорости

$$\vec{V}_{абс} = \vec{V}_{пер} + \vec{V}_{отн}. \qquad (6.2.7)$$

Абсолютная скорость точки равна геометрической сумме переносной и относительной скоростей.

Исходя из формул (6.2.2) ,(6.2.4)и (6.2.5), имеем

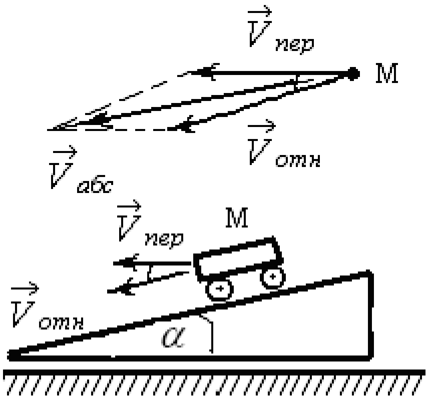
$$\vec{V}_{пер} = \vec{V}_{O_1} + \vec{V}_{пер}^{вр}. \qquad (6.2.8)$$

Переносная скорость точки равна геометрической сумме мгновенных скоростей, полученных при поступательном и вращательном движениях подвижной системы отсчета.

Обычно для решения предлагаются задачи, когда переносное движение является либо поступательным, когда $\vec{V}_{пер} = \vec{V}_{O_1}$ (рис.6.1.4.), либо вращательным, когда $\vec{V}_{пер} = \vec{V}_{пер}^{вр}$ (рис.6.1.5.).

Если определен угол между векторами $\vec{V}_{пер}$ и $\vec{V}_{отн}$, то модуль абсолютной скорости вычисляется как диагональ параллелограмма, построенного на скоростях $\vec{V}_{пер}$ и $\vec{V}_{отн}$ (рис.6.1.6.), или сторона треугольника (рис.6.1.7.):

$$V_{абс} = \sqrt{V_{пер}^2 + V_{отн}^2 + 2 \cdot V_{пер} \cdot V_{отн} \cdot \cos(\vec{V}_{пер}, \vec{V}_{отн})}$$



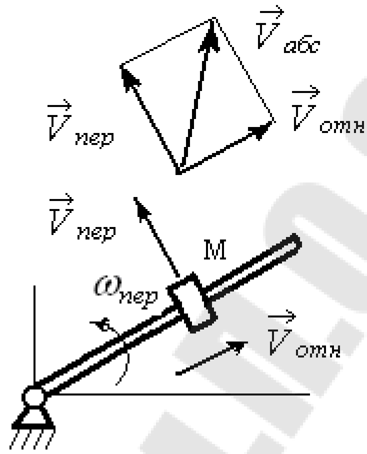
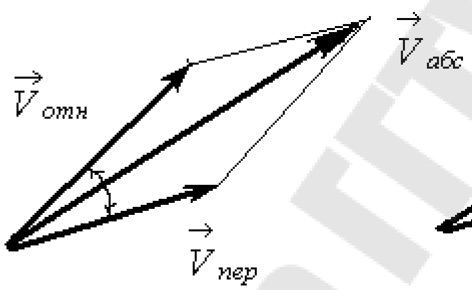


Рис.6.1.5. Рис.6.1.6.



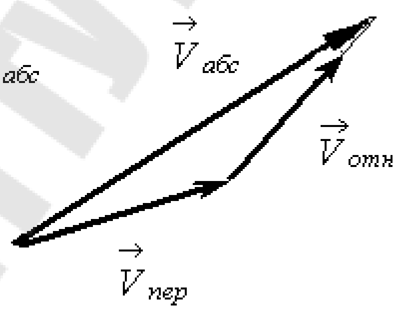


Рис.6.1.7. Рис.6.1.8.

6.3. Теорема о сложении ускорений. Ускорение Кориолиса.

