



**Министерство образования Республики Беларусь**

**Учреждение образования  
«Гомельский государственный технический  
университет имени П. О. Сухого»**

**Кафедра «Сельскохозяйственные машины»**

**В. Б. Попов, А. В. Голопятин**

# **ОСНОВЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННОЙ ТЕХНИКИ**

**КУРС ЛЕКЦИЙ**

**по одноименной дисциплине  
для студентов специальности 1-36 12 01  
«Проектирование и производство  
сельскохозяйственной техники»  
дневной и заочной форм обучения**

**Гомель 2013**

УДК 631.3(075.8)  
ББК 40.72я73  
П58

*Рекомендовано научно-методическим советом  
механико-технологического факультета ГГТУ им. П. О. Сухого  
(протокол № 6 от 28.06.2012 г.)*

Рецензент: зав. каф. «Электроснабжение» ГГТУ им. П. О. Сухого  
канд. техн. наук, доц. *О. Г. Широков*

**Попов, В. Б.**  
П58 Основы проектирования сельскохозяйственной техники : курс лекций по одному. дисциплине для студентов специальности 1-36 12 01 «Проектирование и производство сельскохозяйственной техники» днев. и заоч. форм обучения / В. Б. Попов, А. В. Голопятин. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2013. – 179 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Ce-leron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: <http://library.gstu.by/StartEK/>. – Загл. с титул. экрана.

Представлены теоретические, методические и справочные сведения, необходимые для разработки технических объектов, способствующие приобретению навыков по автоматизированному проектированию машин.

Для студентов специальности 1-36 12 01 «Проектирование и производство сельскохозяйственной техники» дневной и заочной форм обучения.

УДК 631.3(075.8)  
ББК 40.72я73

© Учреждение образования «Гомельский  
государственный технический университет  
имени П. О. Сухого», 2013

## СОДЕРЖАНИЕ

1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О РАЗВИТИИ ТЕХНИКИ.....	4
1.1 Основные направления развития техники.....	4
1.2 Техническая база перспективной техники.....	6
1.3 Оценка технического уровня машины.....	8
1.4 Жизненный цикл с/х машины.....	9
1.5 Структура и характеристики СХМ. Общие сведения о показателях качества.....	14
2. ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЕКТНЫХ РЕШЕНИЙ.....	17
2.1 Постановка задач параметрического синтеза.....	17
2.2 Методы оптимизации.....	22
2.3 Принятие решений при автоматизированном проектировании типовых зубчатых редукторов.....	37
3. КОМПАС.....	45
3.1 Назначение, состав и структура КОМПАС.....	45
3.2 Система управления жизненным циклом изделия.....	47
3.3 Проектирование и конструирование в среде КОМПАС.....	53
3.3.1 Разработка чертежей в КОМПАС-ГРАФИК.....	53
3.3.2 Геометрическое моделирование в КОМПАС-3D.....	56
3.3.3 Системы проектирования: КОМПАС-Shaft Plus и КОМПАС-Spring.....	58
3.3.4 Формирование спецификаций.....	60
3.3.5 Другие структурные составляющие КОМПАС.....	62
3.3.5.1 КОМПАС-МЕНЕДЖЕР.....	62
3.3.5.2 Библиотеки стандартных элементов и справочники.....	63
3.3.5.3 КОМПАС-КАТАЛОГ.....	63
3.3.5.4 Система безопасности данных КОМПАС-ЗАЩИТА.....	64
3.4 Автоматизация технологической подготовки производства в среде КОМПАС.....	65
3.4.1 КОМПАС-АВТОПРОЕКТ.....	66
3.4.2 КОМПАС-ШТАМП.....	68
3.5 Работа КОМПАС с другими системами САД/САМ/САЕ.....	70
3.6 Сравнение КОМПАС и AutoCAD.....	71

4. Интегрированная система прочностного анализа.....	78
4.1 Теоретические основы механики твердых тел.....	78
4.1.1 Элементы теории упругости.....	78
4.2 Одномерные, двумерные и трехмерные модели упругих тел	91
4.3 Основные положения МКЭ.....	92
4.4 Матрица жесткости элемента. Уравнение равновесия эле- мента.....	96
4.5 Глобальная матрица жесткости. Уравнения равновесия кон- струкции.....	99
4.6 Численное интегрирование в МКЭ.....	104
4.7 Критерии сходимости.....	107
4.8 Уравнения связи. Конденсация.....	109
4.9 Матрица жесткости.....	111
4.9.1 Одномерные элементы.....	111
4.9.1.1 Балочная теория стержня.....	111
4.9.1.2 Элемент стержня с постоянным по длине сечением по балочной теории.....	119
4.9.1.3 Применение общей теории МКЭ для построения стерж- ня с постоянным по длине сечением.....	127
4.9.2 Двумерные элементы.....	133
4.9.2.1 Элементы мембраны.....	133
4.9.2.1.1 Понятие мембраны. Плоское напряженное состояние..	133
4.9.2.1.2 Треугольный элемент мембраны без промежуточных узлов.....	135
4.9.2.1.3 Четырехугольный изопараметрический элемент мем- браны без промежуточных узлов.....	138
4.9.2.1.4 Устранение ложной деформации сдвига для элемен- тов мембраны.....	142
4.9.2.1.5 Треугольный гибридный элемент мембраны.....	145
4.9.2.2 Элементы пластины.....	151
4.9.2.2.1 Понятие пластины. Теория тонкой пластины.....	151
4.9.2.2.2 Четырехугольный изопараметрический элемент тон- кой пластины без промежуточных узлов.....	156
4.9.2.3 Элементы оболочки.....	160
4.9.2.3.1 Понятие оболочки. Теория тонкой оболочки.....	160
4.9.2.3.2 Плоские элементы оболочки.....	169
4.9.2.3.3 Неплоская четырехузловая ДКТ – оболочка.....	170
ЛИТЕРАТУРА.....	178

## 1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О РАЗВИТИИ ТЕХНИКИ

Развитие промышленного производства ведётся по двум основным направлениям: экстенсивному и интенсивному.

В основе экстенсивного лежат количественные факторы (увеличение средств труда, капиталы вложений, численности рабочих); качественные факторы (которые обеспечивают повышение и эффективность труда, интенсификацию производства за счёт развития науки и техник).

На практике эти пути дополняют друг друга, но соотношение между ними изменяются в пользу интенсивных факторов. В особенности это характерно для рыночной системы хозяйствования.

Современная с/х техника представляет собой результат существенного влияния наукоемких технологий. Например: концерн “Claas” расходует на исследование более 1 млн. долларов в день.

Современные темпы развития науки и техники обеспечивает превалирующее влияние интенсивных факторов и в странах с развитой рыночной экономикой их доля в 3-4 раза выше экстенсивных.

В РБ интенсивными факторами обеспечиваются около 90% ВВП, что существенно выше показателя в БССР (45-50%), таким образом, сегодня прирост объема продукции в основном осуществляется за счёт увеличения производительности труда.

Темпы развития научно-технического прогресса (НТП), как правило, определяются соотношением темпов развития науки, техники и производства. Если условно представить приращение во времени  $t$ , науки  $H$ , техники  $T$  и производства  $\Pi$ , то характерное соотношение этих составляющих было

$$d\Pi/dt > dT/dt > dH/dt.$$

На современном этапе признается оптимальным

$$dH/dt < dT/dt < d\Pi/dt.$$

Наиболее высокими темпами должна развиваться прикладная наука, которая является основной для ускорения темпа развития с/х техники.

### 1.1 Основные направления развития техники

Одним из приоритетных направлений развития техники и науки в РБ является ресурсосберегающие и энергоэффективные технологии в производстве продукции машиностроения, в том числе с/х техники.

Повышение её конкурентоспособности, обеспечение высокого технического уровня, надежности и безопасности во многом связано с развитием следующих научных исследований и прикладных работ:

- разработка и освоение наукоемких технологий, обеспечивающее существенное повышение производительности труда, при одновременном сбережении трудовых, материальных и энергетических ресурсов;

- разработка новой перспективной мобильной техники, опирающейся на внедрение электроники, компьютеров и микропроцессов;

- создание и внедрение в производство новых конструкций (в том числе адаптивных материалов);

- комплексная механизация и автоматизация производства, основанная на использовании автоматизированного проектирования и гибкого управления производственными процессами;

- создание и освоение новых источников энергии, в том числе нетрадиционных;

- разработка и реализация биотехнологий для получения экологического чистого топлива.

В числе основных задач, при разработке перспективной с/х технике рассматриваются:

- компьютерные модели, позволяющие осуществлять имитационное моделирование и испытание узлов агрегатов и машин, которые способствуют определению (выбору) их оптимальных характеристик;

- разработка типа размерного ряда, унифицированных бортовых электронных модулей, электрических гидравлических исполнительных механизмов для с/х техники;

- нетрадиционные (альтернативные) ресурсосберегающие источники энергии, в том числе для пневмоколесных и гусеничных машин;

- создание гидрообъемных и электрических вариаторов для трансмиссий с/х техники;

- система автоматизированного проектирования и автоматизированных рабочих мест, интеллектуально-организованных автоматизированных систем управления производством;

- манипуляторы и промышленные роботы, программируемые и быстро приспосабливающиеся к изменяющимся условиям эксплуатации;

- система оперативного диагностирования (без разборки), приводов, гидросистем и несущих конструкций с/х техники;

-аналитическое оборудование и приборы контроля качества и сертификации продукции, в том числе машиностроительные;

-система управления и контроля работы машин с применением спутниковых систем.

При создании новых материалов, особое внимание уделяется:

-новым многофакторным полимерным материалом с комплексом особых свойств;

-материальным, изменяющим свои физические и другие свойства при изменении условий эксплуатации (созданным с применением интеллектуальных компьютерных систем);

-принципиально новым конструкционным материалом, многократно превосходящим по своим свойствам имеющиеся материалы (сверхпрочные и сверхтвёрдые, коррозионные и износостойкие и др.);

-новым магнитным, сегнетоэлектрическими и полупроводниковым материалами с особыми физическими свойствами;

-новым конструкционным материалом на основе высокопрочного чугуна и производству из него высоконагруженных крупногабаритных деталей.

В области освоения прогрессивных технологий заслуживают внимание:

-основы получения nano структурных материалов для силовых элементов конструкции;

-технологии материалов, с новыми свойствами обеспечивающие создание микро и nano электронных систем и устройств;

-плазменные технологии для производства высококачественной стали специальных сплавов; получение редких металлов и химического сырья;

-новые высокоэффективные технологии обработки металлических материалов с использованием импульсных нагрузок и сверхвысоких давлений.

## **1.2 Техническая база перспективной техники**

Разработка новой с/х техники осуществляется, как правило, с учётом перспективных типажей и систем машин.

Типаж машин связан с параметрическим рядом, типоразмерным рядом машин.

Параметрический ряд представляет собой упорядоченную совокупность числовых значений параметра, построенной в определенном диапазоне в принятой системе градации.

Параметр машины – это независимая или взаимосвязанная величина характеризующая определенный конструктивно-эксплуатационный показатель.

Совокупность значений параметров, определяющих машину данного типа (конструктивного исполнения) называют типоразмером машины.

Параметрический ряд строится на основе рядов предпочтительных чисел регламентируемых стандартами.

Система предпочтительных чисел позволяет выбрать лишь такие значение параметров, которые строго определяет математической закономерности.

Предпочтительные числа могут быть выражены в виде арифметической или геометрической прогрессии.

Если техническое средство данного типоразмера является основной для образования других моделей ряда, то такое техническое средство называют базой или базовой моделью.

Различное исполнение базовой модели называют модификациями.

С учётом вышеназванных понятий можно сформировать типаж машин.

Типаж машин представляет собой совокупность членов типоразмерного ряда, систематизированных по функциональным, технологическим, конструктивным и размерным признаком. Он разрабатывался на определённый период, устанавливают исходные данные для разработки технических заданий на проектирование новых моделей.

Новые модели машин должны разрабатываться в соответствии с основными направлениями работ по обеспечению качества и повышению технического уровня продукции, а также экономии трудовых, материальных и энергетических ресурсов, а также снижение эксплуатационных затрат, безопасности жизни человека и охрана окружающей среды.

Стандартизация, унификация конструктивных базовых моделей и их модификаций, должна учитывать требования и нормы международных стандартов.

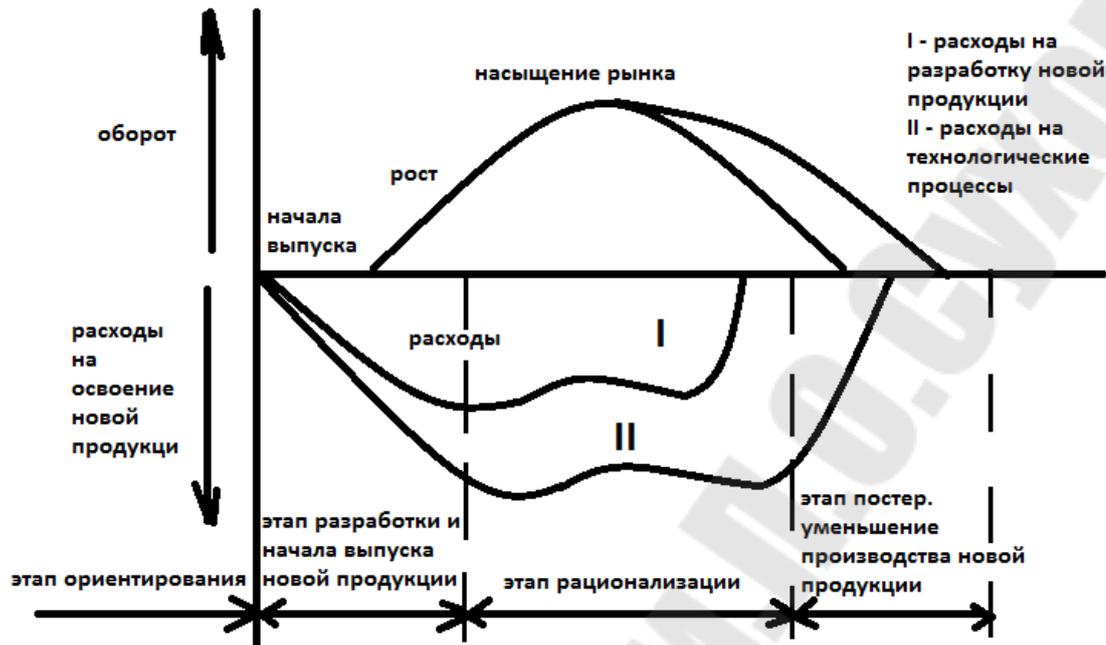


Рисунок 1.2.1 – Этапы разработки новой продукции в с/х машиностроении

Разработка перспективных типажей и семейств машин позволяет:

- обеспечивать возможность более полного удовлетворения потребностей народного хозяйства в соответствии технических средствах;

- удовлетворять эти потребности с помощью минимально необходимого количества базовой модели;

- экономически обосновать необходимые для создания технических средств ресурсы и капитальные вложения в основные и смежные области промышленности;

- расширить внутренний рынок соответствующей продукции и экспортных поставок.

### 1.3 Оценка технического уровня машины

Для определения ближайших перспектив развития и освоения новой техники весьма важна оценка её технического уровня, которое характеризует количественное изменение показателей сравниваемых машин по отношению к аналогичным показателям машин, принятых за эталон.

Для оценки технического уровня могут быть использованы различные характеристики. Например, режимные: производительность,

пропускная способность, максимальная скорость движения, тяговое усилие и т.д. Размерные и весовые характеристики: удельная масса, номинальная грузоподъемность, вместимость бункера, ширина захвата. Эксплуатационные: экономичность, производительность. Конструктивно-производственные: надежность, технологичность конструкции.

Общий показатель изменения технического уровня машины, за рассматриваемый период выпуска машин равен произведению относительных показателей соответствующих величин: снижение удельной массы, повышение энергонасыщенности, повышение пропускной способности.

Признаком прогрессивного развития техники является рост или снижение отдельных компонентов формирующих технический уровень. Расчёт и обоснование показателей технического уровня имеют важное значения для определения предельных затрат связанных с улучшением качества машин. Улучшение отмеченных выше показателей для с/х техники не всегда сопровождается повышением показателя, как производительность и надежность.

Например: За 24 года в СССР было выпущено около 1 млн. зерноуборочных комбайнов (выработка на одну машину составила приблизительно 215 т зерна). За этот же период в США количество комбайнов сократилось с 980 000 до 600 000 за счёт повышения производительности, т.е. выработка на 1 комбайн увеличилась в среднем со 180 до 650 т. При значительном превосходстве СССР в производстве тракторов (в 5-6 раз) примерно половина из них простаивала из-за технических неисправностей, а каждый третий разбирали на запчасти. Из общего числа грузовых автомобилей на работу выходило не больше 50%, остальные стояли по техническим причинам. По выпуску дорожно-строительной техники СССР в 3-3,5 больше США, но производительность нашего парка составила 40-45% от американской.

#### **1.4 Жизненный цикл с/х машины**

Создание новой с/х машины – сложный и длительный процесс, в котором участвуют ученые, конструкторы, дизайнеры испытатели, специалисты в области производства и эксплуатации

Чем сложнее машина, тем труднее, дороже и длительнее процесс ее, создания. Поэтому для разработки и рационального исполь-

зования с/х машины важно знать во всех подробностях ее жизненный цикл и влияющие на него факторы.

**Жизненный цикл** с/х машины представляет собой совокупность взаимосвязанных процессов создания и последовательного изменения состояния с/х машины от формирования исходных требований к ней до окончания ее эксплуатации. Жизненный цикл, согласно Единой системе государственного управления качеством продукции, принято делить на стадии – части жизненного цикла, устанавливаемые в нормативно-технической документации и характеризующиеся определенным состоянием машины, видом предусмотренных работ и их результатом.

Жизненный цикл схм состоит из следующих стадий *создание, производство, обращение и эксплуатация*, каждая из которых содержит целый ряд этапов, операций и процедур.

**Создание машины.** Первая стадия начинается с предпроектных исследований и заканчивается созданием схм.

На этапе подготовки к разработке, проекта новой машины устанавливается принципиальная возможность и целесообразность ее создания. Необходимость в новой машине должна вытекать из общественных потребностей и поэтому нуждается в тщательном и глубоком обосновании с учетом технических и экономических возможностей, обусловленных прогрессом науки и техники и развитием экономики страны. Для этого проводятся поисковые исследования, которые должны базироваться на результатах фундаментальных исследований, практическом опыте применения аналогичных машин, ретроспективном анализе и прогнозах развития техники в данной области. Кроме того, необходима мотивация для побуждения к решению данной технической проблемы. Она может вытекать из безусловных потребностей общества, необходимости практической реализации достигнутого научного потенциала и повышения экономических показателей деятельности данной отрасли народного хозяйства. Общество, наука, техника и экономика развиваются взаимозависимо.

Важными элементами поисковых исследований являются эксперименты на макетах машины – физических моделях машины (или отдельных ее частей), воспроизводящих или имитирующих конкретные ее свойства и изготовленных для проверки принципа ее действия и определения характеристик. Макет с известной степенью упрощения воспроизводит в определенном масштабе машину (или ее части) и позволяет исследовать отдельные ее характеристики, а также оценивать

правильность принятых технических и художественных решений. Макеты изготавливают в процессе выполнения научно-исследовательских и опытно-конструкторских работ (ГОСТ 2.118–73\*, ГОСТ 2.119–73\*, ГОСТ 2.120–73\*).

Результатом поисковых исследований, проводимых в предпроектный период, является постановка задачи проектирования, которая предусматривает разработку технических требований к машине и формирование технического задания (ТЗ) на ее создание.

Конструктор принимает участие во всех стадиях жизненного цикла машины. Однако основной процесс его творчества составляют работы, связанные с созданием машины и представляющие собой законченный цикл, состоящий из нескольких этапов: *научно-технический поиск, проектирование, изготовление образцов, испытания, доводка конструкции*. Эти этапы тесно взаимосвязаны в значительной мере совмещены во времени и могут многократно повторяться. К работам по созданию машины тесно примыкают работы по технологической подготовке производства, однако их следует отнести, ко второй стадии жизненного цикла аналогично тому, как предпроектные исследования, в процессе которых осуществляется научно-технический поиск, относятся к стадии создания машины.

Этап проектирования охватывает большой перечень проектных операций и процедур от предварительных расчетов и эскизов до уточненных расчетов, детализировочных чертежей, описании, инструкций, технических условий и т.п. Результатом проектирования является *комплект технической документации*, содержащей всю необходимую информацию для материализации создаваемой машины в процессе производства и организации ее использования.

На всех этапах процесса создания машины изготавливают макетные, экспериментальные и опытные образцы машины и проводят на них различные испытания: исследовательские, доводочные, предварительные и др. (ГОСТ 16504–81). Исследовательские испытания предназначены для изучения свойств и характеристик машины. Для доводки конструкции и оценки влияния вносимых во время ее разработки изменений на показатели качества проводят доводочные испытания. После завершения разработки конструкция и изготовления опытных образцов возможность представления их на приемочные испытания проверяется на предварительных контрольных испытаниях, выполняемых в соответствии с ГОСТ 15.001–88.

Заключительным этапом стадии создания машины являются приемочные испытания, по результатам которых решается вопрос о целесообразности постановки ее на производство. Приемочные испытания могут быть государственными, межведомственными и ведомственными и проводятся они в порядке, установленном ГОСТ 15.001–88. Разработка машины считается выполненной в соответствии с техническим заданием при условии утверждения акта приемки опытного образца или опытной партии, содержащего рекомендации о постановке на производство, и выполнения указаний приемочной комиссии о необходимой доработке. По результатам приемочных испытаний может проводиться корректировка технической документации и доработка опытных образцов.

**Производство машины.** Эта стадия включает постановку на производство, установившееся производство и снятие с производства.

Постановка на производство, как правило, осуществляется в два этапа: подготовка производства и освоение. Работы по подготовке производства направлены на обеспечение технологического процесса изготовления машины и могут начинаться еще на стадии ее создания. Важнейшим этапом этих работ является технологическая подготовка производства, процессы организации и управления которой регламентируются комплексом государственных стандартов Единой системы технологической подготовки производства (ЕС ТПП). При этом осуществляется выбор технологии и оборудования, организация материально-технического снабжения, планирование процесса производства, во времени, распределение работ и т. д.

Освоение производства включает отработку и проверку подготовленных технологических процессов и овладение практическими приемами изготовления продукции со стабильными, показателями и в заданном объеме выпуска.

Установившееся производство начинается после окончательной отработки конструкторской и технологической документации ГОСТ 14.004–83). Решение об освоении производства машины принимается по результатам квалификационных испытаний установочной серии или первой промышленной партии ГОСТ 16504–81). При несоответствии технического уровня машины современным требованиям, низких технологических показателей и показателей качества процессов функционирования, отрицательном воздействии машины на здоровье людей и окружающую среду, отсутствии заказов и спроса, а также при освоении в производстве аналогичной по назначению но-

вой машины с более высокими характеристиками выпускаемая машина подлежит снятию с производства.

**Обращение машины.** Это часть жизненного цикла машины от отгрузки ее предприятием-изготовителем до получения потребителем. Типичными этапами этой стадии являются, хранение на складе готовой продукции, реклама, упаковка, транспортирование, монтаж. При обращении должно быть обеспечено максимальное сохранение объемов и качества готовой продукции, установленных плановыми заданиями, стандартами и техническими условиями.

**Эксплуатация машины.** На этой стадии реализуется, поддерживается и восстанавливается качество машины (ГОСТ 25866–83). Эксплуатация машин включает в общем случае ввод в эксплуатацию, использование по назначению, техническое обслуживание, ремонт, модернизацию и хранение. Каждый из названных этапов может содержать множество операций, направленных на достижение высоких технико-экономических показателей машины, обеспечение ее эффективной работы, повышение срока службы.

Наконец, вследствие морального или физического износа в процессе использования машина перестает отвечать предъявляемым требованиям, становится нецелесообразным дальнейшее ее использование по назначению и ремонт и поэтому машина подлежит снятию с эксплуатации и последующей утилизации. Снятие с эксплуатации машины оформляется документально в установленном порядке в соответствии с ГОСТ 25866–83.

Рассмотренные стадии можно представить в виде замкнутого цикла, в котором условия высокого качества и экономичности изготовления, сохраняемости, живучести и эффективного использования создаваемого трактора в народном хозяйстве страны являются исходными факторами для формирования технических требований к разработке конструкции. Таким образом, все четыре стадии жизненного цикла с/х машины тесно взаимосвязаны и взаимообусловлены. Степень полноты учета этих взаимосвязей на этапах предпроектных исследований и проектирования определяет качество и технический уровень создаваемых тракторов и оказывает решающее влияние на показатели эффективности достижения конечных народнохозяйственных результатов.

## 1.5 Структура и характеристики СХМ. Общие сведения о показателях качества

Строение машинного агрегата

Машины, в том числе мобильные СХМ, применяются как устройства, служащие для преобразования энергии, материалов и информации.

По назначению машины подразделяются на технологические (рабочие), энергетические, транспортные и грузоподъемные, информационные.

Сельскохозяйственная техника представляет собой симбиоз технологической и транспортной машин.

В качестве энергетических машин можно рассматривать насосы, компрессоры, электрогенераторы.

Основное свойство технологических или рабочих машин состоит в потреблении ими энергии, как правило, механической.

Рабочий процесс преобразования энергии характеризуется определенными энергетическими показателями. Например, механическая характеристика уборочной машины представляет зависимость крутящего момента вала двигателя от угловой скорости его вращения.

В современных машинах в двигателях имеется орган управления, изменение положения которого изменяет расход энергии – соответствующее соотношение между выходными параметрами (крутящий момент, частота вращения вала). Это свойство изменения механических параметров, возникающее при изменении положения управляющего органа и внешних воздействий, характеризует устойчивость и управляемость машин и обеспечивает возможность приспособления машины к изменению внешних условий. В качестве внешнего воздействия можно рассматривать изменение момента сопротивления рабочей машины, который часто называют механической нагрузкой. На практике мы встречаем сложные схемы механизмов, получаемые как результат объединения двигателей и рабочих машин. Такая комбинация называется машинным агрегатом.

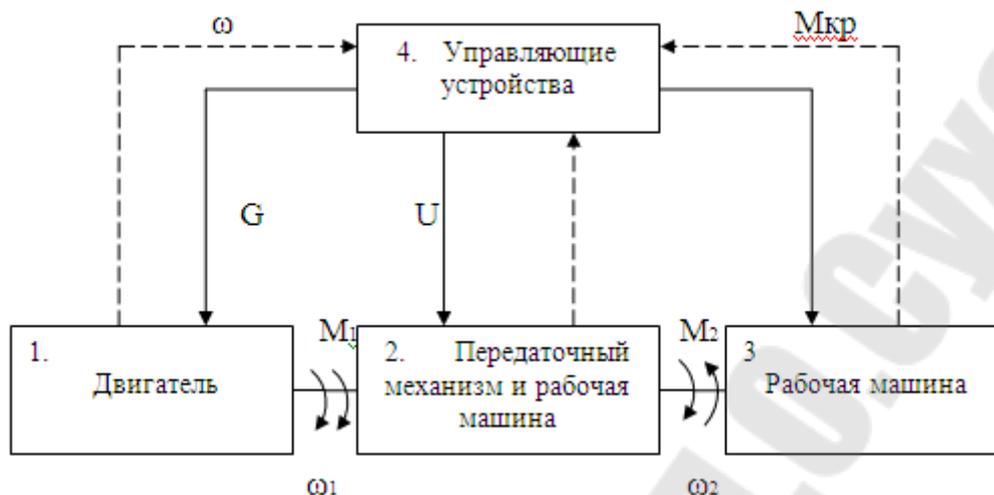


Рисунок 1.5.1 - Структурная схема машинного агрегата  
 $M_{кр}$  – крутящий момент,  $G$  – подача топлива,  $U$  – изменение передаточного числа

Автоматическое управление машинным агрегатом выполняют управляющие устройства, называемые регулятором, который воздействует на двигатель посредством применения расхода топлива, с целью изменения крутящего момента  $M_1$  и регулирования, т.о. скорость вращения вала  $\omega_1$ .

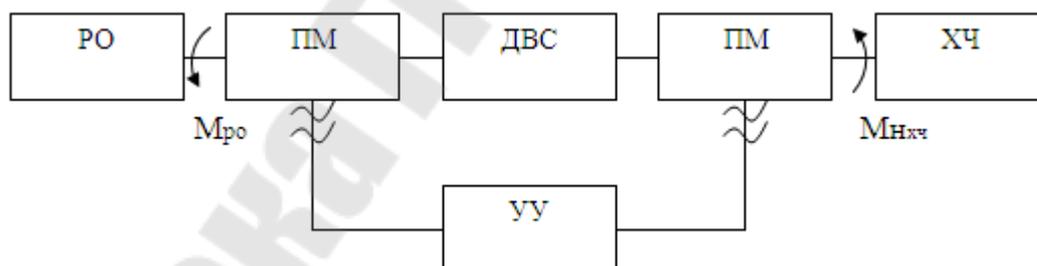


Рисунок 1.5.2

Передаточный механизм 2 в первую очередь необходим в случае скоростного вращения вала двигателя и работы машины.

Скорость вращения двигателей существенно увеличивается, а скорость рабочей машины увеличивается не столь значительно поскольку органы рабочей машины контактируют с естественными материалами, свойства которых со временем мало изменились, поэтому необходимо применять передаточные механизмы (редукторы, коробки передач и т.д.)

Роль передаточных механизмов заключается в согласовании характеристик двигателя и рабочей машины с целью достижения оптимальных характеристик машинного агрегата по критериям экономичности, быстродействия, производительности.

Современные машины как правило оснащаются САУ (системами автоматического управления) режимами работы или скорости.

Под режимом работы машины понимается сочетание основных выходных параметров однозначно определённых производить, расход энергии и тепловое состояние деталей.

Из этих механических параметров часть выделяют нагрузку, под которой обычно понимается крутящий момент вала машины и скорость его вращения. Комбинация двух этих параметров однозначно определяет другие параметры (направление мощности  $N = M_{кр} \cdot \omega$ ).

Режим работы машинного агрегата может быть рассчитан наложением механических характеристик (зависимостей крутящего момента двигателя и рабочий момент от  $\omega$ ). При этом обычно пренебрегают их колебаниями относительно среднего значения, т.е. рассмотрим пересечение квазистатических характеристик при  $\omega = \text{const}$ . Среди режимов работы выделяют номинальный, ближайший к режиму максимальной мощности и экономичности, а также режим холостого хода.

Примем скорость вращения принятой максимальное и минимальное значение. В основе принципа работы систем управления лежит осуществление прямого воздействия на орган управления машиной и определённой реакции на это воздействие – так называемой обратной связи. Обратная связь реализуется при помощи специального датчика, передающего информацию о текущей скорости вращения  $\omega_1$  вала 1 двигателя регулятору. Например, в дизельном ДВС в количестве УУ подачи топлива  $G$  наполняется топливный насос регулируемой производительности, оснащенный центробежным регулятором скорости  $\omega_1$ . Управляя скоростью вращения вала,  $\omega_1$  двигателя, тем самым управляют и скоростью движения машины. Например, управление  $\omega_1$  вала, осуществляется с помощью механизма регулирования воздействующего на подачу топлива  $G$  в цилиндр ДВС. Управление машинами по расходу энергии часто проектируют на основании предварительной информации о характеристиках машин, полученных в результате опытов или расчётным путём.

## 2. ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЕКТНЫХ РЕШЕНИЙ

### 2.1 Постановка задач параметрического синтеза

Место процедур синтеза в проектировании. Сущность проектирования заключается в принятии проектных решений, обеспечивающих выполнение будущим объектом предъявляемых к нему требований. Синтез проектных решений – основа проектирования; от успешного выполнения процедуры синтеза в определяющей мере зависят потребительские свойства будущей продукции. Конечно, анализ – необходимая составная часть проектирования, служащая для верификации принимаемых проектных решений. Именно анализ позволяет получить необходимую информацию для целенаправленного выполнения процедур синтеза в итерационном процессе проектирования. Поэтому синтез и анализ неразрывно связаны.

Как отмечено выше, синтез подразделяют на параметрический и структурный. Проектирование начинается со *структурного синтеза*, при котором генерируется принципиальное решение. Таким решением может быть облик будущего летательного аппарата, или физический принцип действия датчика, или одна из типовых конструкций двигателя, или функциональная схема микропроцессора. Но эти конструкции и схемы выбирают в параметрическом виде, т. е. без указания числовых значений параметров элементов. Поэтому прежде чем приступить к верификации проектного решения, нужно задать или рассчитать значения этих параметров, т.е. выполнить *параметрический синтез*. Примерами результатов параметрического синтеза могут служить геометрические размеры деталей в механическом узле или параметры режимов резания в технологической операции и т.п.

В случае если по результатам анализа проектное решение признается неокончательным, то начинается процесс последовательных приближений к приемлемому варианту проекта. Во многих приложениях для улучшения проекта удобнее варьировать значения параметров элементов, т. е. использовать параметрический синтез на базе многовариантного анализа. При этом задача параметрического синтеза может быть сформулирована как задача определения значений параметров элементов, наилучших с позиций удовлетворения требований технического задания при неизменной структуре проектируемого объекта. Тогда параметрический синтез называют параметрической оптимизацией или просто *оптимизацией*. Если параметрический синтез не приводит к успеху, то повторяют процедуры структурного син-

теза, т. е. на очередных итерациях корректируют или перевыбирают структуру объекта.

Критерии оптимальности. В САПР процедуры параметрического синтеза выполняются либо человеком в процессе многовариантного анализа (в интерактивном режиме), либо реализуются на базе формальных методов оптимизации (в автоматическом режиме). В последнем случае находят применение несколько постановок задач оптимизации.

Наиболее распространенной является детерминированная постановка: заданы условия работоспособности на выходные параметры  $Y$  и нужно найти номинальные значения проектных параметров  $X$ , к которым относятся параметры элементов проектируемого объекта. Назовем эту задачу оптимизации базовой. В частном случае, когда требования к выходным параметрам заданы нечетко, к числу рассчитываемых величин могут быть отнесены также нормы выходных параметров, фигурирующие в их условиях работоспособности.

Если проектируются изделия для дальнейшего серийного производства, то важное значение приобретает такой показатель, как процент выпуска годных изделий в процессе производства. Успешное выполнение условий работоспособности в номинальном режиме не гарантирует их выполнения при учете производственных погрешностей, задаваемых допусками параметров элементов. Поэтому *целью оптимизации становится максимизация процента выхода годных*, а к результатам решения задачи оптимизации относятся не только номинальные значения проектных параметров, но и их допуски.

Базовая задача оптимизации ставится как задача математического программирования:

$$\begin{aligned} \text{extr} F(X) \quad X \in D_x \quad (2.1) \\ D_x = \{X | \phi(X) > 0, \psi(X) = 0\}, \end{aligned}$$

где  $F(X)$  – целевая функция,  $X$  – вектор управляемых (проектных) параметров,  $\phi(X)$  и  $\psi(X)$  – функции-ограничения,  $D_x$  – допустимая область в пространстве управляемых параметров.

Запись (2.1) интерпретируется как задача поиска экстремума целевой функции путем варьирования управляемых параметров в пределах допустимой области. Таким образом, для выполнения расчета номинальных значений параметров необходимо, во-первых, сформулировать задачу (2.1), во-вторых, решить задачу поиска экстремума  $F(X)$ .

Сложность постановки оптимизационных проектных задач обусловлена наличием у проектируемых объектов нескольких выходных параметров, которые могут быть критериями оптимальности, но в задаче (2.1) целевая функция должна быть одна. Другими словами, проектные задачи являются многокритериальными, и возникает проблема сведения многокритериальной задачи к однокритериальной.

Применяют несколько способов выбора критерии оптимальности.

В частном критерии среди выходных параметров один выбирают в качестве целевой функции, а условия работоспособности остальных выходных параметров относят к ограничениям задачи (2.1). Эта постановка вполне приемлема, если действительно можно выделить один наиболее критичный выходной параметр. Но в большинстве случаев сказывается недостаток частного критерия (Рисунок 2.1).

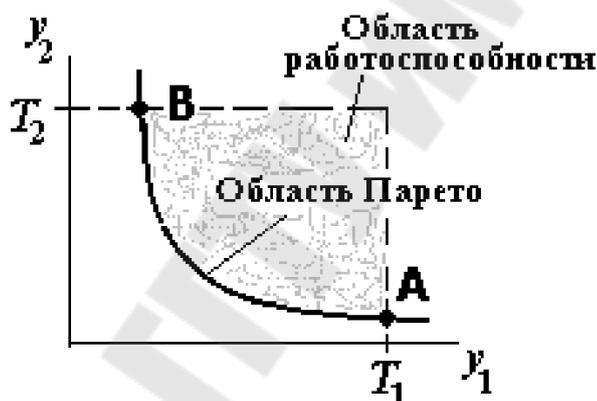


Рисунок 2.1. Области Парето и работоспособности

На этом рисунке представлено двумерное пространство выходных параметров  $u_1$  и  $u_2$ , для которых заданы условия работоспособности  $u_1 < T_1$  и  $u_2 < T_2$ . Кривая  $AB$  является границей достижимых значений выходных параметров. Это ограничение объективное и связано с существующими физическими и технологическими условиями производства, называемыми условиями реализуемости. Область, в пределах которой выполняются все условия реализуемости и работоспособности, называют *областью работоспособности*. Множество точек пространства выходных параметров, из которых невозможно перемещение, приводящее к улучшению всех выходных параметров, называют областью компромиссов, или *областью Парето*. Участок кривой  $AB$  (см. Рисунок 2.1) относится к области Парето.

Если в качестве целевой функции в ситуации Рисунок 2.1. выбрать параметр  $y_1$ , то результатом оптимизации будут параметры  $X$ , соответствующие точке  $B$ . Но это граница области работоспособности и, следовательно, при нестабильности внутренних и внешних параметров велика вероятность выхода за пределы области работоспособности. Результаты можно улучшить, если применять так называемый метод уступок, при котором в качестве ограничения принимают условие работоспособности со скорректированной нормой в виде

$$y_2 < T_2 + \Delta,$$

где  $\Delta$  – уступка. Но возникает проблема выбора значений уступок, т.е. результаты оптимизации будут иметь субъективный характер. Очевидно, что ситуация не изменится, если целевой функцией будет выбран параметр  $y_2$ , – оптимизация приведет в точку  $A$ .

*Аддитивный критерий* объединяет (свертывает) все выходные параметры (частные критерии) в одну целевую функцию, представляющую собой взвешенную сумму частных критериев

$$F(X) = \sum_{j=1}^m \omega_j y_j(X), \quad (2.2)$$

где  $\omega_j$  – весовой коэффициент,  $m$  – число выходных параметров. Функция (2.2) подлежит минимизации, при этом если условие работоспособности имеет вид  $y_j > T_j$ , то  $\omega_j < 0$ .

Недостатки аддитивного критерия – субъективный подход к выбору весовых коэффициентов и неучет требований ТЗ. Действительно в (2.2) не входят нормы выходных параметров.

Аналогичные недостатки присущи и *мультипликативному критерию*, целевая функция которого имеет вид

$$F(X) = \prod_{j=1}^m y_j^{\omega_j}(X), \quad j = 1 \quad (2.3)$$

Нетрудно видеть, что если прологарифмировать (2.3), то мультипликативный критерий превращается в аддитивный.

Более предпочтительным является *максиминный критерий*, в качестве целевой функции которого принимают выходной параметр, наиболее неблагоприятный с позиций выполнения условий работоспособности. Для оценки степени выполнения условия работоспособности  $j$ -го выходного параметра вводят запас работоспособности этого параметра  $S_j$  и этот запас можно рассматривать как нормированный  $j$ -й выходной параметр. Например (здесь и далее для лаконичности изложения предполагается, что все выходные параметры приведены к

виду, при котором условия работоспособности становятся неравенствами в форме  $y_j < T_j$ ):

$$S_j = (T_j - y_j) / T_j$$

$$\text{или } S_j = (T_j - y_{\text{ном}}) / \sigma_j \quad S_j = (T_j - y_{\text{ном}j}) / \delta_j$$

где  $y_{\text{ном}j}$  – номинальное значение, а  $\delta_j$  – некоторая характеристика рассеяния  $j$ -го выходного параметра, например, трехсигмовый допуск. Тогда целевая функция в максиминном критерии есть

$$F(X) = \min Z_j(X) \quad j \in [1:m] \quad (2.4)$$

Здесь запись  $[1:m]$  означает множество целых чисел в диапазоне от 1 до  $m$ . Минном критерии конкретизируется следующим образом:

$$F(X) = \max_{X \in D_x} \min Z_j(x), \quad j \in [1:m]$$

где допустимая область  $D_x$  определяется только прямыми ограничениями на управляемые параметры  $x_i$ :

$$x_{i \min} < x_i < x_{i \max}$$

Задачи оптимизации с учетом допусков. Содержательную сторону оптимизации с учетом допусков поясняет Рисунок 2.2, на котором представлены области работоспособности и допусковая в двумерном пространстве управляемых параметров. Если собственно допуски заданы и не относятся к управляемым параметрам, то цель оптимизации – максимально совместить эти области так, чтобы вероятность выхода за пределы области работоспособности была минимальной.



Рисунок 2.2. Области допусковая и работоспособности

Решение этой задачи исключительно трудоемко, так как на каждом шаге оптимизации нужно выполнять оценку упомянутой вероятности методами статистического анализа, а для сложных моделей объектов таким методом является метод статистических испытаний.

Поэтому на практике подобные задачи решают, принимая те или иные допущения.

Например, если допустить, что цель оптимизации достигается при совмещении центров областей работоспособности  $\mathcal{E}$  и допусковой  $X_{ном}$ , то оптимизация сводится к задаче *центрирования*, т.е. к определению центра  $\mathcal{E}$ . Задачу центрирования обычно решают путем предварительного нормирования управляемых параметров  $x_i$  с последующим вписыванием гиперкуба с максимально возможными размерами в нормированную область работоспособности.

Примечание. Нормирование проводят таким образом, что допусковая область приобретает форму гиперкуба, получающегося после нормирования. Очевидно, что решение задачи центрирования позволяет не только оптимизировать номинальные значения проектных параметров, но и их допуски, если последние относятся к управляемым параметрам.

## 2.2 Методы оптимизации

Классификация методов математического программирования.

В САПР основными методами оптимизации являются поисковые методы. Поисковые методы основаны на пошаговом изменении управляемых параметров

$$X_{k+1} = X_k + \Delta X_k \quad (2.5)$$

где в большинстве методов приращение  $\Delta X_k$  вектора управляемых параметров вычисляется по формуле

$$\Delta X_k = hg(X_k) \quad (2.6)$$

Здесь  $X_k$  – значение вектора управляемых параметров на  $k$ -м шаге,  $h$  – шаг, а  $g(X_k)$  – направление поиска. Следовательно, если выполняются условия сходимости, то реализуется пошаговое (итерационное) приближение к экстремуму.

Методы оптимизации классифицируют по ряду признаков.

В зависимости от числа управляемых параметров различают методы *одномерной* и *многомерной* оптимизации, в первых из них управляемый параметр единственный, во вторых размер вектора  $X$  не менее двух. Реальные задачи в САПР многомерны, методы одномерной оптимизации играют вспомогательную роль на отдельных этапах многомерного поиска.

Различают методы *условной* и *безусловной* оптимизации по наличию или отсутствию ограничений. Для реальных задач характерно

наличие ограничений, однако методы безусловной оптимизации также представляют интерес, поскольку задачи условной оптимизации с помощью специальных методов могут быть сведены к задачам без ограничений.

В зависимости от числа экстремумов различают задачи одно- и многоэкстремальные. Если метод ориентирован на определение какого-либо локального экстремума, то такой метод относится к *локальным методам*. Если же результатом является глобальный экстремум, то метод называют *методом глобального поиска*. Удовлетворительные по вычислительной эффективности методы глобального поиска для общего случая отсутствуют и потому на практике в САПР используют методы поиска локальных экстремумов.

Наконец, в зависимости от того, используются при поиске производные целевой функции по управляемым параметрам или нет, различают методы нескольких порядков. Если производные не используются, то имеет место метод *нулевого порядка*, если используются первые или вторые производные, то соответственно метод *первого* или *второго порядка*. Методы первого порядка называют также градиентными, поскольку вектор первых производных  $F(X)$  по  $X$  есть градиент целевой функции

$$\text{grad}(F(X)) = (\partial F / \partial x_1, \partial F / \partial x_2 \dots \partial F / \partial x_n).$$

Конкретные методы определяются следующими факторами: способом вычисления направления поиска  $g(X_k)$  в формуле (2.6); способом выбора шага  $h$ ; способом определения окончания поиска.

Определяющим фактором является первый из перечисленных в этом списке, он подробно описан ниже. Шаг может быть или постоянным, или выбираться исходя из одномерной оптимизации – поиска минимума целевой функции в выбранном направлении  $g(X_k)$ . В последнем случае шаг будем называть оптимальным.

Окончание поиска обычно осуществляют по правилу: если на протяжении  $r$  подряд идущих шагов траектория поиска остается в малой  $\varepsilon$ -окрестности текущей точки поиска  $X_k$  то поиск следует прекратить, следовательно, условие окончания поиска имеет вид

$$|X_k - X_{k-1}| < \varepsilon$$

Методы одномерной оптимизации. К методам одномерной оптимизации относятся методы дихотомического деления, золотого сечения, чисел Фибоначчи, полиномиальной аппроксимации и ряд их модификаций.

Пусть задан отрезок на котором имеется один минимум (в общем случае нечетное число минимумов). Согласно *методу дихотомического деления* (Рисунок 2.3,а) отрезок делят пополам и в точках, отстоящих от центра  $C$  отрезка на величину допустимой погрешности  $q$ , рассчитывают значения целевой функции  $F(C+q)$  и  $F(C-q)$ . Если окажется, что  $F(C+q) > F(C-q)$ , то минимум находится на отрезке  $[A,C]$ , если  $F(C+q) < F(C-q)$ , то минимум – на  $[C,B]$ , если  $F(C+q) = F(C-q)$  – на  $[C-q,C+q]$ . Таким образом, на следующем шаге вместо отрезка  $[A,B]$  нужно исследовать суженный отрезок  $[A,C]$ ,  $[C,B]$  или  $[C-q,C+q]$ . Шаги повторяются, пока длина отрезка не уменьшится до величины погрешности  $q$ . Таким образом, требуется не более  $N$  шагов, где  $N$  – ближайшее к  $\log((B-A)/q)$  целое значение, но на каждом шаге целевую функцию следует вычислять дважды.

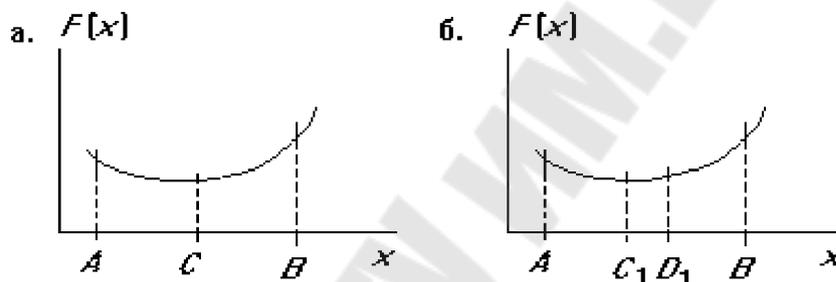


Рисунок 2.3. Одномерная минимизация: а - дихотомическое деление; б - золотое сечение

По *методу золотого сечения* (Рисунок 2.3,б) внутри отрезка  $[A,B]$  выделяют две промежуточные точки  $C_1$  и  $D_1$  на расстоянии  $s = aL$  от его конечных точек, где  $L = B-A$  – длина отрезка. Затем вычисляют значения целевой функции  $F(x)$  в точках  $C_1$  и  $D_1$ . Если  $F(C_1) < F(D_1)$ , то минимум находится на отрезке  $[A,D_1]$ , если  $F(C_1) > F(D_1)$ , то – на отрезке  $[C_1,B]$ , если  $F(C_1) = F(D_1)$  – на отрезке  $[C_1, D_1]$ . Следовательно, вместо отрезка  $[A,B]$  теперь можно рассматривать отрезок  $[A,D_1]$ ,  $[C_1,B]$  или  $[C_1, D_1]$ , т. е. длина отрезка уменьшилась не менее чем в  $L/(L-aL) = 1/(1-a)$  раз. Если подобрать значение  $a$  так, что в полученном отрезке меньшей длины одна из промежуточных точек совпадет с промежуточной точкой от предыдущего шага, т.е. в случае выбора отрезка  $[A,D_1]$  точка  $D_2$  совпадет с точкой  $C_1$ , а в случае выбора отрезка  $[C_1,B]$  точка  $C_2$  – с точкой  $D_1$ , то это позволит сократить число вычислений целевой функции на всех шагах (кроме первого) в 2 раза. Условие получения такого значения  $a$  формулируется сле-

дующим образом:  $(1-2a)L_k = aL_{k-1}$  откуда с учетом того, что  $L_k/L_{k-1} = 1/(1-a)$ , имеем  $a = 0,382$ . Это значение и называют *золотым сечением*.

Таким образом, требуется не более  $N$  шагов и  $N+1$  вычисление целевой функции, где  $N$  можно рассчитать, используя соотношение  $(B-A)/E = (1-a)N$  при заданной погрешности  $E$  определения экстремума.

Согласно *методу чисел Фибоначчи*, используют числа Фибоначчи  $R_i$ , последовательность которых образуется по правилу  $R_{i+2} = R_{i+1} + R_i$  при  $R_0 = R_1 = 1$ , т.е. ряд чисел Фибоначчи имеет вид  $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots$ . Метод аналогичен методу золотого сечения с тем отличием, что коэффициент  $a$  равен отношению  $R_{i-2} / R_i$ , начальное значение  $i$  определяется из условия, что  $R_i$  должно быть наименьшим числом Фибоначчи, превышающим величину  $(B-A)/E$ , где  $E$  – заданная допустимая погрешность определения экстремума. Так, если  $(B-A)/E = 100$ , то начальное значение  $i = 12$ , поскольку  $R_{12} = 144$ , и  $a = 55/144 = 0,3819$ , на следующем шаге будет  $a = 34/89 = 0,3820$  и т.д.

По *методу полиномиальной аппроксимации* при аппроксимации  $F(x)$  квадратичным полиномом

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \quad (2.7)$$

выбирают промежуточную точку  $C$  и в точках  $A, B, C$  вычисляют значения целевой функции. Далее решают систему из трех алгебраических уравнений, полученных подстановкой в (2.7) значений  $A, B, C$  вместо  $x$  и вычисленных значений функции вместо  $P(x)$ . В результате становятся известными значения коэффициентов  $a_k$  в (2.7) и, исходя из условия  $dP(x)/dx = 0$ , определяют экстремальную точку  $\mathcal{E}$  полинома. Например, если точка  $C$  выбрана в середине отрезка  $[A, B]$ , то

$$\mathcal{E} = C + (C - A)(F(A) - F(B)) / (2(F(A) - 2F(C) + F(B))).$$

Методы безусловной оптимизации. Среди методов нулевого порядка в САПР находят применение методы Розенброка, конфигураций (Хука-Дживса), деформируемого многогранника (Нелдера-Мида), случайного поиска. К методам с использованием производных относятся методы наискорейшего спуска, сопряженных градиентов, переменной метрики.

*Метод Розенброка* является улучшенным вариантом покоординатного спуска. Метод покоординатного спуска характеризуется выбором направлений поиска поочередно вдоль всех  $n$  координатных осей, шаг рассчитывается на основе одномерной оптимизации, критерий окончания поиска  $|X_k - X_{kn}| < e$ , где  $e$  – заданная точность опреде-

ления локального экстремума,  $n$  – размерность пространства управляемых параметров. Траектория покоординатного спуска для примера двумерного пространства управляемых параметров показана на Рисунок 4.4, где  $X_k$  – точки на траектории поиска,  $x_i$  – управляемые параметры. Целевая функция представлена своими линиями равного уровня, около каждой линии записано соответствующее ей значение. Очевидно, что  $\mathcal{E}$  есть точка минимума.

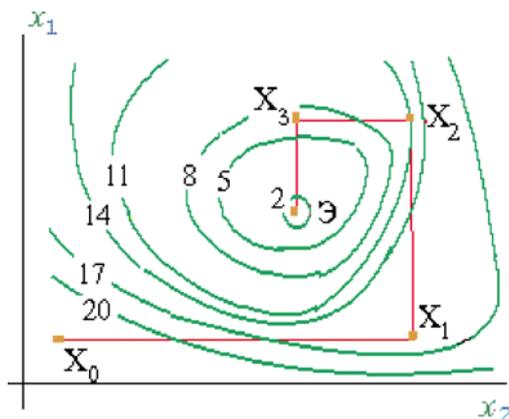


Рисунок 2.4 Траектория покоординатного спуска

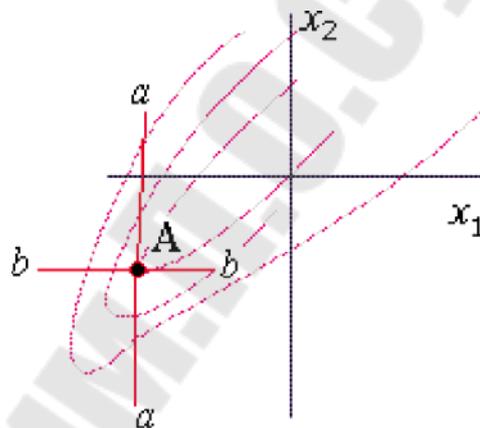


Рисунок 2.5 "Застревание" покоординатного спуска на дне оврага

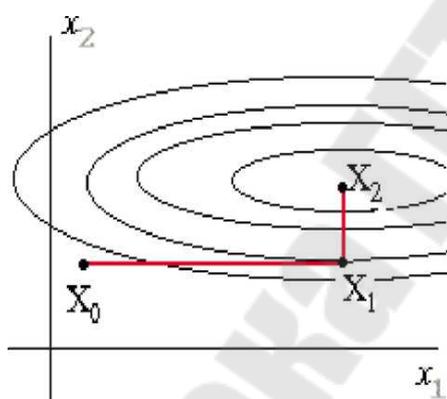


Рисунок 2.6. Траектория покоординатного спуска при благоприятной ориентации координатных осей

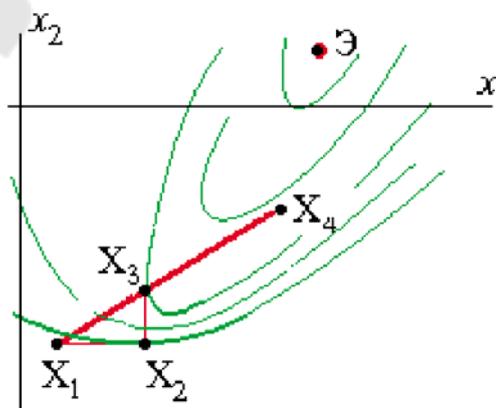


Рисунок 2.7. Иллюстрация метода конфигураций

При использовании метода покоординатного спуска велика вероятность "застревания" поиска на дне оврага вдали от точки экстремума. На Рисунок 2.5 видно, что после попадания в точку  $A$ , расположенную на дне оврага, дальнейшие шаги возможны лишь в направлениях  $aa$  или  $bb$ , но они приводят к ухудшению целевой функции. Следовательно, поиск прекращается в точке  $A$ .

