

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования  
«Гомельский государственный технический  
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Технология машиностроения»

**В. С. Мурашко**

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
И АЛГОРИТМИЗАЦИЯ  
ИНЖЕНЕРНЫХ ЗАДАЧ**

**ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ  
для студентов специальности  
1-36 01 01 «Технология машиностроения»  
дневной и заочной форм обучения**

Гомель 2010

УДК 681(075.8)  
ББК 22.18я73  
М91

*Рекомендовано научно-методическим советом  
машиностроительного факультета ГГТУ им. П. О. Сухого  
(протокол № 1 от 28.09.2009 г.)*

Рецензент: нач. сектора разработки средств АСУ ГГТУ им. П. О. Сухого  
*Н. С. Шестакова*

**Мурашко, В. С.**

М91 Математическое моделирование и алгоритмизация инженерных задач : лаборатор. практикум для студентов специальности 1-36 01 01 «Технология машиностроения» днев. и заоч. форм обучения / В. С. Мурашко. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2010. – 136 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц; 32 Mb RAM; свободное место на HDD 16 Mb; Windows 98 и выше; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: <http://lib.gstu.local>. – Загл. с титул. экрана.

Представлены задания к девяти лабораторным работам, порядок их выполнения и необходимые методические указания, приведены понятия и алгоритмы математических дисциплин, необходимые для выполнения лабораторных работ.

Для студентов специальности 1-36 01 01 «Технология машиностроения» дневной и заочной форм обучения.

**УДК 681(075.8)  
ББК 22.18я73**

© Учреждение образования «Гомельский  
государственный технический университет  
имени П. О. Сухого», 2010

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение

1. Общие понятия математического моделирования в машиностроении
2. Лабораторная работа №1 «Математическое моделирование процесса обработки поверхности»
3. Лабораторная работа №2 «Оптимизация оснащения обрабатывающего центра»
4. Лабораторная работа №3 «Оптимизация раскроя промышленных материалов»
5. Лабораторная работа №4 «Оптимизация расчета режимов резания»
6. Лабораторная работа № 5 «Оптимизация последовательности переналадок технологической линии
7. Лабораторная работа №6 «Оптимизация последовательности горячей обработки»
8. Лабораторная работа №7 «Оптимизация порядка обработки деталей на трех станках»
9. Лабораторная работа №8 «Оптимизация работы машиностроительного завода, представленного в виде открытой сети Джексона».
10. Лабораторная работа №9 «Численные методы решения матричных игр»

Литература

## ВВЕДЕНИЕ

Интенсификация процессов создания новых конкурентоспособных изделий требует сокращения сроков и повышения качества проектно-конструкторских работ. Эти требования можно обеспечить только, применяя новые технологии проектирования, основанные на использовании методов математического моделирования и вычислительной техники.

Настоящий лабораторный практикум используется для выполнения лабораторных работ по курсу «Математическое моделирование и алгоритмизация инженерных задач». Данная дисциплина основывается на знании технологии машиностроения и таких математических дисциплин, как теория графов, математический анализ, алгебра, линейное, дискретное и динамическое программирование, теория расписаний, теория массового обслуживания, теория матричных игр. Знания и умения, приобретенные студентами при изучении указанной дисциплины, могут быть использованы при решении различных практических задач технологии машиностроения. Эти знания также необходимы также при изучении многих других дисциплин. В первую очередь это касается таких дисциплин, как «Основы САПР» и «САПР технологических процессов», так как основой различных систем автоматизированного проектирования является их математическое обеспечение, содержащее математические модели различных проектных задач.

Современные технологии основываются как на опыте инженерной практики, так на научных теоретических и экспериментальных исследованиях. Поэтому инженер должен уметь практически решать задачи, укладывающиеся в традиционные рамки, а также формулировать и исследовать совершенно новые задачи, требующие применения современных математических методов. В результате математический кругозор инженера в современных условиях должен постоянно расширяться, а навыки построения и применения математических моделей технологических процессов совершенствоваться.

# 1 ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В МАШИНОСТРОЕНИИ

Под объектами моделирования в машиностроительном производстве следует понимать:

1. Технологические системы (ТС) – участки из универсальных станков, автоматические линии, гибкие производственные системы (ГПС).
2. Технологические процессы (ТП).
3. Физические процессы (ФП) – процессы, протекающие при резании металлов, при функционировании технологического оборудования в упругой системе СПИД и т.д.