Абсолютное ускорение находим дифференцированием вектора абсолютной скорости

$$\vec{a}_{абс} = \frac{d\vec{V}_{абс}}{dt} = \frac{d\vec{V}_{пер}}{dt} + \frac{d\vec{V}_{отн}}{dt}. \qquad (6.3.1.)$$

Подставляем в (6.3.1.) выражения(6.3.1.) для переносной скорости,

$$\frac{d\vec{V}_{пер}}{dt} = \frac{d\vec{V}_{O_1}}{dt} + \frac{d\vec{V}_{пер}{}^{вр}}{dt}.$$

Обозначим ускорение точки O_1

$$\vec{a}_{O_1} = \frac{d\vec{V}_{O_1}}{dt}$$

Учитывая формулы, полученные при определении абсолютной скорости, вычислим производную

$$\frac{d\vec{V}_{пер}^{\,вр}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\vec{\omega}_{пер} \times \vec{r}_{отн}\right] =$$

$$= \frac{d\vec{\omega}_{пер}}{dt} \times \vec{r}_{отн} + \vec{\omega}_{пер} \times \frac{d\vec{r}_{отн}}{dt} = \vec{\varepsilon}_{пер} \times \vec{r}_{отн} +$$

$$+ \vec{\omega}_{пер} \times \left[\left(\vec{i}_1 \frac{dx_1}{dt} + \vec{j}_1 \frac{dy_1}{dt} + \vec{k}_1 \frac{dz_1}{dt}\right) + \left(x_1 \frac{d\vec{i}_1}{dt} + y_1 \frac{d\vec{j}_1}{dt} + z_1 \frac{d\vec{k}_1}{dt}\right)\right] =$$

$$= \vec{\varepsilon}_{пер} \times \vec{r}_{отн} + \vec{\omega}_{пер} \times \vec{V}_{отн} + \vec{\omega}_{пер} \times (\vec{\omega}_{пер} \times \vec{r}_{отн}).$$

Вычислим производную от относительной скорости:

$$\frac{d\vec{V}_{отн}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{i}_1 \frac{dx_1}{dt} + \vec{j}_1 \frac{dy_1}{dt} + \vec{k}_1 \frac{dz_1}{dt}\right) =$$

$$= \left(\vec{i}_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} + \vec{j}_1 \frac{d^2y_1}{dt^2} + \vec{k}_1 \frac{d^2z_1}{dt^2}\right) + \left(\frac{d\vec{i}_1}{dt}\frac{dx_1}{dt} + \frac{d\vec{j}_1}{dt}\frac{dy_1}{dt} + \frac{d\vec{k}_1}{dt}\frac{dz_1}{dt}\right)$$

Обозначим

$\vec{a}_{отн} = \left(\vec{i}_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} + \vec{j}_1 \frac{d^2y_1}{dt^2} + \vec{k}_1 \frac{d^2z_1}{dt^2}\right)$ - относительное ускорение;

Учитывая формулы (6.2.4), (6.2.5) для производных от переменных единичных векторов, можем записать

$$\left(\frac{d\vec{i}_1}{dt}\frac{dx_1}{dt} + \frac{d\vec{j}_1}{dt}\frac{dy_1}{dt} + \frac{d\vec{k}_1}{dt}\frac{dz_1}{dt}\right) = \left(\frac{d\vec{i}_1}{dt}V_{X_1} + \frac{d\vec{j}_1}{dt}V_{Y_1} + \frac{d\vec{k}_1}{dt}V_{Z_1}\right) =$$

$$= V_{X_1}(\vec{\omega}_{пер} \times \vec{i}_1) + V_{Y_1}(\vec{\omega}_{пер} \times \vec{j}_1) + V_{Z_1}(\vec{\omega}_{пер} \times \vec{k}_1) =$$

$$= \vec{\omega}_{пер} \times (V_{X_1}\vec{i} + V_{Y_1}\vec{j} + Vz_1\vec{k}) = \vec{\omega}_{пер} \times \vec{V}_{отн}.$$

Тогда

$$\frac{d\vec{V}_{отн}}{dt} = \vec{a}_{отн} + \vec{\omega}_{пер} \times \vec{V}_{отн}.$$