Примечание. *Оврагом* называют часть пространства управляемых параметров, в которой наблюдаются слабые изменения производных целевой функции по одним направлениям и значительные изменения с переменной знака - по некоторым другим направлениям. Знак производной меняется в точках, принадлежащих дну оврага.

В то же время при благоприятной ориентации дна оврага, а именно при положении одной из координатных осей, близком к параллельности с дном оврага, поиск оказывается весьма быстрым. Эта ситуация показана на Рисунок 2.6.

Метод Розенброка заключается в таком повороте координатных осей, чтобы одна из них оказалась квазипараллельной дну оврага. Такой поворот осуществляют на основе данных, полученных после серии из  $n$  шагов покоординатного спуска. Положение новых осей  $s_i$  может быть получено линейным преобразованием прежних осей  $x_i$ : ось  $s_1$  совпадает по направлению с вектором  $X_{k+n} - X_k$ ; остальные оси выбирают из условия ортогональности к  $X_1$  и друг к другу.

Другой удачной модификацией покоординатного спуска является *метод конфигураций*. В соответствии с этим методом вначале выполняют обычную серию из  $n$  шагов покоординатного спуска, затем делают дополнительный шаг в направлении вектора  $X_k - X_{k-n}$ , как показано на Рисунок 2.7, где дополнительный шаг выполняют в направлении вектора  $X_3 - X_1$ , что и приводит в точку  $X_4$ .

Поиск экстремума *методом деформируемого многогранника* основан на построении многогранника с  $(n + 1)$  вершинами на каждом шаге поиска, где  $n$  – размерность пространства управляемых параметров. В начале поиска эти вершины выбирают произвольно, на последующих шагах выбор подчинен правилам метода.

Эти правила поясняются Рисунок 2.8 на примере двумерной задачи оптимизации. Выбраны вершины исходного треугольника:  $X_1, X_2, X_3$ . Новая вершина  $X_4$  находится на луче, проведенном из худшей вершины  $X_1$  (из вершины с наибольшим значением целевой функции) через центр тяжести  $ЦТ$  многогранника, причем рекомендуется  $X_4$  выбирать на расстоянии  $d$  от  $ЦТ$ , равном  $|ЦТ - X_1|$ . Новая вершина  $X_4$  заменяет худшую вершину  $X_1$ . Если оказывается, что  $X_4$  имеет лучшее значение целевой функции среди вершин многогранника, то расстояние  $d$  увеличивают. На рисунке именно эта ситуация имеет место и увеличение  $d$  дает точку  $X_5$ . В новом многограннике с вершинами  $X_2, X_3, X_5$  худшей является вершина  $X_2$ , аналогично получают вершину  $X_6$ , затем вершину  $X_7$  и т.д. Если новая вершина окажется худшей, то в

многограннике нужно сохранить лучшую вершину, а длины всех ребер уменьшить, например, вдвое (стягивание многогранника к лучшей вершине). Поиск прекращается при выполнении условия уменьшения размеров многогранника до некоторого предела. *Случайные методы* поиска характеризуются тем, что направления поиска  $g$  выбирают случайным образом.

Особенностью *метода наискорейшего спуска* является выполнение шагов поиска в градиентном направлении

$$X_{k+1} = X_k + h \cdot \text{grad}F(X) / |\text{grad}F(X)|,$$

при этом шаг  $h$  выбирается оптимальным с помощью одномерной оптимизации.

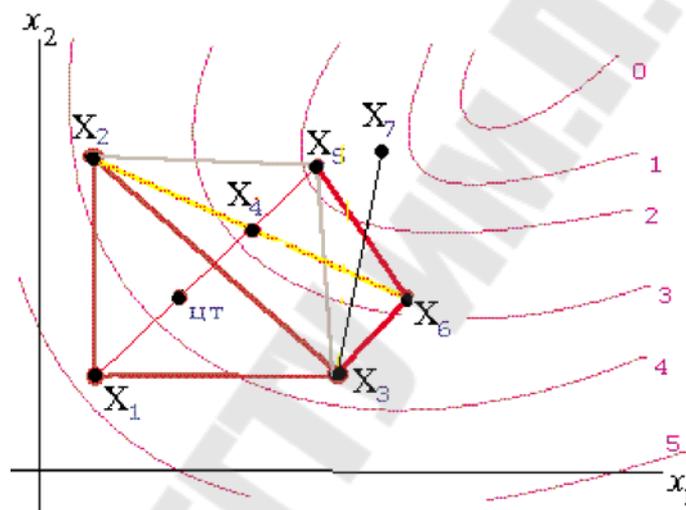


Рисунок 2.8. Иллюстрация метода деформируемого многогранника

При использовании метода наискорейшего спуска, как и большинства других методов, эффективность поиска существенно снижается в овражных ситуациях. Траектория поиска приобретает зигзагообразный вид с медленным продвижением вдоль дна оврага в сторону экстремума. Чтобы повысить эффективность градиентных методов, используют несколько приемов.

Один из приемов, использованный в *методе сопряженных градиентов* (называемом также методом Флетчера-Ривса), основан на понятии сопряженности векторов. Векторы  $A$  и  $B$  называют  $Q$ -сопряженными, если  $A^T Q B = 0$ , где  $Q$  – положительно определенная квадратная матрица того же порядка, что и размер  $N$  векторов  $A$  и  $B$  (частный случай сопряженности – ортогональность векторов, когда  $Q$  является единичной матрицей порядка  $N$ ),  $A^T$  – вектор-строка,  $B$  – вектор-столбец.

Особенность сопряженных направлений для  $Q = \Gamma$ , где  $\Gamma$  – матрица Гессе, при в задачах с квадратичной целевой функцией  $F(X)$  заключается в следующем: одномерная минимизация  $F(X)$  последовательно по  $N$  сопряженным направлениям позволяет найти экстремальную точку не более, чем за  $N$  шагов.

Примечание. Матрицей Гессе называют матрицу вторых частных производных целевой функции по управляемым параметрам.

Основанием для использования поиска по  $\Gamma$ -сопряженным направлениям является то, что для функций  $F(X)$  общего вида может быть применена квадратичная аппроксимация, что на практике выливается в выполнение поиска более, чем за  $N$  шагов.

Пример. Поиск экстремума выполняют в соответствии с формулой

$$X_i = X_{i-1} + hS_i. \quad (2.8)$$

Направление  $S_{i+1}$  поиска на очередном шаге связано с направлением поиска  $S_i$  на предыдущем шаге соотношением

$$S_{i+1} = -gradF(X_i) + w_i S_i, \quad (2.9)$$

где  $w_i$  – коэффициент. Кроме того, учитывают условие сопряженности

$$S_{i+1}^T \Gamma S_i = 0 \quad (2.10)$$

и линейную аппроксимацию  $gradF(X)$  в окрестностях точки  $X_i$

$$gradF(X_{i+1}) = gradF(X_i) + \Gamma(X_{i+1} - X_i). \quad (2.11)$$

Поскольку шаг  $h$  рассчитывается исходя из условия одномерной оптимизации, то, во-первых, справедливо соотношение

$$S_i^T gradF(X_i) = 0, \quad (2.12)$$

во-вторых, имеем

$$X_i = X_{i-1} + hw_{i-1} S_{i-1} - h gradF(X_{i-1}), \text{ откуда получаем} \\ \partial F / \partial h = (\partial F(X) / \partial X)(\partial X / \partial h) = gradF(X_i) gradF(X_{i-1}) = 0 \quad (2.13)$$

Алгоритм поиска сводится к применению формулы (4.9), пока не будет выполнено условие окончания вычислений

$$|gradF(X_k)| < \varepsilon.$$

Чтобы определить коэффициент  $w_i$ , решают систему уравнений (4.8)-(4.13) путем подстановки в (4.10) величин  $S_{i+1}$  из (4.9) и  $S_i$  из (4.8)

$$S_{i+1}^T \Gamma S_i = (w_i S_i - gradF(X_i))^T \Gamma (X_i - X_{i-1}) / h = \\ = (w_i S_i - gradF(X_i))^T \Gamma \Gamma^{-1} (gradF(X_i) - gradF(X_{i-1})) / h = 0;$$

или

$$(w_i S_i - gradF(X_i))^T (gradF(X_i) - gradF(X_{i-1})) = 0;$$

откуда

$$w_i S_i^T - (\text{grad}F(X_i) - (\text{grad}F(X_{i-1}))) - \text{grad}F(X_i)^T \text{grad}F(X_i) + \text{grad}F(X_i)^T + \text{grad}F(X_{i-1}) = 0;$$

и с учетом (2.12) и (2.13)

$$w_i S_i^T \text{grad}F(X_{i-1}) + \text{grad}F(X_i)^T \text{grad}F(X_i) = 0.$$

Следовательно,

$$w_i = \text{grad}F(X_i)^T \text{grad}F(X_i) / S_i^T \text{grad}F(X_{i-1}) \quad (2.14)$$

На первом шаге поиска выбирают  $S_1 = -\text{grad} F(X_0)$  и находят точку  $X_1$ . На втором шаге по формуле (2.14) рассчитывают  $w_1$ , по формулам (2.9) и (2.8) определяют  $S_2$  и  $X_2$  и т.д.

*Метод переменной метрики* (иначе метод Девидона-Флетчера-Пауэлла) можно рассматривать как результат усовершенствования метода второго порядка – метода Ньютона. *Метод Ньютона* основан на использовании необходимых условий безусловного экстремума целевой функции  $F(X)$

$$\text{grad}F(X) = 0. \quad (2.15)$$

Выражение (2.15) представляет собой систему алгебраических уравнений, для решения которой можно применить известный численный метод, называемый методом Ньютона. Корень системы (2.15) есть стационарная точка, т.е. возможное решение экстремальной задачи. Метод Ньютона является итерационным, он основан на линеаризации (2.15) в окрестности текущей точки поиска  $X_k$

$$\text{grad}F(X) = \text{grad}F(X_k) + \Gamma(X - X_k) = 0. \quad (2.16)$$

Выражение (2.16) – это система линейных алгебраических уравнений. Ее корень есть очередное приближение  $X_{k+1}$  к решению

$$X_{k+1} = X_k - \Gamma^{-1}(X_k) \text{grad}F(X_k).$$

Если процесс сходится, то решение достигается за малое число итераций, окончанием которых служит выполнение условия

$$|X_{k+1} - X_k| < \varepsilon.$$

Главный недостаток метода – высокая трудоемкость вычисления и обращения матрицы  $\Gamma$ , к тому же ее вычисление численным дифференцированием сопровождается заметными погрешностями, что снижает скорость сходимости. В методе переменной метрики вместо трудно вычисляемой обратной матрицы Гессе используют некоторую более легко вычисляемую матрицу  $N$ , т.е.

$$X_{k+1} = X_k N \text{grad}F(X_k).$$

Введем обозначения:

$$dg_k = gradF(X_k) - gradF(X_{k-1}); \quad dX_k = X_k - X_{k-1};$$

$E$  – единичная матрица. Начальное значение матрицы  $N_0 = E$ .

Матрицу  $N$  корректируют на каждом шаге, т.е.

$$N_{k+1} = N_k + A_k^T B_k,$$

где

$$A_k = dX_k dX_k^T / (dX_k^T dg_k), \quad B_k = N_k dg_k dg_k^T N_k^T / (dg_k^T N_k dg_k).$$

Поэтому

$$N_{k+1} = E + \sum_{i=0}^k A_i - \sum_{i=0}^k B_i$$

Можно показать, что  $A_i$  стремится к  $\Gamma^{-1}$ ,  $B_i$  - к  $E$  при  $k \rightarrow n$ , где  $n$  метров. Спустя  $n$  шагов, нужно снова начинать с  $N_{n+1} = E$ .

Необходимые условия экстремума. В задачах безусловной оптимизации необходимые условия представляют собой равенство нулю градиента целевой функции

$$gradF(X) = 0.$$

В общей задаче математического программирования (2.1) необходимые условия экстремума, называемые условиями Куна-Таккера, формулируются следующим образом:

Для того чтобы точка  $\mathcal{E}$  была экстремальной точкой выпуклой задачи математического программирования (ЗМП), необходимо наличие неотрицательных коэффициентов  $u_i$ , таких, что

$$u_i \phi_i(\mathcal{E}) = 0, i = 1, 2, \dots, m; \quad (2.17)$$

при этом соблюдались ограничения задачи и выполнялось условие

$$gradF(Q) + \sum_{i=1}^m u_i grad\phi_i(\mathcal{E}) + \sum_{j=1}^L a_j \psi_j(\mathcal{E}) = 0, \quad (2.18)$$

где  $m$  – число ограничений типа неравенств,  $L$  – то же равенств, коэффициенты  $a_j > 0$ .

За приведенной абстрактной формулировкой условий скрывается достаточно просто понимаемый геометрический смысл. Действительно, рассмотрим сначала случай с ограничениями только типа неравенств. Если максимум находится внутри допустимой области  $R$ , то, выбирая все  $u_i = 0$ , добиваемся выполнения (2.17); если же точка максимума  $\mathcal{E}$  лежит на границе области  $R$ , то, как видно из левой части Рисунок 2.9, эту точку всегда соответствующим подбором неотрицательных  $u_i$  можно поместить внутрь оболочки, натянутой на градиенты целевой функции  $F(X)$  и функций ограничений  $\phi_i(X)$ .

Наоборот, если точка не является экстремальной, то (2.17) нельзя выполнить при любом выборе положительных коэффициентов  $u_i$  (см. правую часть Рисунок 2.9, где рассматриваемая точка  $X$  лежит вне выпуклой оболочки, натянутой на градиенты). Учет ограничений типа равенств очевиден, если добавляется последняя из указанных в (2.18) сумма.

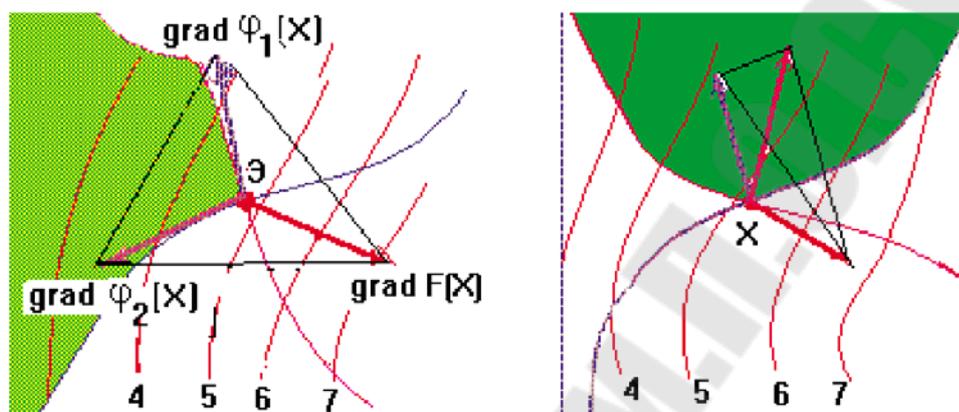


Рисунок 2.9. К пояснению условий Куна-Таккера

Методы поиска условных экстремумов. Широко известен метод множителей Лагранжа, ориентированный на поиск экстремума при наличии ограничений типа равенств  $\psi(X) = 0$ , т.е. на решение задачи

$$\text{extr}F(X), \quad X \in R \quad (2.19)$$

где  $R = \{X | \psi(X) = 0\}$ .

Суть метода заключается в преобразовании задачи условной оптимизации (2.19) в задачу безусловной оптимизации с помощью образования новой целевой функции

$$\Phi(X, \Lambda) = F(X) + \sum_{i=1}^L \lambda_i \psi_i(X),$$

где  $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_L)$  – вектор множителей Лагранжа,  $L$  – число ограничений.

Необходимые условия экстремума функции  $\Phi(X)$ :

$$\partial\Phi(X, \Lambda) / \partial X = \partial F(X) / \partial X + \sum_{i=1}^L \lambda_i \partial\psi_i(X) / \partial X = 0; \quad (2.20)$$

$$\partial\Phi(X, \Lambda) / \partial \Lambda = \psi(X) = 0.$$

Система (2.20) содержит  $n+L$  алгебраических уравнений, где  $n$  – размерность пространства управляемых параметров, ее решение дает искомые координаты экстремальной точки и значения множителей Лагранжа. Однако при численном решении (2.20), что имеет место при использовании алгоритмических моделей, возникают те же труд-

ности, что и в методе Ньютона. Поэтому в САПР основными методами решения ЗМП являются методы штрафных функций и проекции градиента.

Основная идея *методов штрафных функций* – преобразование задачи условной оптимизации в задачу безусловной оптимизации путем формирования новой целевой функции  $\Phi(X)$  введением в исходную целевую функцию  $F(X)$  специальным образом выбранной функции штрафа  $S(X)$ :

$$\Phi(X) = F(X) + rS(X),$$

где  $r$  – множитель, значения которого можно изменять в процессе оптимизации.

Среди методов штрафных функций различают методы внутренней и внешней точки. Согласно методам внутренней точки (или методов *барьерных функций*) исходную для поиска точку можно выбирать только внутри допустимой области, а для методов внешней точки как внутри, так и вне допустимой области (важно лишь, чтобы в ней функции целевая и ограничений были бы определены). Ситуация появления барьера у целевой функции  $\Phi(x)$  и соотношение между условным в точке  $x_2$  и безусловным в точке  $x_1$  минимумами  $F(x)$  в простейшем одномерном случае иллюстрируется Рисунком 2.10.

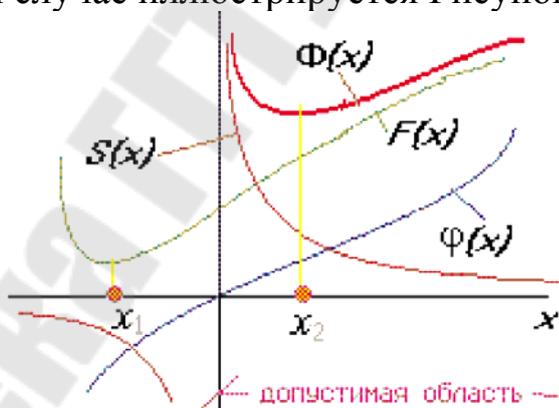


Рисунок 2.10. Пояснение метода штрафных функций

Примеры штрафных функций:

1) для метода внутренней точки при ограничениях  $\phi_i(X) > 0$

$$S(X) = \sum_{i=1}^m (1/\Phi_i(X)),$$

где  $m$  – число ограничений типа неравенств;

2) для метода внешней точки при таких же ограничениях

$$S(X) = \sum_{i=1}^m \{\min\{0, \Phi_i(X)\}\}^2$$

-здесь штраф сводится к включению в  $\Phi(X)$  суммы квадратов активных (т. е. нарушенных) ограничений;

3) в случае ограничений типа равенств  $\psi_i(X) = 0$

$$S(X) = \sum_{i=1}^L (\psi_i(X))^2.$$

Чем больше коэффициент  $r$ , тем точнее решение задачи, однако при больших  $r$  может ухудшаться ее обусловленность. Поэтому в начале поиска обычно выбирают умеренные значения  $r$ , увеличивая их в окрестностях экстремума.

Основной вариант *метода проекции градиента* ориентирован на задачи математического программирования с ограничениями типа равенств.

Поиск при выполнении ограничений осуществляется в подпространстве  $(n-m)$  измерений, где  $n$  – число управляемых параметров,  $m$  – число ограничений, при этом движение осуществляется в направлении проекции градиента целевой функции  $F(X)$  на гиперплоскость, касательную к гиперповерхности ограничений (точнее к гиперповерхности пересечения гиперповерхностей ограничений).

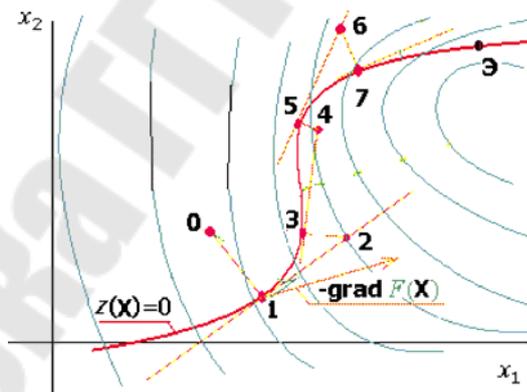


Рисунок 2.11. Траектория поиска в соответствии с методом проекции градиента: Э - условный экстремум; 0, 1, 2, 3 - точки на траектории поиска

Поиск минимума начинают со спуска из исходной точки на гиперповерхность ограничений. Далее выполняют шаг в указанном выше направлении (шаг вдоль гиперповерхности ограничений). Поскольку этот шаг может привести к заметному нарушению ограничений, вновь повторяют спуск на гиперповерхность ограничений и т.д. Другими словами, поиск заключается в выполнении пар шагов, каж-

дая пара включает спуск на гиперповерхность ограничений и движение вдоль гиперповерхности ограничений.

Идею метода легко пояснить для случая поиска в двумерном пространстве при одном ограничении  $\psi(X) = 0$ . На Рисунок 2.11 это ограничение представлено жирной линией, а целевая функция – совокупностью более тонких линий равного уровня. Спуск обычно осуществляют по нормали к гиперповерхности ограничений (в данном случае к линии ограничения). Условие окончания поиска основано на сопоставлении значений целевой функции в двух последовательных точках, получаемых после спуска на гиперповерхность ограничений.

Рассмотрим вопрос, касающийся получения аналитических выражений для направлений спуска и движения вдоль гиперповерхности ограничений.

*Спуск.* Необходимо из текущей точки поиска  $B$  попасть в точку  $A$ , являющуюся ближайшей к  $B$  точкой на гиперповерхности ограничений, т.е. решить задачу

$$\min |B - A|$$

при условии  $\psi(X)=0$ , которое после линеаризации в окрестностях точки  $B$  имеет вид

$$\psi(B) + (\text{grad}\psi(B))^T (A - B) = 0.$$

Используя метод множителей Лагранжа, обозначая  $A-B=U$  и учитывая, что минимизация расстояния равнозначна минимизации скалярного произведения  $U$  на  $U$ , запишем

$$\begin{aligned} \Phi(A) &= U^T U + \lambda(\psi(B) + (\text{grad}\psi(B))^T U); \\ \partial\Phi / \partial A &= 2U + \lambda(\text{grad}\psi(B)) = 0; \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\partial\Phi / \partial X = \psi(B) + (\text{grad}\psi(B))^T U = 0. \quad (2.22)$$

Тогда из (2.21) получаем выражение

$$U = -0,5\lambda(\text{grad}\psi(B)), \text{ подставляя его в (2.22), имеем}$$

$$\psi(B) - 0,5\lambda(\text{grad}(\psi))^T \text{grad}\psi(B) = 0;$$

откуда

$$\lambda = (0,5(\text{grad}\psi(B))^T \text{grad}\psi(B))^{-1} \psi(B).$$

и окончательно, подставляя  $X$  в (2.21), находим

$$\lambda = -\text{grad}\psi(B)(\text{grad}\psi(B))^T \text{grad}\psi(B)^{-1} \psi(B).$$

*Движение вдоль гиперповерхности ограничений.* Шаг в гиперплоскости  $D$ , касательной к гиперповерхности ограничений, следует сделать в направлении вектора  $S$ , на котором целевая функция уменьшается в наибольшей мере при заданном шаге  $h$ . Уменьшение

целевой функции при переходе из точки  $A$  в новую точку  $C$  подсчитывают, используя формулу линеаризации  $F(X)$  в окрестностях точки  $A$ :

$$F(C) - F(A) = h(\text{grad}F(A))^T S,$$

где  $\text{grad}F(A)^T S$  – приращение  $F(X)$ , которое нужно минимизировать, варьируя направления  $S$

$$\min F(C) = \min((\text{grad}F(A))^T S), \quad (2.23)$$

где вариация  $S$  осуществляется в пределах гиперплоскости  $D$ ;  $\text{grad}\psi(A)$  и  $S$  – ортогональные векторы. Следовательно, минимизацию (2.23) необходимо выполнять при ограничениях

$$(\text{grad}F(A))^T S = 0, \quad S^T S = 1.$$

Последнее ограничение говорит о том, что при поиске направления движения, вектор  $S$  должен лишь указывать это направление, т.е. его длина несущественна (пусть  $S$  – единичный вектор). Для решения (2.23) используем метод множителей Лагранжа

$$\Phi(S, \lambda, q) = (\text{grad}F(A))^T S + X(\text{grad}\psi(A))^T S + q(S^T S - 1),$$

где  $\lambda$  и  $q$  – множители Лагранжа;

$$\partial\Phi / \partial S = \text{grad}F(A) + X\text{grad}\psi(A) + qS = 0; \quad (2.24)$$

$$\Phi / X = (\text{grad}\psi(A))^T S = 0; \quad (2.25)$$

$$\Phi / q = S^T S = 0. \quad (2.26)$$

Из (2.24) следует, что

$S = -(\text{grad}F(A) + X\text{grad}\psi(A)) / q$ ; подставляя  $S$  в (2.25), получаем

$$(\text{grad}\psi(A))^T \text{grad}F(A) + X(\text{grad}\psi(A))^T \text{grad}\psi(A) = 0,$$

откуда

$$\begin{aligned} \lambda &= -[(\text{grad}\psi(A))^T \text{grad}\psi(A)]^{-1} (\text{grad}\psi(A))^T \text{grad}F(A), S = \\ &= -\{\text{grad}F(A) - \text{grad}\psi(A)[(\text{grad}\psi(A))^T \text{grad}\psi(A)]^{-1} (\text{grad}\psi(A))^T \text{grad}F(A)\} / q = (2.27) \\ &= -\{E - \text{grad}\psi(A)[(\text{grad}\psi(A))^T \text{grad}\psi(A)]^{-1} (\text{grad}\psi(A))^T\} \text{grad}F(A) / q. \end{aligned}$$

Таким образом, матрица

$$P = E - \text{grad}\psi(A)[(\text{grad}\psi(A))^T \text{grad}\psi(A)]^{-1} (\text{grad}\psi(A))^T$$

представляет собой проектирующую матрицу, а вектор  $S$ , рассчитанный по (4.27), – проекцию градиента  $\text{grad}F(A)$  на гиперповерхность ограничений.

Частным случаем применения метода проекции градиента являются задачи оптимизации с максиминным критерием. Действительно, для поиска экстремума функции минимума

$$\max_x \min_j Z(X),$$

где  $Z_j$  – нормированная величина  $j$ -го выходного параметра  $y$ , удобно применять метод проекции градиента. В качестве ограничений задачи в исходной постановке фигурируют только прямые ограничения

$$x_{\max i} > x_i > x_{\min i}$$

Здесь  $x_{\max i}$  и  $x_{\min i}$  – граничные значения допустимого диапазона варьирования параметра  $x_i$ . В процессе поиска, если минимальной является функция  $Z_q(X)$  и траектория поиска пересекает гребень

$$Z_q(X) - Z_k(X) = 0, \quad (2.28)$$

то поиск продолжается в направлении проекции градиента функции  $Z_q(X)$  на гиперповерхность гребня (2.28).

### 2.3 Принятие решений при автоматизированном проектировании типовых зубчатых редукторов

Наиболее распространенными приводами в машиностроении являются редукторы с цилиндрическими и коническими зубчатыми передачами. Одним из направлений увеличения их нагрузочных способностей и получения наилучших показателей является многокритериальная оптимизация параметров передач, которая не требует улучшения качества материала и других мероприятий, повышающих стоимость привода.

С этой целью в данной статье применен подход, характеризующийся математическим моделированием типового редуктора и сведением исходной задачи проектирования к задаче принятия решения в условиях многокритериальности [1].

#### Оптимизационные математические модели типовых редукторов

Математическая модель (ММ) оптимизируемого редуктора имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} Y &= F(X, P) \rightarrow \text{extr}, \\ f_j(X, P) &\leq (=, \geq) C_j, \quad j = \overline{1, m}, \\ x_{i \min} &\leq x_i \leq x_{i \max}, \quad i = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

где  $Y$  – вектор показателей редуктора;  $X$  – вектор оптимизируемых (управляемых) параметров редуктора;  $P$  – вектор постоянных (неуправляемых) параметров привода;  $F$  – оператор математических и логических действий, устанавливающих соответствие между множествами  $Y$ ,  $X$  и  $P$ ;  $f$  – совокупность аналитических и (или) алгоритми-

ческих зависимостей, определяющих допустимое множество проектных решений;  $C$  – константы, характеризующие прочностные, технологические, конструктивные и другие условия функционирования механического привода.  $m$  – количество функциональных ограничений;  $n$  – количество оптимизируемых параметров.

### Оптимизируемые параметры

Для одноступенчатого цилиндрического и конического редукторов оптимизируемыми параметрами будут:

- модуль зацепления –  $m$ ;
- число зубьев шестерни -  $z_1$ ;
- отношение рабочей ширины зубчатого венца шестерни  $b_w$

к диаметру шестерни  $d_w$  -  $\psi_{bd}$ .

Для двухступенчатых редукторов оптимизируемыми параметрами будут:

- модуль зацепления 1-ой ступени -  $m_1$ ;
- модуль зацепления 2-ой ступени -  $m_2$ ;
- число зубьев шестерни 1-ой ступени -  $z_{11}$ ;
- число зубьев шестерни 2-ой ступени -  $z_{21}$ ;
- передаточное число 2-ой ступени -  $U_2$ ;
- отношение рабочей ширины зубчатого венца шестерни  $b_{w1}$

к диаметру шестерни  $d_{w1}$  -  $\psi_{bd1}$ ;

- отношение рабочей ширины зубчатого венца шестерни  $b_{w2}$  к диаметру шестерни  $d_{w2}$  -  $\psi_{bd2}$ .

### Постоянные параметры

Для одноступенчатого и двухступенчатого цилиндрического и конического редукторов постоянными параметрами будут:

- частота вращения вала электродвигателя (с учётом коэффициента скольжения), 1/с -  $n_{эл}$ ;
- частота вращения выходного вала, 1/с -  $n_{вых}$ ;
- мощность электродвигателя, кВт -  $P_{эл}$ ;
- срок службы привода, лет -  $L_h$ ;
- коэффициент годового использования, -  $K_{год}$ ;
- коэффициент суточного использования, -  $K_{сут}$ ;
- твёрдости поверхностей и сердцевин колес и шестерен.
- 

Твёрдости материалов можно задавать в HB( $\leq 350$ ) либо в HRC(40..56) [2].

## Технические ограничения

Функциональные ограничения включают проверку проектного варианта по следующим условиям:

- размещения зубчатых колес на валах;
- непересечения зубчатых колес с валами при заданном радиальном зазоре;
- размещения подшипниковых узлов;
- на прочность по контактной и изгибной выносливостям зубчатых колес.

Также при проектировании приводов область поиска ограничивается предельными значениями искомых параметров, учитывающих условия работы передачи, соображения инженерного характера, а также регламентацию нормами и ГОСТами

Параметрические ограничения описаны следующими условиями :

- число зубьев конического колеса  $17 < z_{1к} < 40$ ;
- число зубьев цилиндрического колеса  $19 < z_{1к} < 40$ ;
- передаточное отношение цилиндрической передачи  $1,5 < U_2 < 8$ ;

величина  $\psi_{bd}$  влияет на распределение нагрузки по ширине венца, и правильный подход к ее выбору является необходимым условием для обеспечения рациональной конструкции. В зависимости от материалов и термообработки зубьев зубчатых колес, схемы передачи, вида нагрузки выбирается максимальное значение величины  $\psi_{bd}$ , при котором прирабатывание зубьев шестерни и колеса и выравнивание нагрузки по ширине венца находится в допустимых пределах 0,6-2,0. Минимальное значение величины  $\psi_{bd}$ , при котором нарушается жесткость зубчатых колес или рациональность конструкции, зависит от специфики производства, конструкции и материала зубчатых колес и принимается равным 0,4.

### Критерии оптимальности

Для одноступенчатых редукторов критериями оптимальности являются:

1. равнопрочность контактных и изгибных напряжений

$$Y = \left| \frac{\sigma_H}{[\sigma]_H} - \max \left\{ \frac{\sigma_{F2}}{[\sigma]_{F2}}, \frac{\sigma_{F1}}{[\sigma]_{F1}} \right\} \right| \rightarrow \min. \quad (2.30)$$

2. объем передачи

- для конической передачи:

$$V = (d_{11} \cdot d_{12} \cdot d_{12}) \rightarrow \min, \quad (2.31)$$

где  $d_{11}$  – диаметр шестерни;  $d_{12}$  – диаметр колеса;

- для цилиндрической передачи:

$$V = (d_{11} + d_{12}) \cdot d_{12} \cdot b \rightarrow \min, \quad (2.32)$$

где  $b$  – ширина венца шестерни.

Для двухступенчатых редукторов критериями оптимальности были выбраны:

1. общий объём привода

- для цилиндрической передачи:

$$V = \left( \frac{d_{11} + d_{22}}{2} + a_{w1} + a_{w2} \right) (b_1 + b_2) \max\{d_{12}; d_{22}\} \rightarrow \min, \quad (2.33)$$

где  $d_{11}$  – диаметр шестерни первой ступени;  $d_{12}$  – диаметр колеса первой ступени;  $d_{22}$  – диаметр колеса второй ступени;  $a_{w1}$ ,  $a_{w2}$  – межосевые расстояния ступеней;

- для коническо-цилиндрической передачи:

$$V = \frac{(d_{21} + d_{22})}{2} d_{11} \max\{d_{12}; d_{22}\} \rightarrow \min; \quad (2.34)$$

2. равнопрочность контактных и изгибных напряжений 1-ой

$$\text{ступени: } R_1 = \left| \frac{\sigma_{H1}}{[\sigma]_{H1}} - \max \left\{ \frac{\sigma_{F21}}{[\sigma]_{F21}}, \frac{\sigma_{F11}}{[\sigma]_{F11}} \right\} \right| \rightarrow \min; \quad (2.35)$$

3. равнопрочность контактных и изгибных напряжений 2-ой ступени:

$$R_2 = \left| \frac{\sigma_{H2}}{[\sigma]_{H2}} - \max \left\{ \frac{\sigma_{F22}}{[\sigma]_{F22}}, \frac{\sigma_{F12}}{[\sigma]_{F12}} \right\} \right| \rightarrow \min; \quad (2.36)$$

4. разность равнопрочностей 1-ой и 2-ой ступеней:

$$R_3 = |R_2 - R_1| \rightarrow \min. \quad (2.37)$$

### Поиск решения

Для поиска компромиссного по нескольким критериям проектного решения используется подсистема многокритериальной оптимизации, созданной в БНТУ диалоговой системы DMS, базирующаяся на методе исследования пространства оптимизируемых параметров [4] с выделением паретовских решений и определением из них окончательного варианта формальными или интерактивными методами [5].

Функциональная схема подсистемы многокритериальной оптимизации DMS приведена на рисунке.

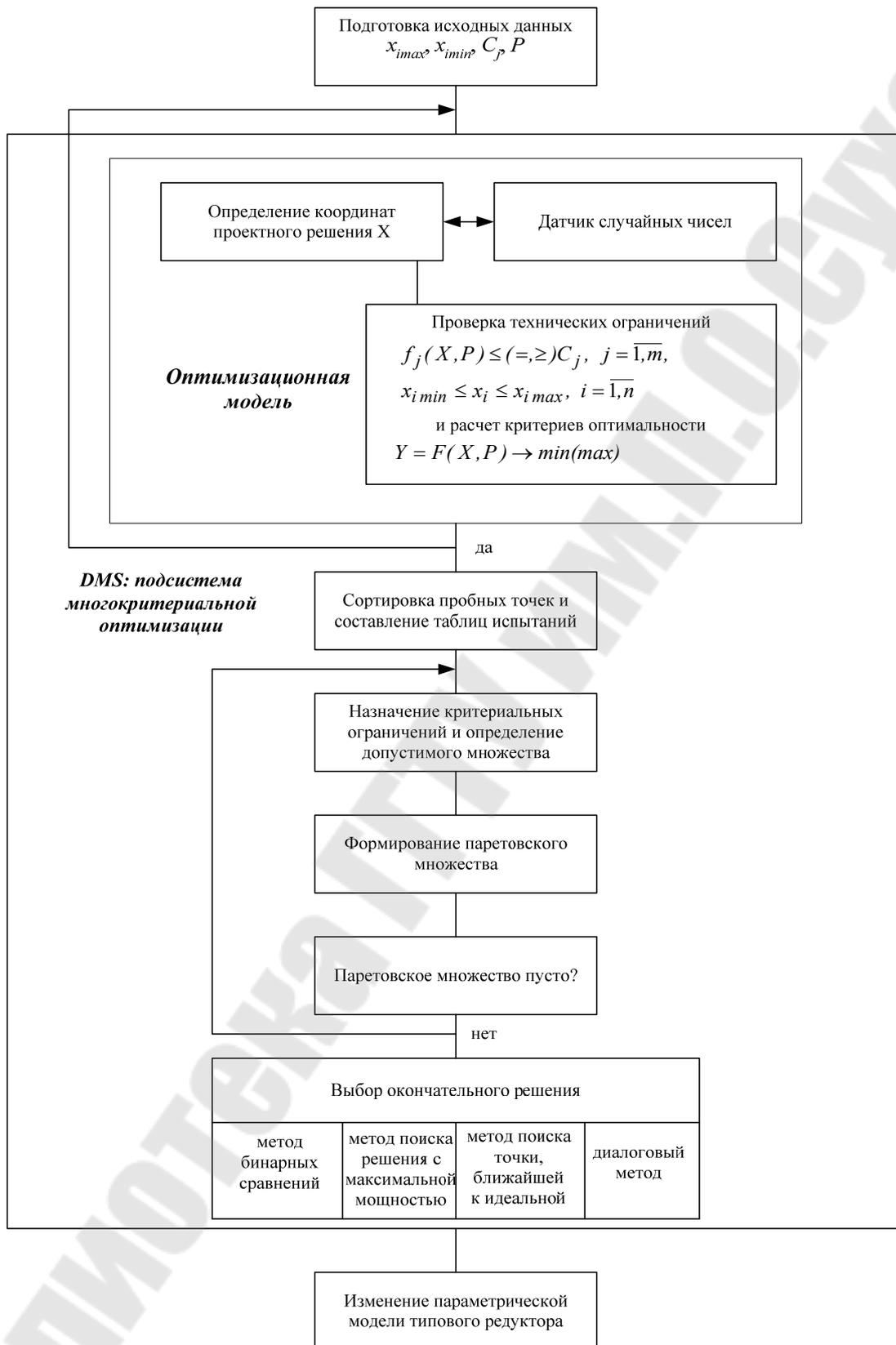


Рисунок 2.12 Функциональная схема оптимизационного проектирования типового редуктора

Задание на проектирование осуществляется в диалоговом режиме путем указания схемы привода и соответствующего ей списка и диапазонов изменения оптимизируемых параметров и набора критериев оптимальности. В результате обработки списка формируется оптимизационная ММ редуктора и файл постоянных параметров, содержащий сведения о передаваемых нагрузках, условиях работы и материалах зубчатых колес.

Файл, содержащий оптимизационную ММ редуктора, передается в подсистему многокритериальной оптимизации, которая для поиска решения выполняет следующие действия:

1. генерирует проектные решения с учетом технических ограничений и составляет таблицы испытаний. На данном этапе применяется метод Монте-Карло с использованием датчика случайных чисел с повышенной равномерностью, основанный на LP<sub>τ</sub>-последовательности ;

2. строит упорядоченные таблицы испытаний по каждому критерию, которые в дальнейшем необходимы для назначения критериальных ограничений;

3. определяет допустимое множество на основании введенных критериальных ограничений, из которого в дальнейшем выделяет множество компромиссов;

4. выбирает окончательное решение задачи из множества компромиссов. Для этого предусмотрены следующие возможности:

- 4.1. формальные методы:

- *метод бинарных отношений*

Паретовские решения сравниваются попарно друг с другом по совокупности критериев (количество решений, где этот критерий лучше, и количество решений, где этот критерий хуже). На основе полученных данных строится таблица сравнений, аналогичная шахматной. После суммирования выигрышных ситуаций лучшим признается решение с максимальной суммой.

- *метод поиска решения с максимальной мощностью*

Под мощностью решения понимают количество сгенерированных точек в допустимом множестве, худших по отношению к точке, рассматриваемой сразу по всем критериям. Таким образом, для нахождения лучшего решения, необходимо просмотреть всё допустимое множество для каждого решения и определить его мощность. Лучшим признается решение с наибольшей мощностью.

- *метод поиска точки, ближайшей к идеальной по евклидовому расстоянию*

Под идеальным решением понимается решение, задаваемое проектировщиком или соответствующее решению с наилучшими значениями по каждому из критериев.

#### 4.2. диалоговый метод

Использование формальных методов желательно лишь тогда, когда проектировщик не может указать важность критериев, т.е. он не может ввести дополнительную информацию, учитывая которую система могла бы принять решение.

При наличии системы предпочтений проектировщик имеет возможность ввести степень важности и (или) функцию полезности по каждому критерию, на основе чего формируется аддитивный критерий оптимальности. Таким образом, задача сводится к однокритериальной, и окончательное решение определяется бионическим алгоритмом, обладающим глобальными свойствами.

Полученные значения диаметра и ширины зубчатых колес импортируются графическим редактором САД системы для вычерчивания общего вида редуктора. На Рисунки 2.13, 2.14 приведены чертежи общего вида редукторов, спроектированных при помощи оптимизационной ММ и подсистемы многокритериальной оптимизации, выполненные в среде КОМПАС-3D V7.0.

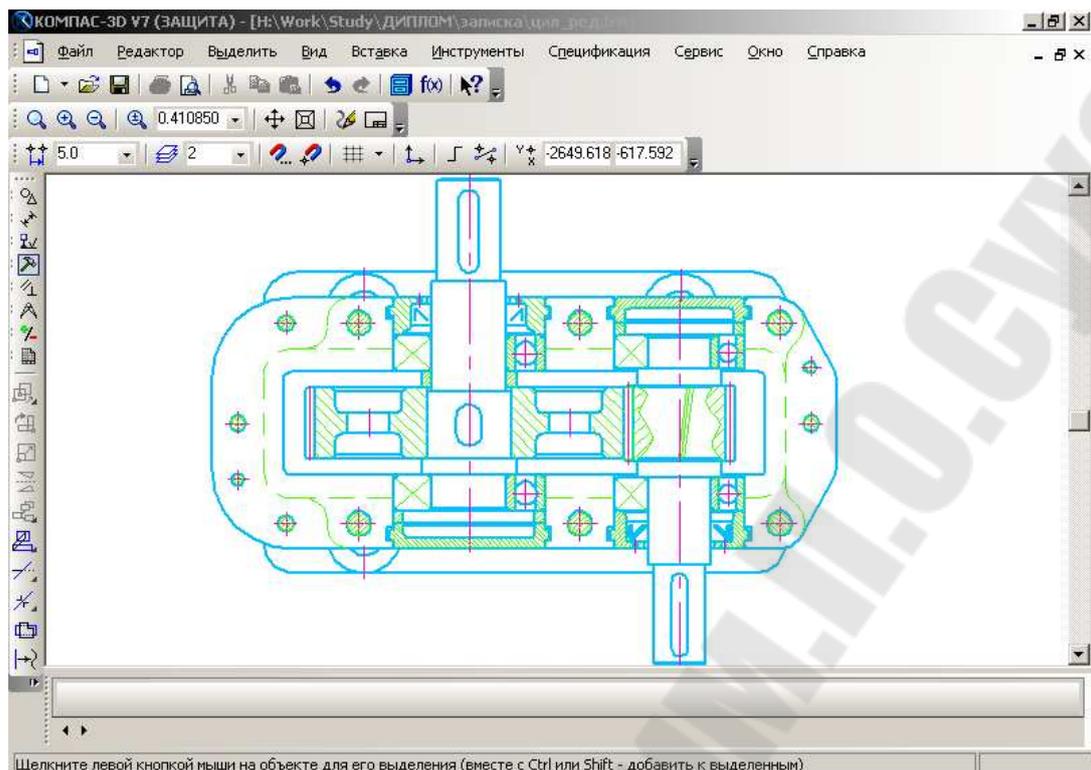


Рисунок 2.13. Пример чертежа цилиндрического редуктора, выполненного в среде КОМПАС-3D V7.0. на основании данных, рекомендованных подсистемой многокритериальной оптимизации

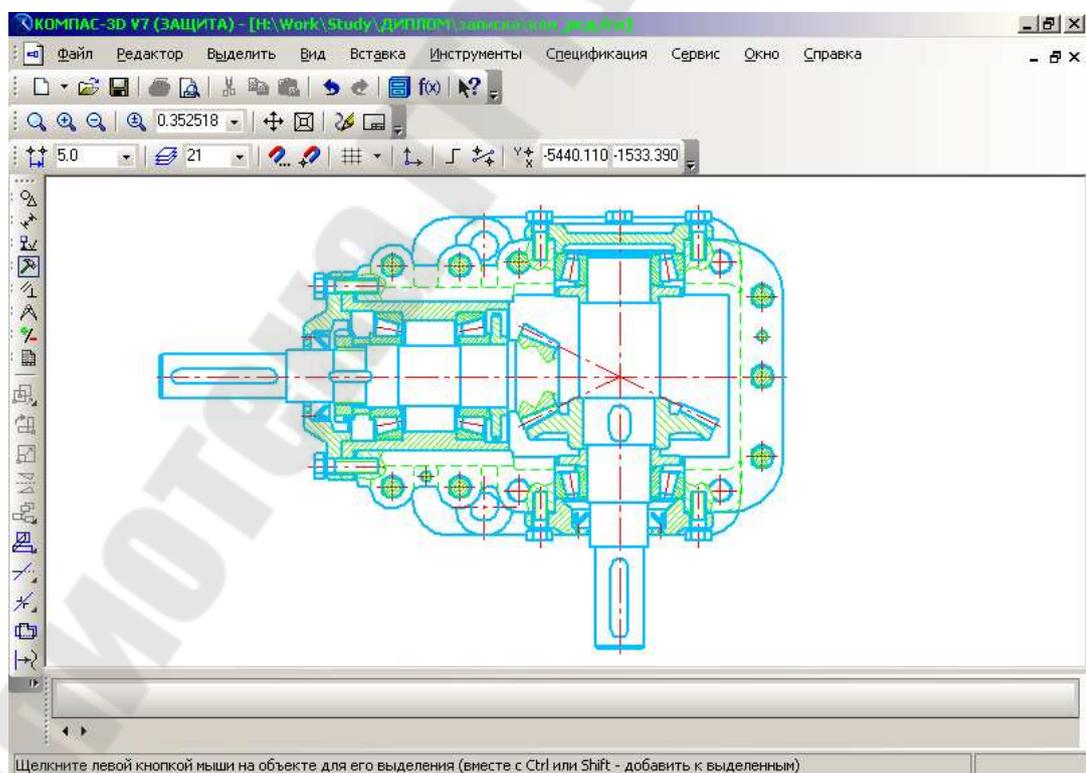


Рисунок 2.14. Пример чертежа конического редуктора, выполненного в среде КОМПАС-3D V7.0. на основании данных, рекомендованных подсистемой многокритериальной оптимизации

## **Выводы**

Апробация разработанных алгоритма и программы путем модернизации реальных редукторов, спроектированных опытными конструкторами, показала, что в режиме оптимизации показатели редукторов, с определенными по DMS на ПЭВМ параметрами, в среднем на 8-10%, лучше. При этом, в несколько раз уменьшаются сопутствующие затраты и время на проектирование редуктора с улучшенными показателями.

Существующие разработки, реализующие данный подход, требуют от проектировщика специфических знаний по методам оптимизации, что сдерживает их практическое применение. Кроме вышеупомянутых преимуществ подсистема DMS не требует от пользователя знаний по постановке задачи математического программирования и дает возможность конструктору принимать решения в удобной для него проблемной среде.

Эти результаты дают основание рекомендовать предложенные метод и средства проектирования в случаях, когда основными для проектировщика являются жесткие требования по одному или нескольким показателям типовых редукторов механического привода.

## **3. КОМПАС**

### **3.1 Назначение, состав и структура КОМПАС**

#### **ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ**

АП – автоматизированное проектирование.

БД – база данных.

ЕИП - единое информационное пространство.

ИТ – информационные технологии.

ИЭТР – интерактивное электронное техническое руководство.

КТПП – конструкторско-технологическая подготовка производства.

КД – конструкторская документация.

ЕСКД – единая система конструкторской документации.

ПЭВМ – персональная электронная вычислительная машина.

ПКР – проектно-конструкторские работы

ПО – программное обеспечение.

САПР – система автоматизированного проектирования.

ТПП – технологическая подготовка производства.

CAD/CAM/CAE - системы автоматизированного проектирования / производства.

CALS-технология - Continuous Acquisition and Life Cycle Support - создание информационной модели изделия и обеспечение электронного обмена данными об изделии в процессе его жизненного цикла – от начала проектирования до утилизации.

MRP/ERP – системы планирования и управления ресурсами.

PLM - Product Lifecycle Support Management – программный продукт управления жизненным циклом изделия.

PDM – Product Data Management - программный продукт управления инженерными данными об изделии.

Комплекс Автоматизированных Систем предназначен для создания и ведения электронного архива КД предприятия для проектируемых и модернизируемых технических объектов на всех этапах их разработки.

КОМПАС PDM состоит из нескольких основных компонентов:

- ядром комплекса является система управления инженерными данными и жизненным циклом изделия корпоративного уровня ЛОЦМАН:PLM, содержащая всю информацию об изделиях, обеспечивающая информационный обмен с управленческими и учетными модулями корпоративных систем ERP/ MRP;
- информационная платформа – набор единых БД (справочников) серии ЛОЦМАН, к которым обращаются остальные компоненты комплекса. К справочным относятся данные о материалах и сортаментах, используемых при производстве и эксплуатации выпускаемых изделий; данные о стандартных изделиях, используемых при комплектовании выпускаемых сборочных единиц; данные по единицам измерений; данные по оборудованию и инструменту, используемым в процессе производства и т.д.
- системы автоматизации конструкторской подготовки производства КОМПАС-3D и КОМПАС-ГРАФИК с множеством дополнительных специализированных САПР и библиотек;
- система автоматизации технологической подготовки производства КОМПАС-АВТОПРОЕКТ, включающая дополнительные модули технологических расчетов, формирования отчетов и т.д.;
- связь через программы-конверторы с САПР верхнего уровня – CATIA, Unigraphics, Pro/Engineer, программными комплексами, реализующими конечно-элементный анализ – ANSYS, NASTRAN, ИСПА (интегрированная система прочностного анализа) и

системой подготовки программ обработки для станков с ЧПУ – GeMMA и др. системами.

КОМПАС PDM – структура открытая и постоянно развивающаяся.

### **3.2 Система управления жизненным циклом изделия**

#### **ЛОЦМАН: PLM И КОРПОРАТИВНЫЕ БАЗЫ ДАННЫХ**

Остановимся подробнее на «мозговом центре» комплекса – системе управления инженерными данными и жизненным циклом изделия ЛОЦМАН:PLM.

ЛОЦМАН:PLM обеспечивает:

- хранение и управление технической документацией на изделии;
- управление информацией о структуре, вариантах конфигурации изделий и входимости компонентов в различные изделия;
- управление процессом разработки изделия.

ЛОЦМАН:PLM содержит всю информацию, необходимую для проектирования, изготовления и эксплуатации продукции машиностроительного предприятия. На этапе подготовки производства система обеспечивает накопление данных о результатах конструкторско-технологического проектирования и обмен информацией между инженерными службами. Утвержденные данные и документация передаются в другие службы предприятия для материально-технического обеспечения, производства и эксплуатации выпускаемых изделий.

Система ЛОЦМАН:PLM характеризуется: высокой масштабируемостью и отказоустойчивостью; надежной защитой данных; возможностью хранения документов как внутри БД, так и в файловой системе; поддержкой версий объектов и документов; возможностью просмотра состояния БД на указанный момент времени в прошлом; тесной интеграцией с едиными справочными БД, использующими информацию о материалах и сортаментах, стандартных изделиях и т.д; интеграцией с внешними приложениями для редактирования не только документов, но и непосредственно PDM/PLM-информации; импортом данных фактически из любой структуры; типовой конфигурацией для машиностроения и приборостроения; гибкой настройкой практически для любой отрасли промышленности; удобным представлением данных.

**Архитектура.** ЛОЦМАН:PLM реализует современную технологию хранения и доступа к информации – трехзвенную распределенную архитектуру Windows DNA (*Рисунок3*). Преимущество трехзвенной архитектуры по сравнению с другими технологиями состоит в наиболее оптимальной организации процессов обмена, обработки и хранения инженерных данных с точки зрения защищенности и сохранности информации.