В чистом виде (по – отдельности) математические модели данных объектов применяются редко, как правило, они комбинированные. Например, в математических моделях ТС используются математические модели ТП, в которых, в свою очередь, применяются математические модели ФП.

**Математическая модель объекта моделирования** – это система математических элементов (чисел, переменных, уравнений, неравенств, множеств, матриц, графов и т.д.) и отношений между ними, адекватно отражающая некоторые свойства объекта, существенные с точки зрения инженера, для решения той или иной задачи. **Математическое моделирование** – это процесс формирования математической модели и использования ее для анализа и синтеза.

Математические модели разрабатываются для описания ФП, ТП, ТС; исследования ФП, ТП, ТС; проектирования ТП, ТС; оптимизации в ходе проектирования ТП, ТС и организации работы ТС; построения систем автоматизированного проектирования.

Вид, состав, сложность математической модели зависит от того, какой объект она описывает и для каких целей разработана.

Для оптимизации математическая модель должна иметь следующие элементы: критерий или критерии оптимизации; целевую функцию; систему ограничений; систему уравнений, описывающих объект; входные, выходные и внутренние параметры; управляемый (варьируемый) или управляемые (варьируемые) параметры, которые выделяются из числа внутренних параметров.

Процесс построения моделей можно представить следующим образом (см. рис. 1.1).

На первом уровне изучают интересующую систему (объект моделирования) и описывают ее содержательно. Такое описание

называют концептуальной (содержательной) моделью, представляющей собой словесное описание математической формулировки задачи.

Затем формулируют концептуальную модель, для чего разрабатывают структуру модели. Это структурный или топологический уровень формирования модели, на котором модель записывается в виде балансовых соотношений и ограничений. Далее на алгоритмическом уровне разрабатывают алгоритм решения математической модели.