Подставляя в (6.3.1) полученные выражения, получаем

$$\vec{a}_{абс} = \frac{d\vec{V}_{O_1}}{dt} + \frac{d\vec{V}_{пер}^{\,вр}}{dt} + \frac{d\vec{V}_{отн}}{dt} =$$

$$= \vec{a}_{O_1} + \vec{\varepsilon}_{пер} \times \vec{r}_{отн} + \vec{\omega}_{пер} \times \vec{V}_{отн} + \vec{\omega}_{пер} \times (\vec{\omega}_{пер} \times \vec{r}_{отн}) +$$

$$+ \vec{a}_{отн} + \vec{\omega}_{пер} \times \vec{V}_{отн}$$

Обозначим

$\vec{a}_{пер}^{\,вр} = \vec{\varepsilon}_{пер} \times \vec{r}_{отн}$ - вектор вращательного (касательного) переносного ускорения, модуль которого равен

$$a_{пер}^{вр} = \varepsilon_{пер} \cdot R;$$

$\vec{a}_{пер}^{\,ос} = \vec{\omega}_{пер} \times (\vec{\omega}_{пер} \times \vec{r}_{отн})$ - вектор осестремительного (центростремительного) переносного ускорения, модуль которого равен

$$a_{пер}^{ос} = \omega_{пер}^2 \cdot R;$$

$\vec{a}_{кор} = 2(\vec{\omega}_{пер} \times \vec{V}_{отн})$ - вектор поворотного ускорения Кориолиса, модуль которого определяется как модуль векторного произведения

$$a_{кор} = 2 \cdot \omega_{пер} \cdot V_{отн} \cdot \sin(\vec{\omega}_{пер} \times \vec{V}_{отн}). \qquad (6.3.1)$$

В результате, для абсолютного ускорения получаем векторную сумму трех ускорений

$$\vec{a}_{абс} = \vec{a}_{пер} + \vec{a}_{отн} + \vec{a}_{кор}. \qquad (6.3.2)$$

Абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме переносного, относительного и поворотного ускорения Кориолиса.

Здесь переносное ускорение определяется поступательным и сферическим движением подвижной системы отсчета

$$\vec{a}_{пер} = \vec{a}_{O_1} + \vec{a}_{пер}{}^{вр} + \vec{a}_{пер}{}^{ос}.$$

Ускорение Кориолиса связано с изменением абсолютной скорости, обусловленным двумя причинами:

1) влиянием переносного движения на относительную скорость (при $\omega_{пер} \neq 0$ вектор $\vec{V}_{отн}$ поворачивается относительно неподвижной системы отсчета в результате переносного вращения)

2)влиянием относительного движения на переносную скорость (при $\vec{V}_{отн} \neq 0$ изменяется радиус переносного вращения, и тем самым изменяется величина вращательной переносной скорости $\vec{V}_{пер}$).

По формуле (6.3.2) можем определить три случая отсутствия, ускорения Кориолиса.

1. $\omega_{пер} = 0$, то есть при поступательном переносном движении.

2. $V_{отн} = 0$, то есть в случае относительного покоя точки *M*.

3. $\sin(\vec{\omega}_{пер} \times \vec{V}_{отн}) = 0$, то есть когда вектор относительной скорости параллелен вектору переносной угловой скорости, $\vec{V}\,отн \uparrow\uparrow \vec{\omega}_{пер}$ или $\vec{V}\,отн \uparrow\downarrow \vec{\omega}_{пер}$. (рис.6.3.1).

Направление вектора ускорения Кориолиса определяется по правилу векторного умножения (рис.6.3.1.):

$$\vec{a}_{кор} \perp \vec{\omega}_{пер} \quad \text{и} \quad \vec{a}_{кор} \perp \vec{V}_{отн}.$$

Для определения направления вектора ускорения Кориолиса, можно воспользоваться правилом Жуковского:

вектор относительной скорости проектируется на плоскость, перпендикулярную оси переносного вращения, полученный в плоскости вектор повернуть в сторону переносного вращения на 90° *(рис.6.3.3).*

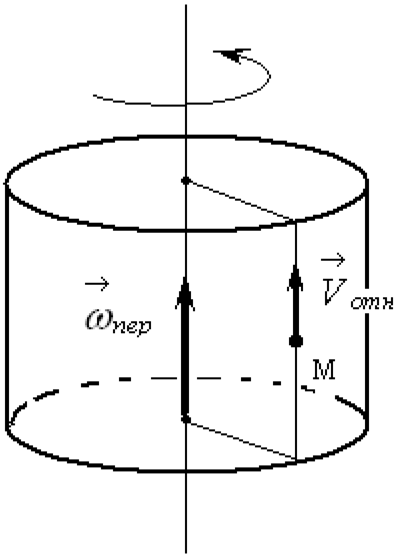


Рис.6.3.1.