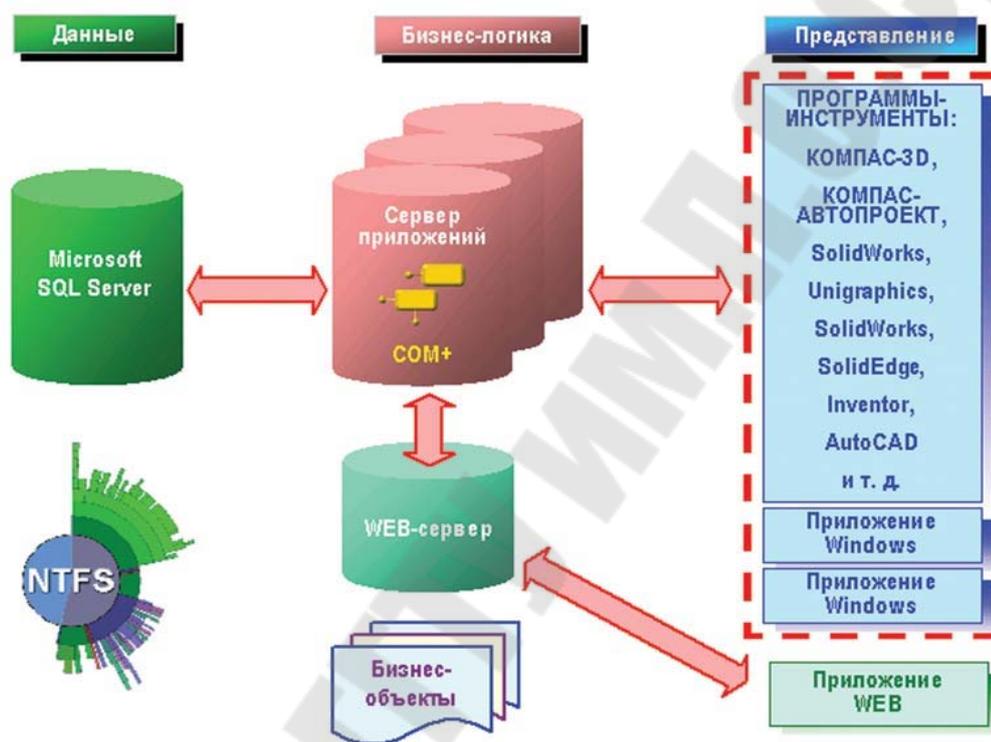


Рисунок 3.1 Трехзвенная архитектура системы ЛОЦМАН:PLM

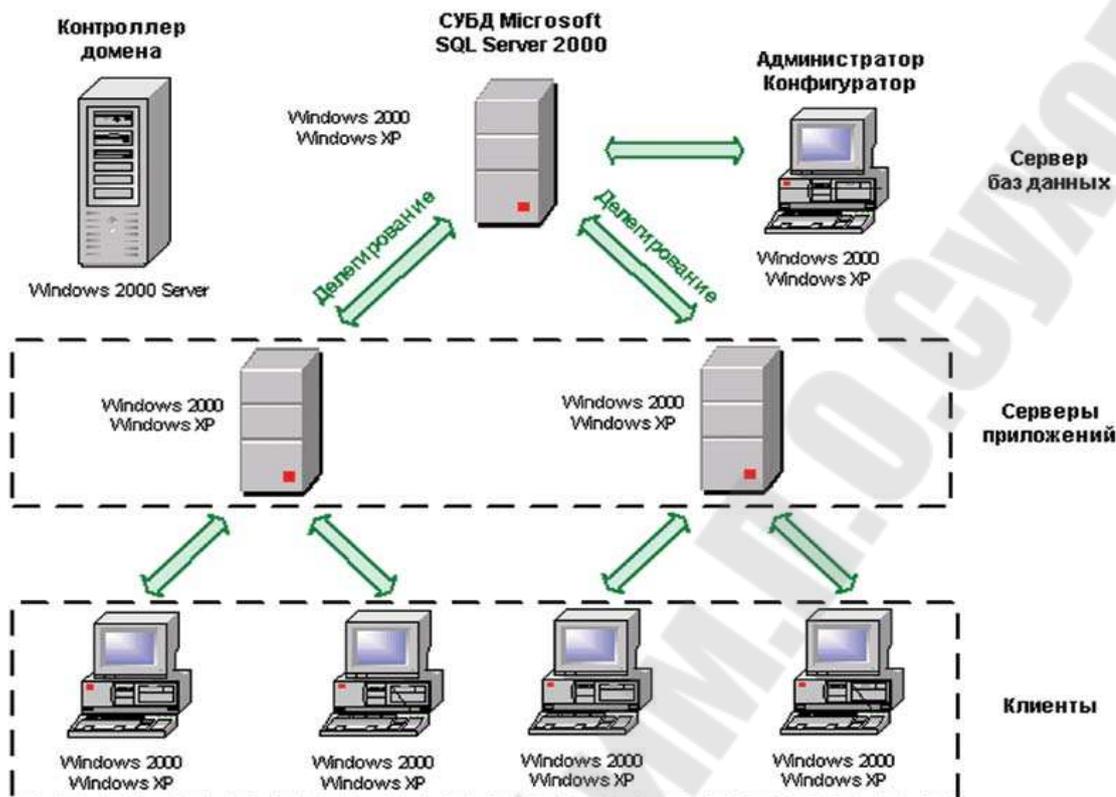


Рисунок 3.2 Трехуровневая сеть системы ЛОЦМАН:PLM

Трехуровневая сеть системы ЛОЦМАН:PLM (Рисунок 3.2) состоит из следующих основных частей:

- сервера баз данных, являющийся единым хранилищем всей информации;
- сервера приложений, при помощи которого информация обрабатывается;
- клиентского модуля, с помощью которого пользователи получают доступ к требуемой информации.

Источником данных также выступают корпоративные БД семейства ЛОЦМАН, содержащие справочные данные о материалах и сортаментах, стандартных изделиях и т.д.

Такая организация процессов обработки и хранения информации значительно снижает требования к производительности ПЭВМ, устанавливаемых на рабочих местах, при этом распределяя вычислительную нагрузку между разными компонентами. Использование технологии COM+ для реализации серверов приложений позволяет легко масштабировать систему по мере ее внедрения на предприятии и подключения новых пользователей. Нет никаких ограничений по

количеству пользователей, одновременно работающих с ЛОЦМАН:PLM.

Кроме того, описанная архитектура дает возможность при эксплуатации выбирать различные варианты установки ЛОЦМАН:PLM на имеющемся на предприятии компьютерном оборудовании.

Ввод данных в ЛОЦМАН:PLM осуществляется при помощи передачи информации из систем конструкторско-технологического проектирования, непосредственно из этих клиентских приложений.

Пользователь через ЛОЦМАН Навигатор обращается к БД (*Рисунок 5*), которая отображается в виде дерева изделия, содержащего узлы, сборочные единицы и детали. К объектам «дерева системы» привязаны описывающие их документы. В свою очередь, документам соответствуют файлы трехмерных моделей, чертежей, технологических процессов и т.д. В процессе групповой работы сохраненные документы могут быть взяты для дальнейшей разработки и редактирования. По окончании редактирования объект (документ) можно сохранить как текущую версию либо в виде новой версии. Иллюстрация проведения извещения об изменении приведена на *Рисунок 6*. Таким образом, полностью доступна хронология разработки и проводимых в ней изменений.

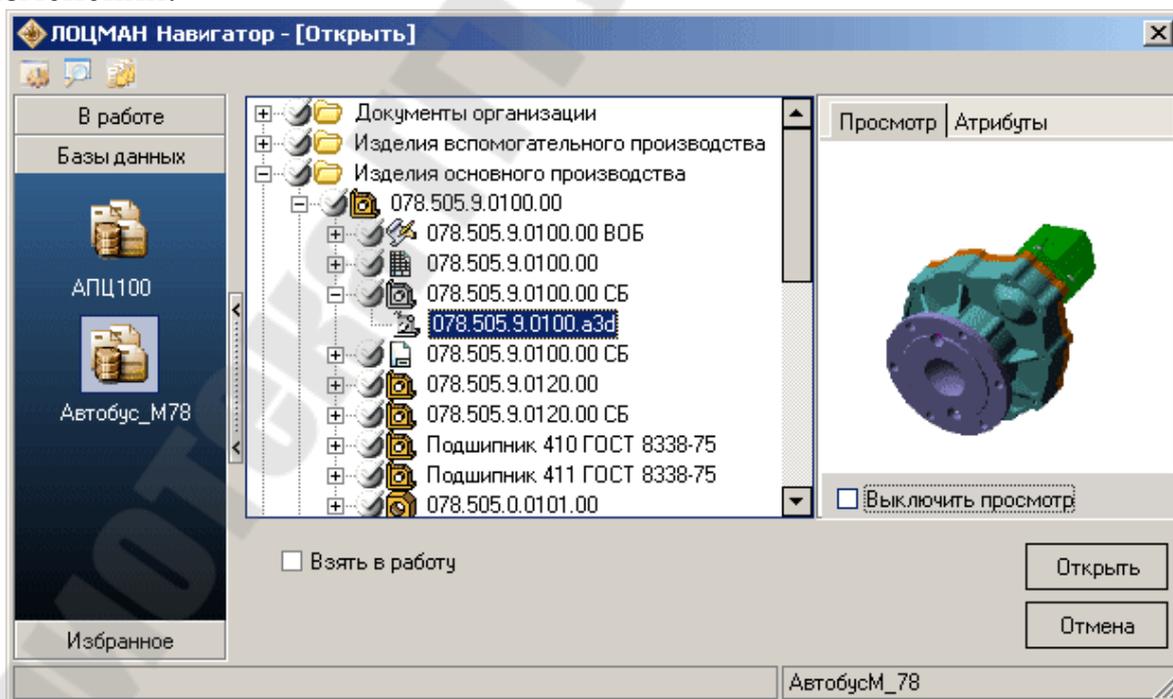


Рисунок 3.3. Поиск изделия в базе данных в среде ЛОЦМАН:PLM

Рисунок 3.4. Проведение извещения об изменении в среде ЛОЦМАН:PLM

ЛОЦМАН:PLM характеризуется следующими функциональными возможностями:

- обеспечивает высокопроизводительную и устойчивую работу при одновременном подключении практически неограниченного количества пользователей;
- реализует хранение всего комплекса информации на защищенных серверах, при этом разграничены права доступа к каждому конкретному объекту (документу);
- обеспечивает работу с трехмерными моделями и чертежами систем КОМПАС, Unigraphics, Solidworks, SolidEdge, Inventor, AutoCAD. Обеспечена синхронизация как по составу сборочной единицы, так и по атрибутивной информации;
- обеспечивает учет как конструкторско-технологической, так и организационно-распорядительной документации в рамках единого интерфейса;

- имеет встроенные средства просмотра и аннотирования документов и моделей указанных инженерных форматов, а также растровых форматов и форматов офисных приложений;
- поддерживает территориально-распределенный режим хранения документов;
- имеет гибко настраиваемый интерфейс с возможностью перенастройки для различных групп пользователей и типов документов без программирования;
- имеет возможность подключения к внешним БД для импорта информации из других САПР;
- позволяет описать сложные бизнес-процессы предприятия (со вложенными подпроцессами, поддержкой условий, циклов и др.) с графическим представлением алгоритмов бизнес-процессов;
- встроенные средства маршрутизации документов (Workflow) интегрированные с системами электронной почты, поддерживающими SMTP-сервер;
- имеет открытый интерфейс для подключения любого сертифицированного средства ЭЦП и для функционального расширения. Она предоставляет большой набор функций API, которые позволяют специалистам предприятий создавать собственные PDM-приложения;
- позволяет провести интеграцию со всеми представленными на рынке MRP/ERP-системами.

В состав системы входят ЛОЦМАН:PLM Администратор, ЛОЦМАН:PLM Конфигуратор, ЛОЦМАН:PLM Клиент, встроенный модуль формирования отчетов, ЛОЦМАН:PLM Дизайнер форм, модуль маршрутизации ЛОЦМАН:PLM Workflow, ЛОЦМАН:PLM Дизайнер алгоритма импорта, ЛОЦМАН:PLM Импорт и ЛОЦМАН:PLM Web-клиент.

Без организации параллельного выполнения работ и взаимодействия “белых воротничков” при разработке документации на изделие достичь заметного сокращения сроков невозможно. Взаимодействие и параллельное выполнение работ могут быть организованы только при условии создания внутри предприятия ЕИП данных о корпоративной продукции.

Подводя итог, можно сказать, что внедрение системы ЛОЦМАН:PLM обеспечивает:

- создание интерактивной среды совместной разработки;
- управление электронным архивом;

- создание структурированного электронного описания изделия, интегрирующего всю информацию, которая может использоваться в масштабах расширенного предприятия, в том числе поставщиками и сервисными организациями;
- электронное определение всех этапов жизненного цикла изделия: формулировка потребности в материалах, концептуальное проектирование, производство, распространение и поддержка;
- совместная работа по проектированию и технологической подготовке производства;
- защиту данных и гарантированный доступ к информации об изделии для каждого пользователя с соответствующими правами.

### **3.3 Проектирование и конструирование в среде КОМПАС**

Программные продукты для КТПП, разработанные компанией АСКОН, стали стандартом для тысяч промышленных предприятий. Их популярность объясняется отличными функциональными возможностями, удобством и надежностью, уникальной быстротой освоения и внедрения у заказчиков, большим набором стандартных библиотек и специализированных приложений.

#### **3.3.1 Разработка чертежей в КОМПАС-ГРАФИК**

Двухмерная параметрическая чертежно-конструкторская система КОМПАС-ГРАФИК обеспечивает базовую графику, проектирование на плоскости и формирование чертежей. КОМПАС-ГРАФИК позволяет создавать различные виды КД как на основании разработанной в КОМПАС 3D трехмерной модели объекта, так и путем проектирования объектов на плоскости, с использованием специальных приложений, которые ускоряют процессы проектирования и разработки документации. Оформленная в среде КОМПАС-ГРАФИК документация *полностью соответствует требованиям ЕСКД* к оформлению и изготовлению документов и пригодна для хранения в технических архивах на бумажных носителях или в электронном виде на ПЭВМ.

КОМПАС-ГРАФИК предназначен для скоростного создания качественных чертежей, схем, расчетно-пояснительных записок, технических условий, инструкций и др. документов.

Средства импорта/экспорта (программы-конверторы) графических документов поддерживает форматы DXF, DWG, IGES и позволяют организовывать обмен данными со смежниками и заказчиками, использующими любые чертежно-графические системы.

КОМПАС-ГРАФИК предлагает:

- разнообразные способы и режимы построения графических примитивов (в том числе ортогональное черчение, привязка к сетке и т.д.),
- мощные средства создания параметрических моделей для часто применяемых типовых деталей или сборочных единиц,
- создание библиотек типовых фрагментов без какого-либо программирования,
- любые стили линий, штриховок, текстов,
- многочисленные способы простановки размеров и технологических обозначений с автоматическим подбором допусков и отклонений,
- быстрый доступ к типовым текстам и обозначениям,
- встроенные текстовый и табличный редакторы.

КОМПАС-ГРАФИК автоматически генерирует ассоциативные виды трехмерных моделей (в том числе разрезы, сечения, местные виды, виды по стрелке). Все они ассоциированы с моделью: изменения в модели приводят к изменению изображения на чертеже. При обращении к КОМПАС-3D и системе проектирования спецификаций может формировать ассоциированные чертежи (см. *Рисунок 3.5* и *Рисунок 3.6*). Последние версии КОМПАС-ГРАФИК способны создавать конструкторские проработки общих видов сложных технических объектов.

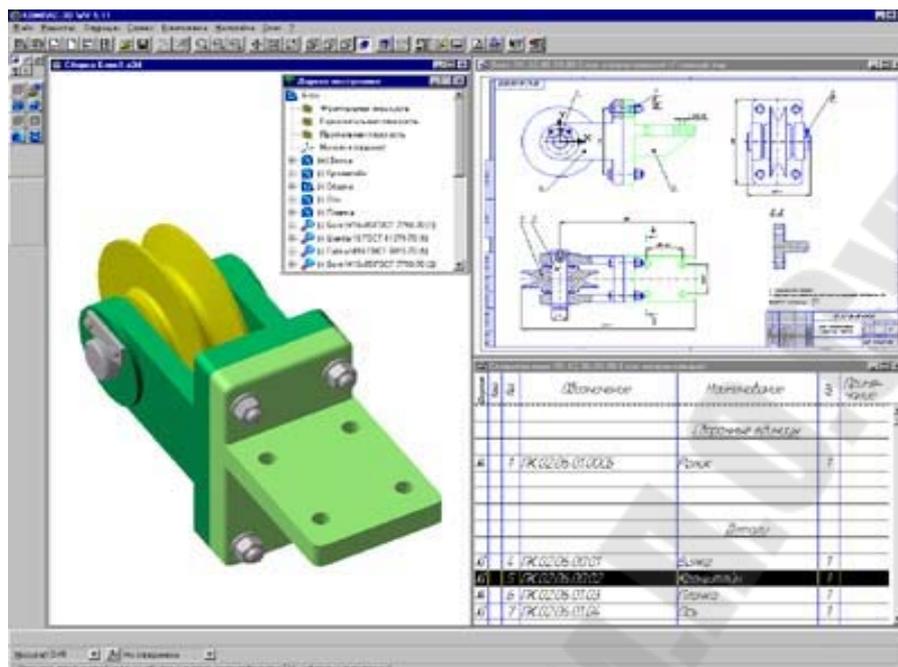


Рисунок 3.5. Ассоциированный чертеж упора роликового.



Рисунок 3.6. Ассоциированный чертеж крана прифланцованного

Одновременно КОМПАС-ГРАФИК и КОМПАС-3D являются прекрасным выбором для автоматизации рабочих мест на малых и средних предприятиях, поскольку предлагают лучшие показатели «стоимость-функциональность».

### 3.3.2 Геометрическое моделирование в КОМПАС-3D

Система КОМПАС-3D предназначена для создания трехмерных ассоциативных моделей отдельных деталей и сборочных единиц, содержащих как оригинальные, так и стандартизованные конструктивные элементы. Параметрическая технология позволяет быстро получать модели типовых изделий на основе однажды спроектированного прототипа. Многочисленные сервисные функции облегчают решение вспомогательных задач проектирования и обслуживания производства.

Система КОМПАС-3D позволяет реализовать классический процесс трехмерного параметрического проектирования – от идеи к ассоциативной объемной модели и от модели к КД.

Основные компоненты КОМПАС-3D – собственно система трехмерного твердотельного моделирования, чертежно-графический редактор и модуль проектирования спецификаций. Все они легки в освоении, имеют русскоязычные интерфейс и разветвленную справочную систему.

Ключевой особенностью КОМПАС-3D является использование собственного математического ядра и параметрических технологий, разработанных специалистами АСКОН. Так при создании новой версии, КОМПАС-3D V8, удалось примерно вдвое повысить производительность работы системы.

Основная задача, решаемая системой – моделирование изделий с целью существенного сокращения периода проектирования и скорейшего их запуска в производство. Эти цели достигаются благодаря возможностям:

- быстрого получения конструкторской и технологической документации, необходимой для выпуска изделий (сборочных чертежей, спецификаций, детализовок и т.д.);
- передачи геометрии деталей и конструкций в расчетные пакеты – ANSYS, ИСПА, ADAMS и др.;
- передачи геометрии в пакеты разработки управляющих программ для оборудования с ЧПУ (ГемМа);
- создания дополнительных изображений изделий (например, для составления каталогов, создания иллюстраций к технической документации и т.д.).

Моделирование машиностроительных конструкций в КОМПАС-3D можно вести различными способами: «снизу вверх» (исполь-

зую готовые компоненты), «сверху вниз» (проектируя компоненты в контексте конструкции), опираясь на компоновочный эскиз (например, кинематическую схему) либо смешанным способом. Такая идеология обеспечивает получение легко модифицируемых ассоциативных моделей. Примеры геометрического моделирования в среде КОМПАС-3D приведены на Рисунок 3.7 и 3.8.

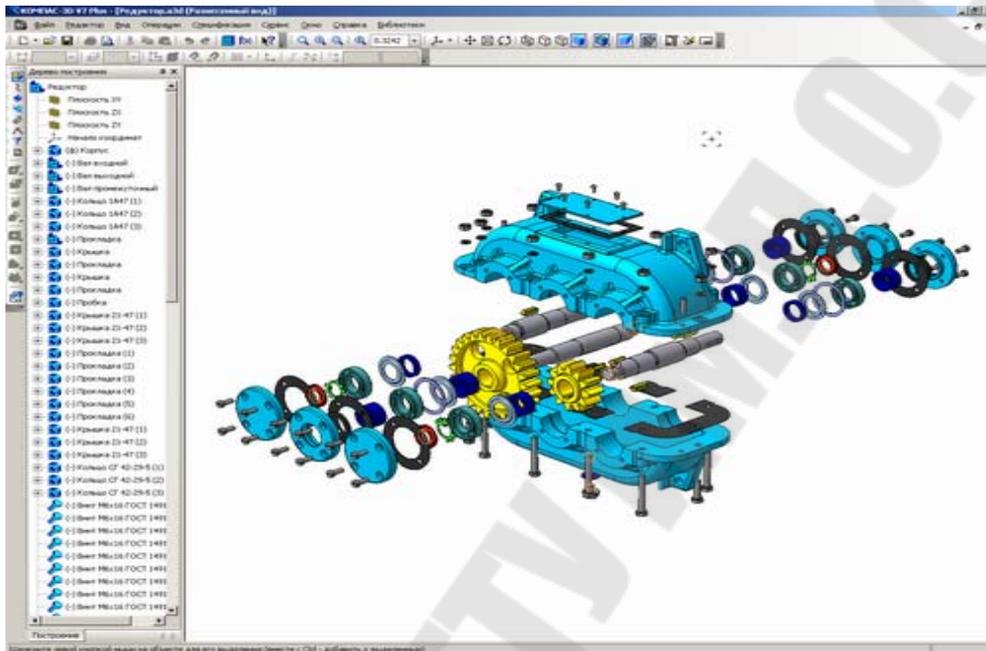


Рисунок 3.7. Развернутое моделирование редуктора

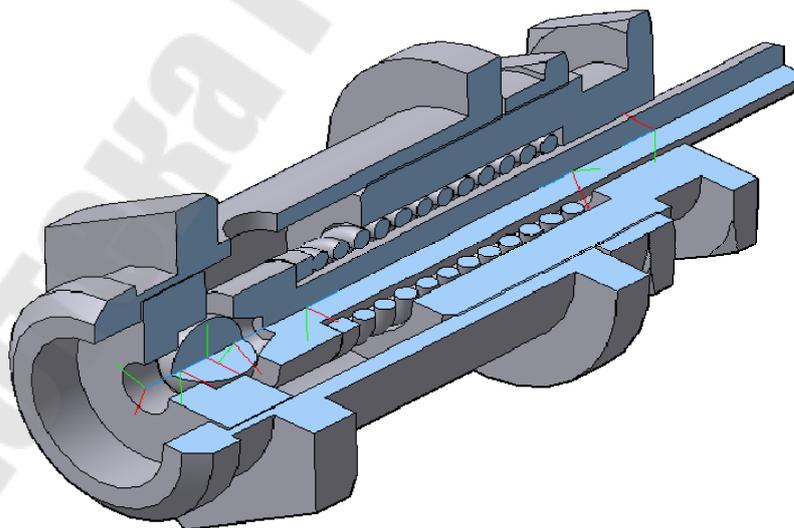


Рисунок 3.8. Твёрдотельная модель клапана пневмогидравлического.

Функционируя в составе корпоративных комплексов CAD/CAM/CAE/PDM, решающих задачи оптимизации КТПП, КОМ-

ПАС-3D взаимодействует с системой ведения электронного архива и управления данными ЛОЦМАН:PLM (или с другими PDM/PLM-системами, применяемыми заказчиком) и едиными базами данных (корпоративными справочниками).

### **3.3.3 Системы проектирования: КОМПАС-Shaft Plus и КОМПАС-Spring**

Прикладное ПО в большинстве проектно-конструкторских организаций и машиностроительных предприятий, сформированное за годы из собственных и заимствованных программ с учетом специфики задач, как правило, морально устарело и практически не поддается модификации.

Автоматизированные системы проектирования тел вращения и пружин, разработанные компанией АСКОН, предназначены для конструкторов соответствующих изделий и обеспечивают не только ускоренное формирование чертежей, но и выполнение расчетов, подбор рациональных параметров проектируемых объектов.

Вероятно, у многих выпускников машиностроительных вузов со студенческих лет сохранилось в памяти тягостное предчувствие предстоящего при выполнении очередного курсового проекта громоздкого расчета зубчатых передач... Хорошо, если удастся сразу подобрать подходящую пару. А если нет – придется снова и снова погружаться в море формул, коэффициентов, напряжений. Большому количеству инженеров-конструкторов и по сей день приходится заниматься подобными расчетами с помощью калькулятора, даже если они и используют в работе графические пакеты. Пользователи КОМПАС могут забыть об этом раз и навсегда, если в их распоряжении находится система КОМПАС-SHAFT Plus. Она позволяет не только выполнять геометрические и прочностные расчеты цилиндрических и конических зубчатых, цепных, червячных и ременных передач, но и строить их параметрические модели, из которых очень легко получить как обычный плоский чертеж с таблицами параметров зубчатых колес и изображением профилей зубьев, так и трехмерную модель (см. Рисунок 3.9). КОМПАС-Shaft Plus предназначена также для параметрического проектирования деталей типа "тела вращения" – валов и втулок. Она обеспечивает построение шлицевых, резьбовых и шпоночных участков на ступенях валов. При этом сложность моделей валов и количество ступеней не ограничиваются.

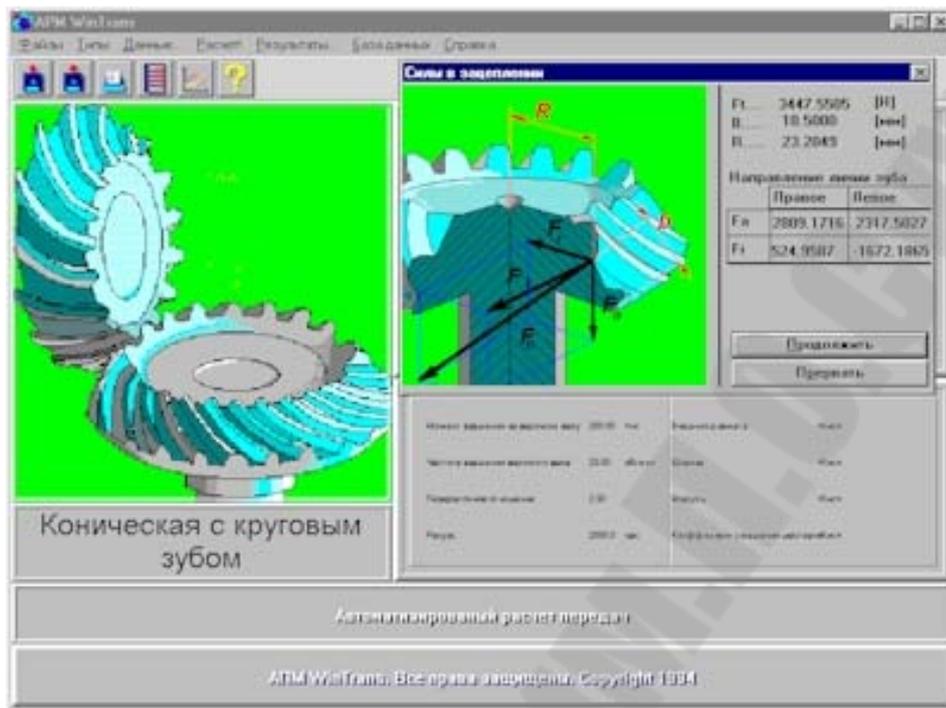


Рисунок 3.9. Проектирование конической передачи с круговым зубом

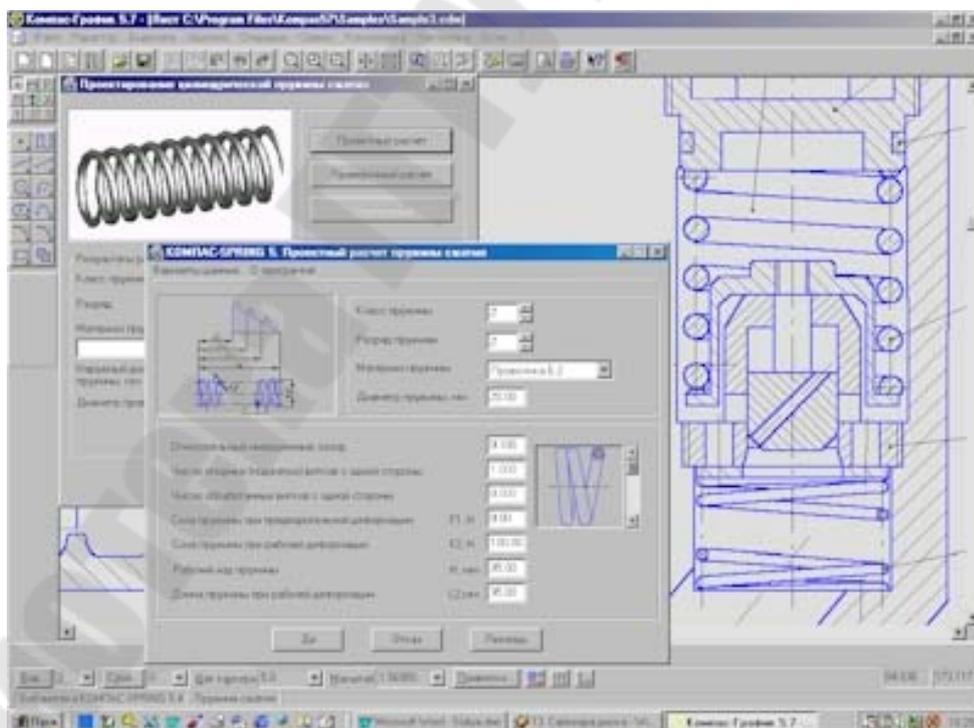


Рисунок 3.10. Проектирование пружин сжатия и растяжения

Система КОМПАС-SPRING – предназначена для выполнения проектного и проверочного расчетов цилиндрических винтовых пружин.

жин сжатия и растяжения (см. Рисунок 3.10), а также для построения их чертежей (вид, технические требования и заполнение основной надписи) в среде системы КОМПАС. В основу программы положены методики ГОСТ 13764-86, ГОСТ 13765-86 и методики, разработанные в расчетно-вычислительном центре Специального конструкторского бюро машиностроения (г. Курган). Подключение КОМПАС-SPRING осуществляется вызовом из главного меню графического редактора соответствующей команды, а работа не требуют от пользователя, знакомого с КОМПАС-ГРАФИК, дополнительных навыков (рис 3.11).

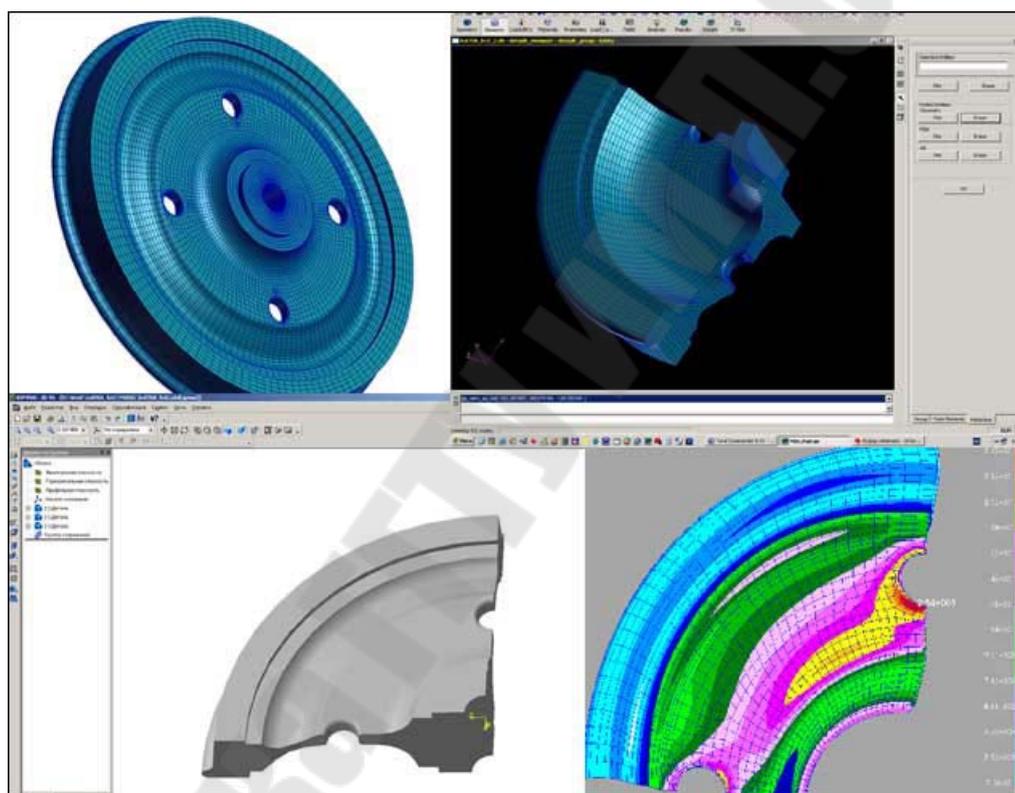


Рисунок 3.11. Иллюстрация поля напряжений в 3D модели детали, переданной из КОМПАС-3D в программный комплекс ANSYS

### 3.3.4 Формирование спецификаций

Система проектирования спецификаций позволяет выпускать разнообразные спецификации, ведомости и прочие табличные документы. Спецификация может быть ассоциативно связана со сборочным чертежом (одним или несколькими его листами) и трехмерной моделью сборки. Возможна автоматическая передача данных из чертежа или модели в спецификацию или из спецификации в подключенные к ней документы. Из спецификации в чертеж передаются но-

мера позиций компонентов сборки (стандартных изделий, деталей и т.д.). Из сборочного чертежа в спецификацию передаются номера зон, в которых расположено изображение соответствующих компонентов сборки. Из моделей деталей и сборочных единиц в спецификацию передаются наименование, обозначение, масса и другие данные.

Если в сборочный чертеж вставлены изображения стандартных элементов из прикладных библиотек, то информация о них передается в спецификацию.

Система проектирования спецификаций поддерживает заполнение разделов и подразделов и стандартную сортировку строк внутри них (Рисунок 3.12). Правила сортировки строк по умолчанию соответствуют стандарту; при необходимости они могут быть изменены пользователем.

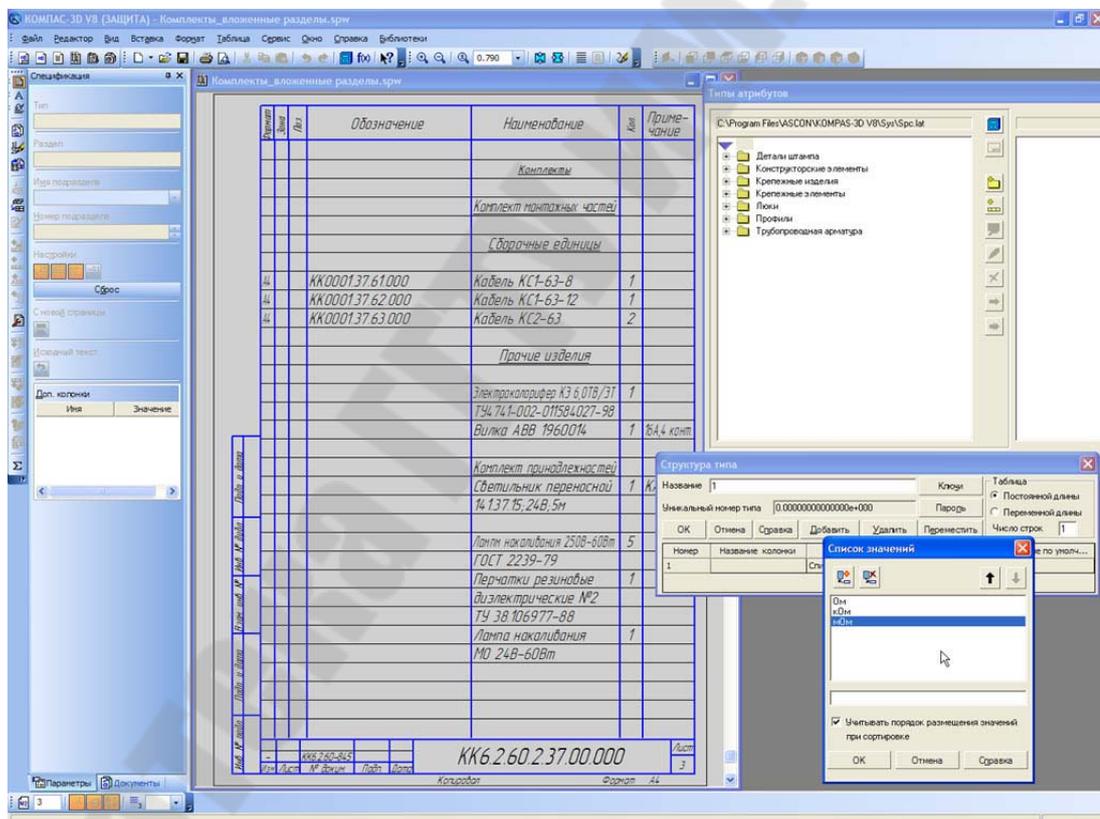


Рисунок 3.12. Работа со спецификацией.

Разнообразие параметров и настроек, в особенности применение пользовательских бланков, позволяет создавать не только спецификации в соответствии с ГОСТ. Механизмы модуля разработки спецификаций отлично подходят для работы с различными ведомостями, перечнями, каталогами и списками: их строки можно нумеровать, сор-

тировать, связывать с документами и графическими объектами и т.д. Комбинируя различные настройки спецификации, можно создавать ведомости спецификаций, ведомости ссылочных документов, ведомости покупных изделий, таблицы соединений, листы регистрации изменений и прочие документы.

### **3.3.5 Другие структурные составляющие КОМПАС**

#### **3.3.5.1 КОМПАС-МЕНЕДЖЕР**

Одной из самых важных задач, решаемых при внедрении САПР на машиностроительном предприятии, является совместная работа пользователей с электронными документами, их хранение и защита от несанкционированных изменений.

Система КОМПАС-МЕНЕДЖЕР обеспечивает централизованное накопление и надежное хранение электронной документации в интегрированной БД конструкторско-технологического назначения. Средства создания и ведения интегрированной БД позволяют организовать документооборот и обмен информацией в коллективе специалистов, работающих над общими проектами. Каждый проект может содержать большой объем разнообразной взаимосвязанной информации об изделии или о группе изделий, включая: объемные модели и чертежи изделий, сборочных единиц и деталей; регламенты технологических процессов, программы для станков с ЧПУ, чертежи технологической оснастки; результаты решения расчетных задач, текстовые документы Microsoft Office, растровые изображения, фотографии и рисунки в любом графическом формате, модели SolidWorks, чертежи AutoCAD. и другие типы документации, созданные как в среде КОМПАС, так и в других системах. КОМПАС-МЕНЕДЖЕР позволяет специалистам быстро находить в базе нужные чертежи, модели, документы или информацию, создавать сводные отчеты по изделию или по группе изделий. Средства импорта/экспорта информации позволяют осуществлять обмен данными и документами с другими базами в интегрированных системах проектирования и управления производством. Таким образом, КОМПАС-МЕНЕДЖЕР представляет инструментарий как для квалифицированного руководства техническим проектом, так и для решения проблем документооборота на предприятии.

### **3.3.5.2 Библиотеки стандартных элементов и справочники**

Программный комплекс КОМПАС включает большой набор прикладных приложений для разных областей проектирования, которые позволяют ускорить производство трехмерных моделей и чертежей, повысить качество проектной документации. В качестве таких приложений выступают специализированные библиотеки и справочники:

- библиотека стандартных крепежных элементов;
- система технических нормалей и классификатор ЕСКД;
- справочники материалов и по подшипникам качения;
- пакет библиотек “сварные швы”;
- пакет библиотек “электроснабжение”;
- пакет библиотек “Автоматизация технологических процессов”;
- библиотеки редукторов и электродвигателей.

Параметрические библиотеки машиностроительных деталей, деталей штампов, пресс-форм, приспособлений, элементов электрических, гидравлических и пневматических схем, сантехнического оборудования, элементов архитектурно-строительного проектирования, проектирования систем вентиляции – далеко не полный перечень специализированных библиотек КОМПАС.

Используя разнообразные прикладные библиотеки семейства КОМПАС, любое предприятие может организовать по модульному принципу программный комплекс, ориентированный на решение типовых задач в различных предметных областях (например, проектирование приводов, механических передач, инженерных коммуникаций).

### **3.3.5.3 КОМПАС-КАТАЛОГ**

Это система подготовки электронных каталогов запчастей и технических руководств. Данная система предназначена для создания каталогов деталей и запасных частей. С ее помощью можно формировать также интерактивные электронные технические руководства (ИЭТР).

КОМПАС-КАТАЛОГ состоит из двух частей: редактора каталогов и утилиты просмотра каталогов. Средствами редактора формируется структура каталога и осуществляется его информационное наполнение: импортируется состав изделия из систем ЛОЦМАН:PLM

или КОМПАС-МЕНЕДЖЕР, добавляются графические изображения (чертежи и трехмерные модели КОМПАС-3D, файлы форматов GIF, JPG или BMP), расставляются позиции.

Заключительный этап работы – публикация каталога.

Для просмотра каталога после публикации используется специальная утилита. С ее помощью осуществляется поиск - просмотр имеющейся в каталоге информации и формирование заказов на запасные части. Заказы создаются в файлах Microsoft Excel, на бланке, форма которого определяется предприятием-изготовителем при создании каталога.

Итак, КОМПАС-КАТАЛОГ представляет предприятию самые широкие возможности для рекламы и продвижения продукции, ее информационного сопровождения. Что особенно важно, система помогает реализовать на предприятии CALS-технологии. Кроме того, КОМПАС-КАТАЛОГ позволяет использовать методы Интернет-маркетинга. Уже доказали свою эффективность в деле подготовки персонала дистанционные интерактивные обучающие курсы; для их создания также можно использовать данное ПО. И это – далеко не полный перечень возможностей системы подготовки электроны каталогов запчастей и технических руководств системы КОМПАС-КАТАЛОГ.

#### **3.3.5.4 Система безопасности данных КОМПАС-ЗАЩИТА**

Система безопасности данных КОМПАС-ЗАЩИТА предназначена для защиты от несанкционированного доступа к электронным документам (чертежам, спецификациям, трехмерным моделям и т.д.), разработанным в системе КОМПАС.

Принцип защиты основан на кодировании файлов. Код задается пользователем при настройке системы перед началом ее использования и хранится в электронном ключе аппаратной защиты КОМПАС. В число настроек Системы входят разрешение/запрет снятия защиты с файлов, разрешение/запрет экспорта и печати данных. Код защиты и настройки системы могут быть в любой момент изменены. Условием смены кода, так же, как и других настроек, является правильный ввод кода, хранимого в настоящий момент на ключе. Таким образом, конфиденциальность данных обеспечивается конфиденциальностью кода и ограничением доступа к ключу аппаратной защиты.

Работа пользователя в КОМПАС-3D с установленной Системой безопасности практически ничем не отличается от обычной работы. Однако если включена опция “Защищать файлы”, любой документ КОМПАС при сохранении будет защищен: последующее его открытие станет возможным только на тех рабочих местах, где установлена Система безопасности, а код, хранимый на ключе, совпадает с кодом, которым защищен файл.

Указанные свойства Системы безопасности в сочетании с организационными мероприятиями позволяют корпоративному пользователю защитить информацию от хищения и разграничить доступ к информации различного уровня секретности.

### **3.4 Автоматизация технологической подготовки производства в среде КОМПАС**

Для автоматизации ТПП АСКОН предлагает широкий спектр программных продуктов, ориентированных на использование специалистами предприятий: технологами, конструкторами технологической оснастки, разработчиками программ обработки деталей на станках с ЧПУ, инженерами по нормированию труда, специалистами по реконструкции цехов предприятия.

Система автоматизированного проектирования технологических процессов КОМПАС-АВТОПРОЕКТ позволяет создавать технологическую документацию для различных видов обработки деталей (механообработка, штамповка, сборка, сварка, термообработка и др.). В системе применяются различные режимы разработки технологических процессов: проектирование на основе техпроцесса-аналога, формирование техпроцесса из блоков типовых операций и переходов, автоматическая доработка типовой технологии на основе параметрического чертежа детали, формирование индивидуального технологического процесса в диалоговом режиме с использованием справочных баз данных.

Комплексное решение задач автоматизации ТПП производства на базе ИТ обеспечивает:

- сокращение сроков подготовки производства за счет автоматизации этапов технологической подготовки, параллельного выполнения конструкторско-технологической подготовки,
- оптимизацию затрат труда и средств для изготовления изделий.

### 3.4.1 КОМПАС-АВТОПРОЕКТ

КОМПАС-АВТОПРОЕКТ – это программный комплекс автоматизации технологической подготовки производства предназначен для значительного увеличения скорости производственных процессов, решения задач эффективного взаимодействия всех подразделений, иными словами он предназначен для решения широкого спектра задач технологической подготовки производства: автоматизированного проектирования технологических процессов, расчета оптимального количества материалов для производства изделия, расчета режимов обработки для различных видов производств, расчета оптимальных затрат труда, формирования необходимого комплекта технологических документов. Технологическая информация из программного комплекса передается в различные системы классов PDM\MRP\ERP для производственного планирования и управления. В качестве примера на Рисунок 3.13, 3.14 проиллюстрирован фрагмент работы редакторов модели и структуры данных в КОМПАС-АВТОПРОЕКТ.

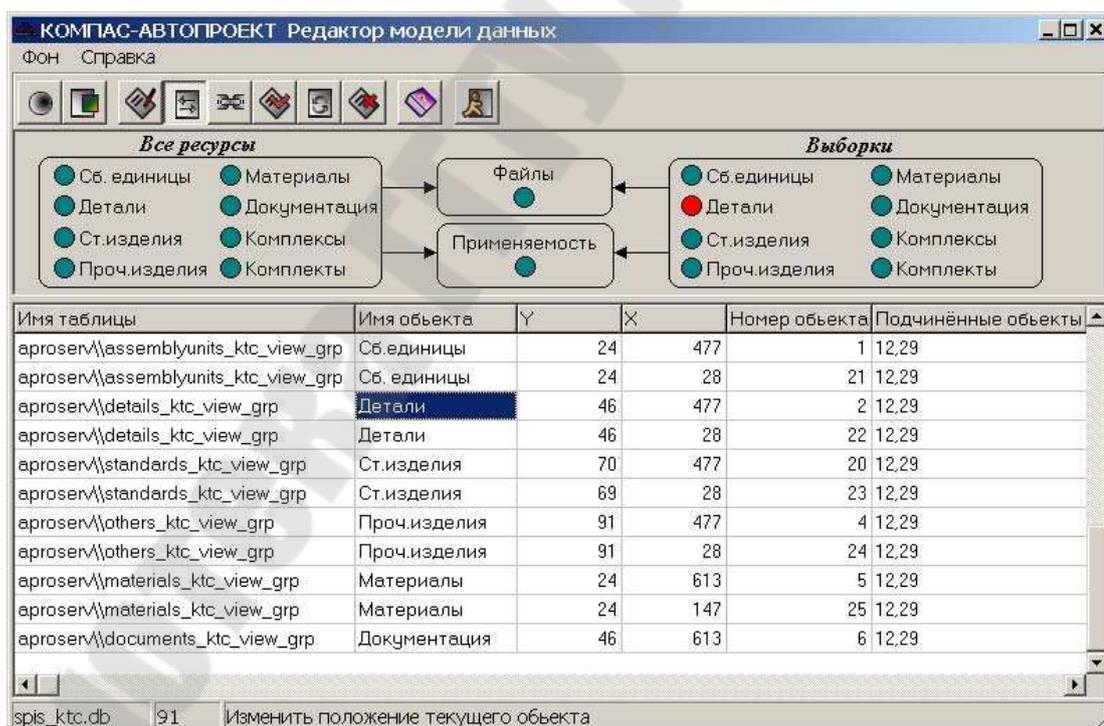


Рисунок 3.13. Редактор модели данных в КОМПАС-Автопроект

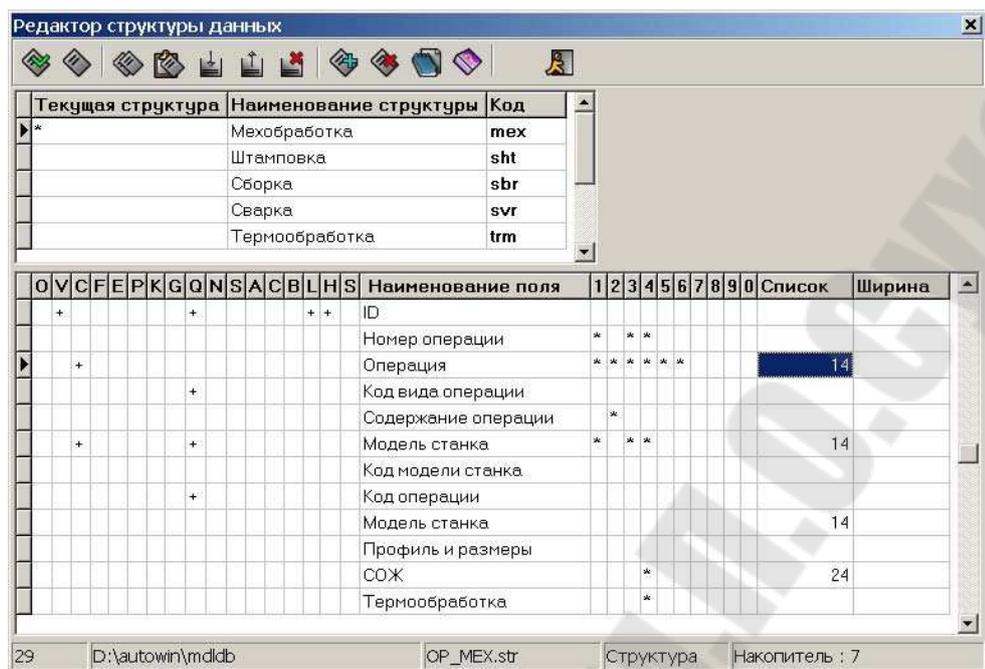


Рисунок 3.14. Редактор структуры данных в КОМПАС-Автопроект

При создании на предприятии единого комплекса автоматизации конструкторско-технологической подготовки хранения технологической информации, созданной в КОМПАС-АВТОПРОЕКТ, выполняет система управления данными об изделии ЛОЦМАН:PLM (или другая PDM/PLM система).

КОМПАС-АВТОПРОЕКТ обеспечивает:

- Сокращение сроков КТПП за счет автоматизации этапов технологической подготовки и параллельного выполнения конструкторско-технологической подготовки;
- Оптимизацию затрат труда и средств для изготовления изделия;
- Усиление конкурентоспособности предприятия за счет точного и оперативного обеспечения необходимой информации различных служб и, как следствие, своевременного выполнения заключенных контрактов.

Помимо этого:

- Автоматизированное проектирование технологических процессов для различных видов производств (механической обработки, сборки, сварки, термообработки, штамповочного производства, литья, гальванических покрытий и т.д.) или «сквозных» техпроцессов, включающих операции разных производств;

- Формирование необходимого комплекта технологической документации;
  - Ввод и управление информацией о составе изделия;
  - Централизованное ведение архива конструкторско-технологической документации;
  - Создание многовариантных расцеховочных маршрутов изготовления изделия;
  - Трудовое и материальное нормирование;
- Автоматизированное проектирование технологических процессов осуществляется в следующих режимах:
- на основе техпроцесса-аналога с автоматическим выбором соответствующей технологии из архива по различным критериям, в том числе и по конструкторско-технологическому коду детали, что обеспечивает наиболее точный подбор;
  - с использованием типового техпроцесса;
  - с использованием библиотеки типовых технологических операций и переходов.

КОМПАС-АВТОПРОЕКТ позволяет существенно расширять без участия разработчиков возможности подсистемы, настраивать автоматизированную разработку техпроцессов для новых видов производств.

Модульность архитектуры, гибкость программного и информационного обеспечения, высокие возможности настройки обеспечивают использование программного комплекса в технологических службах с быстрой адаптацией к любым производственным условиям.

### **3.4.2 КОМПАС-ШТАМП**

В общем объеме работ по технологической подготовке производства новых изделий в машино- и приборостроении проектирование и изготовление технологической оснастки (штампов, пресс-форм, приспособлений, деталей) стоит на первом месте по трудоемкости и срокам реализации этих работ (Рисунок 3.15). Поэтому многие предприятия рассматривают автоматизацию проектирования и изготовления оснастки в качестве одного из эффективных способов снижения трудоемкости и сокращения сроков ТПП.

Отличительной особенностью системы КОМПАС-ШТАМП от других САПР штампов является отсутствие ограничений на конструкции проектируемых штампов, использование одинаковой техноло-

гии работы конструктора при проектировании как оригинальных, так и типовых конструкций штампов.

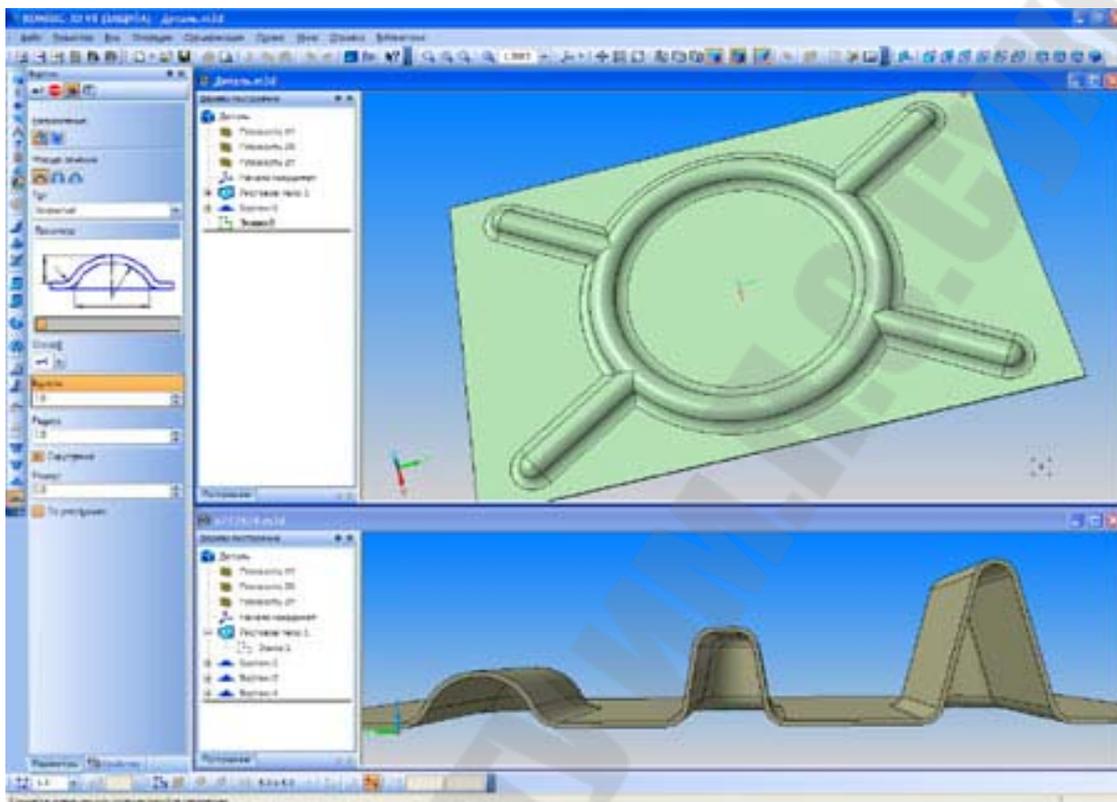


Рисунок 3.15.Проектирование детали в среде КОМПАС-ШТАМП.