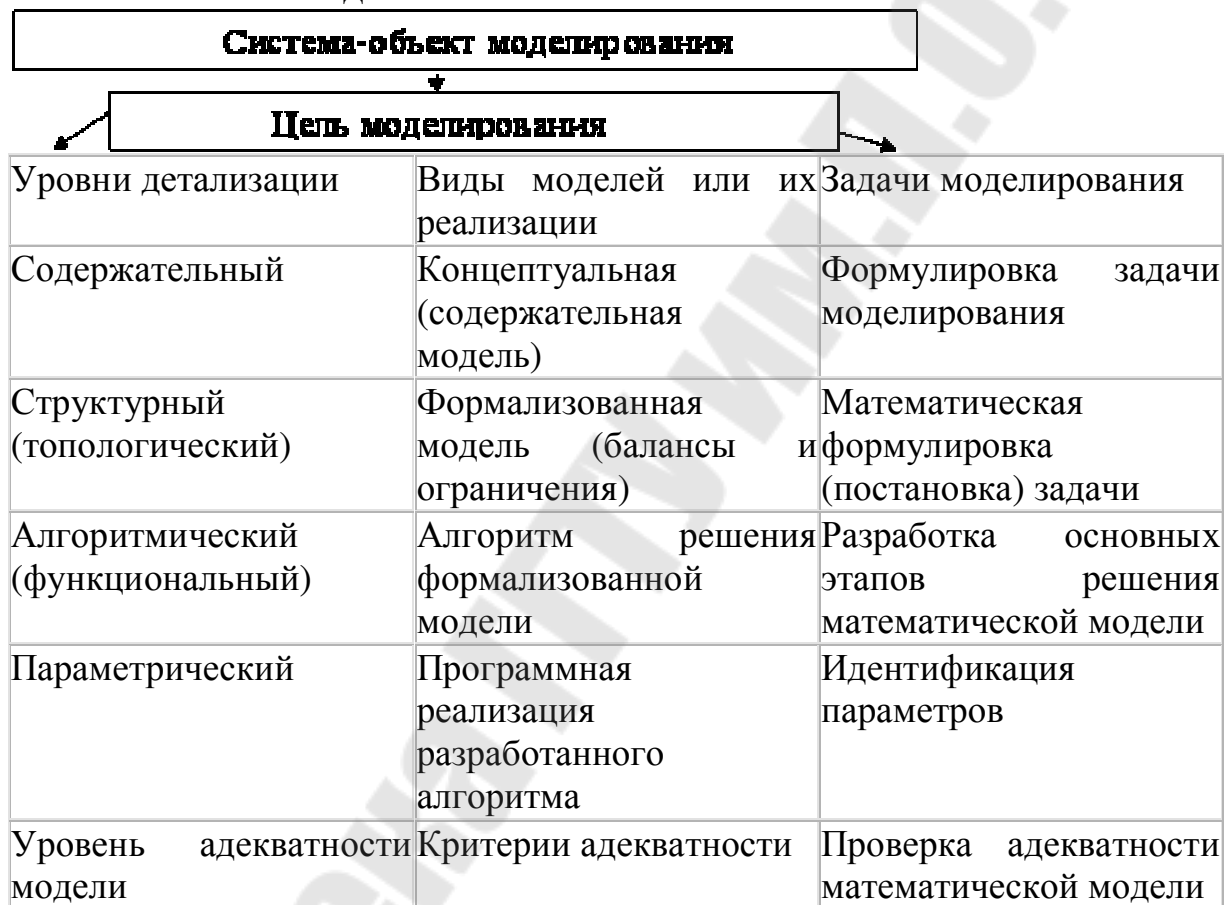


Рисунок 1.1 - Процесс создания математических моделей

Программная реализация которого соответствует следующему уровню детализации – параметрическому, на котором определяются параметры модели.

И далее на последнем уровне проводится проверка адекватности модели моделируемому объекту.

Модель считается *адекватной*, если отражает исследуемые свойства с приемлемой точностью, которая оценивается степенью совпадения предсказанного в процессе эксперимента на модели значений выходных параметров с истинными значениями.

## 2 Лабораторная работа №1 «Математическое моделирование процесса обработки поверхности»

**Цель работы.** Изучение методов средних отклонений и наименьших квадратов для определения параметров математической модели, представленной в виде эмпирической зависимости.

### Постановка задачи

1. С помощью системы MathCAD построить математическую модель обработки экспериментальных данных, используя метод средних отклонений и метод наименьших квадратов.
2. Для каждого метода вычислить сумму квадратов отклонений шероховатости поверхности по всем опытам.
3. Отобразить результаты расчетов графически.
4. Определить лучшую из двух моделей и проверить ее на адекватность.
5. Линейная интерполяция (функция linterp) результатов вычислений.
6. Построение аппроксимирующих функций (функция linfit).
7. Построения линий тренда в Excel.

### Исходные данные для работы

1. Таблица значений независимых переменных и экспериментальных значений шероховатости поверхности. Первый столбец таблицы  $N$  - номер опыта; второй и третий столбцы - значения независимых переменных:  $S$  - подача инструмента в мм/об;  $m$  - скорость м/мин. В четвертом, пятом и шестом столбцах расположены эмпирические данные шероховатости поверхности, полученные тремя независимыми экспертами:  $t$  – матрица  $5 \times 3$ .
2. Одна из приведенных ниже математических моделей в виде эмпирических зависимостей:

-гиперболическая

$$y = b_0 + \frac{b_1}{S} + \frac{b_2}{m} \quad (2.1);$$

- логарифмическая

$$y = b_0 + b_1 \cdot \ln(S) + b_2 \cdot \ln(m) \quad (2.2);$$

- показательно-степенная

$$y = b_0 \cdot S^{b_1} \cdot e^{b_2 \cdot m} \quad (2.3);$$

- показательная

$$y = b_0 \cdot e^{b_1 \cdot S + b_2 \cdot m} \quad (2.4);$$

- степенная

$$y = b_0 \cdot S^{b_1} \cdot m^{b_2} \quad (2.5)$$

3. Табличное значение критерия Фишера  $F_t=4.96$ .
4. Допустимая величина погрешности  $P_z=5\%$ .

### Методические рекомендации к лабораторной работе

Использовать эмпирические формулы (математические модели, построенные на основании ряда проведенных опытов) технологу-машиностроителю приходится при назначении рациональных режимов резания, определении оптимальных стойкостей инструментов, расчетных необходимых усилий зажима в станочных приспособлениях, расчете необходимых затрат времени и т.д. Однако не всегда можно найти нужную формулу в существующих справочниках, поэтому нужно уметь построить математическую модель на основании эмпирических исследований. В лабораторной работе необходимо исследовать математическую модель, описывающую расчет шероховатости поверхности от некоторого числа независимых переменных (например, подачи и скорости).

Для определения параметров математических моделей, приведенных в исходных данных, необходимо рассмотреть два аналитических метода, получивших названия «метод средних отклонений» и «метод наименьших квадратов».