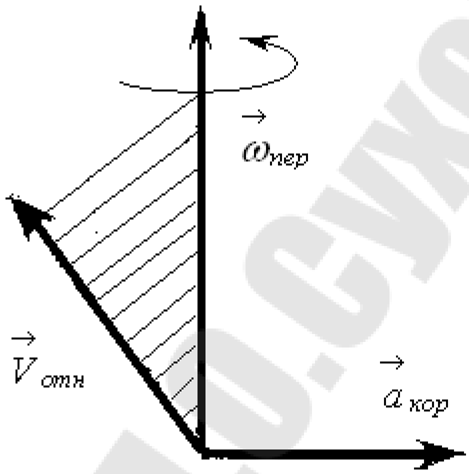


Рис.6.3.2

Пример 6.3.1.

Кольцо *M* (рис.6.3.4) движется с относительной скоростью $V_{отн}$ вдоль стержня *OA*, вращающегося относительно шарнира *O* с угловой скоростью $\omega_{пер}$. Требуется указать на рисунке направление ускорений, входящих в формулу (6.3.1).

Точка М, находясь на расстоянии ОМ от центра переносного вращения, в переносном движении по окружности радиуса ОМ имеет вращательное ускорение

$$\vec{a}_{пер}^{\,вр} \perp OM ,$$

и осестремительное (центростремительное) ускорение

$$\vec{a}_{пер}^{\,ос} \uparrow\uparrow MO .$$

В относительном движении точка М совершает прямолинейное движение, поэтому относительное ускорение будет направленно вдоль стержня, от точки *O* в случае, если $a_{отн} \geq 0$.

Направление вектора ускорения Кориолиса находим по правилу Жуковского. Вектор угловой скорости всегда направлен вдоль оси вращения, поэтому он перпендикулярен плоскости вращения стержня. Вектор $\vec{V}_{отн}$, направленный вдоль стержня расположен в плоскости, перпендикулярной оси переносного вращения. Чтобы получить направление вектора $\vec{a}_{кор}$ по направлению вращения стержня повернем вектор $\vec{V}_{отн}$ вокруг точки *M* на 90° (рис.6.3.5).

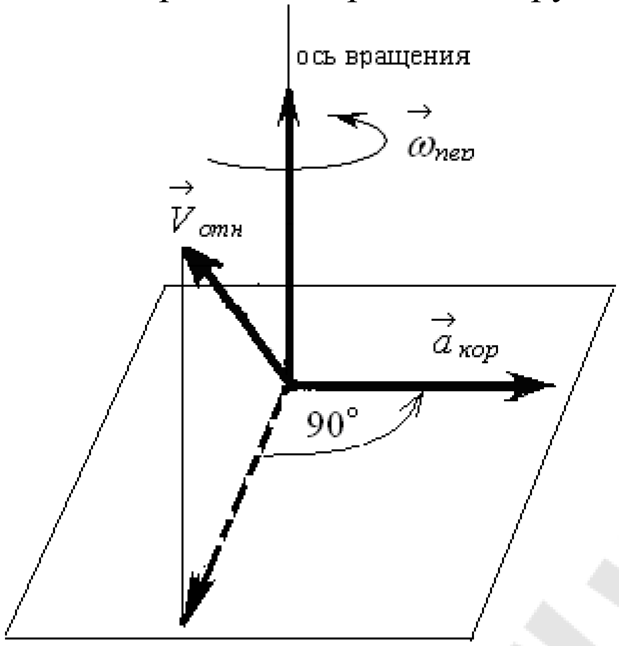


Рис.6.3.3.