При этом наиболее высокий уровень автоматизации достигается при проектировании штампов на базе стандартных и типовых блоков и пакетов. КОМПАС-ШТАМП содержит средства для автоматизированного моделирования конструкции штампа проектировщиком, набор Библиотек объектов проектирования, набор Параметрических библиотек конструктора штампов.

На ранних стадиях проектирования проектировщик формирует индивидуальную модель конструкции проектируемого штампа в виде дерева проекта конструкции, которое отображается на экране дисплея и отражает номенклатурный состав и конструктивные особенности объектов проектирования штампа, образующих конструкцию. В качестве объектов проектирования могут выступать сборочные единицы (блок, пакет и т.д.), технологические системы (система крепежа, система фиксации заготовки и т.д.), детали штампов, отдельные проектные процедуры (формирование рабочей зоны, выбор пресса). Например, проект конструкции прессформы формируется конструктором

путем выбора объектов проектирования из списков допустимых разновидностей этих объектов, предлагаемых системой КОМПАС-ШТАМП (Рисунок 3.16).

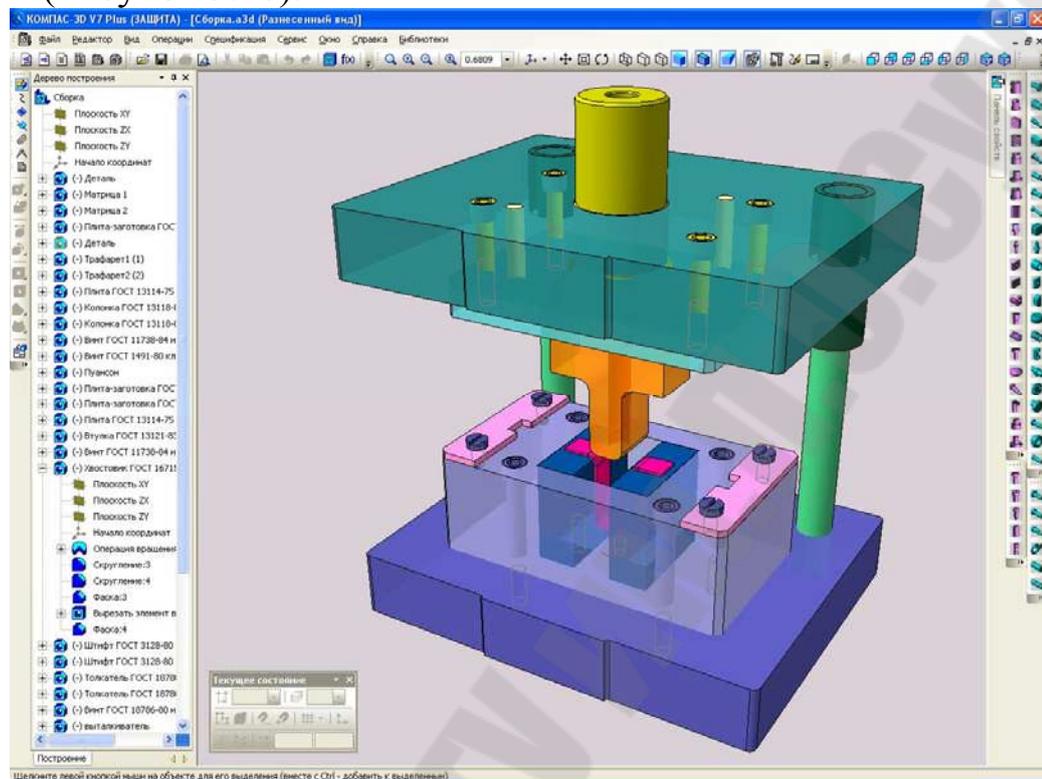


Рисунок 3.16. Проектирование прессформы в среде КОМПАС-ШТАМП

### 3.5 Работа КОМПАС с другими системами CAD/CAM/CAE

АСКОН уделяет огромное внимание обеспечению удобного и быстрого обмена информацией с другим ПО САПР, применяемым заказчиками. КОМПАС содержит различные конверторы для обмена данными с другими системами проектирования, инженерных расчетов, подготовки управляющих программ и т.д. Функции импорта данных из большинства форматов, а также некоторые функции экспорта предоставляются пользователям КОМПАС бесплатно.

К ним относятся:

- чтение графических файлов форматов DXF, DWG и IGES;
- чтение файлов трехмерных моделей форматов IGES, SAT, XT, STEP;
- запись файлов трехмерных моделей форматов IGES, SAT, XT, STEP, VRML и STL;
- запись данных спецификации в форматы DBF и Microsoft Excel;

- запись документов КОМПАС в различные растровые форматы (TIFF, GIF, JPEG, BMP, PNG, TGA);
- чтение и запись текстовых файлов форматов ASCII (DOS), ANSI (Windows); чтение текстовых файлов формата RTF.

Некоторые конверторы для экспорта и импорта данных являются отдельными компонентами системы. Используя их, можно выполнить:

- запись графических файлов форматов DXF, DWG и IGES;
  - чтение файлов формата PDIF (P-CAD);
- чтение файлов \*.model системы CATIA 4 в КОМПАС-ГРАФИК.

### 3.6 Сравнение КОМПАС и AutoCAD

Рынок предлагает широкий выбор программно-информационных средств разработчикам конструкторской документации в автоматизированном режиме. Среди них AutoCAD (США, фирма Autodesk) и КОМПАС (Россия, фирма АСКОН). Применение обеих САПР позволяют автоматизировать чертежно-графические работы, выполнять твердотельное моделирование объектов, осуществлять формирование различных графических библиотек, экспортировать файлы чертежей в иные форматы для использования другими пакетами и между собой. Обе системы открыты для модернизации.

По сравнению с AutoCAD Компас дополнительно обеспечивает:

- Возможность создания сквозного цикла проектирования: конструктор – технолог – производство. Современный этап развития информационных технологий в промышленности связан с CALS-технологиями (Continuous Acquisition and Life-cycle Support - непрерывная информационная поддержка жизненного цикла изделия или продукта), т.е. использованием технологий создания, поддержки и применения единого информационного пространства на всех этапах жизненного цикла продукции - от ее проектирования до эксплуатации и утилизации.
- Повышение производительности труда и качества конструкторских разработок, в том числе, и за счет коллективной работы в единой информационной среде;
- Автоматизацию документооборота на предприятии;
- Автоматизацию технологической конструкторской подготовки производства;

- Система КОМПАС функционирует на базе популярных операционных систем семейства Windows, поддерживает работу в сети.

- В ядро системы заложена поддержка ЕСКД, в результате не требуется приобретение дополнительных модулей. Помимо прочего, эта система обеспечивает полную поддержку ЕСКД. Эта поддержка встроена в само ядро системы, а не выполнена в виде неких дополнительных модулей, ведь на оформление готового чертежа (проставка размеров, шероховатостей, допусков формы и расположения поверхностей и т.д.) уходит подчас не меньше времени, чем на собственно графическую часть.

- Наличие системы документооборота КОМПАС-МЕНЕДЖЕР и ЛОЦМАН:PLM.

- Большое количество прикладных библиотек по различной тематике.

- КОМПАС – открытая система, позволяющая создавать собственные приложения. Важно отметить, что в семейство программ КОМПАС включен специальный пакет КОМПАС-Мастер, который дает возможность создания прикладных программ на основе базовой системы КОМПАС-График для адаптации ее к конкретным условиям применения и расширения стандартных возможностей.

- Сопровождение системы, техническая поддержка со стороны разработчика.

- Оптимально низкая стоимость системы и невысокие эксплуатационные затраты.

- русскоязычный интерфейс полный и естественный, чего часто не хватает локализованным у нас версиям зарубежных систем.

- КОМПАС - система модульная. Пользователь имеет свободу выбора при комплектации системы для снижения стартовых расходов на приобретение за счет закупки только тех модулей, которые действительно необходимы на данном этапе. Модульный характер архитектуры системы обеспечивает возможность наращивания ее возможностей за счет приобретения дополнительных модулей по мере необходимости.

- Система предлагает широкий спектр программ-конверторов, она открыта для связи с другим программным обеспечением, обеспечивает доступ к хранящейся в ее графических документах информации из других приложений и дает возможность генерировать графические документы по данным, поступающим извне.

- Техническая поддержка. Это возможность бесплатного (или со значительной скидкой) обновления закупленного ПО, возможность получить фирменную документацию, провести обучение, своевременно получать консультации. Перечень услуг АСКОН в этом направлении включает:

- многоуровневое обучение специалистов работе с системами КОМПАС;
- установку приобретенных систем КОМПАС на компьютеры;
- подключение периферийного оборудования (графопостроителей, сканеров);
- техническую поддержку по приобретенным продуктам;
- мониторинг внедрения систем (периодическое посещение предприятия);
- круглосуточный доступ к Web-серверу технической поддержки КОМПАС;
- непосредственно обучение специалистов.
- Обучение проводится в офисах АСКОН, многочисленных авторизированных Учебных центрах или непосредственно на предприятии заказчика. Всем слушателям, успешно завершившим курсы, выдаются соответствующие сертификаты.

- Практика показывает, что экономия на обучении приводит к значительным потерям времени и уменьшению эффективности дальнейшей работы. Чтобы успешно выполнять работу, надо хорошо владеть применяемым инструментом. АСКОН предлагает своим заказчикам различные по продолжительности и специализации учебные курсы.

- Для скорейшего диагностирования исправления сбойных ситуаций (от которых не застрахован ни один технически сложный современный программный продукт) необходима полная информация по ошибке и порядку действий, приводящих к ее устойчивому проявлению. Этому поможет конкретный фрагмент документа, а также сопроводительная информация – данные о версии программного продукта и операционной системы, системные файлы и т.п. – квалифицированная служба технической поддержки приложит максимум усилий для быстрого решения возникшей проблемы.

- В рамках внедренческих контрактов АСКОН обеспечивает периодическое посещение предприятия с целью анализа работ, связанных с автоматизацией КТПП и управления документооборотом,

подготовкой соответствующих предложений, демонстрацией новых решений и т.п.

- 32- (или 64) часовая программа обучения работе с комплексом на рабочем месте. АСКОН имеет развитую службу технической поддержки. Многие вопросы способны разрешить авторизованные дилеры, работающие в регионах.

- Сокращение сроков разработки за счет использования всеми участниками процесса КТПП единых справочников данных, что позволяет сформировать интегрированную среду совместной работы над проектом изделия.

- КОМПАС не просто русифицирован – он русский изначально, что позволяет конструкторам работать с исторически сложившимися терминами, а не отвлекаться на некорректный перевод иностранных понятий.

Помимо всего прочего, AutoCAD изначально разрабатывался как универсальная система для использования в самых различных отраслях производства – как в смысле области применения, так и в географическом смысле. Использование системы в том виде, в котором ее обычно получает пользователь, довольно проблематично. По крайней мере, как показывает опыт, скорость черчения будет ненамного выше, чем при бумажной технологии, в силу того, что решение постоянно возникающих проблем практически сводит на нет выигрыш по времени, который обеспечивает система. Реализация этой универсальности потребовала от разработчиков внедрения в систему средств ее настройки для данной предметной области и для национальных стандартов, что и было сделано в виде наличия большого числа системных переменных, с помощью которых пользователь может подогнать систему под свои нужды. Поскольку этот программный продукт создан за рубежом, поэтому и стандарты значительно отличаются от наших ГОСТов, ОСТов и просто традиций проектирования и оформления документации. Исчерпав возможности настройки системы с помощью переменных, блоков и других очевидных средств, немногие приступают к изучению AutoLisp – внутреннего языка системы, пытаясь с его помощью сделать систему более приближенной к нашим стандартам. То есть, как это часто бывает в реальной жизни, универсальная система оказывается хуже специализированной в данной предметной области.

Подводя итог, можно сказать, что AutoCAD – это универсальная САПР и по замыслу фирмы-разработчика она предполагает широкую

специализацию, а КОМПАС сформирован для заявленных в документации отраслей, поэтому он проще в освоении. Помимо прочего, особенности англоязычного интерфейса, сложности в изучении, отсутствия документации и реальной поддержки фирмы-разработчика являются еще некоторыми сложностями в работе с данной системой.

Безусловно, стоит напомнить еще об одном аспекте, возможно, самом главном: использование нелицензионного программного обеспечения на предприятиях недопустимо. И дело не только в юридической стороне вопроса. Практически все предприятия, которые в свое время начинали автоматизацию, прошли через этап пиратского ПО. На рабочих местах конструкторов стояли различные копии AutoCAD? Затем появилась и русскоязычная КОМПАС. Но немного позже стало ясно, что такая автоматизация экономически невыгодна. Казалось бы, парадокс, ведь затраты на оснащение нелицензионным ПО совсем невелики. Но это только на первый взгляд. Используя отдельные рабочие места САПР, мы получаем максимум замену обычных кульманов на электронные, пусть даже с возможностями трехмерного проектирования. Что же теряется?

Системы проектирования – это серьезный и довольно сложный инструмент, которым надо научиться владеть. Лишь немногие конструкторы и технологи (и в основном молодые, не обладающие пока необходимым опытом и знаниями в профессиональной области) могут самостоятельно освоить все возможности постоянно усложняющихся систем. Большинство, к сожалению, ограничивается только приобретением поверхностных знаний. Самостоятельные неграмотные настройки системы на локальных рабочих местах приводят к тому, что обмен данными даже внутри одного предприятия очень затрудняется; также серьезные проблемы возникают и при передаче данных между предприятиями, выполняющими работы над одним объектом. А это – прямые экономические потери.

Эффективно использовать систему можно только после проведения специального обучения, при наличии технической поддержки со стороны поставщика или его представителей. Особенно важна роль администратора системы, который разрабатывает, внедряет и «сопровождает» основные правила и приемы работы с системами. Понятно, что в случае отсутствия лицензии предприятие лишено и технической поддержки, и своевременных обновлений, и возможности обучить своего администратора. Например, AutoCAD со взломанной защитой очень часто «падает» в процессе работы, в «ломанном» КОМПАСе

часто происходили проблемы с нормальным выводом на бумажные носители. И это далеко не все примеры ненормальной работы нелегального ПО. Выполняя с использованием такого программного обеспечения серьезную работу, результат которой постоянно пропадает, невозможно завершить ее в срок с требуемым качеством. Это – прямые экономические потери от внеплановых остановок работы.

Помимо прочего, сегодня многие предприятия участвуют в различных конкурсах (тендерах) как внутри страны, так и за рубежом. Несложно догадаться, кого предпочтет потенциальный заказчик – предприятие, оснащенное системами «неизвестного происхождения», или то, что обладает лицензионным программным обеспечением и сертифицированными пользователями. А это (как, кстати, и репутация компании) и есть экономическая выгода. Сейчас компании стремятся сертифицировать свое производство согласно системе стандартов ISO 9001. Одним из условий получения сертификатов является использование лицензионного программного обеспечения. Сертификация нужна предприятию не сама по себе – она помогает получить новые выгодные заказы от зарубежных партнеров.

Нельзя сбрасывать со счетов и психологический аспект. Если сотрудники компании видят, что предприятие оснащает их рабочие места «по-честному», если дает им возможность освоить системы на специализированных курсах, то и отношения между коллективом и руководством переходят на совершенно иной уровень. Возникает взаимное уважение, улучшается психологический климат, и, как следствие, растет производительность труда. Для руководства предприятия обучение дает еще и возможность повысить профессиональные навыки своих сотрудников – скорость и качество работ увеличиваются, что неизбежно ведет к сокращению сроков проектирования. А это – опять экономическая выгода.

Еще одна не менее, а иногда даже более серьезная проблема. Многие пользователи не осознают опасности, скрывающейся в хорошо работающей, да к тому же недорогой версии того или иного продукта. Гарантии того, что программа не содержит вредоносных кодов и модификаций и при этом адекватно выполняется, равны практически нулю. Кто знает, чем окажется начинен подобный продукт, пройдя сквозь длинную цепочку взломщиков. Если для частных пользователей потеря данных не сулит огромных неприятностей, то крупная компания рискует потерять информацию, в том числе – конфиденциальную. Уже известны случаи, когда у предприятий, активно исполь-

зующих пиратское ПО, возникли серьезные «трудности в работе». Проверки, составление отчетов и оправдательных бумаг, а часто и судебные разбирательства неизбежно ведут к замедлению деятельности руководящего звена предприятия.

В заключение отметим основные преимущества внедрения КОМПАС на машиностроительном предприятии. Формирование CALS – технологии из программных продуктов КОМПАС обеспечивает:

- создание интерактивной среды совместной разработки;
- создание структурированного электронного описания изделия, интегрирующего всю информацию, которая может использоваться в масштабах расширенного предприятия, в том числе поставщиками и сервисными организациями;
- электронное определение всех этапов жизненного цикла изделия: формулировка потребностей в материалах, концептуальное проектирование, производство, распространение и поддержка;
- формирование и передачу данных как в автоматизированные системы управления предприятием, так и в системы оперативного планирования и диспетчирования.
- защиту данных и гарантированный доступ к информации об изделии для каждого пользователя с соответствующими правами.

Работая в среде КОМПАС, специалисты всех производств, задействованных в реализации крупного, наукоёмкого проекта, имеют возможность в любой момент получить актуальные данные об изделии и процессах работы над ним. Они могут визуализировать сложные сборки; получать информацию об изменении конфигурации, о планируемых и фактических ресурсах.

Таким образом, комплекс позволяет превратить электронные данные об изделии в важнейший бизнес-ресурс предприятия, который обеспечивает разработку и сопровождение конкурентоспособной продукции, сокращая время ее выхода на рынок, повышая качество и снижая затраты на проектирование, производство и поддержку.

Мы постепенно приходим к пониманию того, что вопрос автоматизации производственного цикла требует комплексного и взвешенного подхода. Можно вложить огромные средства на приобретение отдельных, в каком-то смысле лучших САПР, а затем нести убытки в попытках увязать разнородные компоненты, пытаясь организовать единое информационное пространство.

Задачи производства усложняются, соответственно повышаются и требования к разработчикам программных продуктов. Специалисты-управленцы считают, что САПР промышленного предприятия следует ориентировать на распространенный западный стандарт – функционирование всех служб предприятия и смежников в рамках ЕИП, что вполне обеспечивается средствами КОМПАС.

В базовой конфигурации КОМПАС представляет собой интегрированную систему, реализованную на единой информационной платформе и удачно совмещающую следующие компоненты:

- графический редактор КОМПАС-График и систему трехмерного твердотельного моделирования КОМПАС 3D – инструменты простые, доступные в использовании, надежные и удобные;
- богатый набор библиотек стандартных элементов и справочников, выполненных в соответствии со стандартами ЕСКД;
- расчетно-графические модули, удачно вписывающиеся в общую систему проектирования.

Потенциал КОМПАС определяется сочетанием хороших функциональных возможностей, простотой освоения, налаженной фирменной инфраструктурой обучения, внедрения и технической поддержки. Добавив к этому вполне приемлемую цену за КОМПлекс Автоматизированных Систем и его сопровождение, получим хорошую альтернативу решения проблем автоматизации для предприятий, занятых проектированием, конструированием и производством изделий машиностроения.

## **4. Интегрированная система прочностного анализа**

### **4.1 Теоретические основы механики твердых тел**

#### **4.1.1 Элементы теории упругости**

Механика твердых тел, рассматриваемых как сплошные упругие среды, составляет содержание теории упругости.

Введем важные в теории упругости понятия: перемещения точек, деформации и напряжения твердого тела как сплошной среды. Каждую точку тела будем описывать вектором  $\vec{r}$  в декартовой системе координат  $XYZ$ :  $\vec{r} = \{x, y, z\}$ . Под воздействием приложенных внешних сил твердое тело, вообще говоря, как-то деформируется, так что новое положение той же точки тела будет описываться новым

вектором:  $\vec{r}' = \{x', y', z'\}$ . Будем называть вектором перемещения вектор  $\vec{u}$ , равный:

$$\vec{u} = \vec{r}' - \vec{r} \quad (4.1)$$

В результате в деформированном теле возникает поле вектора перемещения:  $\vec{u} = \vec{u}(\vec{r}), \vec{r} \in \Omega$  ( $\Omega$  - область пространства, занимаемая телом), но описывать деформацию тела полем  $\vec{u}(\vec{r})$  не совсем удобно, так как при параллельном переносе или повороте тела как твердого целого в нем не возникает никаких деформаций, в то время как поле  $\vec{u}(\vec{r}) \neq 0$ .

Деформация тела должна описывать изменения расстояний между точками тела.

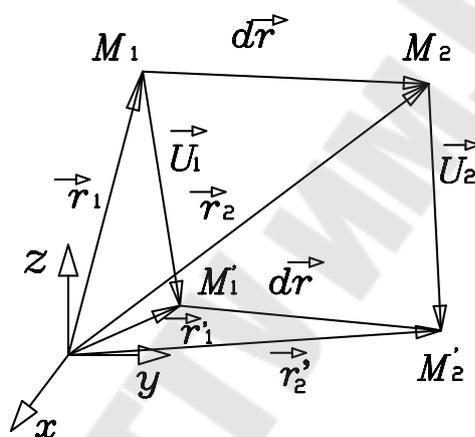


Рисунок 4.1

На Рисунок 4.1 показаны две бесконечно близкие точки тела до деформации: точка  $M_1$ , описываемая вектором  $\vec{r}_1 = \{x_1, y_1, z_1\}$  и точка  $M_2$ , описываемая вектором  $\vec{r}_2 = \{x_2, y_2, z_2\}$ . В результате деформирования тела первая точка заняла новое положение т.  $M_1'$  с вектором  $\vec{r}_1' = \{x_1', y_1', z_1'\}$ , а вторая т.  $M_2'$  с вектором  $\vec{r}_2' = \{x_2', y_2', z_2'\}$ , так что вектора перемещений равны для точки  $M_1$ :

$$\vec{u}_1 = \vec{r}_1' - \vec{r}_1 = \{x_1' - x_1, y_1' - y_1, z_1' - z_1\}$$

а для точки  $M_2$ :

$$\vec{u}_2 = \vec{r}_2' - \vec{r}_2 = \{x_2' - x_2, y_2' - y_2, z_2' - z_2\}.$$

До деформации расстояние между двумя точками  $M_1$  и  $M_2$  описывалось бесконечно малым вектором:  $d\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ , а после деформации - вектором:  $d\vec{r}' = \vec{r}_2' - \vec{r}_1' = d\vec{r} + \vec{u}_2 - \vec{u}_1$ .

Вектора  $d\vec{r}$  и  $d\vec{r}'$  также приведены на Рисунок 1.1 и выписанные здесь формулы легко следуют из этого рисунка на основе алгебры векторов. Очевидно, что расстояние  $dl$  между точками  $M_1$  и  $M_2$  до деформирования тела равно длине вектора  $d\vec{r}$ , а расстояние  $dl'$  между этими же точками после деформации - длине вектора  $d\vec{r}'$ . Известно, что длина вектора  $\vec{a}$ , имеющего в декартовой системе координат

$XYZ$  проекции -  $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ , равна:  $\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

Поэтому:  $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ , а

$$dl' = \sqrt{((x_2 - x_1) + (u_{x2} - u_{x1}))^2 + ((y_2 - y_1) + (u_{y2} - u_{y1}))^2 + ((z_2 - z_1) + (u_{z2} - u_{z1}))^2}$$

Отсюда следует, что

$$dl'^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

$$dl'^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 + 2 \circ ((x_2 - x_1) \circ (u_{x2} - u_{x1}) + (y_2 - y_1) \circ (u_{y2} - u_{y1}) + (z_2 - z_1) \circ (u_{z2} - u_{z1})) + (u_{x2} - u_{x1})^2 + (u_{y2} - u_{y1})^2 + (u_{z2} - u_{z1})^2$$

Учитывая выражение для  $dl'^2$  и тот факт, что в силу бесконечной близости точек  $M_1$  и  $M_2$  справедливы равенства:

$$u_{x2} = u_{x1} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \circ (x_2 - x_1) + \frac{\partial u_y}{\partial y} \circ (y_2 - y_1) + \frac{\partial u_z}{\partial z} \circ (z_2 - z_1)$$

$$u_{y2} = u_{y1} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \circ (x_2 - x_1) + \frac{\partial u_y}{\partial y} \circ (y_2 - y_1) + \frac{\partial u_z}{\partial z} \circ (z_2 - z_1)$$

$$u_{z2} = u_{z1} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \circ (x_2 - x_1) + \frac{\partial u_y}{\partial y} \circ (y_2 - y_1) + \frac{\partial u_z}{\partial z} \circ (z_2 - z_1)$$

получим следующую формулу для  $dl'^2$ :

$$\begin{aligned}
dl'^2 = dl^2 + 2 \circ & \left( \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \circ \left( \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 \right) \right) \circ (x_2 - x_1)^2 + \right. \\
& \left( \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{1}{2} \circ \left( \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 \right) \right) \circ (y_2 - y_1)^2 + \\
& \left( \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{2} \circ \left( \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 \right) \right) \circ (z_2 - z_1)^2 + \\
& \left( \frac{1}{2} \circ \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \circ \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \right) \circ (x_2 - x_1) \circ (y_2 - y_1) + \\
& \left( \frac{1}{2} \circ \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \circ \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right) \circ (x_2 - x_1) \circ (z_2 - z_1) + \\
& \left. \left( \frac{1}{2} \circ \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \circ \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right) \circ (y_2 - y_1) \circ (z_2 - z_1) \right)
\end{aligned} \tag{4.2}$$

В широком классе задач технической механики деформации тела оказываются малыми, т.е.:

$$|u_x| \ll l; |u_y| \ll l; |u_z| \ll l; \left| \frac{\partial u_x}{\partial x} \right| \ll l; \left| \frac{\partial u_y}{\partial y} \right| \ll l, \text{ и т.д.}$$

где  $l$  - характерный размер задачи.

Поэтому мы можем пренебречь в (4.2) квадратичными по производным от перемещений членами вроде  $\frac{\partial u_x}{\partial y} \circ \frac{\partial u_x}{\partial z}$  по сравнению с линейными членами вроде  $\frac{\partial u_x}{\partial z}$ . Тогда формула (4.2) примет вид:

$$\begin{aligned}
dl'^2 = dl^2 + 2 \circ & \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \circ (x_2 - x_1)^2 + \frac{\partial u_y}{\partial y} \circ (y_2 - y_1)^2 + \frac{\partial u_z}{\partial z} \circ (z_2 - z_1)^2 + \right. \\
& \frac{1}{2} \circ \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \circ (x_2 - x_1) \circ (y_2 - y_1) + \\
& \frac{1}{2} \circ \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \circ (x_2 - x_1) \circ (z_2 - z_1) + \\
& \left. \frac{1}{2} \circ \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \circ (y_2 - y_1) \circ (z_2 - z_1) \right)
\end{aligned}$$

Видим, что изменение расстояния между двумя бесконечно близкими точками упругого тела в результате его деформации одно-

значно определяется первыми производными от перемещений по координатам, а также расстоянием между точками до деформации.

Указанные первые производные от перемещений по координатам принято в теории упругости записывать в виде симметричной матрицы (3x3):

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \circ \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} \circ \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \circ \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} \circ \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \circ \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} \circ \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \circ \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} \circ \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \circ \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} \circ \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \circ \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} \circ \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

компоненты, которой называются тензором деформации и обозначаются:  $u_{\alpha\beta}$ , ( $\alpha, \beta = x, y, z$ ).

Нетрудно видеть, что компоненты тензора деформации могут быть записаны в виде:

$$u_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \circ \left( \frac{\partial u_\alpha}{\partial \beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial \alpha} \right); (\alpha, \beta = x, y, z) \quad (4.3)$$

Очевидно, что тензор деформации  $u_{\alpha\beta}$  является симметричным, т.е. для любой пары индексов ( $\alpha, \beta$ ) справедливо:  $u_{\alpha\beta} = u_{\beta\alpha}$

Кроме того, тензор деформации  $u_{\alpha\beta}$  является тензором второго ранга, т.к. характеризуется двумя индексами.

Симметричный тензор второго ранга в трехмерном пространстве имеет всего 6 независимых компонент. Поэтому естественно вместо тензора  $u_{\alpha\beta}$ , имеющего  $3 \times 3 = 9$  компонент, ввести 6-и компонентную величину. Поступим следующим образом.

В технической механике принято записывать компоненты  $u_{\alpha\beta}$  в виде символического "вектора деформации"  $\vec{\varepsilon}$ , имеющего 6 компонент:

$$\vec{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}, \text{ где}
\begin{cases} \varepsilon_x = u_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \varepsilon_y = u_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \varepsilon_z = u_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \gamma_{xy} = 2 \circ u_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \\ \gamma_{xz} = 2 \circ u_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \gamma_{yz} = 2 \circ u_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \end{cases} \quad (4.4)$$

Видим, что  $\vec{\varepsilon}$  - это просто столбец, состоящий из компонент  $u_{\alpha\beta}$ . Первые три компоненты вектора представляют собой относительные изменения длин бесконечно малых отрезков, первоначально параллельных осям координат  $XYZ$ . Последние три компоненты вектора являются деформациями сдвига, по величине равными изменениям углов между элементарными отрезками, первоначально параллельными осям координат, указанным в индексах.

В результате деформации упругого тела в нем возникают внутренние силы, стремящиеся вернуть тело в недеформированное состояние. Эти внутренние силы по своей природе являются поверхностными и называются внутренними напряжениями.

В теории упругости показывается, что напряжения могут быть математически описаны симметричным тензором второго ранга  $\sigma_{\alpha\beta}$ , ( $\alpha, \beta = x, y, z$ ).

Как и тензор деформации  $u_{\alpha\beta}$ , тензор напряжений  $\sigma_{\alpha\beta}$  может быть представлен в виде симметричной матрицы (3x3):

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}, \sigma_{xy} = \sigma_{yx}, \sigma_{xz} = \sigma_{zx}, \sigma_{yz} = \sigma_{zy}$$

Поэтому вместо тензора напряжений  $\sigma_{\alpha\beta}$  удобно ввести, по аналогии с "вектором деформаций"  $\vec{\varepsilon}$ , 6-и компонентную величину, состоящую из независимых компонент тензора напряжений.

В технической механике принято вводить символический "вектор напряжений"  $\vec{\sigma}$ , имеющий 6 компонент:

$$\vec{\sigma} = \begin{cases} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{cases}, \text{ где } \begin{cases} \sigma_x = \sigma_{xx} \\ \sigma_y = \sigma_{yy} \\ \sigma_z = \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} = \sigma_{xy} \\ \tau_{xz} = \sigma_{xz} \\ \tau_{yz} = \sigma_{yz} \end{cases} \quad (4.5)$$

Первые три компоненты вектора  $\vec{\sigma}$  являются нормальными напряжениями (на площадках, перпендикулярных к осям координат  $XYZ$ ), а последние три компоненты - касательными напряжениями.

На Рисунок 4.2 демонстрируется направление компонент вектора  $\vec{\sigma}$ .

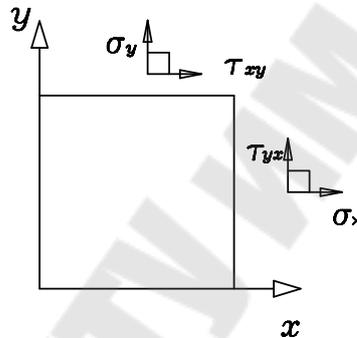


Рисунок 4.2

### Закон Гука

Как известно, при достаточно малых деформациях твердого тела справедлив закон Гука. Для задачи растяжения стержня он утверждает линейную связь между внешней силой  $F$  и возникающим перемещением  $U$ .

В теории упругости принят обобщенный закон Гука, устанавливающий линейную зависимость компонент тензора (внутренних) напряжений  $\sigma_{\alpha\beta}$  от компонент тензора деформации  $u_{\alpha\beta}$ .

Для однородной изотропной среды эта зависимость однозначно определяется следующими упругими параметрами:

$E$  - модуль упругости;

$\mu$  - коэффициент Пуассона ( $0 < \mu < 1/2$ );

Введем также:  $G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)}$  - модуль сдвига.

Указанная зависимость  $\sigma_{\alpha\beta}$  от  $u_{\alpha\beta}$  в терминах компонент  $\vec{\sigma}$  и  $\vec{\varepsilon}$  векторов дается следующими формулами:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{(1+\mu) \circ (1-2 \circ \mu)} \circ ((1-\mu) \circ (\varepsilon_x + \mu \circ (\varepsilon_y + \varepsilon_z))); \\ \sigma_y &= \frac{E}{(1+\mu) \circ (1-2 \circ \mu)} \circ ((1-\mu) \circ (\varepsilon_y + \mu \circ (\varepsilon_x + \varepsilon_z))); \\ \sigma_z &= \frac{E}{(1+\mu) \circ (1-2 \circ \mu)} \circ ((1-\mu) \circ (\varepsilon_z + \mu \circ (\varepsilon_x + \varepsilon_y))); \\ \tau_{xy} &= G \circ \gamma_{xy}; \tau_{xz} = G \circ \gamma_{xz}; \tau_{yz} = G \circ \gamma_{yz};\end{aligned}\quad (4.6)$$

В матричной форме уравнения (4.6) имеют вид:

$$\vec{\sigma} = [E] \circ \vec{\varepsilon} \quad (4.7)$$

Здесь:  $[E]$  - матрица упругости;

$$[E] = \frac{1}{(1+\mu) \circ (1-2 \circ \mu)} \circ \begin{bmatrix} (1-\mu) & \mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & (1-\mu) & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & \mu & (1-\mu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

### Энергия деформации упругого тела

Для вывода формулы энергии деформации упругого тела  $U$  заметим, что в соответствии с законом сохранения энергии работа внешних сил  $\delta A$  равна приращению энергии деформации  $\delta U$  (диссипацией энергии пренебрегаем)  $\delta A = \delta U$ :

Пусть работу по деформированию тела совершают объемные силы  $R$ . Как известно из механики, работа  $\delta A$  силы  $F$  на перемещении  $\delta u$  равна:  $F \circ \delta u$ . В элементарном объеме  $dV$  действует сила  $\vec{R} \circ dV$ .

Поэтому элементарная работа объемных сил на перемещении равна:

$$d\delta A = \vec{R} \circ \delta \vec{u} \circ dV = (R_x \circ \delta u_x + R_y \circ \delta u_y + R_z \circ \delta u_z) \circ dV,$$

а для всего объема тела:  $\delta A = \int \vec{R} \circ \delta \vec{u} \circ dV$ , где интегрирование ведется по всему объему тела.

В теории упругости показывается, что уравнение равновесия сплошной упругой среды имеет вид:

$$\frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_{\beta}} + R_{\alpha} = 0, (\alpha, \beta = x, y, z)$$

Поэтому выражение для элементарной работы  $\delta A$  примет вид:

$$\delta A = - \int_V \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_{\beta}} \circ \delta u_{\alpha} dV, (\alpha, \beta = x, y, z)$$

Здесь и дальше принято суммирование по паре одинаковых индексов. Нетрудно видеть, что в сумме, стоящей под знаком интеграла, всего  $3 \times 3 = 9$  слагаемых.

Преобразуем подынтегральное выражение:

$$\frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_{\beta}} \circ \delta u_{\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} (\sigma_{\alpha\beta} \circ \delta u_{\alpha}) - \sigma_{\alpha\beta} \circ \frac{\partial \delta u_{\alpha}}{\partial x_{\beta}}$$

По теории Гаусса интеграл по объему тела  $\int \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} (\sigma_{\alpha\beta} \circ \delta u_{\alpha}) \circ dV$  равен интегралу по поверхности тела:

$$\int \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} (\sigma_{\alpha\beta} \circ \delta u_{\alpha}) \circ dV = \oint_S \sigma_{\alpha\beta} \circ \delta u_{\alpha} \circ dS$$

Рассматривая неограниченную среду, не деформированную на бесконечности, устремим границы тела в бесконечность; тогда можно считать, что на поверхности тела напряжения:  $\sigma_{\alpha\beta} = 0$

Поэтому формула для  $\delta A$  примет вид:

$$\delta A = \int \sigma_{\alpha\beta} \circ \frac{\partial \delta u_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} \circ dV = \frac{1}{2} \int \sigma_{\alpha\beta} \circ \left( \frac{\partial \delta u_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial \delta u_{\beta}}{\partial x_{\alpha}} \right) \circ dV$$

Последнее равенство справедливо вследствие симметрии тензора напряжений  $\sigma_{\alpha\beta}$ . Индекс объема  $V$  опущен.

Учитывая формулу (1.3) для тензора деформации и линейность операции дифференцирования, последнюю формулу запишем в виде:

$$\delta A = \int \sigma_{\alpha\beta} \circ \delta u_{\alpha\beta} \circ dV, (\alpha, \beta = x, y, z)$$

Так как  $\delta A = \delta U$ , то имеем для энергии деформации  $\delta U$ :

$$\delta U = \int \sigma_{\alpha\beta} \circ \delta u_{\alpha\beta} \circ dV, (\alpha, \beta = x, y, z)$$

Полученная формула справедлива для деформации произвольной сплошной упругой среды и является, поэтому самой общей.

Получим теперь формулу для энергии деформации упругой среды, подчиняющейся закону Гука. В последнем случае компоненты  $\sigma_{\alpha\beta}$  зависят линейно от компонент  $u_{\alpha\beta}$ .

Тогда после интегрирования от нулевых деформаций до конечных деформаций  $u_{\alpha\beta}$  с учетом равенства:

$$\int_0^1 x \circ dx = \frac{u^2}{2}$$

получим формулу для энергии произвольно деформированного тела, подчиняющегося закону Гука:

$$U = \frac{1}{2} \circ \int \sigma_{\alpha\beta} \circ u_{\alpha\beta} \circ dV, (\alpha, \beta = x, y, z)$$

С учетом симметрии тензоров  $\sigma_{\alpha\beta}$  и  $u_{\alpha\beta}$  сумма  $\sigma_{\alpha\beta} \circ u_{\alpha\beta}$  равна:

$$\sigma_{\alpha\beta} \circ u_{\alpha\beta} = \sigma_{xx} \circ u_{xx} + \sigma_{yy} \circ u_{yy} + \sigma_{zz} \circ u_{zz} + 2 \circ \sigma_{xy} \circ u_{xy} + 2 \circ \sigma_{xz} \circ u_{xz} + 2 \circ \sigma_{yz} \circ u_{yz}$$

Используя формулы (1.4) и (1.5) для связи компонент  $\vec{\varepsilon}$  с компонентами  $u_{\alpha\beta}$ , а также компонент  $\vec{\sigma}$  с компонентами  $\sigma_{\alpha\beta}$ , последнее равенство перепишем в виде:  $\sigma_{\alpha\beta} \circ u_{\alpha\beta} = \vec{\sigma} \circ \vec{\varepsilon}$

Если ввести транспонированный вектор - строку  $\vec{\varepsilon}^T = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}\}$ , то для энергии деформации получим формулу:

$$U = \frac{1}{2} \circ \int \vec{\varepsilon}^T \circ \vec{\sigma} \circ dV \quad (4.9)$$

Для однородной упругой изотропной среды справедлива формула (4.7), связывающая  $\vec{\sigma}$  и  $\vec{\varepsilon}$ :  $\vec{\sigma} = [E] \circ \vec{\varepsilon}$ :

где:  $[E]$ - матрица упругости однородного изотропного тела, определяемая формулой (4.8)

В результате из формул (4.7) и (4.9) следует окончательная общеупотребительная формула для энергии деформации однородной упругой изотропной среды, подчиняющейся закону Гука:

$$U = \frac{1}{2} \circ \int \vec{\varepsilon}^T \circ [E] \circ \vec{\varepsilon} \circ dV \quad (4.10)$$

Последняя формула является очень важной и на нее следует обратить особое внимание.

## Граничные условия

Полученные в этом пункте формулы справедливы в любой точке упругого тела как сплошной среды. На границе (поверхности) тела справедливы дополнительные, так называемые граничные условия.

Граничные условия получим на основе равенства, на границе тела силы  $\sigma_{\alpha\beta} \circ n_\beta$ , связанной с внутренними напряжениями  $\vec{\sigma}$  ( $\vec{n} = \{n_x, n_y, n_z\}$  - вектор нормали к поверхности), приложенной к телу внешней поверхностной силе  $P$ :

$$\sigma_{\alpha\beta} \circ n_\beta = P_\alpha, (\alpha, \beta = x, y, z) \quad (4.11)$$

В случае если поверхность тела свободна от действия внешних сил, формула (4.11) принимает вид:

$$\sigma_{\alpha\beta} \circ n_\beta = 0, (\alpha, \beta = x, y, z) \quad (4.12)$$

### Вариационный принцип Лагранжа

Уравнения равновесия упругого тела под воздействием внешних сил могут быть определены в механике с помощью вариационного принципа Лагранжа. Этот принцип утверждает, что уравнения равновесия получаются из функционала:

$$W = U - A \quad (4.13)$$

где:  $U$  - энергия деформации тела, определяемая формулой (4.10);

$A$  - энергия работы внешних сил.

В случае если действуют объемные силы  $\vec{R}$  и поверхностные силы  $\vec{p}$ , эта работа равна:

$$A = \int \vec{u}^T \circ \vec{R} \circ dV + \oint \vec{u}^T \circ \vec{p} \circ dS \quad (4.14)$$

Итак, функционал:  $W = W[\vec{u}]$  - зависит от поля вектора перемещения  $\vec{u}(\vec{r})$ ,  $r \in \Omega$

Пусть  $\delta\vec{u} = \delta\vec{u}(\vec{r})$  - вариация (приращение)  $\vec{u}(\vec{r})$ . Тогда функционал  $W$  получает приращение:  $\Delta W = W[\vec{u} + \delta\vec{u}] - W[\vec{u}]$

**Определение** Часть приращения функционала  $W$ , линейная по вариации  $\vec{u}$ , называется первой вариацией функционала  $W$  и обозначается  $\delta W$ .

Принцип Лагранжа утверждает, что на истинном поле перемещений  $\vec{u}(\vec{r})$  первая вариация  $\delta W$  равна нулю:

$$\delta W = 0 \quad (4.15)$$

В качестве примера рассмотрим функционал  $W$  вида:

$$W[u(x)] = \frac{1}{2} \circ \int_a^b \left[ (u(x))^2 + \left( \frac{du}{dx} \right)^2 \right] \circ dx \quad (4.16)$$

где функция  $u(x)$  зависит от единственной переменной  $x$ , заданной на отрезке  $[a, b]$ .

Пусть функция  $u(x)$  получает приращение  $\delta u(x)$ ,  $x \in [a, b]$ .

Тогда приращение функционала  $\Delta W$  равно:

$$\Delta W = W[u(x) + \delta u(x)] - W[u(x)] = \frac{1}{2} \int_a^b \left[ (u(x) + \delta u(x))^2 + \left( \frac{du}{dx} + \frac{d\delta u}{dx} \right)^2 \right] dx - \frac{1}{2} \int_a^b \left[ (u(x))^2 + \left( \frac{du}{dx} \right)^2 \right] dx$$

После возведения в квадрат сумм:

$$(u(x) + \delta u(x))^2 = (u(x))^2 + 2 \circ u(x) \circ \delta u(x) + (\delta u(x))^2;$$

$$\left( \frac{du}{dx} + \frac{d\delta u}{dx} \right)^2 = \left( \frac{du}{dx} \right)^2 + 2 \circ \frac{du}{dx} \circ \frac{d\delta u}{dx} + \left( \frac{d\delta u}{dx} \right)^2,$$

и сокращения одинаковых членов формула для  $\Delta W$  примет вид:

$$\Delta W = \int_a^b \left[ (u(x) + \delta u(x)) + \frac{du}{dx} \circ \frac{d\delta u}{dx} \right] dx + \frac{1}{2} \int_a^b \left[ (\delta u(x))^2 + \left( \frac{d\delta u}{dx} \right)^2 \right] dx$$

Первый интеграл в этой формуле линейно зависит от приращения  $\delta u(x)$ . Поэтому, согласно определению, первая вариация функционала равна:

$$\delta W = \int_a^b \left[ (u(x) + \delta u(x)) + \frac{du}{dx} \circ \frac{d\delta u}{dx} \right] dx$$

Принцип Лагранжа утверждает, что для "истинной" функции  $u(x)$  первая вариация функционала  $\delta W$  равна нулю для всех допустимых вариаций  $\delta u(x)$  "истинной" функции, т.е. для любой функции  $\delta u(x)$  ( $\delta u(a) = \delta u(b) = 0$ ) справедливо равенство:

$$\delta W = \int_a^b \left[ (u(x) + \delta u(x)) + \frac{du}{dx} \circ \frac{d\delta u}{dx} \right] dx = 0$$

Покажем существование такой функции  $u(x)$ :

$$\frac{du}{dx} \circ \frac{d\delta u}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{du}{dx} \circ \delta u(x) \right) - \frac{d^2 u}{dx^2} \circ \delta u(x);$$

$$\int_a^b \frac{d}{dx} \left( \frac{du}{dx} \circ \delta u(x) \right) dx = \frac{du}{dx} \circ \delta u(x) \Big|_a^b = 0, \text{ т.к. } \delta u(a) = \delta u(b) = 0$$

Поэтому получим уравнение:

$$\delta W = \int_a^b \left[ (u(x) - \frac{d^2 u}{dx^2}) \circ \delta u(x) \right] dx = 0$$

- для любой вариации  $\delta u(x)$ . Последнее может быть справедливо только при условии:

$$\left[ (u(x) - \frac{d^2u}{dx^2}) = 0, x \in [a, b] \right] \quad (4.17)$$

Итак, мы получили для искомой функции  $u(x)$  дифференциальное уравнение второго порядка, называемое в вариационном исчислении уравнением Лагранжа. Зная значения  $u(x)$  на концах отрезка  $[a, b]$ , с помощью этого уравнения можно однозначно определить  $u(x)$ .

Действительно, общее решение полученного уравнения имеет вид:

$$u(x) = C_1 \circ e^x + C_2 \circ e^{-x}$$

где:  $C_1$  и  $C_2$  - произвольные константы.

Пусть:  $u(a) = u_1, u(b) = u_2$  .

Тогда для определения  $C_1$  и  $C_2$  получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} C_1 \circ e^a + C_2 \circ e^{-a} = u_1 \\ C_1 \circ e^b + C_2 \circ e^{-b} = u_2 \end{cases}$$

Решая ее, найдем:

$$\begin{cases} C_1 = \frac{u_2 \circ e^b - u_1 \circ e^a}{e^{2 \circ b} - e^{2 \circ a}} \\ C_2 = \frac{u_1 \circ e^a - u_2 \circ e^b}{e^{2 \circ b} - e^{2 \circ a}} \end{cases}$$

Рассмотренный здесь пример позволил нам проиллюстрировать идеи вариационного исчисления: конкретизировать понятие приращения функционала  $\Delta W$ , первой вариации функционала  $\delta W$ , уравнение Лагранжа и др.

В дальнейшем мы будем использовать вариационный принцип Лагранжа для систем с конечным числом степеней свободы, которые и рассматриваются в МКЭ.

Там, как мы увидим, уравнения Лагранжа принимают достаточно простой вид.

Уравнения (4.10) - (4.15) определяют уравнения равновесия упругого тела для деформаций, определяемых законом Гука.

Изложенные результаты теории упругости в дальнейшем будут широко использоваться для развития применения МКЭ в механике.

## 4.2 Одномерные, двумерные и трехмерные модели упругих тел

Полученные в п.4.1 результаты справедливы для произвольного упругого тела и определяют общую трехмерную модель. Но существуют особые случаи, когда вместо трехмерной модели тела более удобно рассматривать одномерную или двумерную модели.

Именно, если протяженность тела в двух его направлениях много меньше протяженности в третьем направлении, то такое тело, называемое дальше стержнем, удобно представлять одномерной моделью. В одномерной модели (стержень) все основные величины, определяемые в теории упругости (перемещения, тензор деформаций, тензор напряжений и др.), зависят только от одной переменной, меняющейся вдоль стержня.

На Рисунок 4.3(а) стержень представлен в виде криволинейной линии, представляющей собой ось реального тела. Под сечением стержня в данной точке оси стержня будем понимать сечение тела плоскостью, нормальной к оси стержня в данной точке. Площадь сечения вдоль оси стержня может быть переменной величиной.

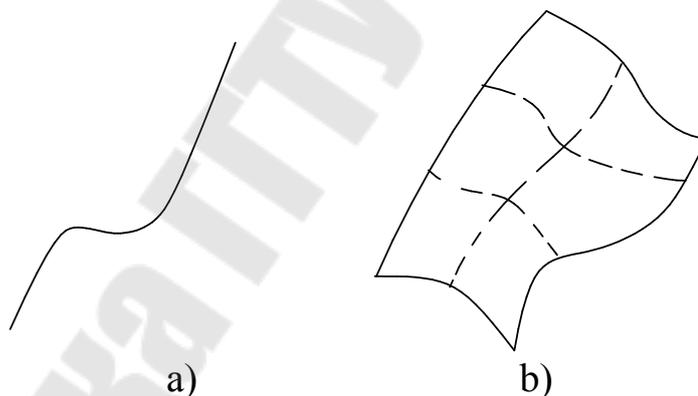


Рисунок 4.3

Особое внимание в дальнейшем мы обратим на случай прямого стержня постоянного сечения, так как в теории сопротивления материалов (сопромат) детально развита теория такого стержня. Это так называемая балочная теория [9].

Другой случай имеет место, когда тело в одном направлении имеет гораздо меньшую протяженность, чем в двух остальных. Для такого тела имеет смысл рассматривать двумерную модель, называемую в дальнейшем оболочкой.

На Рисунок 4.3 (б) представлена произвольной формы оболочка в виде неплоской поверхности, представляющей собой срединную

(т.е. равноудаленную от "нижней" и "верхней" поверхностей) поверхность оболочки. Для оболочки естественным образом определяется ее толщина, как ее протяженность вдоль направления, нормального к поверхности оболочки в данной точке.

Мы будем рассматривать оболочки постоянной толщины.

В случае плоской оболочки можно различать три типа напряженного состояния, называемые в дальнейшем: "мембрана", "пластина" и "оболочка".

### 4.3 Основные положения МКЭ

Рассмотрим тело, нагруженное произвольным образом. В результате действия приложенных сил тело как-то деформируется, и эта деформация может быть описана с помощью поля перемещений:  $\vec{u} = \vec{u}(\vec{r})$ , согласно п. 4.1. Найти равновесное поле перемещений  $\vec{u} = \vec{u}(\vec{r})$  - вот задача теории упругости. Метод конечных элементов (МКЭ) позволяет приближенно найти поле перемещений упругого тела. Основная идея МКЭ состоит в том, что тело разбивается на совокупность достаточно малых подобластей, называемых в дальнейшем конечными элементами. Эта процедура называется дискретизацией тела. В пределах каждого конечного элемента поле перемещений аппроксимируется с помощью так называемых функций формы по известным значениям перемещений  $\vec{u}(\vec{r})$ ,  $r = 1, 2, \dots, n$  ( $n$  - число узлов конечного элемента) в узлах элемента. В целях иллюстрировать эту идею на Рисунок 4.4 изображена плоская треугольная область, разбитая на конечные элементы треугольной формы с узлами в вершинах треугольников.

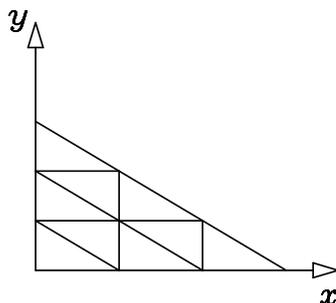


Рисунок 4.4

Заметим, что материал данного п.3 справедлив не только для МКЭ в механике, но и для других областей применения МКЭ, например, для задач теплопроводности твердых тел, где вместо поля пере-

мещений в качестве основной неизвестной величины служит поле температур:  $T = T(\vec{r})$ .

С помощью функций формы аппроксимируются как геометрия конечного элемента, так и поля неизвестных величин, например поле перемещений  $\vec{u} = \vec{u}(x, y)$ . В общем случае функции формы, употребляемые для аппроксимации геометрии, отличаются от функций форм, используемых для аппроксимации полей неизвестных величин.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Конечным элементом будем называть некоторую малую область тела в совокупности с заданными в ней функциями формы, аппроксимирующими геометрию конечного элемента и заданные на нем неизвестные величины.

Для описания конечного элемента необходимо ввести систему координат. Употребляемые в системе ИСПА системы координат являются правыми декартовыми и описаны в [ИСПА]. Из этих систем координат мы будем рассматривать две:

- 1) глобальная декартовая система координат  $XYZ$ ;
- 2) локальная система координат конечного элемента  $UVW$ .

Если первая система координат существует всегда, то последняя определяется только для элементов стержней и двумерных элементов.

На Рисунок 4.5 показан пример выбора локальных систем координат для элемента стержня и треугольного элемента.

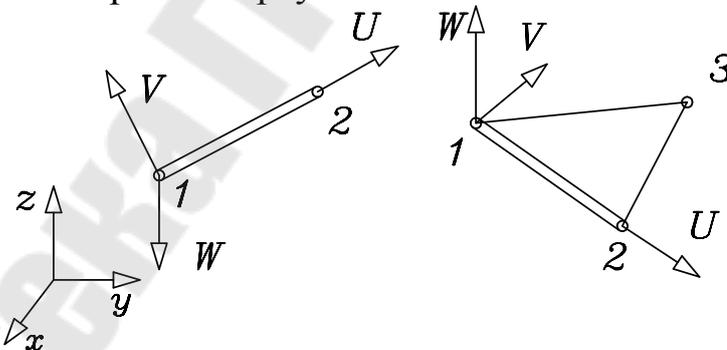


Рисунок 4.5

Цифрами обозначены номера узлов элементов.

Ось  $U$  направлена от узла 1 к узлу 2 и имеет начало в узле 1. Для стержня оси  $V$  и  $W$  являются главными осями. Понятие главных осей будет введено в разделе 4.2. Для двумерных элементов ось  $W$  направлена в положительное полупространство оси  $Z$ , а ось  $V$  находится в плоскости расположения элемента и направлена в соответствии с тем фактом, что  $UVW$  - правая система координат [ИСПА].

Перейдем теперь к более подробному рассмотрению аппроксимации неизвестных величин. Например, для плоской задачи в качестве неизвестной величины выступает 2-х компонентное поле перемещений  $\vec{u} = \vec{u}(\vec{r})$ , которое мы будем записывать или в виде вектора-столбца:

$$u = \begin{bmatrix} u_x(x, y) \\ u_y(x, y) \end{bmatrix}$$

или в виде транспонированного вектора-строки:  $\vec{u}^T = [u_x u_y]$ .