### Приведение заданных математических моделей к унифицированной модели

Математические модели (2.1)-(2.5) путем соответствующих замен приводятся к одной линейной унифицированной модели вида:

$$Z = b_{00} + b_1 \cdot X_1 + b_2 \cdot X_2. \quad (2.6)$$

Замены:

- для гиперболической модели (2.1):

$$Z_j = Y_j, \quad X_{1j} = \frac{1}{S_j}, \quad X_{2j} = \frac{1}{m_j}, \quad b_{00} = b_0 \quad (2.7)$$

- для логарифмической модели (2.2):

$$Z_j = Y_j, \quad X_{1j} = \ln S_j, \quad X_{2j} = \ln m_j, \quad b_{00} = b_0 \quad (2.8)$$



- для показательно-степенной модели (2.3):  

$$Z_j = \ln Y_j, \quad X_{1j} = \ln S_j, \quad X_{2j} = m_j \quad b_{00} = \ln b_0 \quad (2.9)$$

- для показательной модели (2.4):  

$$Z_j = \ln Y_j, \quad X_{1j} = S_j, \quad X_{2j} = m_j \quad b_{00} = \ln b_0 \quad (2.10)$$

- для степенной модели (2.5):  

$$Z_j = \ln Y_j, \quad X_{1j} = \ln S_j, \quad X_{2j} = \ln m_j \quad b_{00} = \ln b_0 \quad (2.11)$$

### Определение параметров унифицированной математической модели методом «средних отклонений»

При построении математической модели по эмпирическим данным возникают отклонения между оценками зависимой переменной  $Z_j$ , полученными в результате опытов, и значениями  $\tilde{Z}_j$ , которые получаются по формуле (2.6) при подстановке в нее значений факторов, соответствующих условиям тех же опытов. Эти отклонения называются *невязками*. Приведем вид случайных величин – невязок для математических моделей (2.6):

$$\delta_j = b_{00} + b_1 \cdot X_{1j} + b_2 \cdot X_{2j} - Z_j \quad (2.12)$$

Суть метода заключается в том, что математическая модель (2.6) аппроксимирует множество оценок зависимой переменной величины  $\{Z_1, Z_2, \dots, Z_N\}$  таким образом, чтобы сумма невязок равнялась нулю.

Для построения математической модели методом средних отклонений все множество эмпирических значений  $\{Z_j\}$  и соответствующие ему множества независимых переменных  $\{S, m\}$  делится на столько равных (или почти равных) групп, сколько параметров имеет выбранная для аппроксимации зависимость (в лабораторной работе на три группы).

Для каждой группы записывается условие равенства нулю суммы невязок в группе, и таким образом составляется система линейных уравнений для нахождения неизвестных параметров математической модели. Например,

$$\delta_1 + \delta_2 = 0$$

$$\delta_3 + \delta_4 = 0$$

$$\delta_5 = 0$$

или в развернутом виде система примет вид:

$$\begin{aligned}
2 \cdot b_{00} + b_1 \cdot (X_{1_1} + X_{1_2}) + b_2 \cdot (X_{2_1} + X_{2_2}) &= Z_1 + Z_2 \\
2 \cdot b_{00} + b_1 \cdot (X_{1_3} + X_{1_4}) + b_2 \cdot (X_{2_3} + X_{2_4}) &= Z_3 + Z_4 \\
b_{00} + b_1 \cdot X_{1_5} + b_2 \cdot X_{2_5} &= Z_5
\end{aligned}
\tag{2.13}$$

Примечание. Если при решении системы (2.13) определить основной матрицы окажется равным нулю, то необходимо опять разбить все множество эмпирических значений и соответствующие ему множества независимых переменных на другие три группы, например

$$\delta_5 + \delta_2 = 0$$

$$\delta_3 + \delta_4 = 0$$

$$\delta_1 = 0$$

или выбрать самостоятельно другой вариант.

### **Построение математических моделей с использованием метода наименьших квадратов (МНК)**

Данный метод основан на том, что при определении параметров математической модели, их значения рассчитываются таким образом, чтобы расчетные по этой математической модели значения зависимой  $\tilde{Z}_j$  имели минимум суммы квадратов отклонений от оценок зависимой переменной  $Z_j$ , полученных в опытах. Сумма квадратов отклонений рассчитанных значений от оценок в опытах рассчитывается по формуле:

$$Sr = \sum_{j=1}^N (\tilde{Z}_j - Z_j)^2 \tag{2.14}$$

где

$Z_j$  – оценка зависимой переменной величины, в  $j$ -ом опыте;

$N$  – количество опытов (в лабораторной работе  $N=5$ );

$\tilde{Z}_j$  – значение зависимой переменной величины, рассчитанное по математической модели для условий  $j$ -ого опыта.