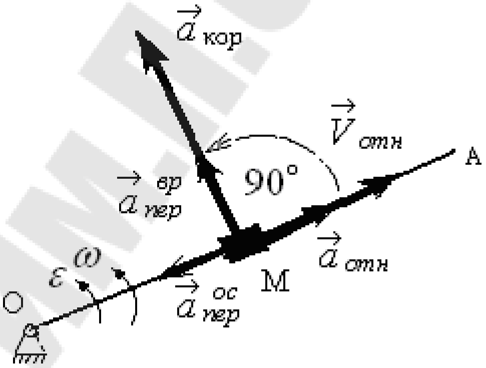


Рис.6.3.4.

7. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Рекомендуемый список учебников, имеющихся в фонде библиотеки ГГТУ:

1. Аркуша А. И. Руководство к решению задач по теоретической механике: Учеб. пособие для средних проф. учеб. заведений. -4-е изд., испр. -М.: Высш. шк., 2000. -336с.
2. Бать М. И. и др. Теоретическая механика в примерах и задачах: [Учеб. пособие для вузов]. Т. 1: Статика и кинематика / Бать М. И., Джанелидзе Г. Ю., Кельзон А. С. -9-е изд., перераб. -М.: Наука, 1990. -670с.
3. Бутенин Н. В. и др. Курс теоретической механики: Учебник для студ. втузов. Т. 1: Статика и кинематика / Бутенин Н. В., Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. -4-е изд., испр. -М.: Наука, 1985. -239с.: ил.*
4. Воронков И. М. Курс теоретической механики: [Учебник для студ. втузов]. -12-е изд., стер. -М.: Наука, 1965. -596с.
5. Гернет М. М. Курс теоретической механики: Учебник для вузов. -5-е изд., испр. -М.: Высш. шк., 1987. -344с.: ил.*
6. Голубев Ю. Ф. Основы теоретической механики: Учебник для ст-ов втузов. -М.: Изд-во МГУ, 1992. -526с. -Библиогр.: с. 524-525.
7. Никитин Н. Н. Курс теоретической механики: Учебник для ст-ов машиностроит. и приборостроит. спец. вузов. -5-е изд., перераб. и доп. -М.: Высшая школа, 1990. -607 с.: ил.
8. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: Учеб. пособие для втузов / Под ред. А. А. Яблонского. -4-е изд., перераб. и доп. -М.: Высш. шк., 1985. 367с.: ил. -Библиогр.: с. 363.*
9. Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики: Учеб. для втузов / С. М. Тарг. -10-е изд., перераб. и доп.. -М.: Высш. шк., 1986. -415с.:
10. Яблонский А. А., Никифорова В. М. Курс теоретической механики. Часть 1. Статика. Кинематика: Учебник для техн. вузов. Изд. 6-е, испр. -М.: Высш. шк., 1984. -343 с.
11. Теоретическая механика. Программа, методические указания и контрольные задания для студентов заочных специальностей. Иванов-Франковск.; ИФИИГ, 1990.

Рекомендуемый список методических пособий, имеющихся в фонде библиотеки ГГТУ:

1. Теоретическая механика: пособие по одноимённому курсу для студентов инж.-техн. Специальностей заочной формы обучения/Андреев С.Ф, Каф. "Техническая механика". -Гомель: ГГТУ,, 2006.-44 с.
2. Методические указания и контрольные задания для студентов-заочников по теоретической механике. Часть 2. Кинематика. / Шабловский О. Н., -Гомель, ГПИ, 1991. -29 с.
3. . Методические указания к практическим занятиям по теме "Плоскопараллельное движение твердого тела" курса "Теоретическая механика" для студентов машиностроительных специальностей. / Андреев С. Ф., -Гомель, ГПИ, 1985. -38 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Андреев Сергей Филиппович

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Курс лекций
по одноименной дисциплине для студентов
инженерно-технических специальностей
заочной формы обучения
В трех частях
Часть 2
Кинематика

Подписано к размещению в электронную библиотеку
ГГТУ им. П. О. Сухого в качестве электронного
учебно-методического документа 31.03.10.
Рег. № 133Е.
E-mail: ic@gstu.by
http://www.gstu.by