В каждом узле конечного элемента перемещения в МКЭ считаются неизвестными и определяются так называемым вектором степеней свободы узла, обозначаемым  $\vec{v}_r$ :

$$\vec{v}_r = \begin{bmatrix} v_{xr} \\ v_{yr} \end{bmatrix}, (r = 1, 2, \dots, n)$$

где:  $n$  - число узлов конечного элемента. Компоненты  $v_{xr}, v_{yr}$  называются степенями свободы узла.

Вместе с векторами  $v_r, (r = 1, 2, \dots, n)$ , в МКЭ вводится вектор степеней свободы всего элемента  $\vec{U}^{(e)}$ :

$$\vec{U}^{(e)} = \begin{Bmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{v}_n \end{Bmatrix}$$

В нашем случае число степеней свободы конечного элемента равно  $2np$ .

Искомое поле перемещений в МКЭ аппроксимируется тогда следующим образом:

$$\begin{cases} u_x(x, y) = \sum_{r=1}^n \vec{\psi}_r(x, y) \circ v_{xr} \\ u_y(x, y) = \sum_{r=1}^n \vec{\psi}_r(x, y) \circ v_{yr} \end{cases}$$

или в векторной форме:

$$\vec{u}(x, y) = \sum_{r=1}^n \vec{\psi}_r(x, y) \circ \vec{v}_r \quad (4.18)$$

Здесь:  $\vec{\psi}_r(x, y)$  - функция формы конечного элемента, относящаяся к узлу  $r$ .

Основное свойство функций формы состоит в том, что  $\vec{\psi}_r = 1$  в узле  $s = r$  и  $\vec{\psi}_r = 0$  в узле  $s \neq r$ , ( $s, r = 1, 2, \dots, n$ ).

Из этого свойства сразу же следует что:

$$\vec{u}(x_r, y_r) = \vec{v}_r, (r = 1, 2, \dots, n) \quad (4.19)$$

т.е. в узлах элемента аппроксимированное с помощью (4.19) поле перемещений  $\vec{u}(x, y)$  действительно совпадает со своими значениями в узлах элемента  $\vec{v}_r$ .

В МКЭ принято в качестве функций формы  $\vec{\psi}_r$  использовать полиномы. Указанное основное свойство функций форм позволяет однозначно определять вид полинома.

Более подробно этот вопрос будет рассмотрен дальше в приложениях МКЭ.

В результате вместо необходимости определять непрерывную величину  $\vec{u}(x, y)$ , имеющую бесконечное число степеней свободы, в МКЭ требуется определить конечное число неизвестных, являющихся степенями свободы системы в узлах конечно-элементной сетки.

Это осуществляется путем решения алгебраической системы уравнений, являющейся уравнениями Лагранжа для вариационного принципа, который может быть построен не только в механике, но и в других задачах.

Введем понятие совместности двух конечных элементов. Два конечных элемента будем называть совместными, если в механике - поле перемещений  $\vec{u}(\vec{r})$  (в задачах теплопроводности - поле температур  $\vec{T}(\vec{r})$ ) не терпит разрыва на общей границе этих элементов.

Таким образом, если все элементы конечно-элементной сетки являются совместными, то поле перемещений  $\vec{u}(\vec{r})$  (поле температур  $\vec{T}(\vec{r})$ ) будет непрерывным во всей области решаемой задачи. Совместность элементов имеет также тесную связь со сходимостью решения конечно-элементной задачи к точному при сгущении конечно-элементной сетки.

Перейдем теперь к изложению МКЭ в механике.

#### 4.4 Матрица жесткости элемента. Уравнение равновесия элемента

Рассмотрим для общности трехмерную модель тела. Пусть мы провели дискретизацию тела на трехмерные конечные элементы. В пределах каждого конечного элемента, в соответствии с п. 3., искомое поле перемещений  $\vec{u}(\vec{r})$ :

$$u(x, y, z) = \begin{bmatrix} u_x(x, y, z) \\ u_y(x, y, z) \\ u_z(x, y, z) \end{bmatrix}$$

аппроксимируется по своим значениям  $\vec{v}_r, (r=1,2,\dots,n)$  в узлах элемента с помощью функций формы элемента  $\vec{\psi}_r(x, y, z)$ :

$$\vec{u}(x, y, z) = \sum_{r=1}^n \vec{\psi}_r(x, y, z) \circ \vec{v}_r \quad (4.20)$$

Тогда вектор деформации  $\vec{\varepsilon}(x, y, z)$ , определяемый через перемещения по формуле (4.20), будет иметь следующую аппроксимацию:

$$\vec{\varepsilon}(x, y, z) = \sum_{r=1}^n [\beta_r] \circ \vec{v}_r = [\beta] \circ \vec{U}^{(e)} \quad (4.21)$$

$$[\beta_r] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_r}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \psi_r}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \psi_r}{\partial z} \\ \frac{\partial \psi_r}{\partial y} & \frac{\partial \psi_r}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial \psi_r}{\partial z} & 0 & \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial \psi_r}{\partial z} & \frac{\partial \psi_r}{\partial y} \end{bmatrix}; [\beta] = [[\beta_1][\beta_2] \dots [\beta_n]]$$

Здесь:  $\vec{U}^{(e)}$  - вектор степеней свободы элемента (3хn компонент);  $[\beta]$  - матрица деформирования элемента.

Итак, согласно (4.21), вектор деформации аппроксимируется в пределах конечного элемента с помощью матрицы деформирования  $[\beta]$  и вектора степеней свободы элемента  $\vec{U}^{(e)}$ .

Как мы знаем из п. 4.1, энергия деформации упругого тела  $U$  определяется формулой:

$$U = \frac{1}{2} \int \vec{\varepsilon}^T \circ [E] \circ \vec{\varepsilon} \circ dV \quad (4.22)$$

где:  $\vec{\varepsilon}$  - 6-и компонентный вектор деформации;

$[E]$  - матрица упругости однородной изотропной среды.

Интегрирование ведется по объему тела. Тогда в силу аддитивности интеграла энергия деформации тела  $U$  равна сумме энергий деформации элементов  $U^{(e)}$ , на которые разбито тело:

$$U = \sum_e U^{(e)} = \sum_e \frac{1}{2} \int_{v_e} \vec{\varepsilon}^T \circ [E] \circ \vec{\varepsilon} \circ dV \quad (4.23)$$

С помощью (4.2) получим  $U^{(e)}$ :

$$U^{(e)} = \frac{1}{2} \circ \vec{U}^{(e)T} \circ [K^{(e)}] \circ \vec{U}^{(e)} \quad (4.24)$$

где:  $[K^{(e)}] = \int_{v_e} [\beta]^T \circ [E] \circ [\beta] \circ dV$  - матрица жесткости элемента.

Матрица жесткости элемента является важнейшим понятием в приложении МКЭ в механике.

Так как полученная здесь формула для матрицы жесткости является общей, выпишем ее еще раз:

$$[K^{(e)}] = \int_{v_e} [\beta]^T \circ [E] \circ [\beta] \circ dV \quad (4.25)$$

Матрица жесткости  $[K^{(e)}]$  имеет размерность  $(N \times N)$ , где  $N$  - число степеней свободы конечного элемента.

Матрица  $[\beta]$  - есть матрица деформирования элемента.

Собственно говоря, конечный элемент можно считать построенным, если построена его матрица жесткости.

Пусть:  $\vec{F}_r^{(e)}$ ,  $(r=1,2,\dots,n)$  - силы, действующие в узлах конечного элемента.

Тогда работа этих сил на узловых перемещениях, в соответствии с определением работы в механике, равна:

$$A^{(e)} = \sum_{r=1}^n \vec{F}_r^{(e)} \circ \vec{v}_r = \vec{U}^{(e)T} \circ \vec{F}^{(e)} \quad (4.26)$$

где:  $\vec{F}^{(e)T} = [\vec{F}_1^{(e)T}, \vec{F}_2^{(e)T} \dots \vec{F}_n^{(e)T}]$

Как следует из принципа Лагранжа, конечный элемент будет характеризоваться потенциалом  $W^{(e)}$ :

$$W^{(e)} = U^{(e)} - A^{(e)} \quad (4.27)$$

С помощью (4.24) и (4.26) получим:

$$W^{(e)} = \frac{1}{2} \vec{U}^{(e)T} \circ [K^{(e)}] \circ \vec{U}^{(e)} - \vec{U}^{(e)T} \circ \vec{F}^{(e)} \quad (4.28)$$

Видим что  $W^{(e)} = W^{(e)}(\vec{U}^{(e)})$  - есть просто функция от  $\vec{U}^{(e)}$ , так что первая вариация  $\delta W^{(e)}$  будет просто равна дифференциалу

$$\delta W^{(e)} = dW^{(e)} = \frac{\partial W^{(e)}}{\partial \vec{U}^{(e)}} \circ d\vec{U}^{(e)}$$

В соответствии с принципом Лагранжа первая вариация  $\delta W^{(e)}$ , а значит и дифференциал  $dW^{(e)}$  равны нулю.

Но равенство нулю дифференциала функции возможно тогда, когда равны нулю все ее первые производные, т.е. уравнение Лагранжа для МКЭ в механике примет вид:

$$\frac{\partial W^{(e)}}{\partial \vec{U}^{(e)}} = 0 \Rightarrow [K^{(e)}] \circ \vec{U}^{(e)} - \vec{F}^{(e)} = 0 \quad (4.29)$$

В результате мы получили уравнения равновесия конечного элемента, представляющие собой систему неоднородных линейных алгебраических уравнений относительно неизвестного вектора степеней свободы элемента  $\vec{U}^{(e)}$ :

$$[K^{(e)}] \circ \vec{U}^{(e)} = \vec{F}^{(e)} \quad (4.30)$$

Итак, мы нашли, что узловые силы  $\vec{F}^{(e)}$  и узловые перемещения  $\vec{U}^{(e)}$  конечного элемента связаны между собой с помощью матрицы жесткости элемента  $[K^{(e)}]$ .

Этим и определяется особое значение матрицы жесткости конечного элемента.

Заметим, что из формулы (4.25), определяющей матрицу жесткости элемента, следует ее симметричность:

$$K_{rs}^{(e)} = K_{sr}^{(e)} \quad (\text{для любой пары индексов } r \text{ и } s).$$

Кроме того, так как энергия деформации элемента  $W^{(e)}$  всегда положительна и равна нулю только при отсутствии деформаций, то из (4.24) следует, что матрица жесткости элемента  $[K^{(e)}]$  положительно определенная.

Этими двумя свойствами исчерпываются основные свойства матрицы жесткости элемента.

#### 4.5 Глобальная матрица жесткости. Уравнения равновесия конструкции

Выше было введено понятие матрицы жесткости конечного элемента  $[K^{(e)}]$  и построены уравнения связи узловых перемещений элемента  $\vec{U}^{(e)}$  с узловыми силами  $\vec{F}^{(e)}$ :

$$[K^{(e)}] \circ \vec{U}^{(e)} = \vec{F}^{(e)}$$

Эти уравнения можно рассматривать как уравнения равновесия конечного элемента.

Наша задача состоит в нахождении уравнений равновесия всей конструкции, которая в результате дискретизации области моделируется конечно-элементной системой. Заметим, что вся конструкция описывается в единой глобальной декартовой системе координат  $XYZ$ , тогда как конечные элементы (только одномерные и двумерные) описываются каждый в своей локальной системе координат  $UVW$ . Поэтому предварительно необходимо осуществить переход от матрицы жесткости  $[K^{(e)}]$  в локальной системе координат  $UVW$  к матрице жесткости  $[\tilde{K}^{(e)}]$  в глобальной системе координат  $XYZ$ . Пусть:  $\{\vec{e}_x \ \vec{e}_y \ \vec{e}_z\}$  - единичные направляющие вектора (орты) осей  $X, Y, Z$  глобальной системы координат  $XYZ$ , а  $\{\vec{e}_u \ \vec{e}_v \ \vec{e}_w\}$  - единичные направляющие вектора (орты) осей  $U, V, W$  локальной системы координат  $UVW$ .

Как и всякий вектор, вектора  $\{\vec{e}_u \ \vec{e}_v \ \vec{e}_w\}$  можно разложить по ортогональному базису  $\{\vec{e}_x \ \vec{e}_y \ \vec{e}_z\}$ :

$$\begin{cases} \vec{e}_u = \alpha_{ux} \circ \vec{e}_x + \alpha_{uy} \circ \vec{e}_y + \alpha_{uz} \circ \vec{e}_z \\ \vec{e}_v = \alpha_{vx} \circ \vec{e}_x + \alpha_{vy} \circ \vec{e}_y + \alpha_{vz} \circ \vec{e}_z \\ \vec{e}_w = \alpha_{wx} \circ \vec{e}_x + \alpha_{wy} \circ \vec{e}_y + \alpha_{wz} \circ \vec{e}_z \end{cases} \quad (4.31)$$

или в матричной форме:

$$\begin{Bmatrix} \vec{e}_u \\ \vec{e}_v \\ \vec{e}_w \end{Bmatrix} = [\alpha] \circ \begin{Bmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{Bmatrix}, \text{ где } [\alpha] = \begin{bmatrix} \alpha_{ux} & \alpha_{uy} & \alpha_{uz} \\ \alpha_{vx} & \alpha_{vy} & \alpha_{vz} \\ \alpha_{wx} & \alpha_{wy} & \alpha_{wz} \end{bmatrix} - \text{матрица}$$

перехода от глобальной системы координат (г.с.к) к локальной системе координат (л.с.к). Дальше нам будет полезна также тензорная форма записи:

$$\vec{e}_i = \alpha_{ik} \circ \tilde{\vec{e}}_k \quad (4.32)$$

(по немому индексу  $k$  ведется суммирование),

где:  $i = U, V, W$  - индекс осей л.с.к.

$k = X, Y, Z$  - индекс осей г.с.к.

$\vec{e}_i = \{\vec{e}_u \quad \vec{e}_v \quad \vec{e}_w\}$  - орты л.с.к.

$\tilde{\vec{e}}_k = \{\vec{e}_x \quad \vec{e}_y \quad \vec{e}_z\}$  - орты г.с.к.

Помножив формулы (4.32) справа и слева на  $\vec{e}_j = \alpha_{jl} \circ \tilde{\vec{e}}_l$  (по немому индексу  $l$  ведется суммирование), получим:

$$(\vec{e}_i \circ \vec{e}_j) = \alpha_{ik} \circ \alpha_{jl} \circ (\vec{e}_k \circ \tilde{\vec{e}}_l)$$

В силу ортогональности и единичной длины ортов имеем:

$$(\vec{e}_i \circ \vec{e}_j) = \delta_{ij}, (\tilde{\vec{e}}_k \circ \tilde{\vec{e}}_l) = \delta_{kl}$$

где:  $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } j = i \\ 0, & \text{если } j \neq i \end{cases}$  - символ Кронекера.

Отсюда получим:  $\delta_{ij} = \alpha_{ik} \circ \alpha_{jl} \circ \delta_{kl} = \alpha_{ik} \circ \alpha_{jk} = \alpha_{ik} \circ \alpha^{T}_{kj}$

или:  $[I] = [\alpha] \circ [\alpha]^T$  ( $[I]$ - единичная матрица)

Пользуясь определением обратной матрицы  $[\alpha]^{-1}([\alpha] \circ [\alpha]^{-1} = [I])$ , получим следующее свойство матрицы  $[\alpha]$ :

$$[\alpha]^T = [\alpha]^{-1} \quad (4.33)$$

т.е. транспонированная матрица  $[\alpha]^T$  равна обратной матрице  $[\alpha]^{-1}$ .

Свойство (4.33) есть общее свойство матриц перехода для вращения системы координат.

Вектор степеней свободы элемента  $\vec{U}^{(e)}$  составлен из векторов степеней свободы каждого узла -  $\vec{v}_r$  ( $r=1,2,\dots,n$ , где  $n$  - число узлов). В общем случае:

$$\vec{v}_r = \begin{Bmatrix} \vec{u}_r \\ \vec{g}_r \end{Bmatrix}$$

где:  $\vec{u}_r^T = \{u_{xr} \quad u_{yr} \quad u_{zr}\}$  - вектор перемещений узла  $r$ ;

$\vec{g}_r^T = \{g_{xr} \quad g_{yr} \quad g_{zr}\}$  - вектор угла поворота в узле

Таким образом, вектор  $\vec{U}^{(e)}$  составлен из обычных векторов трехмерного пространства, каждый из которых может быть разложен по г.с.к., например:

$$\vec{u} = \tilde{\vec{u}}_i \circ \tilde{\vec{e}}_i, (i = x, y, z)$$

Пользуясь формулами (4.32) и (4.33), получим:

$$\vec{u} = \tilde{u}_i \circ \tilde{e}_i = \tilde{u}_i \circ \alpha_{ik}^{-1} \circ \tilde{e}_k = \tilde{u}_i \circ \alpha_{ik}^T \circ \tilde{e}_k, (i = x, y, z; k = u, v, w)$$

С другой стороны, в л.с.к. имеем:

$$\vec{u} = u_k \circ \vec{e}_k, (k = u, v, w)$$

Сравнив последние две формулы, получим:

$$u_k = \tilde{u}_i \circ \alpha_{ik}^T = \alpha_{ki} \circ \tilde{u}_i$$

или в векторной форме:

$$\begin{Bmatrix} u_u \\ u_v \\ u_w \end{Bmatrix} = [\alpha] \circ \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} \quad (4.34)$$

Здесь:  $\begin{Bmatrix} u_u \\ u_v \\ u_w \end{Bmatrix}$  - компоненты вектора перемещений узла в л.с.к., а

$\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix}$  - компоненты вектора перемещений в г.с.к.

Аналогично для вектора угла поворота:  $\begin{Bmatrix} \vartheta_u \\ \vartheta_v \\ \vartheta_w \end{Bmatrix} = [\alpha] \circ \begin{Bmatrix} \vartheta_x \\ \vartheta_y \\ \vartheta_z \end{Bmatrix}$

В результате вектор  $\vec{U}^{(e)}$  в л.с.к. может быть выражен через вектор  $\tilde{U}^{(e)}$  в г.с.к.:

$$\vec{U}^{(e)} = [G] \circ \tilde{U}^{(e)} \quad (4.35)$$

где:  $[G] = \begin{bmatrix} [\alpha] & & & \\ & [\alpha] & & \\ & & \dots & \\ & & & [\alpha] \end{bmatrix}$  - ленточная матрица перехода для вектора степеней свободы элемента.

Выразим теперь матрицу жесткости элемента  $[\tilde{K}^{(e)}]$  в г.с.к. через матрицу жесткости элемента  $[K^{(e)}]$  в л.с.к. [3]. Для этого заметим, что энергия деформации элемента  $U^{(e)}$  является инвариантной относительно поворота системы координат величиной, поэтому:

$$U^{(e)} = \frac{1}{2} \circ \vec{U}^{(e)T} \circ [K^{(e)}] \circ \vec{U}^{(e)} = \frac{1}{2} \circ \tilde{U}^{(e)T} \circ [\tilde{K}^{(e)}] \circ \tilde{U}^{(e)} \quad (4.36)$$

Подставив в равенство (4.36) формулу (4.35), получим:

$$U^{(e)} = \frac{1}{2} \circ \tilde{U}^{(e)T} \circ ([G]^T \circ [K^{(e)}] \circ [G]) \circ \tilde{U}^{(e)} = \frac{1}{2} \circ \tilde{U}^{(e)T} \circ [\tilde{K}^{(e)}] \circ \tilde{U}^{(e)}$$

откуда следует формула:

$$[\tilde{K}^{(e)}] = [G]^T \circ [K^{(e)}] \circ [G] \quad (4.37)$$

Последняя формула определяет матрицу жесткости элемента  $[\tilde{K}^{(e)}]$  в г.с.к.

Матрица жесткости  $[\tilde{K}^{(e)}]$  определяет соотношение между силами и перемещениями в узлах элемента в глобальной системе координат, введенной для исследования конструкции в целом. Теперь осталось объединить матрицы жесткости  $[\tilde{K}^{(e)}]$  отдельных элементов в глобальную матрицу жесткости  $[K]$  для всей конструкции [3].

Рассмотрим для примера типичный узел  $r$  внутри плоской конструкции (Рисунок 4.6 (а))

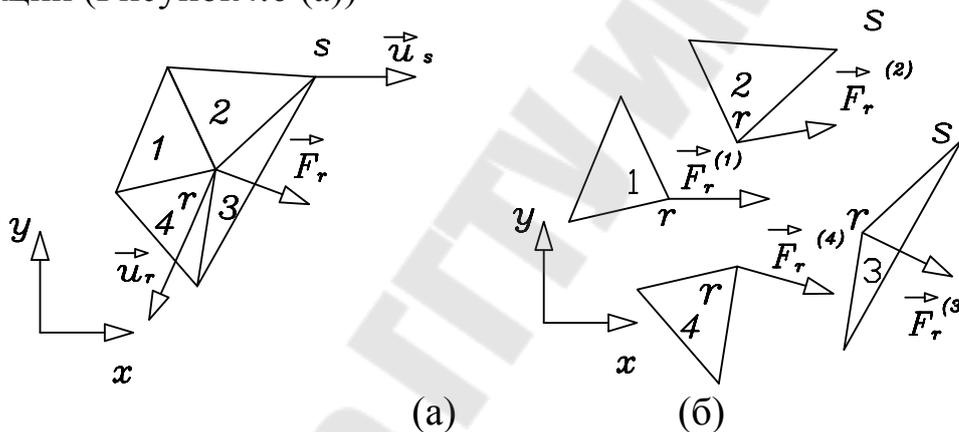


Рисунок 4.6

На Рисунок 4.6 (а) и (б) показаны только те элементы, которые имеют своим общим узлом узел  $r$ , причем на Рисунок 4.6 (б) элементы для удобства разнесены в стороны.

На Рисунок 4.6 (а) показаны сила  $\vec{F}_r$  в узле  $r$  и перемещение узла  $\vec{u}_r$ , а на Рисунок 4.6 (б) показаны силы  $\{\vec{F}_r^{(1)} \quad \vec{F}_r^{(2)} \quad \vec{F}_r^{(3)} \quad \vec{F}_r^{(4)}\}$  в узле  $r$  каждого из элементов 1, 2, 3 и 4.

Для всех элементов перемещение узла  $r$  общее и равно  $\vec{u}_r$ . Тогда сила  $\vec{F}_r$  в узле  $r$  равна:

$$\vec{F}_r = \vec{F}_r^{(1)} + \vec{F}_r^{(2)} + \vec{F}_r^{(3)} + \vec{F}_r^{(4)}$$

т.е. сумме сил для узла  $r$  от каждого элемента. Выделим также узел  $s$  и перемещение  $\vec{u}_s$  в нем.

Так как справедливы равенства:

$$\begin{aligned}\vec{F}_r^{(1)} &= \tilde{k}_{rr}^{(1)} \circ \vec{u}_r + \dots \\ \vec{F}_r^{(2)} &= \tilde{k}_{rr}^{(2)} \circ \vec{u}_r + \tilde{k}_{rs}^{(2)} \circ \vec{u}_s + \dots \\ \vec{F}_r^{(3)} &= \tilde{k}_{rr}^{(3)} \circ \vec{u}_r + \tilde{k}_{rs}^{(3)} \circ \vec{u}_s + \dots \\ \vec{F}_r^{(4)} &= \tilde{k}_{rr}^{(4)} \circ \vec{u}_r + \dots\end{aligned}$$

то имеем:

$$\vec{F}_r = \left( \sum_{i=1}^4 \tilde{k}_{rr}^{(i)} \right) \circ \vec{u}_r + (\tilde{k}_{rs}^{(2)} + \tilde{k}_{rs}^{(3)}) \circ \vec{u}_s + \dots \quad (4.38)$$

или

$$\vec{F}_r = K_{rr} \circ \vec{u}_r + K_{rs} \circ \vec{u}_s + \dots$$

где:  $K_{rr}, K_{rs}$  - элементы глобальной матрицы жесткости.

Итак, из формулы (4.38) следует что:

1) диагональные компоненты глобальной матрицы жесткости вроде  $K_{rr}$  равны сумме диагональных компонентов локальных матриц жесткости  $\tilde{k}_{rr}^{(e)}$  тех элементов, которые имеют узел  $r$  общим узлом (в нашем случае это элементы 1,2,3 и 4);

2) недиагональные компоненты глобальной матрицы жесткости вроде  $K_{rs}$  ( $K_{rs} = K_{sr}$ ) равны сумме соответствующих им недиагональных компонент локальных матриц жесткости  $\tilde{k}_{rs}^{(e)}$  тех элементов, которые имеют узлы  $r$  и  $s$  общими узлами (в нашем случае это элементы 2 и 3).

Формально мы можем записать:

$$[K] = \sum_e [\tilde{k}^{(e)}] \quad (4.39)$$

где правила суммирования в (4.39) даны выше.

Матрица  $[K]$  - симметричная, т.е.:  $[K] = [K]^T$

В результате получаем уравнения равновесия всей конструкции:

$$[K] \circ \vec{U} = \vec{F} \quad (4.40)$$

где:  $[K]$  - глобальная матрица жесткости;

$\vec{F}$  - вектор силовых факторов в конструкции;

$\vec{U}$  - вектор степеней свободы конструкции.

Векторы  $\vec{F}$  и  $\vec{U}$  определены в г.с.к. и составлены из векторов силовых факторов  $\vec{F}_r$  и перемещений  $\vec{u}_r$ , соответственно в узлах конечно - элементной сетки.

Размерность глобальной матрицы жесткости  $[K]$  равна  $(N \times N)$ , где  $N$  - число степеней свободы всей конструкции.

Таким образом, зная силовые факторы  $\vec{F}_r$  в узлах конечно - элементной модели конструкции, можно с помощью уравнений равновесия (4.40) найти вектор степеней свободы конструкции  $\vec{U}$ .

#### 4.6 Численное интегрирование в МКЭ

При нахождении матрицы жесткости элемента или узловых сил мы сталкиваемся с необходимостью вычислять интегралы вида:

$$\int_{-1}^1 f(\xi) \circ d\xi; \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) \circ d\xi \circ d\eta; \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta, \zeta) \circ d\xi \circ d\eta \circ d\zeta$$

В силу сложности подынтегральных функций в общем случае взять эти интегралы аналитически не удастся. Поэтому для их нахождения в МКЭ используют численные методы интегрирования. Рассмотрим сначала самый простой случай одномерного интеграла:

$$\int_{-1}^1 f(\xi) \circ d\xi \quad (4.41)$$

В численных методах интегрирования интеграл (4.41) заменяется приближенно на сумму:

$$\int_{-1}^1 f(\xi) \circ d\xi \approx \sum_{i=1}^n a_i \circ f(\xi_i) \quad (4.42)$$

где:  $\xi_i$  - выбранные точки интегрирования  $(-1 \leq \xi_i \leq 1 ; i = 1, 2, \dots, n)$ ;

$a_i$  - весовые коэффициенты.

Различные численные методы предлагают так или иначе определять  $\xi_i$  и  $a_i$ , но все они сходятся в том, что при  $n \rightarrow \infty$  выполняется предельное условие:

$$\sum_{i=1}^n a_i \circ f(\xi_i) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 f(\xi) \circ d\xi \quad (4.43)$$

Так как вычисления подынтегральной функции, например, для матрицы жесткости, является весьма трудоемкой задачей, в МКЭ наиболее желательны такие численные методы, которые обеспечивали бы наибольшую точность при наименьшем числе точек интегрирования. В этом смысле очень хорошим является метод Гаусса [6].

В методе Гаусса величины  $\xi_i$  и  $a_i$  выбираются таким образом, чтобы формула (4.42) представляла собой точное равенство для функции  $f(\xi)$  вида  $: 1, \xi, \xi^2, \dots, \xi^m$ . Так как число варьируемых величин в

методе Гаусса равно  $2n$ , где  $n$  - число точек интегрирования, то максимальный порядок интегрирования:  $m = 2n - 1$ . Тогда  $2n$  величин  $\xi_i$  и  $a_i$  будут определены в результате решения системы  $2n$  алгебраических уравнений.

Рассмотрим примеры:

1)  $n = 1, m = 1$

$$a_1 = \int_{-1}^1 1 \circ d\xi; a_2 \circ \xi_1 = \int_{-1}^1 \xi \circ d\xi \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 2 \\ a_1 \circ \xi_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 2 \\ \xi_1 = 0 \end{cases}$$

2)  $n = 2, m = 3$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = \int_{-1}^1 1 \circ d\xi \\ a_1 \circ \xi_1 + a_2 \circ \xi_2 = \int_{-1}^1 \xi \circ d\xi \\ a_1 \circ \xi_1^2 + a_2 \circ \xi_2^2 = \int_{-1}^1 \xi^2 \circ d\xi \\ a_1 \circ \xi_1^3 + a_2 \circ \xi_2^3 = \int_{-1}^1 \xi^3 \circ d\xi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + a_2 = 2 \\ a_1 \circ \xi_1 + a_2 \circ \xi_2 = 0 \\ a_1 \circ \xi_1^2 + a_2 \circ \xi_2^2 = \frac{2}{3} \\ a_1 \circ \xi_1^3 + a_2 \circ \xi_2^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ \xi_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \xi_2 = -\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

В таблице 4.1 приведены результаты расчетов для  $n = 1, 2, 3$ .

Таблица 4.1

$n$	$a_i, i = 1, 2, \dots, n$	$\xi_i, i = 1, 2, \dots, n$
1	$a_1 = 2$	$\xi_1 = 0$
2	$a_1 = a_2 = 1$	$\xi_2 = -\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$
3	$a_1 = a_3 = \frac{5}{9}, a_2 = \frac{8}{9}$	$\xi_1 = -\xi_3 = -\frac{\sqrt{3}}{5}, \xi_2 = 0$

Рассмотрим теперь двумерный интеграл:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) \circ d\xi \circ d\eta \quad (4.44)$$

Производя в интеграле (4.44) сначала интегрирование по  $\xi$  ( $\eta \equiv const$ ), получим с помощью (4.42):

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) \circ d\xi \circ d\eta \approx \sum_{i=1}^{n_1} a_i \circ \int_{-1}^1 f(\xi_i, \eta) \circ d\eta \quad (4.45)$$

где:  $n_1$ - число точек Гаусса в направлении  $\xi$ .

Численно интегрируя оставшиеся одномерные интегралы, получим из (4.45):

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) \circ d\xi \circ d\eta \approx \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} a_i \circ a_j \circ f(\xi_i, \eta_j) \quad (4.46)$$

где:  $n_2$  - число точек Гаусса в направлении  $\eta$ .

Аналогично для тройного интеграла:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta, \zeta) \circ d\xi \circ d\eta \circ d\zeta \approx \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \sum_{k=1}^{n_3} a_i \circ a_j \circ a_k \circ f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \quad (4.47)$$

где:  $n_1, n_2, n_3$  - число точек Гаусса в направлениях  $\xi, \eta, \zeta$  соответственно.

Очень важным является вопрос о выборе числа точек интегрирования. Максимально допустимый порядок интегрирования в трехмерном случае определяется требованием, чтобы интеграл:

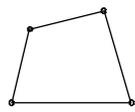
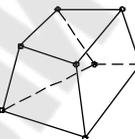
$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |J(\xi, \eta, \zeta)| \circ d\xi \circ d\eta \circ d\zeta \quad (4.48)$$

представляющий собой объем элемента, вычислялся бы точно.

В противном случае даже при сгущении конечно-элементной сетки не будет сходимости конечно-элементного решения к точному вследствие неверного вычисления объема.

В таблице 4.2 приведены минимально допустимые  $\{n_1 * n_2 * n_3\}_{\min}$  и рекомендуемые  $\{n_1 * n_2 * n_3\}$  числа точек Гаусса для некоторых, рассмотренных в главе 1 элементов.

Таблица 4.2

Конечный элемент	$\{n_1 * n_2 * n_3\}_{\min}$	$(n_1 * n_2 * n_3)$
	1 * 1	2 * 2
	2 * 2	3 * 3
	1 * 1 * 1	2 * 2 * 2

## 4.7 Критерии сходимости

Всякое упругое тело имеет бесконечно большое число степеней свободы. В МКЭ деформированное состояние тела определяется значением конечного числа степеней свободы. Ограничение числа степеней свободы равносильно введению дополнительных внутренних связей, что приводит к завышению жесткости тела по сравнению с истинной. В этом случае перемещения, получаемые в МКЭ, будут в среднем меньше их точных значений.

При сгущении конечно-элементной сетки число степеней увеличивается. Важно установить, при каких условиях это будет сопровождаться сходимостью конечно-элементного решения к точному. Существенное значение имеет также скорость сходимости. Если скорость сходимости велика, то можно получить удовлетворительное решение даже на достаточно грубой конечно-элементной сетке. Так как МКЭ является очень громоздким численным методом, вопросы сходимости в основном исследуют путем численного эксперимента на тестовых задачах, для которых известно точное аналитическое решение.

Но некоторые общие вопросы сходимости поддаются теоретическому анализу. При теоретическом анализе удобнее всего судить о сходимости по величине введенного в вариационном принципе Лагранжа функционала  $W[\vec{u}]$ , зависящего от поля перемещений  $\vec{u}(\vec{r})$  (см. п.4.1).

В случае объемных внешних сил  $\vec{R}$  он имеет вид:

$$W[\vec{u}] = \frac{1}{2} \int \vec{\varepsilon}^T \circ [E] \circ \vec{\varepsilon} \circ dV - \int \vec{u}^T \circ \vec{R} \circ dV$$

где:  $\vec{\varepsilon}(\vec{r})$  - поле деформаций, зависящее от первых производных от перемещений по координатам.

Пусть:  $\vec{u}^0$  - точное поле перемещений тела, а  $\vec{u}$  - решения МКЭ при данной сетке.

В соответствии с принципом Лагранжа -  $W[\vec{u}] \geq W[\vec{u}^0]$ , причем:

$$W[\vec{u}] \xrightarrow{\vec{u} \rightarrow \vec{u}^0} W[\vec{u}^0]$$

Так как в  $W$  входят кроме  $\vec{u}$  также и первые производные по координатам ( $\vec{u}_x$  и т.п.), то ясно, что для выполнения указанной сходимости функционала  $W$  необходимо, чтобы поле перемещений аппроксимировалось по крайней мере полным полиномом первой степени, например, в случае трехмерного конечного элемента должно быть:

$$\begin{cases} u_x = a_1 + a_2 \circ x + a_3 \circ y + a_4 \circ z + \dots \\ u_y = b_1 + b_2 \circ x + b_3 \circ y + b_4 \circ z + \dots \\ u_z = c_1 + c_2 \circ x + c_3 \circ y + c_4 \circ z + \dots \end{cases} \quad (4.49)$$

Деформации будут тогда аппроксимироваться полным полиномом не ниже нулевой степени:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = a_2 + \dots & \varepsilon_y = b_3 + \dots & \varepsilon_z = c_4 + \dots \\ \gamma_{xy} = a_3 + b_2 + \dots & \gamma_{xz} = a_4 + c_2 + \dots & \gamma_{yz} = b_4 + c_3 + \dots \end{cases} \quad (4.50)$$

Сформулированное здесь необходимое условие сходимости называют иногда условием полноты конечного элемента.

В теории МКЭ доказана теорема, утверждающая что для сходимости  $W[\vec{u}] \rightarrow W[\vec{u}^0]$  достаточно, чтобы конечные элементы:

- 1) удовлетворяли условию полноты;
- 2) были совместными.

Кроме того, утверждается, что при выполнении условий теоремы сходимость  $W[\vec{u}]$  будет монотонной.

Другими словами, при сгущении сетки значение  $W$  будет уменьшаться, оставаясь при этом выше своего точного значения.

Поле перемещений  $\vec{u}(\vec{r})$  также будет монотонно сходиться к точному -  $\vec{u}^0(\vec{r})$ .

Именно поэтому так важно условие совместности элементов.

Если же элементы несовместны, то сходимость решения МКЭ к точному имеет место, только если в пределе (т.е. по мере сгущения сетки) в аппроксимирующих функциях члены, создающие несовместность, будут становиться исчезающе малыми. Но сходимость несовместных элементов, вообще говоря, уже не будет монотонной.

Скорость сходимости определяется порядком аппроксимирующих полиномов. Так если  $n$  - порядок полных полиномов в аппроксимирующих функциях, то погрешность элементов в энергии  $l^{2 \circ n}$ , где  $l$  - максимальный диаметр элемента.

Так рассмотренные выше треугольный трехузловой элемент и четырехугольный четырехузловой элемент имеют погрешность  $l^2$  (т.к. для них  $n=1$ ), тогда как рассмотренный выше четырехугольный 8-и узловой элемент с параболическими ребрами имеет погрешность  $l^4$  (т.к.  $n=2$ ). Видим, что с ростом порядка полного полинома в аппроксимирующих функциях скорость сходимости значительно растет.

## 4.8 Уравнения связи. Конденсация

Рассмотрим конечно-элементную модель с  $N$  узлами. С каждым узлом  $i, (i = 1, 2, \dots, N)$ , связано определенное число степеней свободы  $n_i$ , определяемое типом конечных элементов, имеющих общим узел  $i$  (например, для мембраны  $n = 2$ ). Поэтому общее число степеней свободы конечно-элементной сетки  $n$  равно сумме по всем узлам:

$$n = \sum_{i=1}^N n_i$$

Зная вектор силовых факторов  $\vec{F}$  в узлах конечно-элементной сетки, и составив глобальную матрицу жесткости  $[K]$ , можно определить вектор степеней свободы  $\vec{U}$ , решая уравнения равновесия конструкции:

$$\begin{bmatrix} K \\ (n \times n) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \vec{U} \\ (n \times 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{F} \\ (n \times 1) \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

Как правило, задача статики ставится для закрепленной конструкции, т.е. некоторые перемещения (углы поворота) равны нулю (закреплены). Задание нулевых перемещений (углов поворота) - стандартные граничные условия (см. [ИСПА]). Кроме стандартных граничных условий в [ИСПА] есть возможность задавать особые граничные условия, в которых некоторые степени свободы связаны так называемыми уравнениями связи.

Так как в главе 1 рассматриваются только линейные задачи механики, то общий вид уравнений связи для случая, когда число связей в системе с  $n$  степенями свободы равно  $r$ , следующий:

$$\begin{bmatrix} G \\ (r \times n) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \vec{U} \\ (n \times 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{S} \\ (r \times 1) \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

т.е. уравнения связи представляют собой систему  $r$  линейных алгебраических уравнений относительно вектора степеней свободы системы  $\vec{U}$ .

Вектор  $\vec{S}$  - правая часть.

Поэтому из  $n$  степеней свободы системы можно с помощью уравнений связи исключить  $r$  степеней свободы. В результате получим новые уравнения равновесия конструкции

$$\begin{bmatrix} K \\ (n-r \times n-r) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \vec{U} \\ (n-r \times 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{F} \\ (n-r \times 1) \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

с размерностью (числом степеней свободы)  $n = n - r$ .

Метод снижения размерности системы уравнений при помощи исключения некоторых степеней свободы называется конденсацией. Для проведения конденсации выделим в векторе степеней свободы системы  $\vec{U}$  с размерностью  $(n \times 1)$  вектор  $\vec{U}_e$  исключаемых степеней свободы (с размерностью  $(r \times 1)$ ) и вектор  $\vec{U}_c$  сохраняемых степеней свободы (с размерностью  $(n - r \times 1)$ ).

Уравнения равновесия конструкции (4.51) в этом случае можно записать в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} [K_{ee}] & [K_{ec}] \\ [K_{ce}] & [K_{cc}] \end{bmatrix} \circ \begin{Bmatrix} \vec{U}_e \\ \vec{U}_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{F}_e \\ \vec{F}_c \end{Bmatrix} \quad (4.54)$$

Как правило, выбор исключаемых степеней свободы произволен, хотя возникают особые случаи, когда это неверно [3].

Уравнения связи (4.52) представим в виде:

$$\begin{bmatrix} [G_e] \\ [G_c] \end{bmatrix} \circ \begin{Bmatrix} \vec{U}_e \\ \vec{U}_c \end{Bmatrix} = \vec{S} \quad (4.55)$$

Из уравнений (4.55) выразим исключаемый вектор  $\vec{U}_e$ :

$$\vec{U}_e = -[G_e]^{-1} \circ [G_c] \circ \vec{U}_c + [G_e]^{-1} \circ \vec{S} \quad (4.56)$$

Вектор  $\vec{U}$  можно тогда выразить через  $\vec{U}_c$ :

$$\vec{U} = \begin{bmatrix} \vec{U}_e \\ \vec{U}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [G_{ec}] \\ [I] \end{bmatrix} \circ \vec{U}_c + \vec{\varphi}$$

или

$$\vec{U} = [P] \circ \vec{U}_c + \vec{\varphi} \quad (4.57)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$[I]$  - единичная матрица размерности  $(n - r \times n - r)$ ;

$$\vec{\varphi} = \begin{bmatrix} \vec{U}_e \\ \vec{U}_c \end{bmatrix}; \quad \vec{f} = [G_e]^{-1} \times \vec{S}; \quad [G_{ec}] = -[G_e]^{-1} \times [G_c];$$

Матрица преобразования  $[P]$  равна:

$$[P] = \begin{bmatrix} [G_{ec}] \\ [I] \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

Уравнения (4.57) можно рассматривать как уравнения преобразования координат с переходом от "старых" координат  $\vec{U}_k$  "новым" -  $\vec{U}_c$ . Поэтому уравнения равновесия конструкции в "новых" координатах можно получить, если найдены преобразования для матрицы же-

сткости  $[K]$  и вектора силовых факторов  $\vec{F}$ . Решим эту задачу, используя потенциал системы  $W$ . До конденсации:

$$W = \frac{1}{2} \circ \vec{U}^T \circ [K] \circ \vec{U} - \vec{U}^T \circ \vec{F} \quad (4.59)$$

После конденсации имеем (см. (4.57)):  $\vec{U} = [P] \circ \vec{U}_c + \vec{\varphi}$ , поэтому потенциал  $W$  будет функцией от вектора  $\vec{U}_c$ :

$$W = \frac{1}{2} \circ (\vec{U}_c^T \circ [P]^T + \vec{\varphi}^T) \circ [K] \circ ([P] \circ \vec{U}_c + \vec{\varphi}) - (\vec{U}_c^T \circ [P]^T + \vec{\varphi}^T) \circ \vec{F}$$

После простых преобразований найдем:

$$W = \frac{1}{2} \circ \vec{U}_c^T \circ [\tilde{K}] \circ \vec{U}_c - \vec{U}_c^T \circ \tilde{F} + \left( \frac{1}{2} \circ \vec{\varphi}^T \circ [K] \circ \vec{\varphi} - \vec{\varphi}^T \circ \vec{F} \right) \quad (4.60)$$

После варьирования  $W$  найдем новые уравнения равновесия:

$$\frac{\partial W}{\partial \vec{U}_c} = 0 \Rightarrow [\tilde{K}] \circ \vec{U}_c = \tilde{F} \quad (4.61)$$

Здесь введены преобразованная матрица жесткости  $[\tilde{K}]$  размерности  $(n-r \times n-r)$  и преобразованная правая часть  $\tilde{F}$  размерности  $(n-r \times 1)$ :

$$\begin{cases} [\tilde{K}] = [P]^T \circ [K] \circ [P]; \\ \tilde{F} = [P]^T \circ (\vec{F} - [K] \circ \vec{\varphi}); \end{cases} \quad (4.62)$$

Таким образом, процедура конденсации системы уравнений проведена и получены конденсированные уравнения равновесия конструкции.

## 4.9 Матрица жесткости

### 4.9.1 Одномерные элементы

#### 4.9.1.1 Балочная теория стержня

Рассмотрим прямой стержень длины  $L$  с постоянным сечением с введенной для него л.с.к.  $UVW$  (Рисунок 4.7).

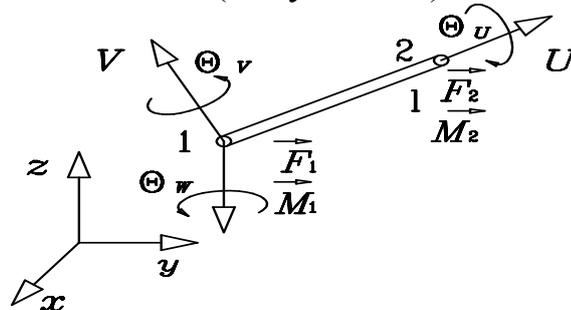


Рисунок 4.7

Концы стержня обозначены цифрами 1 и 2. Ось  $U$  направлена от 1 к 2 и имеет начало в точке стержня 1. Оси  $V$  и  $W$  являются главными осями стержня. На Рисунок 4.7 показаны положительные направления поворотов, а также действия моментов сил, вокруг осей  $U, V, W$ ; вектора сил  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  и моментов  $\vec{M}_1$  и  $\vec{M}_2$  могут быть приложены к концам стержня 1 и 2 соответственно.

Рассмотрим сечение стержня (Рисунок 4.8); ось  $U$  на рисунке направлена на нас.

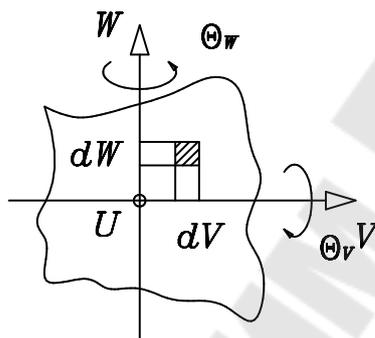


Рисунок 4.8

Здесь же выделена элементарная площадь сечения стержня:  $dS = dV \circ dW$ . Дальше для определенности будем считать, что конец стержня 1 заделан (т.е.  $\vec{u}_1 = 0.$ ,  $\vec{\vartheta}_1 = 0.$ , где  $\vec{\vartheta}_1$  - угол поворота сечения 1, а  $\vec{u}_1$  - перемещение конца 1), а конец 2 свободен и к нему в общем случае приложены сила  $\vec{F} = \{F_u, F_v, F_w\}$  и момент сил  $\vec{M} = \{M_u, M_v, M_w\}$ .

Для малых деформаций стержня будет справедлив принцип суперпозиции действия силовых факторов, т.е. полная деформация стержня будет являться суперпозицией деформаций, каждая из которых вызвана одним из шести приложенных силовых факторов.

При этом сила  $F_u$  будет растягивать (или сжимать) стержень вдоль оси  $U$ ; сила  $F_w$  и момент  $M_v$  будут изгибать стержень относительно оси  $V$ , сила  $F_v$  и момент  $M_w$  будут изгибать стержень относительно оси  $W$ , а момент  $M_u$  будет закручивать стержень относительно оси  $U$ .

Рассмотрим сначала действие растягивающей силы  $F_u$ . Разумно предположить, что при этом единственной отличной от нуля компонентой тензора напряжений будет  $\sigma_u$ . Пользуясь тогда формулами для связи компонент вектора напряжений  $\vec{\sigma}$  и вектора деформации  $\vec{\varepsilon}$ , найдем:

$$\begin{cases} \sigma_u = E \circ \varepsilon_u \\ \varepsilon_v = \varepsilon_w = -\mu \circ \varepsilon_u \end{cases} \quad (4.63)$$

Видно, что стержень будет сжиматься в сечении одновременно с его растяжением вдоль оси  $U$ . Перемещение конца 2 вдоль оси  $U$  равно:

$$u_u = l \circ \varepsilon_u = \frac{1}{E} \circ \sigma_u$$

Напряжение  $\sigma_u$  можно считать постоянным и равным:

$$\sigma_u = \frac{F_u}{S}$$

где:  $S = \iint dV \circ dW$  - площадь сечения стержня.

Окончательно мы находим следующее соотношение между перемещением  $u_u$  и силой  $F_u$  вдоль оси  $U$ :

$$u_u = \frac{F_u \circ l}{E \circ S} \quad (4.64)$$

Получена первая важная формула теории сопротивления материалов (сопромат) является самой простой. Условие малости деформаций здесь:

$$|\varepsilon_u| \ll l$$

Перейдем теперь к рассмотрению кручения стержня вокруг оси  $U$  под воздействием момента сил  $M_u$ , приложенного на конце 2. Сначала рассмотрим частный случай круглого сечения стержня (Рисунок 4.9) радиуса  $R$ .

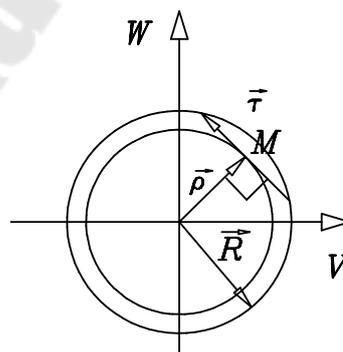


Рисунок 4.9

Из условий симметрии задачи кручения стержня кругового сечения деформация такого стержня будет заключаться в том, что каждое (круглое) сечение стержня в результате повернется как целое на

некоторый угол  $\mathcal{G}_u = \mathcal{G}_u(u)$ . Введем угол кручения  $\varphi$  как угол поворота сечения, отнесенный к единице длины стержня, т.е.:

$$\varphi = \frac{d\mathcal{G}_u}{du} \quad (4.65)$$

Из условия приложения крутящего момента и постоянства сечения стержня вдоль его оси  $U$  ясно, что угол кручения  $\varphi$  должен быть постоянной, независящей от  $U$ , величиной:  $\varphi \equiv const$

Тогда максимальный угол поворота сечения  $l$  равен:

$$\mathcal{G}_{u2} = \mathcal{G}_u(l) = \varphi \circ l$$

а максимальные перемещения точек сечения:

$$u = R \circ \mathcal{G}_{u2} = R \circ \varphi \circ l$$

Условие малости деформаций означает что:

$$u \ll l \text{ или } R \circ \varphi \ll l \quad (4.66)$$

Последнее и есть условие справедливости принципа суперпозиции для кручения.

Так как сечение с координатой  $U$  повернуто на угол:

$$\mathcal{G}_u = U \circ \varphi$$

то перемещения точек сечения вдоль оси  $V$  и  $W$  равны:

$$u_v = -\varphi \circ U \circ W, \quad u_w = -\varphi \circ U \circ V \quad (4.67)$$

а перемещения вдоль оси  $U$ :  $u_u = 0$ .

Тогда компоненты вектора деформаций  $\vec{\varepsilon}$ :

$$\begin{cases} \varepsilon_u = \varepsilon_v = \varepsilon_w = 0 \\ \gamma_{vw} = -\varphi \circ U + \varphi \circ U = 0 \\ \gamma_{uv} = -\varphi \circ W; \gamma_{uw} = \varphi \circ V \end{cases} \quad (4.68)$$

Получим компоненты  $\vec{\sigma}$ :

$$\begin{cases} \sigma_u = \sigma_v = \sigma_w = \tau_{vw} = 0. \\ \tau_{uv} = -G \circ \varphi \circ W; \tau_{uw} = G \circ \varphi \circ V \end{cases} \quad (4.69)$$

где:  $G = \frac{E}{2 \circ (1 + \mu)}$  - модуль сдвига.

Из формул (4.69) следует, что единственными отличными от нуля компонентами вектора напряжений  $\vec{\sigma}$  являются касательные, сдвиговые компоненты  $\tau_{uv}$  и  $\tau_{uw}$ . При этом проекции  $\tau_{uv}$  и  $\tau_{uw}$  сдвигового напряжения  $\vec{\tau}$  таковы, что полное сдвиговое напряжение  $\vec{\tau}$  в произвольной точке  $M$  круглого сечения направлено по касательной к окружности, проведенной из центра сечения через эту точку, а величина напряжений  $\vec{\tau}$  равна (Рисунок 4.9):

$$\tau = G \circ \varphi \circ \rho \quad (4.70)$$

где  $\rho$  - радиус текущей окружности ( $0 \leq \rho \leq R$ ).

Элементарная внутренняя сила  $dF$ , закручивающая стержень, равна:

$$dF = \tau \circ dS = \tau \circ dV \circ dW$$

а соответствующий элементарный момент  $dM$  равен:  $dM = \rho \circ dF$ , так как вектор  $d\vec{F}$  перпендикулярен к вектору  $\vec{\rho}$ .

Так как полный момент внутренних сил в каждом сечении равен приложенному моменту  $M_u$ , то получим формулу связи момента  $M_u$  с напряжениями  $\tau$ :

$$M_u = \iint \tau \circ \rho \circ dV \circ dW \quad (4.71)$$

а с учетом формулы (4.70):

$$M_u = G \circ \varphi \circ \iint \rho^2 \circ dV \circ dW \quad (4.72)$$

Стоящий здесь интеграл называют полярным моментом сечения и обозначают  $J_\rho$ :

$$J_\rho = \iint \rho^2 \circ dV \circ dW \quad (4.73)$$

В результате мы получили следующую формулу связи угла  $\vartheta_u$  для конца 2 с крутящими моментами  $M_u$  [9]:

$$\vartheta_u = \frac{M_u \circ l}{G \circ J_\rho} \quad (4.74)$$

В случае же произвольного сечения стержня задача кручения очень усложняется тем, что сечение начинает вместе с поворотом вокруг оси  $U$  испытывать перемещение точек из плоскости сечения, т.е. сечение перестает быть плоским. Существует общая теория кручения таких стержней. В ней вводится понятие крутильной жесткости сечения  $C$ , которая связывает угол кручения  $\varphi$  с крутящим моментом  $M_u$ :

$$M_u = C \circ \varphi$$

так что в общем случае угол поворота сечения 2 -  $\vartheta_u$  равен:

$$\vartheta_u = \frac{M_u \circ l}{C} \quad (4.75)$$

Теория позволяет аналитически находить  $C$  для любого сечения. В сопроамате вводится понятие обобщенного момента кручения  $J_u$  по аналогии с полярным моментом  $J_\rho$ :

$$J_u = \frac{C}{G}$$

Тогда формула (4.75) приобретает вид, аналогичный (4.74)

$$\mathcal{G}_u = \frac{M_u \circ l}{G \circ J_u} \quad (4.76)$$

Значение  $J_u$  для некоторых стандартных сечений приведены в [9].

Перейдем теперь к наиболее сложному вопросу изгиба стержней. Балочная теория стержня утверждает справедливость для слабых деформаций так называемой гипотезы плоских сечений [9].

Согласно этой гипотезе, сечение стержня при изгибе остается плоским, поворачиваясь в пространстве как жесткое целое вокруг осей  $V$  и  $W$ . Отсюда легко находим перемещение точек сечения стержня вдоль оси  $U$ , т.е. из плоскости сечения ( $|\mathcal{G}_v| \ll l, |\mathcal{G}_w| \ll l$ ):

$$u_u = \mathcal{G}_v(U) \circ W - \mathcal{G}_w(U) \circ V \quad (4.77)$$

Остальные перемещения можно считать равными нулю:  
 $u_v = u_w = 0$

Тогда отличные от нуля компоненты вектора деформаций  $\bar{\varepsilon}$ :

$$\begin{cases} \varepsilon_u = \frac{\partial u_u}{\partial U} = W \circ \frac{\partial \mathcal{G}_v}{\partial U} - V \circ \frac{\partial \mathcal{G}_w}{\partial U}; \\ \gamma_{uv} = \frac{\partial u_u}{\partial V} = -\mathcal{G}_w; \gamma_{uw} = \frac{\partial u_u}{\partial W} = -\mathcal{G}_v \end{cases} \quad (4.78)$$

В балочной теории мы пренебрегаем деформациями сдвига, считая основной продольную деформацию  $\varepsilon_u$ , меняющуюся по линейному закону в пределах сечения.