Функция  $Sr$  с учетом формулы (2.6) примет следующий вид:

$$Sr = \sum_{j=1}^5 (b_{00} + b_1 \cdot X_{1_j} + b_2 \cdot X_{2_j} - Z_j)^2$$

Метод наименьших квадратов основан на том, что параметры формулы (2.14) находятся из условий достижения функцией минимального значения. Из курса математического анализа известно, что условием достижения непрерывной функции точки экстремума, является обращение в нуль частных производных этой функции.

То есть решается следующая система линейных уравнений:

$$\frac{\partial Sr}{\partial b_{00}} = 0$$

$$\frac{\partial Sr}{\partial b_1} = 0$$

$$\frac{\partial Sr}{\partial b_2} = 0$$

или в развернутом виде:

$$N \cdot b_{00} + b_1 \cdot \sum_{j=1}^N X_{1j} + b_2 \cdot \sum_{j=1}^N X_{2j} = \sum_{j=1}^N Z_j$$

$$b_{00} \cdot \sum_{j=1}^N X_{1j} + b_1 \cdot \sum_{j=1}^N X_{1j}^2 + b_2 \cdot \sum_{j=1}^N X_{1j} \cdot X_{2j} = \sum_{j=1}^N Z_j \cdot X_{1j} \quad (2.15)$$

$$b_{00} \cdot \sum_{j=1}^N X_{2j} + b_1 \cdot \sum_{j=1}^N X_{1j} \cdot X_{2j} + b_2 \cdot \sum_{j=1}^N X_{2j}^2 = \sum_{j=1}^N Z_j \cdot X_{2j}$$

### Проверка адекватности математической модели

После нахождения параметров математической модели (2.1)-(2.5) встает задача – выяснение, насколько точно полученная математическая модель представляет истинную зависимость. То есть необходимо решить задачу проверки адекватности математической модели. Эту задачу можно решить двумя способами: с использованием дисперсии адекватности, либо средней ошибки аппроксимации.

Первый способ: с использованием дисперсии адекватности.

Так как параметры математической модели (2.1)-(2.5) определялись двумя способами: средних отклонений и наименьших квадратов, то для проверки на адекватность выбирается модель, определенная тем способом, у которой сумма квадратов отклонений  $Y_j$  от  $V_j$ :

$\sum_{j=1}^N (Y_j - Y_j)^2$  будет минимальной. Эта сумма является

числителем дисперсии адекватности  $S_{ад}^2$ , которая показывает величину разброса между этими значениями:

$$S_{ад}^2 = \frac{\sum_{j=1}^N (Y_j - Y_j)^2}{N - k' - 1}, \quad (2.16)$$

где  $k'$  – количество определявшихся параметров математической модели (в лабораторной работе  $k'=3$ ).

Дисперсия воспроизводимости эксперимента задается следующей формулой:

$$S_{\{Y\}}^2 = \frac{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^n (Y_j - t_{j,i})^2}{N(n-1)}, \quad (2.17)$$

где  $n$  - количество параллельных наблюдений ( $n=3$ ).

Для проверки модели на адекватность необходимо сравнить табличное значение критерия Фишера  $Ft$  при выбранном уровне значимости (обычно 0,05) и для чисел степеней свободы  $f1 = N - k' - 1$  и  $f2 = N(n - 1)$  с расчетным значением критерием Фишера, которое вычисляется по формуле

$$Fp = \frac{S_{ад}^2}{S_{\{Y\}}^2} \quad (2.18)$$

В лабораторной работе  $f1=1, f2=10$ , а, следовательно,  $Ft=4,96$ .

Если расчетное значение критерия, меньше табличного значения  $Fp < Ft$ , то делается вывод, что модель адекватная.

Второй способ: средняя ошибка аппроксимации. Необходимо рассчитать среднюю ошибку аппроксимации  $P$  и сравнить ее с допустимой величиной погрешности  $Pz$ , которую назначает исследователь из соображения приемлемой точности вычислений.

Средняя ошибка аппроксимации вычисляется по формуле

$$P = \sum_{j=1}^N \left| \frac{Y_j - Y_j}{Y_j} \right| \cdot \frac{100}{N} \quad (2.19)$$

При выполнении условия  $P \leq Pz$  математическая модель считается адекватной.