Соответствующее нормальное внутреннее напряжение  $\sigma_u$  равно:

$$\sigma_u = E \circ \varepsilon_u = E \circ W \circ \frac{d\mathcal{G}_v}{dU} - E \circ V \circ \frac{d\mathcal{G}_w}{dU} \quad (4.79)$$

Растягивающая сила  $F_u$  и изгибающие моменты внутренних напряжений  $\sigma_u$  относительно осей  $V$  и  $W$  равны соответственно:

$$\begin{cases} F_u = \iint \sigma_u \circ dV \circ dW \\ M_v = \iint \sigma_u \circ W \circ dV \circ dW \\ M_w = \iint \sigma_u \circ V \circ dV \circ dW \end{cases} \quad (4.80)$$

Если воспользоваться (4.79), то формулы (4.80) примут вид:

$$\begin{cases} F_u = E \circ \frac{d\mathcal{G}_v}{dU} \circ \iint W \circ dV \circ dW - E \circ \frac{d\mathcal{G}_w}{dU} \circ \iint V \circ dV \circ dW \\ M_v = E \circ \frac{d\mathcal{G}_v}{dU} \circ \iint W^2 \circ dV \circ dW - E \circ \frac{d\mathcal{G}_w}{dU} \circ \iint V \circ W \circ dV \circ dW \\ M_w = E \circ \frac{d\mathcal{G}_v}{dU} \circ \iint V \circ W \circ dV \circ dW - E \circ \frac{d\mathcal{G}_w}{dU} \circ \iint V^2 \circ dV \circ dW \end{cases} \quad (4.81)$$

Так как сейчас мы не рассматриваем растяжение стержня, то можем считать:  $F_u = 0$ . Тогда в силу произвольности значений производных  $\frac{d\mathcal{G}_v}{dU}$  и  $\frac{d\mathcal{G}_w}{dU}$  из (4.81) для  $F_u$  следует:

$$\iint V \circ dV \circ dW = \iint W \circ dV \circ dW = 0 \quad (4.82)$$

Условие (4.82) показывает, что начало координат  $VW$ , лежит в центре тяжести сечения. Поэтому ось стержня представляется совокупностью центров тяжести всех сечений стержня. В системе координат с началом в центре тяжести сечения с помощью поворота осей  $V$ ,  $W$  в плоскости сечения можно добиться того, чтобы:

$$\iint V \circ W \circ dV \circ dW = 0 \quad (4.83)$$

Тогда формулы для изгибающих моментов принимают известный вид [9]:

$$M_v = E \circ J_v \circ \frac{d\mathcal{G}_v}{dU}; M_w = E \circ J_w \circ \frac{d\mathcal{G}_w}{dU} \quad (4.84)$$

где:  $J_v = \iint W^2 \circ dV \circ dW$  - момент инерции сечения относительно оси  $V$ ;  
 $J_w = \iint V^2 \circ dV \circ dW$  - момент инерции сечения относительно оси  $W$ .

В этом случае оси  $V$  и  $W$  называют главными осями сечения стержня.

Пусть теперь:  $u_v = u_v(U)$  и  $u_w = u_w(U)$  - перемещения точек оси стержня вдоль осей  $V$  и  $W$  соответственно в результате его изгиба. Эти перемещения легко могут быть связаны с углами поворота сечения около осей  $\mathcal{G}_v$  и  $\mathcal{G}_w$  на основе гипотезы, что касательный вектор  $\vec{n}$  к оси деформированного стержня остается в результате деформации нормальным к плоскости сечения стержня (именно эта гипотеза отражает принятое в балочной теории положение о том, что деформации сдвига равны нулю:  $\gamma_{uv} = \gamma_{uw} = 0$ ):

$$\mathcal{G}_v = -\frac{du_w}{dU}, \mathcal{G}_w = -\frac{du_v}{dU} \quad (4.85)$$

С помощью формул (4.84) и (4.85) получаем известные дифференциальные уравнения изогнутой оси балки:

$$\begin{cases} \frac{d^2 u_v}{dU^2} = \frac{M_w}{E \circ J_w} \\ \frac{d^2 u_w}{dU^2} = \frac{M_v}{E \circ J_v}; (0 \leq U \leq l) \end{cases} \quad (4.86)$$

В случае заделки на конце 1 граничными условиями для уравнений (4.86) будут:

$$\begin{cases} u_v(0) = u_w(0) = 0. \\ \frac{du_v}{dU}(0) = \frac{du_w}{dU}(0) = 0. \end{cases} \quad (4.87)$$

Формулы (4.86) и (4.87) определяют уравнения изогнутой оси балки. Рассмотрим два случая: действие на конце 2 моментов  $M_v$  и  $M_w$  и действие на конце 2 сил  $F_v$  и  $F_w$ .

В первом случае внутренние силовые факторы  $M_v$  и  $M_w$  равны приложенным моментам на конце стержня 2.

Для  $u_v$  тогда имеем:

$$\begin{cases} \frac{d^2 u_v}{dU^2} = \frac{M_w}{E \circ J_w} \\ u_v(0) = \frac{du_v}{dU}(0) = 0. \end{cases}$$

откуда:  $u_v(U) = C_1 + C_2 \circ U + \frac{M_w \circ U^2}{2 \circ E \circ J_w}$

Из граничных условий следует:  $C_1 = C_2 = 0$ .

Окончательно перемещение  $u_v(U)$  и угол поворота  $\vartheta_w(U)$  равны:

$$u_v(U) = \frac{M_w \circ U^2}{2 \circ E \circ J_w}; \vartheta_w(U) = \frac{du_v}{du} = \frac{M_w \circ U}{E \circ J_w}$$

Для перемещений конца стержня 2 тогда получим [9]:

$$\begin{cases} u_v = \frac{M_w \circ l^2}{2 \circ E \circ J_w}; \\ \vartheta_w = \frac{M_v \circ l}{E \circ J_v} \end{cases} \quad (4.88)$$

аналогично:

$$\begin{cases} u_w = \frac{M_v \circ l^2}{2 \circ E \circ J_v}; \\ \vartheta_v = \frac{M_w \circ l}{E \circ J_w} \end{cases} \quad (4.89)$$

Во втором случае силовые факторы  $M_v$  и  $M_w$  меняются вдоль оси стержня по формулам:

$$\begin{cases} M_v = -F_w \circ (l - U); \\ M_w = -F_v \circ (l - U); (0 \leq U \leq l) \end{cases} \quad (4.90)$$

Для  $u_v$  тогда получим:

$$\begin{cases} \frac{d^2 u_v}{dU^2} = \frac{F_v \circ (l - U)}{E \circ J_w} \\ u_v(0) = \frac{du_v}{dU}(0) = 0. \end{cases}$$

$$u_v(U) = C_1 + C_2 \circ U + \frac{F_v \circ (1 - U)^3}{6 \circ E \circ J_w}$$

Общее решение имеет вид:

Из граничных условий следует система уравнений:

$$\begin{cases} C_1 + \frac{F_v \circ l^3}{6 \circ E \circ J_w} = 0. \\ C_2 - \frac{3 \circ F_v \circ l^3}{6 \circ E \circ J_w} = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -\frac{F_v \circ l^3}{6 \circ E \circ J_w} \\ C_2 = \frac{3 \circ F_v \circ l^3}{6 \circ E \circ J_w} \end{cases}$$

откуда: 
$$u_v(U) = \frac{F_v}{6 \circ E \circ J_w} \circ (3 \circ l \circ U^2 - U^3);$$

$$\mathcal{G}_w = \frac{du_v}{dU} = \frac{F_v}{2 \circ E \circ J_w} \circ (2 \circ l \circ U - U^2);$$

Для перемещений  $u_v$  и угла поворота  $\mathcal{G}_w$  конца стержня 2 получим [9]:

$$u_v = \frac{F_v \circ l^3}{3 \circ E \circ J_w}; \mathcal{G}_w = \frac{F_v \circ l^2}{2 \circ E \circ J_w} \quad (4.91)$$

аналогично:

$$u_w = \frac{F_w \circ l^3}{3 \circ E \circ J_v}; \mathcal{G}_v = \frac{F_w \circ l^2}{2 \circ E \circ J_v} \quad (4.92)$$

Полученные уравнения балочной теории стержня будут применены для построения конечного элемента стержня.

#### 4.9.1.2 Элемент стержня с постоянным по длине сечением по балочной теории

Рассмотрим конечный элемент прямого стержня с постоянным по длине сечением с двумя узлами 1 и 2 на его концах. Тип элемента в [ИСПА] - 000. Выше была рассмотрена балочная теория такого стержня.

В каждом узле элемента по 6 степеней свободы: три перемещения  $\vec{u} = \{u_u, u_v, u_w\}$  и три угла поворота  $\vec{g} = \{g_u, g_v, g_w\}$ . Вектор степеней свободы узла  $\vec{v}_r$  имеет тогда 6 компонент

$$\vec{v}_r = \begin{Bmatrix} \vec{u}_r \\ \vec{g}_r \end{Bmatrix}, \quad (r=1,2)$$

а вектор степеней свободы элемента  $\vec{U}^{(e)}$  имеет  $6 \times 2 = 12$  компонент:

$$\vec{U}^{(e)} = \begin{Bmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \end{Bmatrix}$$

Вектор силовых факторов в узле  $\vec{F}_r$  имеет 6 компонент: три силы  $\vec{F} = \{F_u, F_v, F_w\}$  и три момента сил  $\vec{M} = \{M_u, M_v, M_w\}$ , а вектор силовых факторов элемента  $\vec{F}^{(e)}$  имеет 12 компонент:

$$\vec{F}^{(e)} = \begin{Bmatrix} \vec{F}_1 \\ \vec{F}_2 \end{Bmatrix}$$

Матрица жесткости элемента  $[K^{(e)}]$  будет иметь размерность (12x12). Уравнение связи вектора силовых факторов элемента  $\vec{F}^{(e)}$  и вектора степеней свободы элемента  $\vec{U}^{(e)}$  будет иметь вид:

$$\vec{F}^{(e)} = [K^{(e)}] \times \vec{U}^{(e)} \quad (4.93)$$

Как известно из п. 1.2.1, для силовых факторов стержневого элемента справедлив принцип суперпозиции. Поэтому матрицу жесткости элемента стержня  $[K^{(e)}]$  можно представить в виде суммы матриц жесткости:

- 1)  $[K_u]$  - для растяжения (сжатия) вдоль оси  $U$  ;
- 2)  $[K_g]$  - для кручения относительно оси  $U$  ;
- 3)  $[K_v]$  - для изгиба относительно оси  $V$  ;
- 4)  $[K_w]$  - для изгиба относительно оси  $W$  .

Рассмотрим последовательно четыре деформированных состояния стержня и получим для них матрицы жесткости:  $[K_u], [K_g], [K_v], [K_w]$ . Тем самым задача нахождения матрицы жесткости стержня будет решена.

## МАТРИЦА ЖЕСТКОСТИ ДЛЯ РАСТЯЖЕНИЯ (СЖАТИЯ) [ $K_u$ ]

Пусть:  $u_{u1}$  и  $u_{u2}$  - перемещения узлов 1 и 2 вдоль оси  $U$ ;

$F_{u1}$  и  $F_{u2}$  - силы в узлах 1 и 2, действующие вдоль оси  $U$ .

Тогда вектор силовых факторов  $\begin{bmatrix} F_{u1} \\ F_{u2} \end{bmatrix}$  будет связан с вектором степеней свободы  $\begin{bmatrix} u_{u1} \\ u_{u2} \end{bmatrix}$  с помощью матрицы жесткости [ $K_u$ ], имеющей размерность (2x2):

$$\begin{bmatrix} F_{u1} \\ F_{u2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_{u1} \\ u_{u2} \end{bmatrix} \quad (4.94)$$

Условие равновесия элемента для растяжения (сжатия) вдоль оси  $U$  имеет вид:

$$F_{u1} + F_{u2} = 0 \quad (4.95)$$

Пусть сначала  $u_{u1} = 0$ , а  $u_{u2} = 1$ . Тогда из (4.94) и (4.95) следует, что:  $F_{u1} = k_{12}$ ,  $F_{u2} = -F_{u1} = -k_{12}$ . Но из (4.94) следует, что:

$$F_{u2} = \frac{E \circ S}{l} \circ u_{u2} = \frac{E \circ S}{l}, (u_{u2} = 1).$$

Поэтому заключаем, что:  $k_{22} = -k_{12} = \frac{E \circ S}{l}$ .

Аналогичное рассмотрение случая  $u_{u1} = 1$ , а  $u_{u2} = 0$  дает:  $k_{11} = -k_{21} = \frac{E \circ S}{l}$ . Поэтому матрица жесткости [ $K_u$ ] имеет следующий вид:

$$[K_u] = \frac{E \circ S}{l} \circ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.96)$$

## МАТРИЦА ЖЕСТКОСТИ КРУЧЕНИЯ [ $K_g$ ]

Пусть:  $\vartheta_{u1}$  и  $\vartheta_{u2}$  - углы поворота сечений в узлах 1 и 2 относительно оси  $U$ ;

$M_{u1}$  и  $M_{u2}$  - моменты сил в узлах 1 и 2 относительно оси  $U$ .

Тогда матрица жесткости,  $[K_g]$  имеющая размерность (2x2), связывает вектор силовых факторов  $\begin{Bmatrix} M_{u1} \\ M_{u2} \end{Bmatrix}$  с вектором степеней свободы  $\begin{Bmatrix} u_{u1} \\ u_{u2} \end{Bmatrix}$  уравнением:

$$\begin{Bmatrix} M_{u1} \\ M_{u2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} u_{u1} \\ u_{u2} \end{Bmatrix} \quad (4.97)$$

Уравнение равновесия элемента для кручения относительно оси  $U$  имеет вид:

$$M_{u1} + M_{u2} = 0 \quad (4.98)$$

Пусть сначала  $\vartheta_{u1} = 0$ ,  $\vartheta_{u2=1}$ . Тогда из (4.97) и (4.98) следует, что:  
 $M_{u2} = k_{22}$ ,  $M_{u1} = -M_{u2} = k_{12}$ . Далее следует, что:

$$M_{u2} = \frac{G \circ J_u}{l} \circ \vartheta_{u2} = \frac{G \circ J_u}{l}, (\vartheta_{u2} = 1)$$

Поэтому:  $k_{22} = -k_{21} = \frac{G \circ J_u}{l}$ . Аналогичным образом находим, что:

$$k_{11} = -k_{21} = \frac{G \circ J_u}{l}$$

Поэтому матрица жесткости  $[K_g]$  имеет вид:

$$[K_g] = \frac{G \circ J_u}{l} \circ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.99)$$

### МАТРИЦА ЖЕСТКОСТИ ИЗГИБА $[K_v]$

Для этого случая имеем следующие степени свободы:

$u_{v1}$  и  $u_{v2}$  - перемещения узлов 1 и 2 вдоль оси  $V$ ;

$\vartheta_{w1}$  и  $\vartheta_{w2}$  - углы поворота сечений в узлах 1 и 2 относительно оси  $W$ .

Силовые факторы:

$F_{v1}$  и  $F_{v2}$  - силы в узлах 1 и 2, действующие вдоль оси  $V$ ;

$M_{w1}$  и  $M_{w2}$  - моменты сил в узлах 1 и 2 относительно оси  $W$ .

Вектор силовых факторов  $\{F_{v1} \ M_{w1} \ F_{v2} \ M_{w2}\}$  будет связываться с вектором степеней свободы  $\{u_{v1} \ \vartheta_{w1} \ u_{v2} \ \vartheta_{w2}\}$  посредством матрицы жесткости  $[K_v]$  размерности (4x4):

$$\begin{Bmatrix} F_{v1} \\ M_{w1} \\ F_{v2} \\ M_{w2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} u_{v1} \\ \mathcal{G}_{w1} \\ u_{v2} \\ \mathcal{G}_{w2} \end{Bmatrix} \quad (4.100)$$

Уравнения равновесия элемента для изгиба относительно оси  $W$  имеют вид:

$$\begin{cases} F_{v1} + F_{v2} = 0 \\ M_{w1} + M_{w2} + F_{v2} \circ l = 0 \\ M_{w2} + M_{w1} + F_{v1} \circ l = 0 \end{cases} \quad (4.101)$$

Для нахождения матрицы жесткости  $[K_v]$  нам понадобятся уравнения изогнутой оси балки. Выше были получены дифференциальные уравнения второго порядка для перемещений  $u_v$  и  $u_w$ :

$$\frac{d^2 u_v}{dU^2} = \frac{M_w}{E \circ J_w}; \quad \frac{d^2 u_w}{dU^2} = -\frac{M_v}{E \circ J_v} \quad (4.102)$$

а также дифференциальные уравнения связи углов поворота сечения  $\mathcal{G}_v$  и  $\mathcal{G}_w$ , с перемещениями  $u_v$  и  $u_w$ :

$$\mathcal{G}_v = -\frac{du_w}{dU}; \quad \mathcal{G}_w = \frac{du_v}{dU} \quad (4.103)$$

В уравнениях (4.102) внутренние силовые факторы  $M_v, M_w$  являются функциями координаты  $U$ . Воспользуемся дифференциальными уравнениями равновесия стержня [8,9]:

$$\begin{cases} \frac{d^2 M_v}{dU^2} = -K_w & \frac{d^2 M_w}{dU^2} = K_v \\ F_v = -\frac{dM_w}{dU} & F_w = \frac{dM_v}{dU} \end{cases} \quad (4.104)$$

Здесь:  $K_v, K_w$  - внешние силы вдоль осей  $V$  и  $W$  на единицу длины стержня;

$F_v, F_w$  - "перерезывающие" силы в сечении стержня.

С помощью (4.104) из уравнений (4.102) получим следующие дифференциальные уравнения четвертого порядка для изогнутой оси балки:

$$\begin{cases} \frac{d^3 u_v}{dU^3} = -\frac{F_v}{E \circ J_w} & \frac{d^3 u_w}{dU^3} = -\frac{F_w}{E \circ J_v} \\ \frac{d^4 u_v}{dU^4} = \frac{k_v}{E \circ J_w} & \frac{d^4 u_w}{dU^4} = \frac{k_w}{E \circ J_v} \end{cases} \quad (4.105)$$

Так как в МКЭ все силовые факторы можно свести к узловым, то можно считать справедливыми условия:

$$K_v = K_w = 0, (0 < U < l) \quad (4.106)$$

Тогда общее решение уравнений (4.105), например, для  $u_v$ :

$$\begin{aligned} u_v(U) &= C_1 + C_2 \circ U + C_3 \circ U^2 + C_4 \circ U^3 \\ \mathcal{G}_w(U) &= \frac{dU_v}{dU} = C_2 + 2 \circ C_3 \circ U + 3 \circ C_4 \circ U^2, (0 \leq U \leq l) \end{aligned} \quad (4.107)$$

Рассмотрим теперь различные случаи значений степеней свободы.

### Случай 1

$u_{v1} = \mathcal{G}_{w1} = \mathcal{G}_{w2} = 0, u_{v2} = 1$  (Рисунок 4.10 (а))

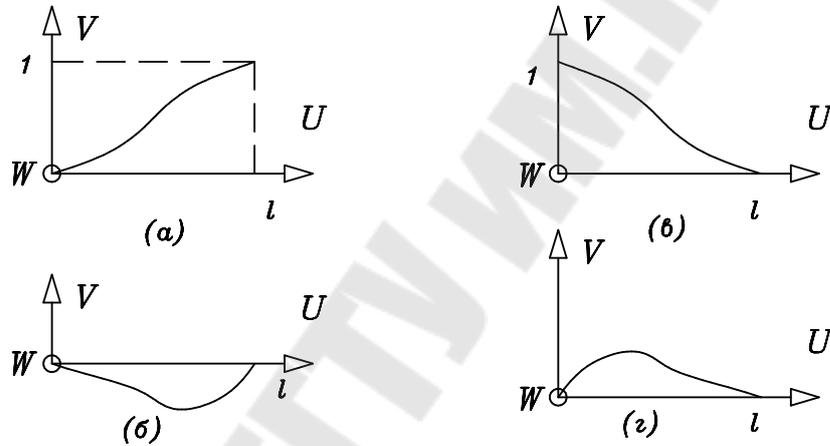


Рисунок 4.10

Из уравнений (4.107) для общего решения тогда получим:

$$u_v(U) = \frac{3 \circ U^2}{l^2} - \frac{2 \circ U^3}{l^3}, \mathcal{G}_w(U) = \frac{6 \circ U}{l^2} - \frac{6 \circ U^2}{l^3} \quad (4.108)$$

а из уравнений (4.106) и (4.108) -

$$\frac{M_w(U)}{E \circ J_w} = \frac{d^2 u_v}{dU^2} = \frac{6}{l^2} - \frac{12 \circ U}{l^3}, \frac{F_v}{E \circ J_w} = -\frac{d^3 u_v}{dU^3} = \frac{12}{l^3} \quad (4.109)$$

Из (4.109) следует:

$$M_{w2} = M_w(l) = -\frac{6 \circ E \circ J_w}{l^2}; F_{v2} = F_v(l) = \frac{12 \circ E \circ J_w}{l^3}.$$

Тогда из уравнений равновесия (4.105) найдем:

$$\begin{cases} F_{v1} = -F_{v2} = -\frac{12 \circ E \circ J_w}{l^3} \\ M_{w1} = -M_{w2} - F_{v2} \circ l = \frac{6 \circ E \circ J_w}{l^2} - \frac{12 \circ E \circ J_w}{l^2} = -\frac{6 \circ E \circ J_w}{l^2} \end{cases} \quad (4.110)$$

С другой стороны, следует:

$$F_{v1} = k_{13}, M_{w1} = k_{23}, F_{v2} = k_{33}, M_{w2} = k_{43} \quad (4.111)$$

Отсюда получаем значения  $[K_v]$  из третьего столбца:

$$k_{13} = -\frac{12 \circ E \circ J_w}{l^3}; k_{23} = -\frac{6 \circ E \circ J_w}{l^2}; k_{33} = \frac{12 \circ E \circ J_w}{l^3}; k_{43} = \frac{6 \circ E \circ J_w}{l^2} \quad (4.112)$$

### Случай 2

$u_{v1} = \mathcal{G}_{w1} = u_{v2} = 0, \mathcal{G}_{w2} = 1$  (Рисунок 4.10 (б))

Из уравнений (4.107) получим:

$$u_v(U) = -\frac{U^2}{l} + \frac{U^3}{l^2}, \mathcal{G}_w(U) = -\frac{2 \circ U}{l} + \frac{3 \circ U^2}{l^2} \quad (4.113)$$

а из (4.102) и (4.105):

$$\frac{M_w(U)}{E \circ J_w} = \frac{d^2 u_v}{dU^2} = -\frac{2}{l} + \frac{6 \circ U}{l^2}, \frac{F_v}{E \circ J_w} = -\frac{d^3 u_v}{dU^3} = -\frac{6}{l^2} \quad (4.114)$$

Из (4.114) следует:

$$M_{w2} = \frac{4 \circ E \circ J_w}{l}; F_{v2} = -\frac{6 \circ E \circ J_w}{l^2} \quad (4.115)$$

Тогда из уравнений равновесия (4.101) найдем:

$$\begin{cases} F_{v1} = F_{v2} = \frac{6 \circ E \circ J_w}{l^2} \\ M_{w1} = -M_{w2} - F_{v2} \circ l = -\frac{4 \circ E \circ J_w}{l} + \frac{6 \circ E \circ J_w}{l} = \frac{2 \circ E \circ J_w}{l} \end{cases} \quad (4.116)$$

Воспользовавшись уравнениями (4.100), найдем значения  $[K_v]$  для четвертого столбца:

$$k_{14} = \frac{6 \circ E \circ J_w}{l^2}; k_{24} = \frac{2 \circ E \circ J_w}{l}; k_{34} = -\frac{6 \circ E \circ J_w}{l^2}; k_{44} = \frac{4 \circ E \circ J_w}{l} \quad (4.117)$$

### Случай 3

$u_{v1} = 1, u_{v2} = \mathcal{G}_{w1} = \mathcal{G}_{w2} = 0$  (Рисунок 4.10(в))

Воспользовавшись относительной симметрией деформированных состояний для случаев 1 и 3, сразу найдем:

$$\begin{cases} F_{v1}^{(3)} = F_{v2}^{(1)} = \frac{12 \circ E \circ J_w}{l^3} & F_{v2}^{(3)} = F_{v1}^{(1)} = -\frac{12 \circ E \circ J_w}{l^3} \\ M_{w1}^{(3)} = -M_{w2}^{(1)} = \frac{6 \circ E \circ J_w}{l^2} & M_{w2}^{(3)} = -M_{w1}^{(1)} = \frac{6 \circ E \circ J_w}{l^2} \end{cases} \quad (4.118)$$

Тогда из (4.100) получим первый столбец матрицы  $[K_v]$ :

$$k_{11} = \frac{12 \circ E \circ J_w}{l^3}; k_{21} = \frac{6 \circ E \circ J_w}{l^2}; k_{31} = -\frac{12 \circ E \circ J_w}{l^3}; k_{41} = \frac{6 \circ E \circ J_w}{l^2} \quad (4.119)$$

#### Случай 4

$\vartheta_{w1} = 1, u_{v1} = u_{v2} = \vartheta_{w2} = 0$  (Рисунок 4.10 (г))

Воспользовавшись относительной симметрией деформированных состояний для случаев 2 и 4, найдем:

$$\begin{cases} F_{v1}^{(4)} = -F_{v2}^{(2)} = \frac{6 \circ E \circ J_w}{l^2} & F_{v2}^{(4)} = -F_{v1}^{(2)} = -\frac{6 \circ E \circ J_w}{l^2} \\ M_{w1}^{(4)} = M_{w2}^{(4)} = \frac{4 \circ E \circ J_w}{l} & M_{w2}^{(4)} = M_{w1}^{(2)} = \frac{2 \circ E \circ J_w}{l} \end{cases} \quad (4.120)$$

Тогда из (4.100) найдем второй столбец матрицы  $[K_v]$ :

$$k_{12} = \frac{6 \circ E \circ J_w}{l^2}; k_{22} = \frac{4 \circ E \circ J_w}{l}; k_{32} = -\frac{6 \circ E \circ J_w}{l^2}; k_{42} = \frac{2 \circ E \circ J_w}{l} \quad (4.121)$$

Окончательно получим следующий вид матрицы  $[K_v]$ :

$$[K_v] = \frac{2 \circ E \circ J_w}{l^3} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \circ l & -6 & 3 \circ l \\ 3 \circ l & 2 \circ l^2 & -3 \circ l & l^2 \\ -6 & -3 \circ l & 6 & -3 \circ l \\ 3 \circ l & l^2 & -3 \circ l & 2 \circ l^2 \end{bmatrix} \quad (4.122)$$

### МАТРИЦА ЖЕСТКОСТИ ИЗГИБА $[K_w]$

Степени свободы:

$u_{w1}$  и  $u_{w2}$  - перемещения узлов 1 и 2 вдоль оси  $W$ ;

$\vartheta_{v1}$  и  $\vartheta_{v2}$  - углы поворота сечений в узлах 1 и 2 относительно оси  $V$ .

Силовые факторы:

$F_{w1}$  и  $F_{w2}$  - силы в узлах 1 и 2, действующие вдоль оси  $W$ ;

$M_{v1}$  и  $M_{v2}$  - моменты сил в узлах 1 и 2 относительно оси  $V$ .

Изгиб стержня относительно оси  $W$  полностью подобен изгибу стержня относительно оси  $V$ .

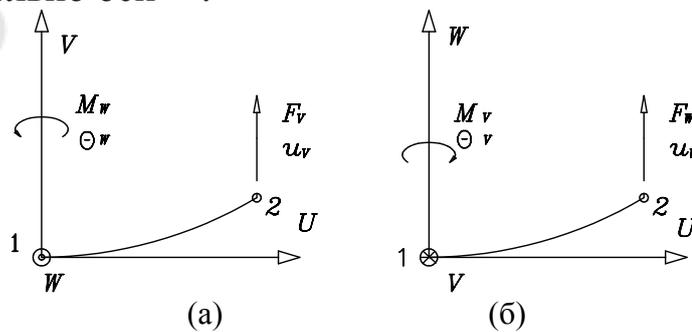


Рисунок 4.11

Как видно из Рисунок 4.11 (а) и (б) это подобие может быть достигнуто заменой:

$$\begin{cases} F_v \rightarrow F_w & u_v \rightarrow u_w \\ M_w \rightarrow -M_v & \vartheta_w \rightarrow -\vartheta_v \end{cases} \quad (4.123)$$

В формулах (4.123) следует обратить внимание на знак "-" при переопределении момента сил и угла поворота. С учетом (4.123) из формул (4.122) получим выражение для матрицы  $[K_w]$ :

$$[K_w] = \frac{2 \circ E \circ J_v}{l^3} \circ \begin{bmatrix} 6 & -3 \circ l & 6 & -3 \circ l \\ -3 \circ l & 2 \circ l^2 & 3 \circ l & l^2 \\ -6 & 3 \circ l & 6 & 3 \circ l \\ -3 \circ l & l^2 & 3 \circ l & 2 \circ l^2 \end{bmatrix} \quad (4.124)$$

#### 4.9.1.3 Применение общей теории МКЭ для построения стержня с постоянным по длине сечением

Рассмотрим прямой стержень с постоянным по длине сечением. В п. 4.9.12 для такого стержня был построен конечный элемент с двумя узлами на его концах (тип 000).

Конечный элемент был построен на основе балочной теории стержня.

Оказывается, этот же элемент стержня можно построить на основе рассмотренной в разделе 1.1 общей теории МКЭ.

Как и в п. 4.9.12, определим для каждого узла стержня ( $i=1,2$ ) вектор перемещений  $\vec{u}_i = \{u_{ui}, u_{vi}, u_{wi}\}$ , вектор углов поворота  $\vec{\vartheta}_i = \{\vartheta_{ui}, \vartheta_{vi}, \vartheta_{wi}\}$ , вектор сил  $\vec{F}_i = \{F_{ui}, F_{vi}, F_{wi}\}$  и вектор моментов сил  $\vec{M}_i = \{M_{ui}, M_{vi}, M_{wi}\}$ . В пределах элемента ( $0 \leq U \leq l$ ) все величины, относящиеся к элементу ( $\vec{u}, \vec{\vartheta}, \vec{F}, \vec{M}$ ), будем аппроксимировать с помощью функций формы по их значениям в узлах.

Для построения конечного элемента стержня необходимо построить функционал  $W$ :

$$W = U - A$$

где:  $A$  - работа внешних сил, приложенных к стержню;

$U$  - энергия (малых) деформаций стержня.

Далее мы используем известные результаты теории упругости [8] и теории сопротивления материалов [9] для растяжения-сжатия, кручения и изгиба стержня.

Энергия (малых) деформаций стержня равна:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ \frac{M_v^2}{E \circ J_v} + \frac{M_w^2}{E \circ J_w} + \frac{M_u^2}{C} + \frac{F_u^2}{E \circ S} \right\} \circ dU \quad (4.125)$$

где:  $E$  - модуль упругости;

$J_v$  и  $J_w$  - моменты инерций сечения относительно (главных) осей  $V$  и  $W$  соответственно;

$C$  - крутильная жесткость стержня (в случае круглого сечения стержня:  $C = E \circ J_\rho$ , где  $J_\rho$  - полярный момент инерции);

$S$  - площадь сечения стержня.

Для всего стержня мы будем иметь поля вектора перемещений  $\vec{u} = \vec{u}(U)$  и вектора углов поворота  $\vec{\vartheta} = \vec{\vartheta}(U)$ .

В балочной теории стержня  $\vec{u}(U)$  и  $\vec{\vartheta}(U)$  определялись на основе дифференциальных уравнений изогнутой оси балки (см. п. 4.9.12).

В МКЭ неизвестные величины (в данном случае -  $\vec{u}(U)$  и  $\vec{\vartheta}(U)$ ) аппроксимируются в пределах каждого конечного элемента по их узловым значениям (в данном случае -  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{\vartheta}_1, \vec{\vartheta}_2$ ) с помощью функций формы, заданных на конечном элементе.

Так как в случае справедливости закона Гука уравнения теории упругости являются линейными, то справедлив принцип суперпозиции, согласно которому результирующее действие всех силовых факторов, приложенных к конструкции (стержню) может быть определено как сумма (суперпозиция) действий каждого отдельного силового фактора.

В соответствии с известными формулами имеем (сравните с п. 4.9.12):

$$\begin{cases} M_v = -E \circ J_v \circ u'_w \\ M_w = E \circ J_w \circ u'_v \\ M_u = C \circ \vartheta_u \\ F_u = E \circ S \circ u_u \end{cases} \begin{cases} u_v = \vartheta_w \\ u_w = -\vartheta_v \end{cases} \quad (4.126)$$

(Штрих означает дифференцирование по  $U$ ).

Поэтому окончательно энергия деформации стержня принимает вид:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^1 \{ E \circ J_w \circ (u'_v)^2 + E \circ J_v \circ (u'_w)^2 + C \circ (\mathcal{Q}_u)^2 + E \circ S \circ (u_u)^2 \} \circ dU \quad (4.127)$$

Мы видим, что  $U$  равна суперпозиции энергий деформаций, связанных с изгибом относительно осей  $W$  и  $V$ , кручением относительно оси  $U$  и растяжением (сжатием) относительно оси  $U$ .

Работа внешних сил  $A$  равна:

$$A = (\vec{u}_1 \circ \vec{F}_1 + \vec{\mathcal{G}}_1 \circ \vec{M}_1) + (\vec{u}_2 \circ \vec{F}_2 + \vec{\mathcal{G}}_2 \circ \vec{M}_2) \quad (4.128)$$

Теперь нам осталось только построить аппроксимацию полей векторов  $\vec{u}$  и  $\vec{\mathcal{G}}$  на элементе.

Введем безразмерную переменную  $\xi$  по формуле:

$$U = l \circ \xi, \quad (0 \leq \xi \leq 1)$$

где  $l$  - длина стержня.

Тогда:

$$\vec{u} = \vec{u}(\xi), \quad \vec{\mathcal{G}} = \vec{\mathcal{G}}(\xi)$$

Мы видим, что в (4.127) компоненты  $\{u_v, u_w\}$  дифференцируются дважды по  $U$ , а  $\{\mathcal{Q}_u, u_u\}$  - один раз. Поэтому очевидно, что самой простой полиномиальной аппроксимацией в первом случае будет квадратичная, а во втором - линейная.

Линейная аппроксимация требует 2-х параметров, а квадратичная - трех. Так как число узлов у стержня два (1 и 2), то число параметров должно быть четным: четыре в первом и два во втором случае.

Итак, мы пришли к выводу, что самый простой элемент стержня с двумя узлами требует линейной аппроксимации для  $\{\mathcal{Q}_u, u_u\}$  и кубической аппроксимации для  $\{u_v, u_w\}$  (соответственно,  $\mathcal{Q}_v$  и  $\mathcal{Q}_w$  будут меняться, как следует из (4.128), по квадратичному закону).

Линейные полиномы. ( $\psi_1(\xi)$  и  $\psi_2(\xi)$ )

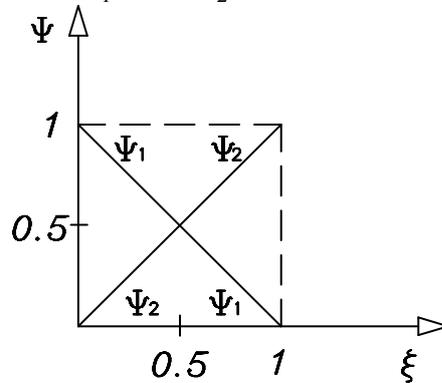


Рисунок 4.12

Линейные полиномы, изображенные на Рисунок 4.12, могут быть аналитически описаны следующим образом:

$$\begin{cases} \psi_1(\xi) = 1 - \xi \\ \psi_2(\xi) = \xi, (0 \leq \xi \leq 1) \end{cases} \quad (4.129)$$

при этом:

$$\begin{cases} \psi_1'(\xi) \equiv -1 & \psi_1(0) = 1 & \psi_1(1) = 0 \\ \psi_2'(\xi) \equiv 1 & \psi_2(0) = 0 & \psi_2(1) = 1 \end{cases}$$

(штрих означает дифференцирование по  $\xi$ ).

Тогда аппроксимация  $\{g_u, u_u\}$  имеет вид:

$$\begin{cases} u_u(\xi) = \psi_1(\xi) \circ u_{u1} + \psi_2(\xi) \circ u_{u2} \\ g_u(\xi) = \psi_1(\xi) \circ g_{u1} + \psi_2(\xi) \circ g_{u2} \end{cases} \quad (4.130)$$

Если ввести векторы:  $\vec{u}_u = \begin{Bmatrix} u_{u1} \\ u_{u2} \end{Bmatrix}$  и  $\vec{g}_u = \begin{Bmatrix} g_{u1} \\ g_{u2} \end{Bmatrix}$

и матрицу функций формы:  $[\psi] = [\psi_1 \ \psi_2]$  то формулы (4.130) примут вид:

$$\vec{u}_u(\xi) = [\psi] \circ \vec{u}_u, \quad \vec{g}_u(\xi) = [\psi] \circ \vec{g}_u \quad (4.131)$$

Кубические полиномы ( $N_{01} \ N_{02} \ N_{03} \ N_{04}$ )

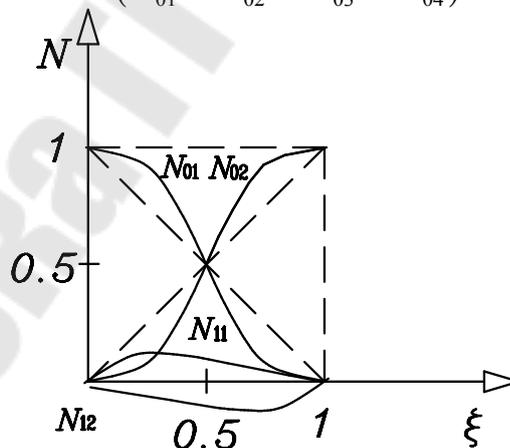


Рисунок 4.13

Кубические полиномы изображены на Рисунок 4.13.

Аппроксимация кубических полиномов имеет следующий вид:

$$\begin{cases} N_{01}(\xi) = 1 - 3 \circ \xi^2 + 2 \circ \xi^3 \\ N_{02}(\xi) = 3 - \xi^2 - 2 \circ \xi^3 \\ N_{11}(\xi) = \xi - 2 \circ \xi^2 + \xi^3 \\ N_{12}(\xi) = -\xi^2 + \xi^3 \end{cases} ; (0 \leq \xi \leq 1) \quad (4.132)$$

$$\begin{cases} N_{01'}(\xi) = -6 \circ \xi + 6 \circ \xi^2 & N_{01}(0) = 1 & N_{01}(1) = N_{01'}(0) = N_{01'}(1) = 0 \\ N_{02'}(\xi) = -N_{01'}(\xi) & N_{02}(1) = 1 & N_{02}(0) = N_{02'}(0) = N_{02'}(1) = 0 \\ N_{11'}(\xi) = 1 - 4 \circ \xi + 3 \circ \xi^2 & N_{11'}(0) = 1 & N_{11}(0) = N_{11}(1) = N_{11'}(1) = 0 \\ N_{12'}(\xi) = -2 \circ \xi + 3 \circ \xi^2 & N_{12'}(1) = 1 & N_{12}(0) = N_{12}(1) = N_{12'}(0) = 0 \end{cases} \quad (4.133)$$

$$\begin{cases} u_v(\xi) = N_{01}(\xi) \circ u_{v1} + N_{02}(\xi) \circ u_{v2} + N_{11}(\xi) \circ u_{v1'} + N_{12}(\xi) \circ u_{v1'} \\ u_w(\xi) = N_{01}(\xi) \circ u_{w1} + N_{02}(\xi) \circ u_{w2} + N_{11}(\xi) \circ u_{w1'} + N_{12}(\xi) \circ u_{w1'} \end{cases}$$

Если ввести векторы:  $\vec{u}_v = \begin{Bmatrix} u_{v1} \\ u_{v2} \\ u_{v1'} \\ u_{v2'} \end{Bmatrix}$   $\vec{u}_w = \begin{Bmatrix} u_{w1} \\ u_{w2} \\ u_{w1'} \\ u_{w2'} \end{Bmatrix}$

и матрицу функций формы:  $[N] = [N_{01} \quad N_{02} \quad N_{11} \quad N_{12}]$  то формулы (4.133) примут вид:

$$u_v(\xi) = [N] \circ \vec{u}_v \quad u_w(\xi) = [N] \circ \vec{u}_w \quad (4.134)$$

Подставив аппроксимирующие формулы (4.131) и (4.134) в формулу (4.127), для энергии деформации получим выражение:

$$U = \frac{1}{2} \circ \vec{u}_v^T \circ [k_v] \circ \vec{u}_v + \frac{1}{2} \circ \vec{u}_w^T \circ [k_w] \circ \vec{u}_w + \frac{1}{2} \circ \vec{u}_g^T \circ [k_g] \circ \vec{u}_g + \frac{1}{2} \circ \vec{u}_u^T \circ [k_u] \circ \vec{u}_u$$

где:

$$\begin{aligned} [k_v] &= \frac{E \circ J_w}{l^3} \circ \int_0^1 \{N''\}^T \circ \{N''\} \circ d\xi & [k_w] &= \frac{E \circ J_v}{l^3} \circ \int_0^1 \{N''\}^T \circ \{N''\} \circ d\xi \\ [k_g] &= \frac{C}{l} \circ \int_0^1 \{\psi'\}^T \circ \{\psi'\} \circ d\xi & [k_u] &= \frac{E \circ S}{l} \circ \int_0^1 \{\psi'\}^T \circ \{\psi'\} \circ d\xi \end{aligned} \quad (4.135)$$

(индекс  $T$  - означает операцию транспонирования, поэтому, например, если:  $\vec{u}_v$  - вектор-столбец, то  $\vec{u}_v^T$  - вектор-строка).

Вычисление интегралов в (4.135) дает:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^1 \{\psi'\}^T \circ \{\psi'\} \circ d\xi = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ \int_0^1 \{N''\}^T \circ \{N''\} \circ d\xi = 2 \circ \begin{bmatrix} 6 & -6 & 3 & 3 \\ -6 & 6 & -3 & -3 \\ 3 & -3 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (4.136)$$

Полученные матрицы: -  $[K_v]$   $[K_w]$   $[K_g]$   $[K_u]$  называются матрицами жесткости стержневого элемента, работающего только на изгиб относительно оси  $W$ , изгиб относительно оси  $V$ , кручение относительно оси  $U$  и растяжение-сжатие вдоль оси  $U$  соответственно.

С учетом соотношений:

$u_w(U) = -\mathcal{G}_v$   $u_v(U) = \mathcal{G}_v$  (штрих означает дифференцирование по  $U$ ).

Окончательно получим следующее выражение для матриц жесткости и энергии деформации:

$$U = \frac{1}{2} \circ \vec{u}_v^T \circ [k_v] \circ \vec{u}_v + \frac{1}{2} \circ \vec{u}_w^T \circ [k_w] \circ \vec{u}_w + \frac{1}{2} \circ \vec{u}_u^T \circ [k_g] \circ \vec{u}_u + \frac{1}{2} \circ \vec{u}_u^T \circ [k_u] \circ \vec{u}_u$$

где:

$$\vec{u}_v = \begin{Bmatrix} u_{v1} \\ u_{v2} \\ u_{v1'} \\ u_{v2'} \end{Bmatrix} \quad \vec{u}_w = \begin{Bmatrix} u_{w1} \\ u_{w2} \\ u_{w1'} \\ u_{w2'} \end{Bmatrix} \quad [K_g] = \frac{C}{l} \circ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad [K_u] = \frac{E \circ S}{l} \circ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.137)$$

$$[K_v] = \frac{2 \circ E \circ J_w}{l^3} \circ \begin{bmatrix} 6 & 3 \circ l & -6 & 3 \circ l \\ 3 \circ l & 2 \circ l^2 & -3 \circ l & l^2 \\ -6 & -3 \circ l & 6 & -3 \circ l \\ 3 \circ l & l^2 & -3 \circ l & 2 \circ l^2 \end{bmatrix}$$

$$[K_w] = \frac{2 \circ E \circ J_v}{l^3} \circ \begin{bmatrix} 6 & -3 \circ l & -6 & -3 \circ l \\ -3 \circ l & 2 \circ l^2 & 3 \circ l & l^2 \\ -6 & 3 \circ l & 6 & 3 \circ l \\ -3 \circ l & l^2 & 3 \circ l & 2 \circ l^2 \end{bmatrix}$$

Сравнение формул указывает на полное совпадение выражений для матриц жесткости  $[K_v]$   $[K_w]$   $[K_g]$   $[K_u]$ . Это доказывает сделан-

ное в начале этого пункта утверждение, что элемент стержня типа 000 можно построить на основе общей теории МКЭ.

Причина указанного совпадения в том, что аппроксимация неизвестных величин (линейная для  $u_u$  и  $\vartheta_u$  и кубическая для  $u_v$  и  $u_w$ ) дает точные аналитические выражения, полученные по балочной теории стержня. Действительно, установлено, что перемещение  $u_u$  и угол поворота  $\vartheta_u$  меняются по линейному закону, а перемещения  $u_v$  и  $u_w$  - по кубическому.

Рассмотрим теперь произвольную конструкцию, состоящую из стержней. Если все стержни прямые и постоянного сечения, то каждый стержень в МКЭ мы можем теперь заменить на один конечный элемент с двумя узлами. Если же некоторые из стержней конструкции не являются прямыми или же имеют переменные по длине сечения, то такие стержни мы разбиваем на несколько стержневых элементов.

## 4.9.2 Двумерные элементы

### 4.9.2.1 Элементы мембраны

#### 4.9.2.1.1 Понятие мембраны. Плоское напряженное состояние

После того, как мы рассмотрели элементы стержня, являющиеся одномерными, мы перейдем к изучению двумерных элементов. Изучение двумерных элементов в механике мы начнем с простейшего типа - элементов мембраны. Мембраной мы будем называть такой плоский двумерный элемент, который может испытывать действие сил только в его плоскости.

Мембранами моделируются достаточно тонкие металлические пластинки, испытывающие растяжение или сжатие в своей плоскости. Пусть декартова система координат выбрана таким образом, что мембрана лежит в плоскости  $XU$ , а ось  $Z$  перпендикулярна к плоскости мембраны.

Пусть  $\vec{\sigma}$  и  $\vec{\varepsilon}$  - вектора напряжения и деформации мембраны соответственно.

Из соображений симметрии следует, что:

$$\tau_{xy} = \tau_{yz} = 0, \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \quad (4.138a)$$

Так как на поверхности мембраны (за исключением боковой поверхности) нет никаких сил, то:

$$\sigma_z = 0 \quad (4.138b)$$

Поэтому если мембрана тонкая (а это предполагается справедливым), то условие (4.138) можно считать выполненным по всей толщине мембраны. Описанное напряженное состояние называют в механике плоским напряженным состоянием. Можно установить связь компонент вектора деформаций  $\vec{\varepsilon}$  с компонентами вектора напряжений  $\vec{\sigma}$ :

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2} \circ (\varepsilon_x + \mu \circ \varepsilon_y) \\ \sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2} \circ (\varepsilon_y + \mu \circ \varepsilon_x) \\ \tau_{xy} = G \circ \gamma_{xy} \end{cases} \quad (4.139)$$

Что касается деформаций мембраны вдоль оси  $Z$ , то имеем:

$$\varepsilon_z = \frac{\mu}{1-\mu} \circ (\varepsilon_x + \varepsilon_y)$$

то есть  $\varepsilon_z$  является функцией от  $\varepsilon_x$  и  $\varepsilon_y$ . В МКЭ для двумерных элементов деформации из поверхности элемента не рассматриваются.

Поэтому мы вправе для описания плоского напряженного состояния пользоваться трехкомпонентными векторами:

$$\vec{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}; \quad \vec{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.140)$$

Эти вектора связаны друг с другом матрицей упругости  $[E]$ :

$$\vec{\sigma} = [E] \circ \vec{\varepsilon}, \quad \text{где } [E] = \frac{E}{1-\mu^2} \circ \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \quad (4.141)$$

Энергия деформации мембраны будет иметь вид:

$$U = \frac{1}{2} \circ \int_V \vec{\varepsilon}^T \circ [E] \circ \vec{\varepsilon} \circ dV \quad (4.142)$$

где интегрирование ведется по всему объему мембраны.

Так как мембрана плоская и предполагается постоянной толщиной  $h$ , то:

$$U = \frac{h}{2} \circ \int_V \vec{\varepsilon}^T \circ [E] \circ \vec{\varepsilon} \circ dA \quad (4.143)$$

где интегрирование ведется по поверхности мембраны (кроме боковой поверхности).

#### 4.9.2.1.2 Треугольный элемент мембраны без промежуточных узлов

Рассмотрим сначала простейший элемент мембраны, представляющий собой произвольный треугольник (Рисунок 4.14) с тремя узлами ( $i=1,2,3$ ) в его вершинах [6]. В [ИСПА] тип этого конечного элемента - 40.

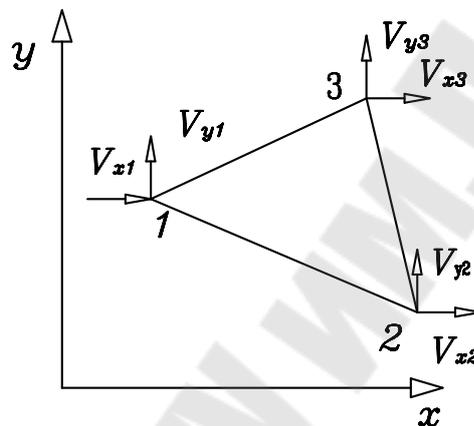


Рисунок 4.14

Перемещения  $v_{xi}, v_{yi}$  вдоль осей  $X$  и  $Y$  в  $i$ -ом узле элемента мембраны представляют собой его степени свободы, которых у мембраны в каждом узле по две.

Итого у треугольного элемента мембраны 6 степеней свободы. Обозначим через вектор степеней свободы (перемещений) в узле  $i$ :

$$v_i = \begin{Bmatrix} v_{xi} \\ v_{yi} \end{Bmatrix}, \quad (i = 1, 2, 3), \quad (4.144)$$

а через  $\vec{U}^{(e)}$  - вектор степеней свободы элемента:

$$\vec{U}^{(e)} = \begin{Bmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \vec{v}_3 \end{Bmatrix} \quad (4.145)$$

Вектор  $\vec{U}^{(e)}$  имеет сейчас 6 компонент.

Пусть:  $\vec{u} = \vec{u}(x, y)$  - поле перемещений в пределах треугольной мембраны. Так как аппроксимация ведется по трем значениям  $\vec{u}$  в узлах элемента, то поле перемещений  $\vec{u}$  в треугольном элементе может быть представлено с помощью полного линейного полинома:

$$\begin{cases} u_x(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 \circ x + \alpha_3 \circ y \\ u_y(x, y) = \beta_1 + \beta_2 \circ x + \beta_3 \circ y \end{cases} \quad (4.146)$$

В вершинах треугольника значения функций из (4.146) должны совпадать с узловыми перемещениями  $\vec{v}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ).

Легко понять, что функции (4.146) могут быть записаны в виде:

$$\vec{u}(x, y) = \sum_{i=1}^3 \psi_i(x, y) \circ \vec{v}_i \quad (4.147)$$

где:  $\psi_i(x, y)$ ; ( $i = 1, 2, 3$ ) - функции формы треугольного элемента, причем:

- 1)  $\psi_i(x, y)$  - линейные полиномы;
- 2)  $\psi_i$  обращаются в узле  $j$  в единицу, если  $j = i$ , и в ноль, если  $j \neq i$
- 3)  $\sum_{i=1}^3 \psi_i(x, y) \equiv 1$  - общее свойство функций формы.

Последнее свойство обеспечивает перемещение элемента как целого. Можно показать, что эти функции формы имеют следующие свойства [4]:

- 1) Функции  $\psi_i$  имеют вид:

$$\psi_i = \frac{1}{2 \circ A} \circ (a_i + b_i \circ x + c_i \circ y),$$

где

$$\begin{cases} a_1 = x_2 \circ y_3 - x_3 \circ y_2 & a_2 = x_3 \circ y_1 - x_1 \circ y_3 & a_3 = x_1 \circ y_2 - x_2 \circ y_1 \\ b_1 = y_2 - y_3 & b_2 = y_3 - y_1 & b_3 = y_1 - y_2 \\ c_1 = x_3 - x_2 & c_2 = x_1 - x_3 & c_3 = x_2 - x_1 \end{cases} \quad (4.148)$$

Здесь:  $A$  - площадь треугольника, которая может быть вычислена по формуле:

$$A = \frac{1}{2} \circ \Delta, \text{ где } \Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} - \text{определитель.} \quad (4.149)$$

- 2) Интеграл вдоль ребра 1-2 треугольника:

$$\int_{l_{12}} \psi_1^{m_1} \circ \psi_2^{m_2} \circ dl = \frac{m_1! \circ m_2!}{(m_1 + m_2 + 1)!} \circ l \quad (4.150)$$

Здесь  $l_{12}$  длина ребра 1-2; для ребер 2-3 и 3-1 аналогично.

- 3) Интеграл по площади треугольника:

$$\int_A \psi_1^{m_1} \circ \psi_2^{m_2} \circ \psi_3^{m_3} \circ dA = \frac{m_1! \circ m_2! \circ m_3!}{(m_1 + m_2 + m_3 + 2)!} \circ 2 \circ A \quad (4.151)$$

Зная поле перемещений  $\vec{u}(x, y)$  из (4.147), мы можем найти поле деформаций  $\vec{\varepsilon}(x, y)$ :

$$\vec{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}; \varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}; \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial x}; \gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \quad (4.152)$$

С помощью (4.147) получим:

$$\vec{\varepsilon}(x, y) = \sum_{i=1}^3 [\beta_i] \circ \vec{v}_i = [\beta] \circ \vec{U}^{(e)} \text{ где матрицы:} \quad (4.153)$$

$$[\beta_i] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_i}{\partial y} & \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \end{bmatrix}; (i = 1, 2, 3); [\beta] = [[\beta_1] \quad [\beta_2] \quad [\beta_3]]$$

Матрица  $[\beta]$ , определяющая поле вектора деформаций элемента по вектору степеней свободы  $\vec{U}^{(e)}$  элемента называется матрицей деформирования. Согласно (4.148), матрица  $[\beta]$  имеет вид:

$$[\beta] = \frac{1}{2 \circ A} \circ \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} \quad (4.154)$$

Тогда энергия деформации элемента примет вид:

$$U = \frac{1}{2} \circ \vec{U}^{(e)T} \circ [K^{(e)}] \circ \vec{U}^{(e)} \quad (4.155)$$

где:  $[K^{(e)}] = h \circ \int_A [\beta]^T \circ [E] \circ [\beta] \circ dA$

В нашем случае матрица деформирования  $[\beta]$  имеет размерность (3x6), а матрица жесткости  $[K]$  имеет размерность (6x6).