## Последовательность выполнения расчетов в системе MathCAD

1. Ввод векторов  $S$ ,  $t$  и матрицы экспериментальных данных  $t$ .
2. Вычисление вектора средних измерений для каждого опыта  $Y$ .
3. Приведение моделей (2.1)-(2.5) к унифицированному виду (2.6) путем соответствующих замен (2.7)–(2.11) соответственно.
4. Для реализации метода средних отклонений решить систему уравнений (2.13) двумя способами: методом Крамера, матричным способом. В результате решения системы будут определены неизвестные  $b_0$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  для заданной математической модели (2.1) – (2.5).
5. Вычислить значения шероховатости  $YSO_j$  по математической модели, полученной по методу средних отклонений, согласно заданной модели (2.1)-(2.5).
6. Вычислить сумму квадратов отклонений значений шероховатостей по всем опытам по математической модели, полученной по методу средних отклонений  $SYM 1 = \sum_{j=1}^N (Y_j - YSO_j)^2$
7. Для реализации метода наименьших квадратов решить систему уравнений (2.15) матричным и блочным способами. В результате решения системы будут определены неизвестные  $b_0$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  для заданной математической модели (2.1)-(2.5).
8. Вычислить значения шероховатости  $YNK_j$  по математической модели, полученной по методу наименьших квадратов.
9. Вычислить сумму квадратов отклонений значений шероховатостей по всем опытам по математической модели, полученной по методу наименьших квадратов  $SYM 2 = \sum_{j=1}^N (Y_j - YNK_j)^2$
10. Отобразить результаты исследований в виде графиков трех функций на одном поле в зависимости от номера опыта:
  - исходная зависимость средних значений шероховатости;
  - эмпирическая зависимость заданной модели, полученной по методу средних отклонений;
  - эмпирическая зависимость заданной модели, полученной по методу наименьших квадратов.

11. Сравнить суммы квадратов отклонений, полученные по двум методам, и выбрать из них минимальную (дисперсию адекватности (2.16)).
12. Проверить модель с минимальной суммой квадратов отклонений на адекватность, для чего вычислить дисперсию воспроизводимости по формуле (2.17).
13. Вычислить расчетное значение критерия Фишера по формуле (2.18).
14. Сравнить расчетное значение критерия Фишера с табличным. Если оно меньше табличного, то делается вывод о том, что модель адекватна.
15. Определить среднюю ошибку аппроксимации по формуле (2.19) и сделать вывод об адекватности модели.
16. Линейная интерполяция (функция *linterp*)
17. Построение аппроксимирующих функций (функция *linfit*)

На рис. 2.1 приведен пример реализации решения задачи в MathCAD.

### Последовательность выполнения расчетов в системе Excel

1. Занести в ячейки D2:D6 вектора средних измерений для каждого опыта  $Y$ , отсортированный в порядке возрастания.
2. Нажать на пиктограмму  Мастер диаграмм и выбрать: тип диаграммы График и вид «График с маркерами, помечающими точки данных».
3. На шаге 2 на вкладке «Диапазон данных» указать диапазон D2:D6 и перейти на вкладку «Ряд». В поле «Имя» набрать *Опытные результаты*
4. На шаге 3: на вкладке «Заголовки» в поле «Название диаграммы» набрать *X<sub>Y</sub>- точечная диаграмма и линия тренда для опытных данных*; на вкладке «Легенда» выбрать Размещение «внизу»; на вкладке «Таблица данных» отметить галочкой Таблица данных.
5. На шаге 4 «Поместить диаграмму на листе» выбрать имеющимся.
6. Когда диаграмма готова щелкнуть мышкой по любому маркеру на графике. Все маркеры окрасятся в желтый цвет. Так как курсор мыши находится на желтом маркере, то можно нажать

правую клавишу мыши и выбрать пункт «Добавить линию тренда».

7. В диалоговом окне «Линия тренда» на вкладке «Тип» выбрать «Построение линия тренда» *Полиномиальная*, степень 3. На вкладке «Параметры» выбрать галочкой «Показывать уравнение на диаграмме» и «Поместить на диаграмму величину достоверности аппроксимации».
8. Пункты 1-7 повторить для результатов, полученных по модели (2.1)-(2.5) наилучшим способом (методом средних отклонений или наименьших квадратов), предварительно отсортировав их в порядке возрастания.

На рис. 2.2 приведен пример построения линии тренда в Excel.