Так как матрица  $[\beta]$  в (4.154) постоянна, то из (4.155) следует, что матрица жесткости треугольного элемента мембраны имеет вид:

$$[K^{(e)}] = h \circ A \circ [\beta]^T \circ [E] \circ [\beta] \quad (4.156)$$

Покажем теперь, как находить узловые силы.

Работа объемных сил  $\vec{R}$  равна:

$$A^{(e)} = \int_V \vec{u}^T \circ \vec{R} \circ dV$$

Но из (4.147) следует, что:  $\vec{u}(x, y) = \sum_{i=1}^3 \psi_i(x, y) \circ v_i$

Поэтому работу  $A^{(e)}$  можно представить в виде:

$$A^{(e)} = \sum_{i=1}^3 \vec{v}_i^T \circ \vec{F}_i^{(e)} = \vec{U}^{(e)T} \circ \vec{F}^{(e)}$$

где:  $\vec{F}_i^{(e)} = \int_A \psi_i \circ \vec{R} \circ dV$  - узловая сила в  $i$ -ом узле элемента;

$$\vec{F}^{(e)} = \begin{Bmatrix} \vec{F}_1^{(e)} \\ \vec{F}_2^{(e)} \\ \vec{F}_3^{(e)} \end{Bmatrix} \text{ -вектор силовых факторов элемента.}$$

Так как согласно (4.155)  $\sum_{i=1}^3 \psi_i(x, y) \equiv 1$ , то:

$$\sum_{i=1}^3 \vec{F}_i^{(e)} = \int_V \vec{R} \circ dV$$

Функционал  $W^{(e)}$  для элемента тогда примет стандартный вид:

$$W^{(e)} = \frac{1}{2} \circ \vec{U}^{(e)T} \circ [K^{(e)}] \circ \vec{U}^{(e)} - \vec{U}^{(e)T} \circ F^{(e)}$$

После варьирования получим уравнения равновесия элемента:

$$\delta W^{(e)} = 0 \Rightarrow [K] \circ \vec{U}^{(e)} = F^{(e)}$$

После перехода к глобальным величинам  $([K], \vec{U}, \vec{F})$  получим глобальные уравнения равновесия:  $[K] \circ \vec{U} = \vec{F}$ .

#### 4.9.2.1.3 Четырехугольный изопараметрический элемент мембраны без промежуточных узлов

В изопараметрических элементах, как геометрия, так и поля неизвестных величин задаются с помощью одних и тех же параметрических формул. Их важное положительное свойство - совместность, понятие которой было сформулировано выше.

Рассмотрим изопараметрический элемент мембраны, геометрически представляющий собой произвольный четырехугольник с прямыми ребрами (Рисунок 4.15). Этот элемент имеет 4 узла, совпадающие с вершинами четырехугольника [6]. Тип элемента в [ИСПА] - 130.

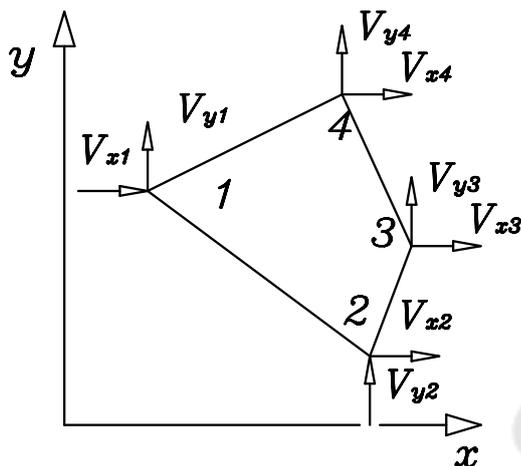


Рисунок 4.15

Введем вспомогательный квадрат (2x2) в безразмерной системе координат  $\xi\eta$  (Рисунок 4.15).

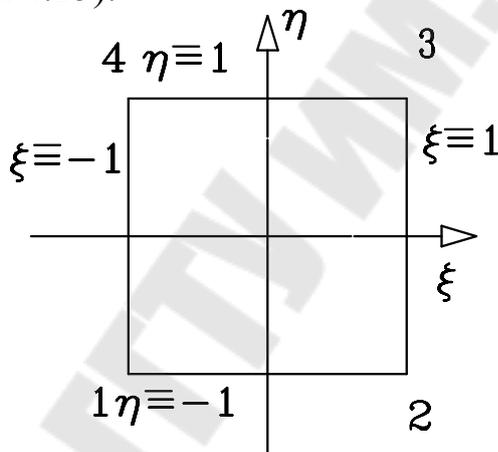


Рисунок 4.16

Произвольный четырехугольник, изображенный на Рисунок 4.15, можно получить в результате отображения квадрата в плоскости  $\xi\eta$  на плоскость  $XY$  с помощью следующих параметрических формул:

$$x(\xi, \eta) = \sum_{r=1}^4 \psi_r(\xi, \eta) \circ x_r; \quad y(\xi, \eta) = \sum_{r=1}^4 \psi_r(\xi, \eta) \circ y_r \quad (4.157)$$

$$\text{где: } \psi_r(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \circ (1 + \xi_r \circ \xi) \circ (1 + \eta_r \circ \eta), \quad (r = 1, 2, 3, 4) \quad (4.158)$$

Действительно:  $\psi_r(\xi, \eta)$  - билинейные по  $\xi\eta$  функции формы, обращающиеся в единицу в узле  $i = r$  и в ноль в любом другом узле  $i \neq r$  ( $i, r = 1, 2, 3, 4$ ).

Поэтому формулы (4.157) отображают вершины квадрата (2x2) (Рисунок 4.16) в соответствующие им вершины четырехугольника на

Рисунок 4.15. Так как вдоль каждой стороны квадрата  $\psi_r(\xi, \eta)$  - линейные функции, то и стороны квадрата отображаются в прямые ребра четырехугольника.

Для каждого узла элемента имеем вектор перемещений  $\vec{V}_r$ , а для всего элемента - вектор степеней свободы  $\vec{U}^{(e)}$ , имеющий теперь 8 компонент. Соответственно, данный конечный элемент имеет 8 степеней свободы.

Согласно определению изопараметрического элемента, данного в начале параграфа, поле перемещений  $\vec{u}(\xi, \eta)$  аппроксимируется с помощью тех же билинейных функций формы  $\psi_r(\xi, \eta)$ :

$$\vec{u}(\xi, \eta) = \sum_{r=1}^4 \psi_r(\xi, \eta) \circ \vec{v}_r; \quad (4.159)$$

Можно показать, что такая параметрическая аппроксимация обеспечивает возможность задания произвольного билинейного закона от координат  $X, Y$ :

$$\begin{cases} u_x(x, y) = a_1 + a_2 \circ x + a_3 \circ y + a_4 \circ x \circ y \\ u_y(x, y) = b_1 + b_2 \circ x + b_3 \circ y + b_4 \circ x \circ y \end{cases} \quad (4.160)$$

Вектор деформации будет тогда аппроксимирован таким образом:

$$\vec{\varepsilon}(\xi, \eta) = \sum_{r=1}^4 [\beta_r] \circ \vec{v}_r = [\beta] \circ \vec{u}^{(e)} \quad (4.161)$$

$$[\beta_r] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_r}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \psi_r}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_r}{\partial y} & \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \end{bmatrix}; \quad [\beta_r] = [[\beta_1] \quad [\beta_2] \quad [\beta_3] \quad [\beta_4]]$$

Здесь:  $[\beta]$  - матрица деформирования элемента.

Входящие в матрицу деформирования  $[\beta]$  производные  $\frac{\partial \psi_r}{\partial x}$  и  $\frac{\partial \psi_r}{\partial y}$  нельзя найти непосредственным дифференцированием в силу параметрической зависимости от  $\xi$  и  $\eta$ . Поэтому для вычисления требуемых производных воспользуемся формулами:

$$\frac{\partial \psi_r}{\partial \xi} = \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \circ \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi_r}{\partial y} \circ \frac{\partial y}{\partial \xi}; \quad \frac{\partial \psi_r}{\partial \eta} = \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \circ \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \psi_r}{\partial y} \circ \frac{\partial y}{\partial \eta}; \quad (4.162)$$

которые в матричной форме имеют вид:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_r}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \psi_r}{\partial \eta} \end{bmatrix} = J(\xi, \eta) \circ \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_r}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (4.163)$$

Здесь через  $J(\xi, \eta)$  обозначена матрица Якоби:

$$J(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (4.164)$$

элементы которой находятся по формулам (4.157) и (4.158).

Тогда имеем для искомых производных следующие формулы:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_r}{\partial y} \end{bmatrix} = J^{-1} \circ \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_r}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \psi_r}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (4.165)$$

где:  $J^{-1}$  - обратная матрица Якоби.

Матрица жесткости элемента  $[K^{(e)}]$  размерностью (8x8) будет иметь вид (4.155):

$$[K^{(e)}] = h \circ \int_A [\beta]^T \circ [E] \circ [\beta] \circ dA$$

В координатах  $\xi\eta$  для элементарной площади  $dA$  имеем:

$$dA = |J(\xi, \eta)| \circ d\xi \circ d\eta \quad (4.166)$$

где:  $|J(\xi, \eta)|$  - модуль определителя матрицы Якоби или Якобиан.

Поэтому для  $[K^{(e)}]$  имеем:

$$[K^{(e)}] = h \circ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\beta]^T \circ [E] \circ [\beta] \circ |J(\xi, \eta)| \circ d\xi \circ d\eta \quad (4.167)$$

Определение матрицы жесткости элемента свелось к вычислению двойного интеграла, которое в МКЭ осуществляется с помощью численных методов интегрирования.

Рекомендуемое численное интегрирование по Гауссу - (2x2). Покажем теперь совместность элементов мембраны.

Заметим, что как для треугольного элемента мембраны, так и для четырехугольного элемента мембраны с прямыми ребрами закон изменения поля перемещений  $\vec{u}(\vec{r})$  вдоль каждого ребра  $l_{ij}$  является линейным. Линейная функция однозначно определяется по двум параметрам - в нашем случае по значениям  $\vec{v}_i$  и  $\vec{v}_j$  в двух узлах  $i$  и  $j$  реб-

ра  $l_{ij}$ . Так как узловые значения перемещений  $\vec{v}_i$  и  $\vec{v}_j$  являются общими для смежных по ребру элементов, то отсюда следует непрерывность поля  $\vec{u}(\vec{r})$  вдоль ребра, а это означает совместность этих элементов друг с другом.

#### 4.9.2.1.4 Устранение ложной деформации сдвига для элементов мембраны

Выше был рассмотрен вопрос сходимости конечно-элементного решения к точному при сгущении конечно-элементной сетки; была сформулирована теорема сходимости для конечно-элементной сетки, состоящей из конечных элементов, удовлетворяющих условию полноты и совместных друг с другом.

Но всюду подразумевалось, что при сгущении сетки стремятся к нулю размеры конечных элементов по всем направлениям. Иная ситуация возникает, например, когда мы моделируем балку с тонкой вертикальной стенкой только одним элементом по высоте, проводя дискретизацию только по длине балки [6].

На Рисунок 4.17 показана такая балка, разбитая на прямоугольные элементы мембраны типа 130. Здесь:  $b$  - высота балки,  $l$  - длина балки,  $a$  - ширина элемента.

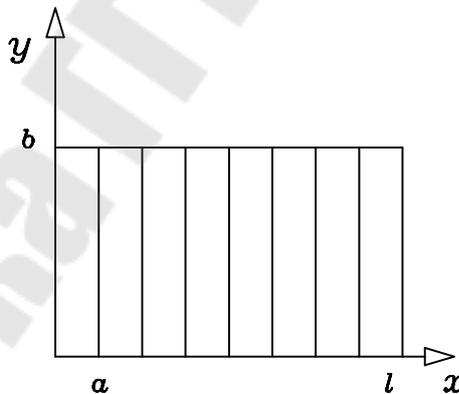


Рисунок 4.17

Сгущение сетки сводится здесь к уменьшению продольных размеров элементов, в то время как поперечные размеры, определяемые высотой балки  $b$ , остаются неизменными.

При сгущении сетки имеем:  $a \ll b, a \rightarrow 0$

Рассмотрим для этого случая конечно-элементного разбиения балки ее изгиб в плоскости  $XU$ . Используем четырехугольный изопараметрический элемент.

На основе аппроксимации поля перемещений имеем для компонент поля деформаций:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = a_2 + a_4 \circ y \\ \varepsilon_y = b_3 + b_4 \circ x \\ \gamma_{xy} = a_3 + b_2 + a_4 \circ x + b_4 \circ y \end{cases} \quad (4.168)$$

Так как  $a \rightarrow 0$ , то члены, содержащие координату  $X$ , будут давать все меньший вклад. Поэтому деформированное состояние элемента характеризуется величинами:

$$\varepsilon_x \approx a_2 + a_4 \circ y \quad \varepsilon_y \approx b_3 \quad \gamma_{xy} \approx a_3 + b_2 + b_4 \circ y \quad (4.169)$$

Основное значение при изгибе балки имеет продольная деформация  $\varepsilon_x$ , которая согласно (4.169) меняется по линейному закону, что соответствует технической теории изгиба балки.

Кроме того, возникает постоянная поперечная деформация  $\varepsilon_y$  (которая игнорируется в теории изгиба балки), а также деформация сдвига  $\gamma_{xy}$ , меняющаяся по высоте по линейному закону. В действительности распределение  $\gamma_{xy}$  по высоте является параболическим, но это расхождение с теорией может быть исправлено введением корректирующего коэффициента при вычислении матрицы жесткости.

Можно показать, что при чистом сдвиге угол поворота сечения элемента  $\mathcal{G}^{(e)}$  равен:

$$\mathcal{G}^{(e)} = \mathcal{G} \circ \frac{15}{16 \circ \left( 1 + \frac{3}{8 \circ \gamma^2} \right)} \quad (4.170)$$

где:  $\mathcal{G}$  - точное значение угла поворота;

$\gamma = \frac{b}{a}$  - соотношение сторон прямоугольного элемента.

Видим, что при  $a \rightarrow 0$  ( $a \ll b; \gamma = \frac{b}{a} \gg 1$ )

$$\mathcal{G}^{(e)} \approx \frac{15}{16} \mathcal{G}$$

Коэффициент  $k = \frac{15}{16}$  и есть тот самый корректирующий коэффициент, который следует использовать при вычислении матрицы жесткости.

В случае длинной балки, когда  $l \gg b$  ( $a \rightarrow \infty, a \gg b$ ) преобладающее значение имеют слагаемые, содержащие координату  $X$ :

$$\varepsilon_x \approx a_2 + a_4 \circ y \quad \varepsilon_y \approx b_4 \circ y \quad \gamma_{xy} \approx a_4 \circ x \quad (4.171)$$

Константа  $a_4$  характеризует распределение  $\varepsilon_x$  по высоте, так что  $\gamma_{xy}$  будет того же порядка что и  $\varepsilon_x$ . Но это не отвечает теории изгиба балки, в которой:

$$|\gamma_{xy}| \ll |\varepsilon_x|$$

А из формулы (4.170) при  $a \gg b$  ( $\gamma \ll 1$ ) следует:

$$g^{(e)} = g \circ \frac{5 \circ \gamma^2}{2} \ll g$$

Видим, что в случае сильно вытянутого вдоль оси балки элемента, прямоугольный изопараметрический элемент может давать совершенно неверное решение, то есть жесткость элемента сильно завышена.

Причина здесь в ложной деформации сдвига:  $\gamma_{xy} \prec a_4 \circ x$

Устранить ложную деформацию сдвига можно, если в (4.168) потребовать, чтобы деформация сдвига оставалась постоянной и равной своему значению при  $\xi = \eta = 0$

$$\gamma_{xy} \equiv a_3 + b_2$$

Для этого заметим, что матрицу жесткости элемента мембраны  $[K^{(e)}]$ :

$$[K^{(e)}] = h \circ \int_A [\beta]^T \circ [E] \circ [\beta] \circ dA \quad (4.172)$$

можно представить в виде:

$$[K^{(e)}] = [K_e^{(e)}] \circ [K_g^{(e)}]$$

где:

$$[K_e^{(e)}] = h \circ \int_A [\beta]^T \circ [E_e] \circ [\beta] \circ dA; [E_e] = \frac{E}{1 - \mu^2} \circ \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[K_g^{(e)}] = h \circ \int_A [\beta]^T \circ [E_g] \circ [\beta] \circ dA; [E_g] = G \circ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.173)$$

$$[E_e] + [E_g] = [E] = [E_e] = \frac{E}{1 - \mu^2} \circ \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \mu}{2} \end{bmatrix}$$

Физический смысл такого представления матрицы жесткости мембранного элемента  $[K^{(e)}]$  следующий. Матрица  $[K_e^{(e)}]$  представляет собой вклад в матрицу жесткости  $[K^{(e)}]$ , отвечающий только нормальным деформациям элемента, а матрица  $[K_g^{(e)}]$  - вклад деформаций сдвига. При вычислении  $[K^{(e)}]$  мы будем, как и раньше использовать интегрирование по Гауссу (2x2). А при вычислении  $[K_g^{(e)}]$  мы будем использовать минимально допустимый порядок интегрирования (1x1). При интегрировании (1x1) используется значение подынтегральной функции всего в одной точке ( $\xi = \eta = 0$ ), т.е. мы автоматически учли требуемое постоянство деформации сдвига в пределах элемента, приняв:

$$\gamma_{xy} \equiv \gamma_{xy} (\xi = \eta = 0)$$

В случае элементов 110 и 140 для матрицы  $[K^{(e)}]$  используют интегрирование по Гауссу (3x3), а для матрицы  $[K_g^{(e)}]$  - минимально допустимый порядок интегрирования (2x2), в соответствии с таблицей.

#### 4.9.2.1.5 Треугольный гибридный элемент мембраны

Гибридные элементы в механике строятся на основе так называемой дополнительной энергии  $U_g$  [3]:

$$U_g = U + A \quad (4.174)$$

где:  $U$  - энергия деформации элемента, выраженная через внутренние силовые факторы, действующие в элементе;

$A$  - работа внутренних силовых факторов на границе элемента.

Варьируемый потенциал  $W$  имеет вид:

$$W = U_g - A \quad (4.175)$$

где:  $A$  - работа заданных внешних сил.

При этом в вариационном принципе для гибридных элементов варьируется как степени свободы (в общем случае - перемещения и углы поворота), так и внутренние силовые факторы.

Рассмотрим произвольную мембрану, расположенную в плоскости  $XU$  глобальной декартовой системы координат  $XUW$ .

Пусть:  $\vec{u}(x, y) = \begin{bmatrix} u_x(x, y) \\ u_y(x, y) \end{bmatrix}$  - поле перемещений мембраны;

$$\vec{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} - \text{поле деформаций мембраны};$$

$$\vec{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} - \text{поле напряжений мембраны.}$$

Напряжения  $\vec{\sigma}$  являются внутренними силовыми факторами мембраны и связаны с деформациями  $\vec{\varepsilon}$  формулой:

$$\vec{\sigma} = [E] \circ \vec{\varepsilon} \quad (4.176)$$

где:  $[E]$  - матрица упругости для плоского напряженного состояния.

Энергия деформации мембраны  $U$  определяется формулой:

$$U = \frac{h}{2} \circ \int_A \vec{\varepsilon}^T \circ [E] \circ \vec{\varepsilon} \circ dA \quad (4.177)$$

где интегрирование ведется по поверхности мембраны (кроме боковой поверхности);  $h$  - толщина мембраны.

Воспользовавшись формулой (4.176), выразим энергию деформации  $U$  через внутренние силовые факторы мембраны  $\vec{\sigma}$ :

$$U = \frac{h}{2} \circ \int_A \vec{\sigma}^T \circ [E]^{-1} \circ \vec{\sigma} \circ dA \quad (4.178)$$

Здесь мы воспользовались симметричностью матрицы упругости:  $[E]^T = [E]$

Рассмотрим элемент боковой поверхности  $dS$  с вектором внешней по отношению к элементу нормали  $\vec{n}$  (Рисунок 4.18).

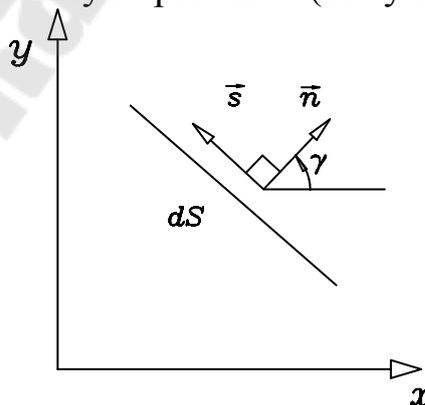


Рисунок 4.18

Единичный вектор  $\vec{s}$  направлен вдоль элемента  $dS$  в соответствии с обходом элемента против часовой стрелки.

Элемент  $dS = h \circ dl$ , где:  $dl$  - длина элемента.

Тогда работа внутренних силовых факторов  $A$  равна:

$$A = h \circ \oint_{\partial A} (u_n \circ \sigma_n + u_s \circ \sigma_{ns}) \circ dl \quad (4.179)$$

где интегрирование ведется по границе элемента  $\partial A$ ;  $\sigma_n$  и  $\sigma_{ns}$  - компоненты  $\vec{\sigma}$ , действующие на элементе  $dS$  вдоль нормали  $\vec{n}$  и касательного вектора  $\vec{S}$  соответственно.

Поэтому дополнительная энергия мембраны  $U$  равна:

$$U_g = -\frac{h}{2} \circ \int_A \vec{\sigma}^T \circ [E]^{-1} \circ \vec{\sigma} \circ dA + h \circ \oint_{\partial A} (u_n \circ \sigma_n + u_s \circ \sigma_{ns}) \circ dl \quad (4.180)$$

Полученные выражения для дополнительной энергии мембраны используются при построении различных типов гибридных элементов мембраны. Рассмотрим здесь простейший треугольный гибридный элемент мембраны, представляющий собой произвольный треугольник с тремя узлами в его вершинах (Рисунок 4.19).

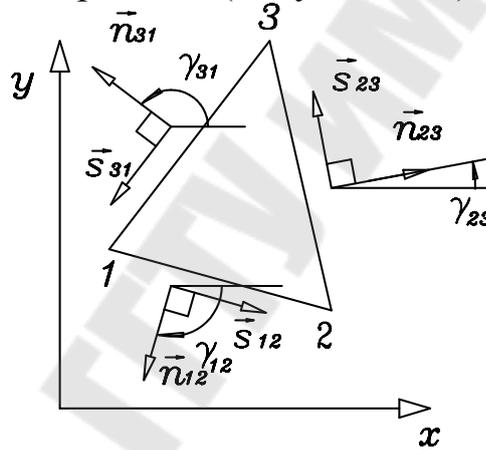


Рисунок 4.19

$$x_{ij} = x_i - x_j \quad y_{ij} = y_i - y_j \quad l_{ij} = \sqrt{x_{ij}^2 + y_{ij}^2}$$

$$c = \cos \gamma_{ij} = -\frac{y_{ij}}{l_{ij}} \quad s = \sin \gamma_{ij} = \frac{x_{ij}}{l_{ij}} \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

В каждом узле по две степени свободы - перемещения  $v_{xr}$  и  $v_{yr}$  ( $r=1,2,3$ ) вдоль осей  $X$  и  $Y$  соответственно:

Вектор степеней свободы узла  $\vec{v}_r$  имеет две компоненты:

$$\vec{v}_r = \begin{bmatrix} v_{xr} \\ v_{yr} \end{bmatrix}, \quad (r=1,2,3)$$

Вектор степеней свободы элемента  $\vec{U}^{(e)}$  имеет  $3 \times 3 = 9$  компонент:

$$\vec{U}^{(e)} = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \vec{v}_3 \end{bmatrix}$$

Для треугольного элемента мембраны поле перемещений  $\vec{u}(x, y)$  аппроксимируется по узловым значениям  $\vec{v}_r$  ( $r=1,2,3$ ) линейными по  $X, Y$  полиномами.

Поэтому поле деформаций  $\vec{\varepsilon}$ , а с ним и поле напряжений  $\vec{\sigma}$  являются константными.

Поэтому потребуем, чтобы напряжения  $\vec{\sigma}$  для треугольного гибридного элемента мембраны также были постоянными.

Тогда энергия деформации (4.178) принимает вид:

$$U_g = \frac{h}{2} \circ \vec{\sigma}^T \circ [E]^{-1} \circ \vec{\sigma} \circ \int_A dA = \frac{h \circ A}{2} \circ \vec{\sigma}^T \circ [E]^{-1} \circ \vec{\sigma} \quad (4.181)$$

где:  $A$  - площадь треугольника.

Рассмотрим теперь интеграл работы  $A$ :

$$A = h \circ \oint_{\partial A} (u_n \circ \sigma_n + u_s \circ \sigma_{ns}) \circ dl$$

Представим его в виде суммы интегралов по трем ребрам элемента:

$$A = h \circ \sum_{ij} \oint_{l_{ij}} (u_n \circ \sigma_n + u_s \circ \sigma_{ns}) \circ dl \quad (4.182)$$

где:  $l_{ij}$ , ( $i, j=1,2,3$ ) - длина ребра  $ij$  (см. Рисунок 4.19):

Пусть:  $c = \cos \gamma$ ,  $s = \sin \gamma$  - угол между осью  $X$  и нормалью  $\vec{n}$ .

$\vec{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}$  - компоненты симметричного тензора второго ранга в сис-

теме координат  $XU$ , а  $\begin{bmatrix} \sigma_n \\ \sigma_s \\ \sigma_{ns} \end{bmatrix}$  - компоненты того же тензора в системе

координат  $ns$ , повернутой относительно  $XU$  на угол  $\gamma$ .

Закон преобразования компонент симметричного тензора второго ранга следующий:

$$\begin{cases} \sigma_n = c^2 \circ \sigma_x + s^2 \circ \sigma_y + 2 \circ c \circ s \circ \sigma_{xy} \\ \sigma_s = s^2 \circ \sigma_x + c^2 \circ \sigma_y + 2 \circ c \circ s \circ \sigma_{xy} \\ \sigma_{ns} = -c \circ s \circ \sigma_x + c \circ s \circ \sigma_y + (c^2 - s^2) \circ \sigma_{xy} \end{cases} \quad (4.183)$$

Представим столбец  $\begin{bmatrix} \sigma_n \\ \sigma_{ns} \end{bmatrix}_{ij}$  для ребра  $ij$  в виде:

$$\begin{bmatrix} \sigma_n \\ \sigma_{ns} \end{bmatrix}_{ij} = [R_{ij}^m] \circ \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = [R_{ij}^m] \circ \vec{\sigma} \quad (4.184)$$

С помощью (4.183) получим следующий вид матрицы  $[R_{ij}^m]$  ( $c = \cos \gamma_{ij}$ ,  $s = \sin \gamma_{ij}$ ):

$$[R_{ij}^m] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ -cs & cs & (c^2 - s^2) \end{bmatrix} \quad (4.185)$$

Представим столбец  $\begin{bmatrix} u_n \\ u_s \end{bmatrix}_{ij}$  для ребра  $ij$  в виде:

$$\begin{bmatrix} u_n \\ u_s \end{bmatrix}_{ij} = [L_{ij}^m] \circ \vec{U}_{ij}, \text{ где } \vec{U}_{ij}^T = [v_{xi} \quad v_{yi} \quad v_{xj} \quad v_{yj}] \quad (4.186)$$

Так как  $u_n$  и  $u_s$  - компоненты вектора  $\vec{u}$ , то закон преобразования при повороте на угол  $\gamma$  следующий:

$$\begin{cases} u_n = c \circ u_x + s \circ u_y \\ u_s = -s \circ u_x + c \circ u_y \end{cases} \quad (4.187)$$

Кроме того, мы будем предполагать линейный закон изменения перемещений вдоль каждого ребра  $ij$ :

$$\begin{cases} u_x(\alpha) = (1-\alpha) \circ u_{xi} + \alpha \circ u_{xj} \\ u_y(\alpha) = (1-\alpha) \circ u_{yi} + \alpha \circ u_{yj} \end{cases} \quad (4.188)$$

где:  $\alpha$ , ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ) - параметр, непрерывно меняющийся вдоль ребра (в узле  $i - \alpha = 0$ , а в узле  $j - \alpha = 1$ ).

С помощью формул (4.187) и (4.188) можно получить следующий вид матрицы  $[L_{ij}^m]$ :

$$[L_{ij}^m] = \begin{bmatrix} (1-\alpha) \circ c & (1-\alpha) \circ s & \alpha \circ c & \alpha \circ s \\ -(1-\alpha) \circ s & (1-\alpha) \circ c & -\alpha \circ s & \alpha \circ c \end{bmatrix} \quad (4.189)$$

Тогда работа  $A$  будет равна:

$$\begin{aligned} A &= h \circ \sum_{ij} \int_{l_{ij}} (u_n \circ \sigma_n + u_s \circ \sigma_{ns}) \circ dl = h \circ \sum_{ij} \int_{l_{ij}} [\sigma_n \quad \sigma_{ns}] \circ \begin{bmatrix} u_n \\ u_s \end{bmatrix} \circ dl = \\ &= h \circ \vec{\sigma}^T \circ \sum_{ij} \int_{l_{ij}} [R_{ij}^m]^T \circ [L_{ij}^m] \circ dl \circ \vec{U}_{ij} = h \circ \vec{\sigma}^T \circ \sum_{ij} [G_{ij}^m] \circ \vec{U}_{ij} \end{aligned} \quad (4.190)$$

Здесь введена матрица:

$$[G_{ij}^m] = \int_{l_{ij}} [R_{ij}^m]^T \circ [L_{ij}^m] \circ dl = l_{ij} \circ [R_{ij}^m]^T \circ \int_0^1 [L_{ij}^m] \circ d\alpha \quad (4.191)$$

так как:  $dl = l_{ij} \circ d\alpha$ , ( $0 \leq \alpha \leq 1$ )

Если  $\vec{U}^{(e)T} = [u_{x1} \quad u_{y1} \quad u_{x2} \quad u_{y2} \quad u_{x3} \quad u_{y3}]$  - вектор степеней свободы элемента, то сумму  $\sum_{ij} [G_{ij}^m] \circ \vec{U}_{ij}$  можно представить в виде:

$$\sum_{ij} [G_{ij}^m] \circ \vec{U}_{ij} = [G_m] \circ U^{(e)}$$

Учитывая значения интегралов  $\int_0^1 \alpha \circ d\alpha = \frac{1}{2}$ ,  $\int_0^1 (1-\alpha) \circ d\alpha = \frac{1}{2}$  и тождество ( $c^2 + s^2 = 1$ ), можно получить следующее выражение для матрицы  $[G_{ij}^m]$ :

$$[G_{ij}^m] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \circ l_{ij} \circ c & 0 & \frac{1}{2} \circ l_{ij} \circ c & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \circ l_{ij} \circ s & 0 & \frac{1}{2} \circ l_{ij} \circ s \\ \frac{1}{2} \circ l_{ij} \circ s & \frac{1}{2} \circ l_{ij} \circ c & \frac{1}{2} \circ l_{ij} \circ s & \frac{1}{2} \circ l_{ij} \circ c \end{bmatrix} \quad (4.192)$$

Учитывая формулы:  $x_{ij} = l_{ij} \circ s$ ,  $y_{ij} = -l_{ij} \circ c$ , ( $c = \cos \gamma_{ij}$ ,  $s = \sin \gamma_{ij}$ )

Найдем с помощью (4.192) матрицу  $[G_m]$ :

$$[G_m] = \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & -x_{23} & 0 & -x_{31} & 0 & -x_{12} \\ -x_{23} & y_{23} & -x_{13} & y_{31} & -x_{12} & y_{12} \end{bmatrix} \quad (4.193)$$

Работа  $A$  будет равна:  $A = h \circ \vec{\sigma}^T \circ [G_m] \circ \vec{U}^{(e)}$

Поэтому окончательное выражение для дополнительной энергии  $U_g$  следующее:

$$U_g = \frac{h \circ A}{2} \circ \vec{\sigma}^T \circ [E]^{-1} \circ \vec{\sigma} + h \circ \vec{\sigma}^T \circ [G_m] \circ \vec{U}^{(e)} \quad (4.194)$$

В соответствии с вариационным принципом для гибридных элементов, зафиксируем вектор степеней свободы элемента  $\vec{U}^{(e)}$  и будем варьировать  $U_g$ , ища истинное значение вектора напряжений  $\vec{\sigma}$ :

$$\frac{\partial U_g}{\partial \vec{\sigma}} = 0 \Rightarrow -h \circ A \circ [E]^{-1} \circ \vec{\sigma} + h \circ [G_m] \circ \vec{U}^{(e)} = 0 \text{ или}$$

$$\vec{\sigma} = \frac{1}{A} \circ h \circ [E] \circ [G_m] \circ \vec{U}^{(e)} \quad (4.195)$$

Заметим, что из (4.195) следует:

$$U_g = \frac{1}{2} \circ h \circ \bar{\sigma}^T \circ [G_m] \circ \bar{U}^{(e)} = \frac{h}{2 \circ A} \circ \bar{U}^{(e)T} \circ [G_m]^T \circ [E] \circ [G_m] \circ \bar{U}^{(e)} = \frac{1}{2} \circ \bar{U}^{(e)T} \circ [K_m] \circ \bar{U}^{(e)} \quad (4.196)$$

где введена матрица жесткости гибридного элемента  $[K_m]$ :

$$[K_m] = \frac{h}{A} \circ [G_m]^T \circ [E] \circ [G_m] \quad (4.197)$$

Из формулы (4.193) легко заметить, что матрица  $[G_m]$  связана с матрицей деформирования  $[\beta]$  для элемента мембраны формулой:

$$[G_m] = A \circ [\beta] \quad (4.198)$$

Поэтому окончательно матрица жесткости построенного гибридного элемента  $[K_m]$  равна:

$$[K_m] = h \circ A \circ [\beta]^T \circ [E] \circ [\beta] \quad (4.199)$$

Полученное совпадение матрицы жесткости изопараметрического и гибридного треугольных элементов уже не имеет места при переходе к четырехугольному элементу. Этому вопросу посвящен следующий пункт 4.9.2.2.

## 4.9.2.2 Элементы пластины

### 4.9.2.2.1 Понятие пластины. Теория тонкой пластины

Пластиной будем называть такой плоский двумерный элемент, который воспринимает действие сил из плоскости элемента, а также действие моментов сил относительно осей, лежащих в плоскости элемента.

Под действием указанных силовых факторов пластина может изгибаться, испытывая неравномерное смещение своих точек из плоскости (недеформированного состояния пластины). Здесь мы рассмотрим теорию тонкой пластины, толщина которой  $h$  много меньше характерного размера пластины  $l$  вдоль двух других направлений [8].

Изгиб пластины будем считать малым, то есть смещения точек пластины  $u$  много меньше ее толщины ( $u \ll h$ ). При изгибе на выпуклой стороне пластины возникает растяжение, а на вогнутой - сжатие.

Поэтому где-то внутри пластины должна существовать нейтральная поверхность, на которой отсутствуют деформации, а по двум сторонам от нее деформации имеют противоположный знак.

Выберем декартову систему координат  $XYZ$  с началом в т. О на нейтральной поверхности и осью  $Z$ , нормальной к этой поверхности. Нейтральная поверхность будет тогда лежать в плоскости  $XY$  (Рисунок 4.20).

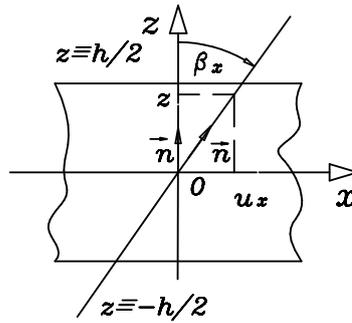


Рисунок 4.20

Пусть:  $\vec{u} = \{u_x \quad u_y \quad u_z\}$  - вектор перемещения точки  $M$  пластины с декартовыми координатами  $(x, y, z)$ .

Так как перемещения точек пластины малы по сравнению с ее толщиной  $h$ , то можно сохранить лишь первые не исчезающие члены разложения в ряд Тейлора поля вектора перемещения  $\vec{u} = \{u_x \quad u_y \quad u_z\}$  по координате  $Z$ . Именно, перемещения точек из плоскости пластины  $u_z$  вдоль оси  $Z$  можно считать постоянными (независящими от  $Z$ ) и равными соответствующим перемещениям  $w(x, y)$  вдоль оси  $Z$  точек нейтральной поверхности:

$$u_z = w(x, y) \quad (4.200)$$

Перемещения же точек вдоль осей  $X$  и  $Y$  можно считать линейно зависящими от  $Z$ . Здесь полезна следующая геометрическая иллюстрация (Рисунок 4.20). При малых деформациях отрезок оси  $Z$ , принадлежащий пластине, переходит в отрезок же, т. е. поворачивается как целое, например, к оси  $X$  на малый угол  $\beta_x$ , ( $\beta_x \ll 1$ ).

Единичный направляющий вектор  $\vec{n}$  оси  $Z$  повернется на угол  $\beta_x$  к оси  $X$  и на угол  $\beta_y$  к оси  $Y$ . Тогда, как легко может быть понято из Рисунок 4.20, перемещения точек пластины  $u_x$  и  $u_y$  вдоль осей  $X$  и  $Y$  могут быть определены по следующим формулам:

$$u_x = z \circ \beta_x(x, y); \quad u_y = z \circ \beta_y(x, y) \quad (4.201)$$

Формула (4.200) и (4.201) составляют содержание так называемой гипотезы малых перемещений точек пластины.

Кроме вектора  $\vec{\beta} = (\beta_x, \beta_y)$  углов поворота вектора нормали  $\vec{n}$  к поверхности пластины к осям  $X$  и  $Y$ , введем вектор  $\vec{\vartheta} = (\vartheta_x, \vartheta_y)$  углов поворота вектора нормали  $\vec{n}$  вокруг осей  $X$  и  $Y$  в соответствии с правилами вращения для правой системы координат  $XYZ$ , указанными на Рисунок 4.21.

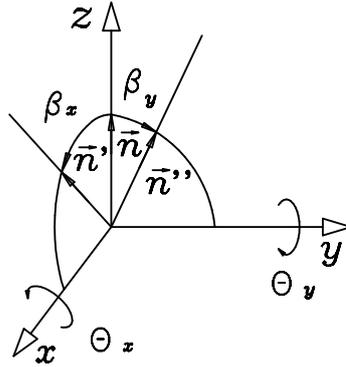


Рисунок 4.21

Из Рисунок 4.21 следует связь между  $\vec{\beta}$  и  $\vec{\vartheta}$ :

$$\beta_x = \vartheta_y, \quad \beta_y = -\vartheta_x \quad (4.202)$$

Кроме гипотезы малых перемещений, для тонкой пластины справедлива гипотеза Кирхгоффа, утверждающая, что вектор нормали  $\vec{n}$  недеформированной поверхности пластины остается вектором нормали и к деформированной поверхности. Простейшее геометрическое рассмотрение этой гипотезы дает следующую дифференциальную связь между смещениями точек  $w(x, y)$  вдоль оси  $Z$  и углами поворота  $\beta_x$  и  $\beta_y$  к осям  $X$  и  $Y$ :

$$\beta_x = -\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \beta_y = -\frac{\partial w}{\partial y} \quad (4.203)$$

Формулы (4.203) называются условиями Кирхгоффа для тонкой пластины. Граничные условия на поверхности пластины имеют вид

$$\sigma_{\alpha\beta} \circ n_\beta = P_\alpha, \quad (\alpha, \beta = x, y, z) \quad (4.204)$$

где:  $\sigma_{\alpha\beta}, (\alpha, \beta = x, y, z)$  - тензор напряжений:

$\vec{n} = \{n_x, n_y, n_z\}$  - вектор нормали к поверхности;

$P_\alpha = \{P_x, P_y, P_z\}$  - вектор внешних сил на единицу площади поверхности пластины.

Силы  $\vec{P}$ , вообще говоря, действуют на поверхности пластины, но эти силы, во всяком случае, должны быть для тонкой пластины много меньше внутренних напряжений  $\sigma_{\alpha\beta}$ . Поэтому их можно считать равными нулю; тогда граничные условия для пластины примут вид:

$$\sigma_{\alpha\beta} \circ n_\beta = 0, \quad (\alpha, \beta = x, y, z) \quad (4.205)$$

Так как вектор нормали  $\vec{n}$  направлен в нашем случае вдоль оси  $Z$ , то единственная отличная от нуля его компонента:  $n_z = 1$ .

Поэтому формула (4.205) принимает вид:

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0 \quad (4.206)$$

Учитывая формулы связи компонент вектора напряжений  $\vec{\sigma}$  с компонентами вектора деформаций  $\vec{\varepsilon}$ , формулу (4.206) можно записать в виде:

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xz} = 0, \quad \sigma_z = 0 \quad (4.207)$$

Так как пластина тонкая, то эти условия можно считать справедливыми по всей толщине пластины. Заметим, что граничные условия (4.207) полностью совпадают с условиями для плоского напряженного состояния.

Поэтому по аналогии с приведенным выше можно ввести трехкомпонентные вектора изгибных деформаций  $\vec{\varepsilon}$  и изгибных напряжений  $\vec{\sigma}$  и связь между ними:

$$\vec{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \vec{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \vec{\sigma} = [E] \circ \vec{\varepsilon} \quad (4.208)$$

где:  $[E] = \frac{E}{1-\mu^2} \circ \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix}$  - изгибная матрица упругости.

С помощью (4.201) компоненты вектора изгибных деформаций  $\vec{\varepsilon}$  запишутся в виде:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} = z \circ \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial x} = z \circ \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = z \circ \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right) \end{cases} \quad (4.209)$$

Компоненты вектора сдвиговых деформаций  $\vec{\gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}$  с помощью (4.200) и (4.201) примут вид:

$$\begin{cases} \gamma_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = \beta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = \beta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \end{cases} \quad (4.210)$$

В соответствии с условиями Кирхгоффа (4.203) для тонкой пластины получим из (4.210):

$$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \quad (4.211)$$

то есть сдвиговые деформации для тонкой пластины равны нулю.

Получим, наконец, выражение для полной энергии деформации пластины [6]. В общем случае эта энергия  $U$  равна:

$$U = U_b + U_s \quad (4.212)$$

где:  $U_b = \frac{1}{2} \int \vec{\varepsilon}^T \circ [E_b] \circ \vec{\varepsilon} \circ dV$  - энергия изгибной деформации пластины;

$U_s = \frac{1}{2} \int \vec{\gamma}^T \circ [E_s] \circ \vec{\gamma} \circ dV$  - энергия сдвиговой деформации пластины;

$$[E_s] = G \circ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ - сдвиговая матрица упругости.}$$

В соответствии с (4.209) вектор изгибных деформаций  $\vec{\varepsilon}$  можно представить в виде:

$$\vec{\varepsilon} = z \circ \vec{k} \quad (4.213)$$

$$\text{где: } \vec{k} = \left\{ \begin{array}{l} \beta_{x,x} \\ \beta_{y,y} \\ \beta_{x,y} + \beta_{y,x} \end{array} \right\} \text{ - не зависит от } Z.$$

Из формул (4.210) видно, что вектор деформаций поперечного сдвига  $\vec{\gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}$  не зависит от  $Z$ .

Сделанные выводы о характере зависимости векторов  $\vec{\varepsilon}$  и  $\vec{\gamma}$  от  $Z$  позволяют провести в (4.212) интегрирование по  $Z$ .

Учитывая равенства

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dz = h; \quad \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 \circ dz = \frac{h^3}{12}$$

получим выражение для энергий изгибной и сдвиговой деформаций пластины:

$$U_b = \frac{1}{2} \int_A \vec{k}^T \circ [D_b] \circ \vec{k} \circ dA, \quad U_s = \frac{1}{2} \int_A \vec{\gamma}^T \circ [D_b] \circ \vec{\gamma} \circ dA, \quad (4.214)$$

где:  $[D_b] = D \circ [E_0]$

$$D = \frac{E \circ h^3}{12 \circ (1 - \mu^2)} \text{ - изгибная жесткость пластины ;}$$

$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)}$  - модуль сдвига.

В другом виде энергии деформации можно записать:

$$U_b = \frac{1}{2} \cdot D \cdot \int_A \vec{k}^T \cdot [E_0] \cdot \vec{k} \cdot dA, \quad U_s = \frac{G \cdot h}{2} \cdot \int_A \vec{\gamma}^T \cdot \vec{\gamma} \cdot dA \quad (4.215)$$

В случае тонкой пластины ( $h \ll l$ ) деформации поперечного сдвига  $\vec{\gamma}$  равны нулю (см. формулу (4.211)), поэтому:

$$\begin{cases} \vec{\gamma} = 0 \Rightarrow U_s = 0 \\ U = U_b = \frac{1}{2} \cdot D \cdot \int_A \vec{k}^T \cdot [E_0] \cdot \vec{k} \cdot dA \end{cases} \quad (4.216)$$

Обратим внимание на линейный закон изменения изгибных деформаций  $\vec{\varepsilon}$  по толщине пластины. Этим фактом изгибные деформации пластины существенно отличаются от мембранных деформаций, которые постоянны по толщине пластины. Рассмотренная здесь теория тонкой пластины будет использована дальше при формулировке различных типов элементов тонкой пластины. При этом мы всегда будем требовать от элементов важного в МКЭ условия совместности.

#### 4.9.2.2.2 Четырехугольный изопараметрический элемент тонкой пластины без промежуточных узлов

Понятие изопараметрических элементов было дано в разделе, посвященном элементам мембраны. Там было показано, что изопараметрические элементы являются совместными. Рассмотрим здесь простой четырехугольный изопараметрический элемент пластины, изображенный на Рисунок 4.22, имеющий 4 узла в вершинах четырехугольника [6].

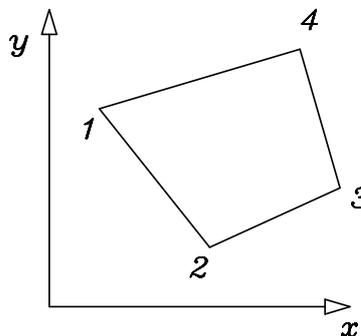


Рисунок 4.22

Как и при рассмотрении элементов мембраны, введем в плоскости  $\xi\eta$  квадрат ( $2 \times 2$ ), изображенный на Рисунок 4.23.

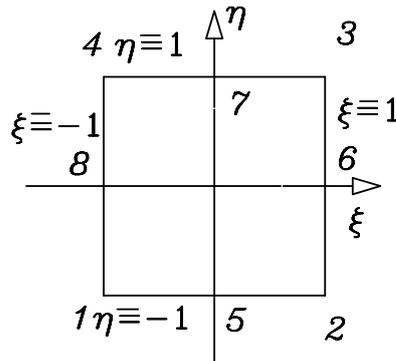


Рисунок 4.23

Геометрия четырехугольника на Рисунок 4.22 может быть получена в результате отображения квадрата в плоскости  $\xi\eta$  на плоскость  $XU$  с помощью следующих параметрических формул:

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = \sum_{r=1}^4 \psi_r(\xi, \eta) \circ x_r \\ y(\xi, \eta) = \sum_{r=1}^4 \psi_r(\xi, \eta) \circ y_r \end{cases} \quad (4.217)$$

где: функции формы  $\psi_r(\xi, \eta)$ , заданы на квадрате в плоскости  $\xi\eta$ , являются билинейными по  $\xi\eta$  и имеют вид:

$$\psi_r(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \circ (1 + \xi_r \circ \xi) \circ (1 + \eta_r \circ \eta) \quad (4.218)$$

где:  $(\xi_r, \eta_r)$  -  $\xi$  и  $\eta$  координаты узлов ( $r = 1, 2, 3, 4$ ).

В качестве независимых функций переменных  $(x, y)$  выберем  $\beta_x(x, y)$ ,  $\beta_y(x, y)$  и  $w(x, y)$ , определенные в п. 1.3.2.1. В соответствии с формулами (4.200) и (4.218) эти функции однозначно определяют поле вектора перемещений  $\vec{u} = \{u_x \ u_y \ u_z\}$ . Поэтому непрерывность функций  $\beta_x, \beta_y$  и  $w$  обеспечивает непрерывность перемещений  $\vec{u}(x, y, z)$ , что означает выполнение условия сходимости.

Здесь все три указанные функции аппроксимируются независимо с помощью тех же самых функций формы  $\psi_r$ :

$$\beta_x = \sum_{r=1}^4 \psi_r(\xi, \eta) \circ \beta_{xr} \quad \beta_y = \sum_{r=1}^4 \psi_r(\xi, \eta) \circ \beta_{yr} \quad w = \sum_{r=1}^4 \psi_r(\xi, \eta) \circ w_r \quad (4.219)$$

где:  $\beta_{xr}$  - значение  $\beta_x$  в узле  $r$  ;

$\beta_{yr}$  - значение  $\beta_y$  в узле  $r$  ;

$w_r$  - значение  $w$  в узле  $r$  .

Таким образом, данный элемент пластины имеет в каждом узле по 3 степени свободы, так что мы получаем трехкомпонентный вектор  $\vec{v}_r$  степеней свободы узла  $r$  :

$$\vec{v}_r = \begin{Bmatrix} w_r \\ \beta_{xr} \\ \beta_{yr} \end{Bmatrix}, (r=1,2,3,4) \quad (4.220)$$

Всего у элемента будет  $3 \times 4 = 12$  степеней свободы, поэтому вектор степеней свободы элемента  $\vec{U}^{(e)}$  будет иметь 12 компонент:

$$\vec{U}^{(e)T} = [\vec{v}_1^T \quad \vec{v}_2^T \quad \vec{v}_3^T \quad \vec{v}_4^T]$$

В действительности же, как мы знаем из теории тонкой пластины (см. п. 1.3.2.1), функции  $\beta_x$  и  $\beta_y$  связаны с функцией  $w$  формулами Кирхгоффа (4.203). Это приводит для данного элемента к появлению ложных деформаций поперечного сдвига  $\vec{\gamma}^T = \{\gamma_{xy} \quad \gamma_{yz}\}$ , что сильно завышает жесткость на изгиб такого элемента. Оказывается, как и в случае элементов мембраны, можно эффективно устранять ложные деформации поперечного сдвига пластины путем интегрирования сдвиговой части матрицы жесткости с минимально допустимым порядком интегрирования. Указанная процедура используется для рассматриваемого элемента пластины.

Вектор изгибных деформаций  $\vec{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$  будет аппроксимироваться по следующей формуле:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = z \circ \frac{\partial \beta_x}{\partial x} = z \circ \sum_{r=1}^4 \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \circ \beta_{xr} \\ \varepsilon_y = z \circ \frac{\partial \beta_y}{\partial y} = z \circ \sum_{r=1}^4 \frac{\partial \psi_r}{\partial y} \circ \beta_{yr} \\ \gamma_{xy} = z \circ \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right) = z \circ \sum_{r=1}^4 \left( \frac{\partial \psi_r}{\partial y} \circ \beta_{xr} + \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \circ \beta_{yr} \right) \end{cases} \quad (4.221)$$

$$\text{или } \vec{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = z \circ \sum_{r=1}^4 [\beta_r^*] \circ \vec{v}_r = z \circ [\beta^*] \circ \vec{U}^{(e)} \quad (4.222)$$

$$[\beta_r^*] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial \psi_r}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \psi_r}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial \psi_r}{\partial y} & \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \end{bmatrix}; [\beta^*] = [[\beta_1^*] \quad [\beta_2^*] \quad [\beta_3^*] \quad [\beta_4^*]]$$

где:

Здесь  $[\beta^*]$  - матрица деформирования для изгиба.

Вектор деформаций поперечного сдвига  $\vec{\gamma} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}$  будет аппроксимироваться по формулам:

$$\begin{cases} \gamma_{xz} = \beta_x \circ \frac{\partial w}{\partial x} = \sum_{r=1}^4 \left( \psi_r \circ \beta_{xr} + \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \circ w_r \right) \\ \gamma_{yz} = \beta_y \circ \frac{\partial w}{\partial y} = \sum_{r=1}^4 \left( \psi_r \circ \beta_{yr} + \frac{\partial \psi_r}{\partial y} \circ w_r \right) \end{cases} \quad (4.223)$$

$$\text{или } \vec{\gamma} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \sum_{r=1}^4 [\tilde{\beta}_r] \circ \vec{v}_r = [\tilde{\beta}] \circ \vec{U}^{(e)} \quad (4.224)$$

$$[\tilde{\beta}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_r}{\partial x} & \psi_r & 0 \\ \frac{\partial \psi_r}{\partial y} & 0 & \psi_r \end{bmatrix}; \quad [\tilde{\beta}] = [[\tilde{\beta}_1] \quad [\tilde{\beta}_2] \quad [\tilde{\beta}_3] \quad [\tilde{\beta}_4]]$$

где:

Здесь:  $[\tilde{\beta}]$  - матрица деформирования для поперечного сдвига.

Энергия деформации пластины  $U$  равна:

$$U = U_b + U_s \quad (4.225)$$

где:  $U_b = \frac{1}{2} \circ D \circ \int \vec{k}^T \circ [E_0] \circ k \circ dA$  - энергия изгибных деформаций;

$U_s = \frac{G \circ h}{2} \circ \int \vec{\gamma}^T \circ \vec{\gamma} \circ dA$  - энергия деформаций поперечного сдвига;

$\vec{\varepsilon} = z \circ \vec{k}$  - вектор изгибных деформаций.

Подставляя в интегралы (4.225) формулу (4.222) для  $\vec{\varepsilon} = z \circ \vec{k}$  и формулу (4.224) для  $\vec{\gamma}$ , получим:

$$U = \frac{1}{2} \circ \vec{U}^{(e)T} \circ [K^{(e)}] \circ \vec{U}^{(e)} \quad (4.226)$$

где:  $[K^{(e)}] = [K_b^{(e)}] + [K_s^{(e)}]$  - матрица жесткости элемента;

$[K_b^{(e)}] = D \circ \int_A [\beta^*]^T \circ [E_0] \circ [\beta^*] \circ dA$  - матрица жесткости на изгиб;

$[K_s^{(e)}] = G \circ h \circ \int_A [\tilde{\beta}]^T \circ [\tilde{\beta}] \circ dA$  - матрица жесткости поперечного

сдвига.