Примечание Коэффициенты уравнения линий тренда должны совпадать с коэффициентами  $k$  и  $k1$ , полученных с помощью функции *linfit* в MathCAD.

### Содержание отчета

1. Название работы.
2. Постановка задачи.
3. Вывод системы линейный уравнений для заданной модели методом средних уравнений.
4. Вывод системы линейный уравнений для заданной модели методом наименьших квадратов.
5. Документ решения задачи в MathCAD.
6. Построение линий тренда в Excel.

### Вопросы для защиты

1. Понятие математической модели
2. Сущность математического моделирования
3. Процесс создания математических моделей.
4. Сущность метода средних отклонений.
5. Сущность метода наименьших квадратов.

Математическое моделирование процесса обработки поверхности

ВАРИАНТ 000  
ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

1. Значения независимых переменных

$$S := \begin{pmatrix} 13 \\ 69 \\ 41 \\ 2 \\ 80 \end{pmatrix} \quad \text{- подача инструмента в мм/об}; \quad M := \begin{pmatrix} 5 \\ 19 \\ 12 \\ 2 \\ 22 \end{pmatrix} \quad \text{- скорость м/мин}$$

$$t := \begin{pmatrix} 22.9 & 23.9 & 25.2 \\ 53.53 & 50.97 & 48.5 \\ 39.9 & 40.3 & 36.8 \\ 17.46 & 16.34 & 14.2 \\ 55.67 & 53.93 & 52.4 \end{pmatrix} \quad \text{- эмпирические данные шероховатости поверхности, полученные тремя независимыми экспертами.}$$

2. Математическая модель в виде степенной зависимости

$$Y = b_0 \cdot S^{b_1} \cdot M^{b_2}$$

3. Табличное значение критерия Фишера  $F_t := 4.96$

4. Допустимая величина погрешности  $P_t = 5\%$

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ

ORIGIN := 1

1. Вычисление вектора средних значений для каждого опыта  $Y$

$$i := 1..5 \quad Y_i := \frac{t_{i,1} + t_{i,2} + t_{i,3}}{3} \quad Y = \begin{pmatrix} 24 \\ 51 \\ 39 \\ 16 \\ 54 \end{pmatrix}$$

2. Приведение степенной модели к унифицированному виду

$$X1_i := \ln(S_i) \quad X2_i := \ln(M_i) \quad Z_i := \ln(Y_i)$$

$$X1 = \begin{pmatrix} 2.565 \\ 4.234 \\ 3.714 \\ 0.693 \\ 4.382 \end{pmatrix} \quad X2 = \begin{pmatrix} 1.609 \\ 2.944 \\ 2.485 \\ 0.693 \\ 3.091 \end{pmatrix} \quad Z = \begin{pmatrix} 3.178 \\ 3.932 \\ 3.664 \\ 2.773 \\ 3.989 \end{pmatrix}$$

3. Определение параметров математической модели в виде степенной зависимости методом средних отклонений.

3.1. Решение системы уравнений методом Крамера.

$$A := \begin{pmatrix} 2 & X1_1 + X1_2 & X2_1 + X2_2 \\ 2 & X1_4 + X1_3 & X2_4 + X2_3 \\ 1 & X1_5 & X2_5 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} Z_1 + Z_2 \\ Z_4 + Z_3 \\ Z_5 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 6.799 & 4.554 \\ 2 & 4.407 & 3.178 \\ 1 & 4.382 & 3.091 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 7.11 \\ 6.436 \\ 3.989 \end{pmatrix}$$

$$A1 := A \quad A2 := A \quad A3 := A \quad A1^{(1)} := B \quad A2^{(2)} := B \quad A3^{(3)} := B$$

$$A1 = \begin{pmatrix} 7.11 & 6.799 & 4.554 \\ 6.436 & 4.407 & 3.178 \\ 3.989 & 4.382 & 3.091 \end{pmatrix} \quad A2 = \begin{pmatrix} 2 & 7.11 & 4.554 \\ 2 & 6.436 & 3.178 \\ 1 & 3.989 & 3.091 \end{pmatrix} \quad A3 = \begin{pmatrix} 2 & 6.799 & 7.11 \\ 2 & 4.407 & 6.436 \\ 1 & 4.382 & 3.989 \end{pmatrix}$$

$$|A| = -1.192 \quad |A1| = -2.853 \quad |A2| = 0.097 \quad |A3| = -0.753$$

$$b00 := \frac{|A1|}{|A|} \quad b1 := \frac{|A2|}{|A|} \quad b2 := \frac{|A3|}{|A|}$$

$$b00 = 2.394 \quad b1 = -0.082 \quad b2 = 0.632 \quad b0 := e^{b00} \quad b0 = 10.96$$