Переходя к интегрированию по квадрату в плоскости  $\xi\eta$ , получим следующие формулы для матриц жесткости:

$$[K_b^{(e)}] = D \circ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\beta^*]^T \circ [E_0] \circ [\beta^*] \circ |J(\xi, \eta)| \circ d\xi \circ d\eta$$

$$[K_s^{(e)}] = G \circ h \circ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\tilde{\beta}]^T \circ [\tilde{\beta}] \circ |J(\xi, \eta)| \circ d\xi \circ d\eta \quad (4.227)$$

Как и в случае мембраны, при вычислении  $[K_b^{(e)}]$  следует проводить интегрирование по Гауссу (2x2), а при вычислении  $[K_s^{(e)}]$  с целью устранения ложных деформаций поперечного сдвига - с минимально допустимым порядком (1x1).

Заметим также, что в соответствии с балочной теорией, сдвиговые деформации  $\vec{\gamma}$  меняются по квадратичному закону, а у нас они постоянны по толщине. Поэтому вклад в матрицу жесткости элемента сдвиговых деформаций будет несколько меньше, что можно учесть заменой в формуле (4.227)  $G$  на  $\tilde{G} = \frac{5}{6} \circ G$  (см.: [6]).

Рассмотренный здесь изопараметрический элемент тонкой пластины может быть легко изменен для моделирования толстой пластины. Для этого достаточно сохранить в формулах (4.227), определяющих матрицы жесткости  $[K_b^{(e)}]$  и  $[K_s^{(e)}]$ , интегрирование по Гауссу (2 x 2) для обеих матриц.

### 4.9.2.3 Элементы оболочки

#### 4.9.2.3.1 Понятие оболочки. Теория тонкой оболочки

Оболочкой будем называть двумерный элемент с произвольной геометрией его поверхности, который в общем случае может воспринимать действие 6-и силовых факторов: вектора сил  $\vec{F} = \{F_x \quad F_y \quad F_z\}$  и вектора моментов сил  $\vec{M} = \{M_x \quad M_y \quad M_z\}$ .

Здесь введена глобальная система координат  $XYZ$  (г.с.к.), в которой описывается произвольная оболочка. Рассмотрим теорию тонкой оболочки, толщина  $h$  которой много меньше характерного размера оболочки в двух других направлениях [6,8]. На Рисунок 4.24 изображена оболочка в системе координат  $XYZ$ .

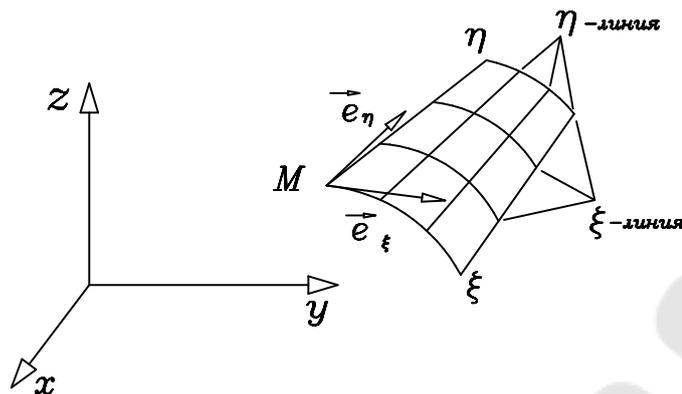


Рисунок 4.24

Рассмотрим сначала вопрос описания геометрии произвольной тонкой недеформированной оболочки [6]. Введем понятие нейтральной поверхности. Нейтральная поверхность характеризуется тем, что она равноудалена от "верхней" и "нижней" поверхностей оболочки и на ней отсутствуют изгибные деформации (хотя мембранные деформации, конечно, в общем случае есть). Поэтому для описания геометрии оболочки достаточно описать нейтральную поверхность.

Так как положение произвольной точки  $M$  поверхности можно задать с помощью двух параметров, то мы будем считать заданным параметрический закон описания геометрии нейтральной поверхности:

$$\begin{cases} x = x(\xi, \eta) \\ y = y(\xi, \eta) \\ z = z(\xi, \eta) \end{cases} \quad (4.228)$$

Будем называть  $\xi$  - линией кривую на нейтральной поверхности с постоянным значением параметра  $\eta$ , а  $\eta$  - линией - кривую с постоянным значением  $\xi$ . Два семейства кривых образуют на поверхности координатную сетку (Рисунок 4.24). Поэтому параметры  $\xi, \eta$  можно назвать криволинейными координатами поверхности.

Бесконечно малый отрезок  $\xi$  - линии, который обозначим через  $ds_\xi$ , связан с дифференциалом  $d\xi$  соотношением:

$$ds_\xi = A_\xi \circ d\xi \quad (4.229)$$

$$A_\xi = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2}$$

где:

Аналогично определяется дифференциал  $ds_\eta$ :

$$ds_\eta = A_\eta \circ d\eta \quad (4.230)$$

$$\text{где: } A_\eta = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)^2}$$

Рассмотрим далее на поверхности произвольную точку  $M$  и введем единичный вектор  $\vec{e}_\xi$ , касательный к  $\xi$  - линии в этой точке. Его компоненты в г.с.к.  $XYZ$  представим матрицей:

$$[\lambda_\xi] = [\lambda_{\xi x} \quad \lambda_{\xi y} \quad \lambda_{\xi z}] \quad (4.231)$$

$$\text{где: } \lambda_{\xi x} = \frac{1}{A_\xi} \circ \frac{\partial x}{\partial \xi} \quad \lambda_{\xi y} = \frac{1}{A_\xi} \circ \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad \lambda_{\xi z} = \frac{1}{A_\xi} \circ \frac{\partial z}{\partial \xi}$$

Заметим, что:  $\lambda_{\xi x}^2 + \lambda_{\xi y}^2 + \lambda_{\xi z}^2 = 1$  как и должно быть для суммы квадратов компонент единичного вектора.

Аналогично введем единичный вектор  $\vec{e}_\eta$ , касательный к  $\eta$  - линии в т.  $M$ . Его компоненты представим матрицей:

$$[\lambda_\eta] = [\lambda_{\eta x} \quad \lambda_{\eta y} \quad \lambda_{\eta z}] \quad (4.232)$$

$$\text{где: } \lambda_{\eta x} = \frac{1}{A_\eta} \circ \frac{\partial x}{\partial \eta} \quad \lambda_{\eta y} = \frac{1}{A_\eta} \circ \frac{\partial y}{\partial \eta} \quad \lambda_{\eta z} = \frac{1}{A_\eta} \circ \frac{\partial z}{\partial \eta}$$

$$\text{При этом: } \lambda_{\eta x}^2 + \lambda_{\eta y}^2 + \lambda_{\eta z}^2 = 1$$

Скалярное произведение  $(\vec{e}_\xi \times \vec{e}_\eta)$  будем обозначать через  $\gamma$ ;

$$\text{в матричном представлении: } \gamma = [\lambda_\xi] \circ [\lambda_\eta]^T \quad (4.233)$$

Из рисунка 4.24 ясно, что:  $\gamma = \cos \vartheta$ , где:  $\vartheta$  - угол между  $\vec{e}_\xi$  и  $\vec{e}_\eta$ .

В случае ортогональности  $\vec{e}_\xi$  и  $\vec{e}_\eta$  - линий в т.  $M$ :  $\gamma = 0$ .

Построим теперь в произвольной точке  $M$  поверхности локальный ортогональный репер  $\{\vec{e}_1 \quad \vec{e}_2 \quad \vec{e}_3\}$ :

$$(\vec{e}_i \circ \vec{e}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, j = i \\ 0, j \neq i \end{cases} (i, j = 1, 2, 3)$$

Для каждого единичного вектора  $\vec{e}_i, (i = 1, 2, 3)$  построим матрицу его компонент в г.с.к.  $XYZ$ :  $[\lambda_i] = [\lambda_{ix} \quad \lambda_{iy} \quad \lambda_{iz}]$

Выберем  $\vec{e}_1 = \vec{e}_\xi$ , тогда:

$$[\lambda_1] = [\lambda_\xi] \quad (4.234)$$

Вектор  $\vec{e}_2$  перпендикулярен к  $\vec{e}_1$  и лежит в плоскости, касательной к поверхности оболочки в т.  $M$ . Если потребовать, чтобы  $(\vec{e}_2 \times \vec{e}_\eta) > 0$ , то вектор  $\vec{e}_2$  определится однозначно:

$$[\lambda_2] = \frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} \circ (-\gamma \circ [\lambda_\xi] + [\lambda_\eta]) \quad (4.235)$$

$$\text{Дифференциалы: } ds_1 = ds_\xi = A_\xi \circ d\xi; ds_2 = \sqrt{1-\gamma^2} \circ A_\eta \circ d\eta \quad (4.236)$$

Чтобы репер  $\{\bar{e}_1 \ \bar{e}_2 \ \bar{e}_3\}$  образовал правую систему координат, потребуем, чтобы  $\bar{e}_3$  был равен векторному произведению:  $\bar{e}_3 = (\bar{e}_1 \times \bar{e}_2)$  откуда следует что:

$$\begin{cases} [\lambda_{3x}] = \frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} \circ (\lambda_{\xi y} \circ \lambda_{\eta z} - \lambda_{\xi z} \circ \lambda_{\eta y}) \\ [\lambda_{3y}] = \frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} \circ (\lambda_{\xi z} \circ \lambda_{\eta x} - \lambda_{\xi x} \circ \lambda_{\eta z}) \\ [\lambda_{3z}] = \frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} \circ (\lambda_{\xi x} \circ \lambda_{\eta y} - \lambda_{\xi y} \circ \lambda_{\eta x}) \end{cases} \quad (4.237)$$

Ясно, что вектор  $\bar{e}_3$  является нормальным к поверхности оболочки в т.  $M$ :  $\bar{e}_3 = \bar{n}$ .

Перейдем теперь к вопросу о деформации произвольной тонкой оболочки. Пусть в результате деформации оболочки точки нейтральной поверхности получили перемещения, описываемые полем вектора  $\bar{u}_0(\xi, \eta) = \{\bar{u}_x(\xi, \eta) \ \bar{u}_y(\xi, \eta) \ \bar{u}_z(\xi, \eta)\}$ . Все перемещения точек оболочки  $\bar{u}$  будем считать малыми ( $u \ll h$ ). В произвольной точке  $M$  нейтральной поверхности единичный вектор  $\bar{e}_3$  задает ось  $\zeta$ , нормальную к поверхности в этой точке. В пределах оболочки  $\xi$  меняется в пределах:  $\frac{h}{2} \leq \zeta \leq \frac{h}{2}$

Так как перемещения точек оболочки малы по сравнению с толщиной оболочки, то при рассмотрении теории тонкой пластины, мы можем разложить поле вектора перемещений  $\bar{u}_0(\xi, \eta, \zeta) = \{\bar{u}_x(\xi, \eta, \zeta) \ \bar{u}_y(\xi, \eta, \zeta) \ \bar{u}_z(\xi, \eta, \zeta)\}$  в произвольной точке  $M'$  (удаленной от т.  $M$  по направлению вектора  $\bar{e}_3$  на  $\zeta$ ) в ряд Тейлора по координате  $\zeta$ , оставив только члены, независимые и линейные от  $\zeta$ .

Считая справедливой гипотезу малых перемещений (см. п. 1.3.2.1), можно определить поле  $\bar{u}(\xi, \eta, \zeta)$  по полю  $\bar{u}_0(\xi, \eta)$  и вектору углов поворота  $\vec{\beta}(\xi, \eta)$  вектора нормали  $\bar{n} = \bar{e}_3$  к осям г.с.к.  $XYZ$ . Введем также вектор углов поворота  $\vec{\vartheta}(\xi, \eta)$  вектора нормали  $\bar{n}$  вокруг осей г.с.к.  $XYZ$ , связанный с  $\vec{\beta}(\xi, \eta)$  формулами:

$$\vec{\beta} = (\vec{\vartheta} \times \bar{e}_3) \quad \vec{\vartheta} = (\bar{e}_3 \times \vec{\beta}) \quad (\vec{\beta} \times \bar{e}_3) = (\vec{\vartheta} \times \bar{e}_3) = 0 \quad (4.238)$$

На Рисунок 4.25 изображены вектора  $\vec{\mathcal{G}}$  и  $\vec{n}$ . Вектор нормали  $\vec{n}$  поворачивается вокруг направления, задаваемого вектором  $\vec{\mathcal{G}}$ , на угол  $\vartheta$

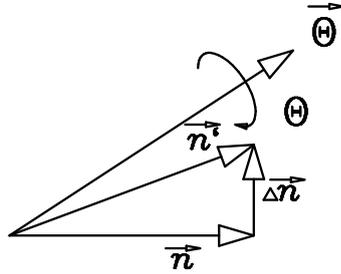


Рисунок 4.25

Изменение вектора  $\Delta\vec{n} = \vec{n}' - \vec{n}$  определяется по формуле:

$$\Delta\vec{n} = (\vec{\mathcal{G}} \times \vec{n}) \quad (4.239)$$

Поэтому дополнительное смещение точки  $M'$ , удаленной от точки  $M$  на  $\zeta$  вдоль  $\vec{n}$ , равно:  $\zeta \circ (\vec{\mathcal{G}} \times \vec{n})$ . В результате мы можем записать следующее выражение для поля вектора перемещений  $\vec{u}(\xi, \eta, \zeta)$  точек оболочки:

$$\vec{u}(\xi, \eta, \zeta) = \vec{u}_0(\xi, \eta) + \zeta \circ (\vec{\mathcal{G}} \circ \vec{n}) \quad (4.240)$$

Так как вектор нормали  $\vec{n}$  определяется геометрией поверхности оболочки, то можно сделать вывод, что поле перемещений точек оболочки однозначно определяется полем перемещений точек нейтральной поверхности (мембранная составляющая перемещений) и полем вектора углов поворота  $\mathcal{G}(\xi, \eta)$  вектора нормали  $\vec{n}$  вокруг осей г.с.к.  $XYZ$ , определяющим изгибную составляющую перемещений. Как и в случае мембраны, поле  $\vec{u}_0$  мембранной составляющей перемещений не зависит от  $\zeta$ , а изгибная составляющая перемещений линейно зависит от  $\zeta$ .

Для тонкой оболочки должна быть справедлива гипотеза Кирхгоффа, которая в криволинейных координатах имеет вид:

$$\beta_1 = -\vec{e}_3 \circ \frac{\partial \vec{u}_0}{\partial s_1} \quad \beta_2 = -\vec{e}_3 \circ \frac{\partial \vec{u}_0}{\partial s_2} \quad (4.241)$$

Вектор деформации оболочки  $\vec{\varepsilon}$  удобно определять в локальной системе координат точки  $M$ , задаваемой репером  $\{\vec{e}_1 \quad \vec{e}_2 \quad \vec{e}_3\}$ . Компоненты [6]:

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \vec{e}_1 \circ \frac{\partial \vec{u}}{\partial s_1} & \varepsilon_{22} = \vec{e}_2 \circ \frac{\partial \vec{u}}{\partial s_2} & \varepsilon_{12} = \vec{e}_2 \circ \frac{\partial \vec{u}}{\partial s_1} + \vec{e}_1 \circ \frac{\partial \vec{u}}{\partial s_2} \\ \varepsilon_{13} = \vec{e}_3 \circ \frac{\partial \vec{u}}{\partial s_1} + \vec{e}_1 \circ \frac{\partial \vec{u}}{\partial \zeta} & \varepsilon_{23} = \vec{e}_3 \circ \frac{\partial \vec{u}}{\partial s_2} + \vec{e}_2 \circ \frac{\partial \vec{u}}{\partial \zeta} \end{cases} \quad (4.242)$$

где:  $\vec{u} = \vec{u}(\xi, \eta, \zeta)$  берется из формулы (4.240).

Последние две компоненты  $\varepsilon_{13}$  и  $\varepsilon_{23}$  представляют собой деформацию поперечного сдвига. Как и для пластины, деформацию поперечного сдвига можно считать постоянной по толщине пластины:

$$\varepsilon_{13} = \vec{e}_3 \circ \frac{\partial \vec{u}_0}{\partial s_1} + \vec{e}_1 \circ (\vec{g} \circ \vec{e}_3) \quad \varepsilon_{23} = \vec{e}_3 \circ \frac{\partial \vec{u}_0}{\partial s_2} + \vec{e}_2 \circ (\vec{g} \circ \vec{e}_3) \quad (4.243)$$

Пользуясь формулой (4.238) для связи  $\vec{\beta}$  и  $\vec{g}$ , можно упростить, например, выражение  $\vec{e}_1 \circ (\vec{g} \times \vec{e}_3)$ :

$$\vec{e}_1 \circ (\vec{g} \times \vec{e}_3) = \vec{g}(\vec{e}_3 \times \vec{e}_1) = \vec{g} \circ \vec{e}_2 = \vec{e}_2 \circ (\vec{e}_3 \times \vec{\beta}) = \vec{\beta} \circ (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) = \vec{\beta} \circ \vec{e}_1 = \beta_1$$

Поэтому формулы (4.243) принимают вид:

$$\varepsilon_{13} = \vec{e}_3 \circ \frac{\partial \vec{u}_0}{\partial s_1} + \beta_1 \quad \varepsilon_{23} = \vec{e}_3 \circ \frac{\partial \vec{u}_0}{\partial s_2} + \beta_2 \quad (4.244)$$

В соответствии с формулами Кирхгоффа (4.241) для тонкой оболочки получим из (4.244):

$$\varepsilon_{13} = 0 \quad \varepsilon_{23} = 0 \quad (4.245)$$

то есть деформации поперечного сдвига для тонкой оболочки равны нулю. Поэтому остается трехкомпонентный вектор деформаций тонкой оболочки  $\vec{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{23} \end{Bmatrix}$ , содержащий две составляющие - из-

гибную и мембранную:

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}_0 + \vec{\varepsilon}_b \quad (4.246)$$

где:  $\vec{\varepsilon}_0$  - мембранная составляющая деформации тонкой оболочки ;

$\vec{\varepsilon}_b$  - изгибная составляющая деформации тонкой оболочки.

Можно показать, что вектор  $\vec{\varepsilon}$  представим в виде [6]:

$$\vec{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{23} \end{Bmatrix} = [G] \circ \begin{Bmatrix} \varepsilon_{\xi} \\ \varepsilon_{\eta} \\ \varepsilon_{\xi\eta} \end{Bmatrix} \quad (4.247)$$

$$\text{где: } [G] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{\gamma^2}{1-\gamma^2} & \frac{1}{1-\gamma^2} & \frac{-\gamma}{1-\gamma^2} \\ \frac{-2\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} \end{bmatrix} \quad (4.248)$$

$$\varepsilon_\xi = \frac{\vec{e}_\xi}{A_\xi} \circ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} \quad \varepsilon_\eta = \frac{\vec{e}_\eta}{A_\eta} \circ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} \quad \varepsilon_{\xi\eta} = \frac{\vec{e}_\eta}{A_\xi} \circ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} + \frac{\vec{e}_\xi}{A_\eta} \circ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} \quad (4.249)$$

Заметим, что из (4.238) следует векторное равенство:  $\vec{\beta} = (\vec{g} \times \vec{e}_3)$ . Поэтому формулу (4.240) можно привести к виду

$$\bar{u}(\xi, \eta, \zeta) = \bar{u}_0(\xi, \eta) + \zeta \circ \vec{\beta} \quad (4.250)$$

аналогичному формулам для пластины.

Векторное произведение  $(\vec{g} \times \vec{e}_3)$  можно представить в матричном виде:

$$(\vec{g} \times \vec{e}_3) = [L] \circ \vec{g} \quad (4.251)$$

$$\text{где: } [L] = \begin{bmatrix} 0 & \lambda_{3z} & -\lambda_{3y} \\ -\lambda_{3z} & 0 & \lambda_{3x} \\ \lambda_{3y} & -\lambda_{3x} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.252)$$

Тогда с помощью (4.247) - (4.251) получим следующую формулу:

$$\vec{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{23} \end{Bmatrix} = [G] \circ \begin{Bmatrix} \varepsilon_\xi \\ \varepsilon_\eta \\ \varepsilon_{\xi\eta} \end{Bmatrix} = [G] \circ \left( [g_\xi] \circ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} + [g_\eta] \circ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} \right) \quad (4.253)$$

$$\text{где: } [g_\xi] = \frac{1}{A_\xi} \circ \begin{Bmatrix} [\lambda_\xi] \\ [0] \\ [\lambda_\eta] \end{Bmatrix} \quad [g_\eta] = \frac{1}{A_\eta} \circ \begin{Bmatrix} [0] \\ [\lambda_\eta] \\ [\lambda_\xi] \end{Bmatrix} \quad [0] = [0 \ 0 \ 0]$$

Учитывая (4.250) для  $\bar{u}(\xi, \eta, \zeta)$ , получим:

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}_0 + \vec{\varepsilon}_b \quad \vec{\varepsilon}_b = \zeta \circ \vec{k} \quad (4.254)$$

$$\text{где: } \vec{\varepsilon} = [G] \circ \left( [g_\xi] \circ \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \xi} + [g_\eta] \circ \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \eta} \right) \quad \vec{k} = [G] \circ \left( [g_\xi] \circ \frac{\partial \vec{\beta}}{\partial \xi} + [g_\eta] \circ \frac{\partial \vec{\beta}}{\partial \eta} \right)$$

Таким образом, вектор деформации представим в виде:

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}_0 + \zeta \circ \vec{k} \quad (4.255)$$

где вектора  $\vec{\varepsilon}_0$  и  $\vec{k}$  не зависят от переменной  $\zeta$ .

Так как и мембранные, и изгибные деформации описываются плоским напряженным состоянием, то связь между вектором деформации  $\vec{\varepsilon}$  вектором напряжений  $\vec{\sigma}$  выражается формулой:

$$\vec{\sigma} = [E] \circ \vec{\varepsilon} = \frac{E}{1 - \mu^2} \circ [E_0] \circ \vec{\varepsilon} \quad (4.256)$$

$$\text{где: } [E_0] = \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \mu}{2} \end{bmatrix}$$

$[E] = \frac{E}{1 - \mu^2} \circ [E_0]$  - матрица упругости плоского напряженного состояния.

Поэтому полная энергия деформации тонкой оболочки  $U$  равна:

$$U = \frac{1}{2} \circ \int \vec{\varepsilon}^T \circ [E] \circ \vec{\varepsilon} \circ dV \quad (4.257)$$

где:  $[E]$  - введенная выше матрица упругости для плоского напряженного состояния.

Интегрирование в (4.257) ведется по всему объему оболочки. Подставив в формулу (4.257) выражение (4.255) для вектора деформаций  $\vec{\varepsilon}$ , получим:

$$U = \frac{1}{2} \circ \int \vec{\varepsilon}_0^T \circ [E] \circ \vec{\varepsilon}_0 \circ dV + \int \vec{\varepsilon}_0^T \circ [E] \circ \vec{k} \circ \zeta \circ dV + \int \vec{k}^T \circ [E] \circ \vec{k} \circ \zeta^2 \circ dV$$

Элементарный объем  $dV$  представим в виде:  $dV = d\zeta \circ dA$ , где:  $dA$  - элемент поверхности оболочки. Тогда вследствие разделения интегрирования по  $\zeta$  и по поверхности оболочки можно сразу провести интегрирование по  $\zeta$ . Учитывая равенства:

$$\frac{1}{2} \circ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} 1 \circ d\zeta = h; \quad \frac{1}{2} \circ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \zeta \circ d\zeta = 0; \quad \frac{1}{2} \circ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \zeta^2 \circ d\zeta = \frac{h^3}{12}$$

получим выражение для  $U$ :

$$U = \frac{B}{2} \circ \int \vec{\varepsilon}_0^T \circ [E_0] \circ \vec{\varepsilon}_0 \circ dA + \frac{D}{2} \circ \int \vec{k}^T \circ [E_0] \circ \vec{k} \circ dA \quad (4.258)$$

Таким образом, полная энергия деформации тонкой оболочки равна сумме энергий мембранной и изгибной деформаций:

$$U = U_m + U_b \quad (4.259)$$

где:  $U_m = \frac{B}{2} \circ \int \vec{\varepsilon}_0^T \circ [E_0] \circ \vec{\varepsilon}_0 \circ dA$  - энергия мембранных деформаций;

$B = \frac{E \circ h}{1 - \mu^2}$  - мембранная жесткость оболочки;

$U_b = \frac{D}{2} \circ \int \vec{k}^T \circ [E_0] \circ \vec{k} \circ dA$  - энергия изгибных деформаций;

$D = \frac{E \circ h^3}{12 \circ (1 - \mu^2)}$  - изгибная жесткость оболочки.

С учетом (4.236) элемент площади равен:

$$dA = ds_1 \circ ds_2 = A_\xi \circ A_\eta \circ \sqrt{1 - \gamma^2} \circ d\xi \circ d\eta \quad (4.260)$$

поэтому выражения для энергий деформаций принимают вид:

$$\begin{cases} U_m = \frac{B}{2} \circ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \vec{\varepsilon}_o^T \circ [E_0] \circ \vec{\varepsilon}_o \circ A_\xi \circ A_\eta \circ \sqrt{1 - \gamma^2} \circ d\xi \circ d\eta \\ U_b = \frac{D}{2} \circ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \vec{k}^T \circ [E_0] \circ \vec{k} \circ A_\xi \circ A_\eta \circ \sqrt{1 - \gamma^2} \circ d\xi \circ d\eta \end{cases} \quad (4.261)$$

где интегрирование ведется по криволинейным координатам  $\xi, \eta$ .

Изложенная теория тонкой оболочки будет дальше использована для построения различных типов элементов тонкой оболочки. При этом мы снова будем требовать выполнение условия совместности для элементов.

\* \* \*

Для толстой оболочки условия Кирхгоффа (4.241) не выполняются, поэтому деформации поперечного сдвига  $\varepsilon_{13}$  и  $\varepsilon_{23}$  не равны нулю и определяются с помощью формул (4.244). Используя соотношения между компонентами векторов углов поворота

$$\vec{\beta} \text{ и } \vec{\mathcal{G}} (\beta_1 = \mathcal{G}_2, \beta_2 = -\mathcal{G}_1),$$

можно представить вектор  $\vec{\varepsilon} \approx \begin{Bmatrix} \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{Bmatrix}$  в следующем виде:

$$\vec{\varepsilon} \approx \begin{Bmatrix} \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{Bmatrix} = [\tilde{G}] \circ \vec{g} + [\tilde{L}] \circ \vec{\mathcal{G}} \quad (4.262)$$

$$\text{где: } [\tilde{G}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\gamma & 1 \\ \sqrt{1 - \gamma^2} & \sqrt{1 - \gamma^2} \end{bmatrix} \quad \vec{g} = \begin{bmatrix} \frac{1}{A_\xi} \circ [\lambda_3] \circ \frac{\partial \vec{u}}{\partial \xi} \\ \frac{1}{A_\eta} \circ [\lambda_3] \circ \frac{\partial \vec{u}}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad [\tilde{L}] = \begin{bmatrix} -\gamma \circ [\lambda_\xi] + [\lambda_\eta] \\ \sqrt{1 - \gamma^2} \\ -[\lambda_\xi] \end{bmatrix}$$

Полная энергия деформации толстой оболочки будет равна сумме:

$$U = U_m + U_b + U_s \quad (4.263)$$

где энергия мембранных деформаций и энергия изгибных деформаций определяются по формулам (4.261), а энергия деформаций поперечного сдвига равна:

$$U_s = \frac{1}{2} \circ \tilde{G} \circ h \circ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \tilde{\varepsilon}^T \circ [E] \circ \tilde{\varepsilon} \circ A_\xi \circ A_\eta \circ \sqrt{1-\gamma^2} \circ d\xi \circ d\eta \quad (4.264)$$

#### 4.9.2.3.2 Плоские элементы оболочки

Рассмотрим частный случай плоской оболочки. Выберем глобальную систему координат  $XYZ$  так, чтобы оболочка находилась в координатной плоскости  $XY$ . В п. 4.9.2.3.1 было установлено, что вектор полной деформации оболочки  $\vec{\varepsilon}$  равен суперпозиции векторов мембранной деформации  $\vec{\varepsilon}_0$  и изгибной деформации  $\vec{\varepsilon}_b$ :

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}_0 + \vec{\varepsilon}_b \quad (4.265)$$

а полная энергия деформации оболочки  $U$  равна сумме энергии мембранных деформаций  $U_m$  и энергии изгибных деформаций  $U_b$ :

$$U = U_m + U_b \quad (4.266)$$

Очевидно, что в случае плоской оболочки, находящейся в плоскости  $XY$ , мембранные деформации оболочки  $\vec{\varepsilon}_0$  будут определяться только перемещениями  $\vec{u}_x$  и  $\vec{u}_y$  точек оболочки в плоскости  $XY$ . Изгибные же деформации оболочки  $\vec{\varepsilon}_b$  будут определяться перемещениями  $\vec{u}_z$  точек оболочки вдоль оси  $Z$  и углами поворота  $\beta_x$  и  $\beta_y$  вектора нормали  $\vec{n}$  к поверхности оболочки к осям  $XY$ .

Таким образом, всего у плоской оболочки будет 5 степеней свободы  $(u_x, u_y, u_z, \beta_x, \beta_y)$ , а в случае произвольной ориентации оболочки относительно г.с.к.  $XYZ$  - 6. Видим, что для плоской оболочки имеет место вырождение числа степеней свободы в случаях частного положения оболочки (в плоскостях  $XY, XZ, YZ$ ).

Но  $u_x$  и  $u_y$  - есть степени свободы мембраны (см. раздел 4.9.2.1), а  $u_z, \beta_x, \beta_y$  - степени свободы пластины (см. раздел 4.9.2.2).

Поэтому окончательно мы можем сделать вывод, что тонкая плоская оболочка может быть представлена как суперпозиция мембраны и тонкой пластины. Это следует из суперпозиции мембранной и изгибной составляющих всех основных величин элемента: поля перемещений  $\vec{u}$ , поля деформаций  $\vec{\varepsilon}$  и энергии деформации  $U$ . Тогда матрица жесткости тонкой плоской оболочки  $[K]$  будет также опре-

деляться суперпозицией матрицы жесткости мембраны  $[K_m]$  и матрицы жесткости тонкой пластины  $[K_b]$ :

$$[K] = [K_m] + [K_b] \quad (4.267)$$

Значения матриц  $[K_m]$  и  $[K_b]$  надо брать из разделов 4.9.2.1 и 4.9.2.2 соответственно. Путем указанной суперпозиции элементов мембраны и тонкой пластины в [ИСПА] формируются следующие элементы тонкой оболочки:

1) Треугольный элемент тонкой оболочки 124 - из мембраны 40 (см. п. 4.9.2.3.2) и тонкой пластины 122 (см. п. 4.9.2.2.3), имеющий 3 узла. В каждом узле по 5 (в общем положении - 6) степеней свободы; всего у элемента 15 (18) степеней свободы.

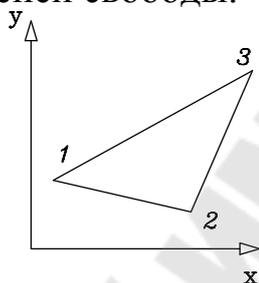


Рисунок 4.26

2) Четырехугольный элемент тонкой плоской оболочки 134 - из элемента мембраны 130 (см. п. 4.9.2.1.3) и элемента тонкой пластины 132 (см. п. 4.9.2.1.4), имеющий 4 узла (Рисунок 4.27). В каждом узле по 5 (в общем положении - 6) степеней свободы; всего у элемента 20 (24) степени свободы.

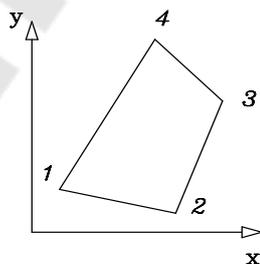


Рисунок 4.27

#### 4.9.2.3.3 Неплоская четырехузловая ДКТ - оболочка

Рассмотрим ДКТ - элемент тонкой неплоской четырехузловой оболочки с прямыми ребрами. Этот элемент не имеет локальной системы координат, как плоские двумерные элементы, а описывается в глобальной системе координат  $XYZ$  (Рисунок 4.28).

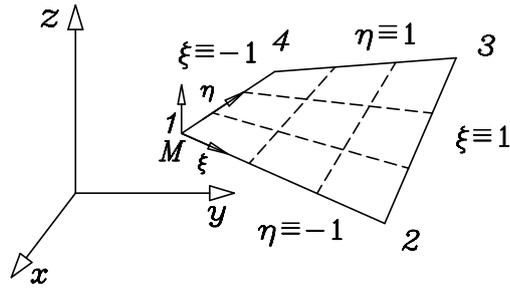


Рисунок 4.28

Тип элемента в [ИСПА] - 314. Угол неплоскостности  $\vartheta$  элемента меняется в пределах:  $0^\circ \leq \vartheta \leq 25^\circ$ .

Геометрия элемента задается параметрическими формулами:

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = \sum_{r=1}^4 \psi_r(\xi, \eta) \circ x_r \\ y(\xi, \eta) = \sum_{r=1}^4 \psi_r(\xi, \eta) \circ y_r \\ z(\xi, \eta) = \sum_{r=1}^4 \psi_r(\xi, \eta) \circ z_r \end{cases} \quad (4.268)$$

где  $(x_r, y_r, z_r), r = 1, 2, 3, 4$  - координаты узлов при вершинах элемента;

$\psi_r(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \circ (1 + \xi_r \circ \xi) \circ (1 + \eta_r \circ \eta), r = 1, 2, 3, 4$  - билинейные функции формы определенные на квадрате (2x2) в плоскости  $(\xi, \eta)$  (см. Рисунок 4.29).

Билинейные функции формы были определены в п.4.9.2.1.3.

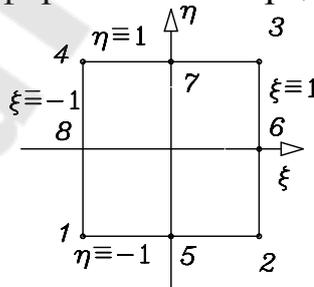


Рисунок 4.29

В каждом узле  $r$  элемента по 6 степеней свободы:

три компоненты вектора перемещения узла  $\vec{u}_r = \begin{Bmatrix} u_{xr} \\ u_{yr} \\ u_{zr} \end{Bmatrix}$ , и три компо-

ненты вектора углов поворота  $\vec{\vartheta}_r = \begin{Bmatrix} \bar{\vartheta}_{xr} \\ \bar{\vartheta}_{yr} \\ \bar{\vartheta}_{zr} \end{Bmatrix}$  вектора нормали  $\vec{n}$  вокруг осей  $X, Y, Z$ .

Вектор степеней свободы узла  $\vec{v}_r$  равен:  $\vec{v}_r = \begin{Bmatrix} \vec{u}_r \\ \vec{\vartheta}_r \end{Bmatrix}$

Будем также рассматривать вектор степеней свободы узла

$\vec{v}_r = \begin{Bmatrix} \vec{u}_r \\ \vec{\beta}_r \end{Bmatrix}$  где  $\vec{\beta}_r = \begin{Bmatrix} \beta_{xr} \\ \beta_{yr} \\ \beta_{zr} \end{Bmatrix}$  - вектор углов поворота вектора нормали в узле к осям  $X, Y, Z$ .

Вектор степеней свободы элемента  $\vec{U}^{(e)T} = [\vec{v}_1^T \quad \vec{v}_2^T \quad \vec{v}_3^T \quad \vec{v}_4^T]$ . Всего у элемента  $6 \times 4 = 24$  степеней свободы. Поэтому вектор степеней свободы элемента  $\vec{U}^{(e)}$  имеет 24 компоненты.

В п. 4.9.2.3.1. мы установили вид поля вектора перемещений точек оболочки:

$$\vec{u}(\xi, \eta, \zeta) = \vec{u}_0(\xi, \eta) + \zeta \circ \vec{\beta}(\xi, \eta) \quad (4.269)$$

По аналогии с п.4.9.2.1.3 для четырехузлового элемента мембраны, поле вектора мембранных перемещений  $\vec{u}_0(\xi, \eta)$  аппроксимируется с помощью билинейных функций формы  $\psi_r(\xi, \eta)$ , использованных для аппроксимации геометрии элемента (формула 4.268):

$$\vec{u}_0(\xi, \eta) = \sum_{r=1}^4 \psi_r(\xi, \eta) \circ \vec{u}_{0r} \quad (4.270)$$

По аналогии с п. 4.9.2.2.4 для четырехузлового ДКТ - элемента тонкой пластины введем дополнительные срединные узлы ( $k = 5, 6, 7, 8$ ), расположенные по середине соответствующих ребер элемента оболочки (Рисунок 4.30).

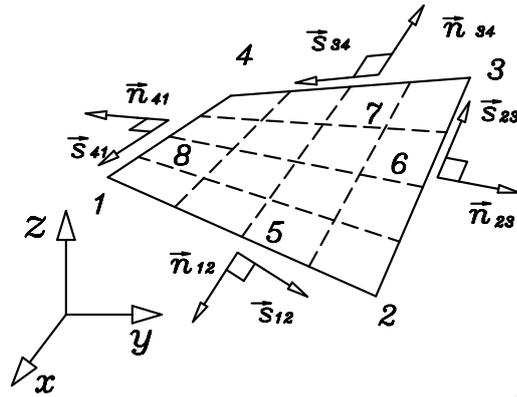


Рисунок 4.30

$$x_{ij} = x_i - x_j \quad y_{ij} = y_i - y_j \quad z_{ij} = z_i - z_j \quad l_{ij} = \sqrt{x_{ij}^2 + y_{ij}^2 + z_{ij}^2}$$

Введем в каждом срединном узле по три зависимые степени свободы:

$$\vec{\beta}_k = \begin{Bmatrix} \beta_{xk} \\ \beta_{yk} \\ \beta_{zk} \end{Bmatrix}$$

Тогда, как и в п.1.3.2.4, для описания компонент векторной функции  $\vec{\beta}(\xi, \eta)$  имеем по 8 степеней свободы  $\beta_{xi}, \beta_{yi}, \beta_{zi}, (i = 1, 2, \dots, 8)$ .

Поэтому  $\vec{\beta}(\xi, \eta)$  можно аппроксимировать с помощью биквадратичных функций формы  $N_i(\xi, \eta)$ :

$$\beta(\xi, \eta) = \sum_{r=1}^8 N_r(\xi, \eta) \circ \vec{\beta}_r \quad (4.271)$$

Положение срединных узлов на квадрате в плоскости  $(\xi, \eta)$  показано на Рисунок 4.29.

Формулу (4.271) надо видоизменить, исключив из нее введенные зависимые степени свободы. Кроме того, необходимо выбрать такую аппроксимацию  $\vec{\beta}(\xi, \eta)$ , чтобы выполнялись условия Кирхгоффа.

Как и в п. 4.9.2.2.4, потребуем выполнения следующих условий:

1) выполнения условий Кирхгоффа (4.245) в вершинных узлах:

$$\begin{cases} \varepsilon_{13} = \left( \beta_1 + [\lambda_3] \circ \frac{\partial \vec{u}_0}{\partial s_1} \right) \Big|_r = 0 \\ \varepsilon_{23} = \left( \beta_2 + [\lambda_3] \circ \frac{\partial \vec{u}_0}{\partial s_2} \right) \Big|_r = 0 \end{cases}, r = (1, 2, 3, 4) \quad (4.272)$$

2) выполнения условий Кирхгоффа для сдвиговой деформации вдоль сторон четырехугольного элемента в его срединных узлах:

$$\gamma_{sk} = \left( \beta_s + [\lambda_3] \circ \frac{\partial \vec{u}_0}{\partial s} \right)_{|k} = 0 \quad (4.273)$$

3) линейный закон изменения вдоль ребра  $l_{ij}$  угла поворота  $\beta_n$  вектора нормали  $\vec{n} = \vec{e}_3$  к векторам  $\vec{n}_{ij}$ , перпендикулярным к ребрам и вектору нормали  $\vec{n}$  в данной точке ребра:

$$\beta_{nk} = \frac{\beta_{ni} + \beta_{nj}}{2} = 0, (i, j = 1, 2, 3, 4), (k = 5, 6, 7, 8) \quad (4.274)$$

4) кубический закон изменения вдоль ребра  $l_{ij}$  перемещения  $w = \vec{u}_0 \circ \vec{e}_3 = [\lambda_3] \circ \vec{u}_0$ ; из него следует:

$$\frac{\partial w}{\partial s}_{|k} = \frac{3}{2} \circ l_{ij} \circ (w_j - w_i) - \frac{1}{4} \circ \left( \frac{\partial w}{\partial s}_{|i} + \frac{\partial w}{\partial s}_{|j} \right) \quad (4.275)$$

Заметим, что для неплоского четырехугольника остаются постоянными вдоль данного ребра  $l_{ij}$  только вектора  $\vec{s}_{ij}$ , тогда как вектора нормали к поверхности  $\vec{n} = \vec{e}_3$  и вектора  $\vec{n}_{ij}$  меняются вдоль ребра  $l_{ij}$ . В частности, из этого следует, что условие (4.273) для  $\gamma_s$  вместе с другими условиями не обеспечивают выполнения условий Кирхгоффа вдоль контура элемента.

Поэтому потребуем, чтобы угол неплоскостности  $\mathcal{G}$  был достаточно малым (угол  $\mathcal{G}$  можно определить, например, как максимальный по величине угол между векторами нормали  $\vec{n} = \vec{e}_3$  в вершинных углах элемента).

Поэтому в дальнейшем будем считать:

$$[\lambda] \cong const \quad (4.276)$$

Тогда условия (4.273) принимают обычный вид:

$$\gamma_{sk} = \beta_{sk} + \frac{\partial w}{\partial s}_{|k} = 0, k = (5, 6, 7, 8)$$

Теперь можно считать условия Кирхгоффа справедливыми вдоль контура неплоской оболочки:

$$\left( \gamma_s = \beta_{sk} + \frac{\partial w}{\partial s} = 0 \right)_{|\partial A}$$

Как и в п. 4.9.2.2.4, это приводит для малого элемента к выполнению условий Кирхгоффа для всей поверхности, т.е. мы получили элемент тонкой неплоской оболочки.

Преобразуем теперь формулу (4.271) аппроксимации  $\beta(\xi, \eta)$  с помощью (4.272) - (4.276):

$$\vec{\beta}(\xi, \eta) = \sum_{r=1}^4 N_r(\xi, \eta) \circ \vec{\beta}_r + \sum_{k=5}^8 N_k(\xi, \eta) \circ \vec{\beta}_k \quad (4.277)$$

где разложим  $\vec{\beta}_k$  по ортогональному реперу

$$\{\vec{s}_k \quad \vec{n}_k \quad \vec{e}_{3k}\} (\vec{s}_k = \vec{s}_{ij}^k, \vec{n}_k = \vec{n}_{ij}^k)$$

$$\vec{\beta}_k = (\vec{n}_k \circ \vec{\beta}_k) \circ \vec{n}_k + (\vec{e}_{3k} \circ \vec{\beta}_k) \circ \vec{e}_{3k} + (\vec{s}_k \circ \vec{\beta}_k) \circ \vec{s}_k = \beta_{nk} \circ \vec{n}_k + \beta_{3k} \circ \vec{e}_{3k} + \beta_{sk} \circ \vec{s}_k$$

Если потребовать, чтобы вдоль каждого ребра  $l_{ij}$  проекция  $\vec{\beta}$  велась на репер  $\{\vec{s}_k \quad \vec{n}_k \quad \vec{e}_{3k}\}$  в срединном узле (т.е. здесь учтено допущение (4.276):  $[\lambda] \cong const$ ), то с помощью указанных формул закон аппроксимации  $\vec{\beta}(\xi, \eta)$  может быть выражен следующим образом:

$$\begin{aligned} \vec{\beta}(\xi, \eta) = & \sum_{r=1}^4 N_r(\xi, \eta) \circ \vec{\beta}_r \\ & + \sum_{k=5}^8 N_k(\xi, \eta) \circ \left( \begin{aligned} & \frac{1}{2} \circ (\vec{n}_k \circ \vec{\beta}_i + \vec{n}_k \circ \vec{\beta}_j) \circ \vec{n}_k + \frac{1}{2} \circ (\vec{e}_{3k} \circ \vec{\beta}_i + \vec{e}_{3k} \circ \vec{\beta}_j) \circ \vec{e}_{3k} \\ & - \frac{3}{2l_{ij}} \circ (\vec{e}_{3k} \circ \vec{u}_i + \vec{e}_{3k} \circ \vec{u}_j) \circ \vec{s}_k - \frac{1}{4} \circ (\vec{s}_k \circ \vec{\beta}_i + \vec{s}_k \circ \vec{\beta}_j) \circ \vec{s}_k \end{aligned} \right) \end{aligned} \quad (4.278)$$

где  $i, j$  - вершинные узлы, относящиеся к ребрам со срединным узлом;

$$\vec{\beta}_r = [L_r] \circ \mathcal{G}_r$$

Видим, что здесь  $\vec{\beta}(\xi, \eta)$  аппроксимирован только через независимые степени свободы  $\vec{u}_r, \vec{\beta}_r (r = 1, 2, 3, 4)$ .

Рассмотрим следующую проблему. Пусть вектор степеней свободы элемента

$\vec{U}^{(e)T} = [\vec{v}_1^T \quad \vec{v}_2^T \quad \vec{v}_3^T \quad \vec{v}_4^T]$ , где  $\vec{v}_r^T = [\vec{u}_r^T \quad \vec{\mathcal{G}}_r^T]$  - такой, что значения его компонент определяются параллельным переносом  $\vec{u}_0$  и поворотом  $\vec{\mathcal{G}}$  системы узлов элемента как целого:

$$\begin{cases} \vec{u}_r = \vec{u}_0 + (\vec{\mathcal{G}}_0 \circ \vec{R}_r) \\ \vec{\mathcal{G}}_r = \vec{\mathcal{G}}_0 \end{cases}$$

где:  $\vec{R}_r = \{x_r \quad y_r \quad z_r\}$  - радиус-вектор узла  $r (r = 1, 2, 3, 4)$ . Тогда при правильной аппроксимации перемещений  $\vec{u}_o(\xi, \eta)$  и углов  $\vec{\beta}(\xi, \eta)$  они должны удовлетворить условию параллельного переноса  $\vec{u}_0$  и поворота  $\vec{\mathcal{G}}_0$  элемента как целого:

$$\begin{cases} \vec{u}_0(\xi, \eta) = \vec{u}_0 + (\vec{\mathcal{G}}_0 \times \vec{R}(\xi, \eta)) \\ \vec{\beta}(\xi, \eta) = (\vec{\mathcal{G}}_0 \times \vec{e}_3) = [L(\xi, \eta)] \circ \vec{\mathcal{G}}_0 \end{cases} \quad (4.279)$$

Из формулы (4.270) аппроксимации  $\vec{u}_0$  следует:

$$\vec{u}_0(\xi, \eta) = \sum_{r=1}^4 \psi_r(\xi, \eta) \circ (u_0 + (\vec{\mathcal{G}}_0 \times \vec{R}_r)) = \vec{u}_0 \circ \sum_{r=1}^4 \psi_r(\xi, \eta) + \left( \vec{\mathcal{G}}_0 \times \sum_{r=1}^4 \psi_r(\xi, \eta) \circ \vec{R}_r \right) = \vec{u}_0 + (\vec{\mathcal{G}}_0 \times \vec{R}(\xi, \eta))$$

т.е. поле  $\vec{u}_0(\xi, \eta)$  отвечает указанному требованию. Здесь мы восполь-

зовались свойством  $\psi_r(\xi, \eta)$ :  $\sum_{r=1}^4 \psi_r(\xi, \eta) \equiv 1$

Но для  $\vec{\beta}(\xi, \eta)$ , определяемого формулой (4.278), это требование не будет выполняться. Это приведет к появлению ложных деформаций элемента. Поэтому, учитывая условие  $[\lambda] \equiv const$ , изменим формулу (4.278) таким образом, чтобы условие (4.279) для  $\vec{\beta}(\xi, \eta)$ :  $\vec{\beta}(\xi, \eta) = [L(\xi, \eta)] \circ \vec{\mathcal{G}}_0$  выполнялось бы тождественно. Это можно сделать, заменив матрицы  $[L_r]$  в узлах  $r$  на их значение в точке интегрирования  $(\xi, \eta)$ .

Окончательная формула следующая:

$$\vec{\beta}(\xi, \eta) = \sum_{r=1}^4 N_r(\xi, \eta) \circ [L(\xi, \eta)] \circ \vec{\mathcal{G}}_r + \sum_{k=5}^8 N_k(\xi, \eta) \circ \left( \begin{aligned} & \frac{1}{2} \circ (\vec{n}_k^T \circ [L(\xi, \eta)]) \circ \vec{\mathcal{G}}_i + \vec{n}_k \circ ([L(\xi, \eta)] \circ \vec{\mathcal{G}}_j) \circ \vec{n}_k + \\ & \frac{1}{2} \circ (\vec{e}_{3k}^T \circ [L(\xi, \eta)]) \circ \vec{\mathcal{G}}_i + \vec{e}_{3k}^T \circ ([L(\xi, \eta)] \circ \vec{\mathcal{G}}_j) \circ \vec{e}_{3k}^T - \\ & - \frac{3}{2l_{ij}} \circ (\vec{e}_3(\xi, \eta) \circ \vec{u}_j - \vec{e}_3(\xi, \eta) \circ \vec{u}_i) \circ \vec{s}_k - \\ & \frac{1}{4} \circ \vec{s}_k^T \circ [L(\xi, \eta)] \circ \vec{\mathcal{G}}_i + (\vec{s}_k^T \circ [L(\xi, \eta)]) \circ \vec{\mathcal{G}}_i + \vec{s}_k^T \circ [L(\xi, \eta)] \circ \vec{\mathcal{G}}_j \circ \vec{s}_k \end{aligned} \right) \quad (4.280)$$

Введя вектора степеней свободы узлов  $\vec{v}_r = \begin{Bmatrix} \vec{u}_r \\ \vec{\mathcal{G}}_r \end{Bmatrix}$ , формулу

(4.280) можно представить в виде:

$$\vec{\beta}(\xi, \eta) = \sum_{r=1}^4 [H_r]^T \circ \vec{v}_r = [H]^T \circ \vec{U}^{(e)} \quad (4.281)$$

где:  $[H]$  - матрица функций формы для  $\vec{\beta}(\xi, \eta)$ .

Подставив в формулы (4.254) для  $\vec{\varepsilon}_0$  и  $\vec{k}$  формулу (4.270) для аппроксимации  $\vec{u}_0$  и формулу (4.281) для аппроксимации  $\vec{\beta}$ , получим аппроксимационные формулы для  $\vec{\varepsilon}_0$  и  $\vec{k}$ :

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_0 &= [G] \circ \sum_{r=1}^4 [g_r] \circ \bar{u}_r \quad [g_r] = \frac{\partial \psi_r}{\partial \xi} \circ [g_r] + \frac{\partial \psi_r}{\partial \eta} \circ [g_\eta] \\ \bar{k} &= [G] \circ \sum_{r=1}^4 [G_r] \circ \bar{v}_r \quad [G_r] = [g_\xi] \circ \frac{\partial [H_r]^T}{\partial \xi} + [g_\eta] \circ \frac{\partial [H_r]^T}{\partial \eta}\end{aligned}\quad (4.282)$$

Введем матрицы:

$$\begin{aligned}[\beta_r^0] &= [[G] \circ [g_r] \quad [0]]; \quad [\beta_0] = [[\beta_1^0] \dots [\beta_4^0]] \\ [\beta_r^*] &= [[G] \circ [G_r]]; \quad [\beta^*] = [[\beta_1^*] \dots [\beta_4^*]]\end{aligned}$$

Тогда формулы (4.282) примут вид:

$$\bar{\varepsilon}_0 = [\beta_0] \circ \bar{U}^{(e)}, \quad \bar{k} = [\beta^*] \circ \bar{U}^{(e)} \quad (4.283)$$

где естественно назвать:

$[\beta_0]$  - мембранная матрица деформирования;  
 $[\beta^*]$  - изгибная матрица деформирования.

Тогда энергии деформаций  $U_m$  и  $U_b$  из (4.261) примут вид:

$$U_m = \frac{1}{2} \circ \bar{U}^{(e)T} \circ [K_m] \circ \bar{U}^{(e)} \quad U_b = \frac{1}{2} \circ \bar{U}^{(e)T} \circ [K_b] \circ \bar{U}^{(e)} \quad (4.284)$$

где введены мембранная  $[K_m]$  и изгибная  $[K_b]$  матрицы жесткости:

$$\begin{aligned}[K_m] &= B \circ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\beta_0]^T \circ [E_0] \circ [\beta_0] \circ A_\xi \circ A_\eta \circ \sqrt{1-\gamma^2} \circ d\xi \circ d\eta \\ [K_b] &= D \circ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\beta^*]^T \circ [E_0] \circ [\beta^*] \circ A_\xi \circ A_\eta \circ \sqrt{1-\gamma^2} \circ d\xi \circ d\eta\end{aligned}\quad (4.285)$$

Интегрирование ведется по квадрату (2x2) в плоскости  $(\xi, \eta)$  (Рисунок 4.29). Численное интегрирование по Гауссу матрицы  $[K_m]$  можно вести с порядком (2x2), а матрицы  $[K_b]$  - (3x3). Таким образом, мы нашли матрицу жесткости оболочки:

$$[K] = [K_m] + [K_b]$$

Численные тесты данного элемента показывают, что он удовлетворительно работает при значениях угла неплоскостности  $\vartheta$  в интервале:

$$0^\circ \leq \vartheta \leq 25^\circ$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. М., 1982.
2. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М., 1975.
3. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. М., 1984.
4. Сегерлинд Д. Применение метода конечных элементов. М., 1979.
5. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. М., 1977.
6. Образцов И.Ф., Савельев Л.М. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов. М., 1985.
7. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М., 1975.
8. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Теория упругости. Теоретическая физика, том 7. М., 1987.
9. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. М., 1986.

**Попов Виктор Борисович**  
**Голопятин Александр Владимирович**

# **ОСНОВЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННОЙ ТЕХНИКИ**

**Курс лекций**  
**по одноименной дисциплине**  
**для студентов специальности 1-36 12 01**  
**«Проектирование и производство**  
**сельскохозяйственной техники»**  
**дневной и заочной форм обучения**

Подписано к размещению в электронную библиотеку  
ГГТУ им. П. О. Сухого в качестве электронного  
учебно-методического документа 15.02.13.

Рег. № 52Е.

<http://www.gstu.by>