Рисунок 2.1 Пример выполнения в MathCAD



3.2. Решение системы уравнений матричным методом.

$$\begin{pmatrix} b_{00} \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} := A^{-1} \cdot B$$

$$b_{00} = 2.394 \quad b_1 = -0.082 \quad b_2 = 0.632 \quad b_0 := e^{b_{00}} \quad b_0 = 10.96$$

Математическая модель, параметры которой определены методом средних отклонений имеет вид:

$$10.96 \cdot S^{-0.082} \cdot M^{0.632}$$

3.3. Вычисление значений шероховатостей по математической модели, полученной по методу средних отклонений.

$$YSO_i := b_0 \cdot (S_i)^{b_1} \cdot (M_i)^{b_2} \quad YSO = \begin{pmatrix} 24.568 \\ 49.822 \\ 38.887 \\ 16.046 \\ 54 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 24 \\ 51 \\ 39 \\ 16 \\ 54 \end{pmatrix}$$

3.4. Вычисление суммы квадратов отклонений значений шероховатостей по всем опытам по математической модели, полученной по методу средних отклонений

$$SYM1 := \sum_i (Y_i - YSO_i)^2 \quad SYM1 = 1.725$$

4. Определение параметров математической модели в виде степенной зависимости методом наименьших квадратов.

4.1. Решение системы линейных уравнений матричным методом

$$A := \begin{bmatrix} 5 & \sum_i X1_i & \sum_i X2_i \\ \sum_i X1_i & \sum_i (X1_i)^2 & \sum_i (X1_i \cdot X2_i) \\ \sum_i X2_i & \sum_i (X1_i \cdot X2_i) & \sum_i (X2_i)^2 \end{bmatrix} \quad B := \begin{bmatrix} \sum_i Z_i \\ \sum_i (Z_i \cdot X1_i) \\ \sum_i (Z_i \cdot X2_i) \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 15.588 & 10.823 \\ 15.588 & 57.98 & 39.849 \\ 10.823 & 39.849 & 27.47 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 17.535 \\ 57.806 \\ 40.047 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b_{00} \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} := A^{-1} \cdot B \quad b_{00} = 2.368 \quad b_1 = -0.128 \quad b_2 = 0.71 \quad b_0 := e^{b_{00}} \quad b_0 = 10.673$$

4.2. Решение системы линейных уравнений блочным методом

$$b_{00} := 0 \quad b_1 := 0 \quad b_2 := 0$$

Given

$$b_{00} \cdot 5 + b_1 \cdot \left( \sum_i X1_i \right) + b_2 \cdot \left( \sum_i X2_i \right) = \sum_i Z_i$$

$$b_{00} \cdot \left( \sum_i X1_i \right) + b_1 \cdot \left[ \sum_i (X1_i)^2 \right] + b_2 \cdot \left[ \sum_i (X1_i \cdot X2_i) \right] = \sum_i (Z_i \cdot X1_i)$$

$$b_{00} \cdot \left( \sum_i X2_i \right) + b_1 \cdot \left[ \sum_i (X1_i \cdot X2_i) \right] + b_2 \cdot \left[ \sum_i (X2_i)^2 \right] = \sum_i (Z_i \cdot X2_i)$$

$$\begin{pmatrix} b_{00} \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} := \text{Find}(b_{00}, b_1, b_2) \quad b_{00} = 2.368 \quad b_1 = -0.128 \quad b_2 = 0.71 \quad b_0 := e^{b_{00}} \quad b_0 = 10.673$$

Продолжение рисунка 2.1

Математическая модель, параметры которой определены методом наименьших квадратов имеет вид:

$$10.673 \cdot S^{-0.128} M^{0.71}$$

4.3. Вычисление значений шероховатостей по математической модели, полученной по методу наименьших квадратов.

$$Y_{NK_i} := b_0 \cdot (S_i)^{b_1} \cdot (M_i)^{b_2} \quad Y_{NK} = \begin{pmatrix} 24.126 \\ 50.315 \\ 38.799 \\ 15.983 \\ 54.792 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 24 \\ 51 \\ 39 \\ 16 \\ 54 \end{pmatrix}$$

4.4. Вычисление суммы квадратов отклонений значений шероховатостей по всем опытам по математической модели, полученной по методу наименьших квадратов.

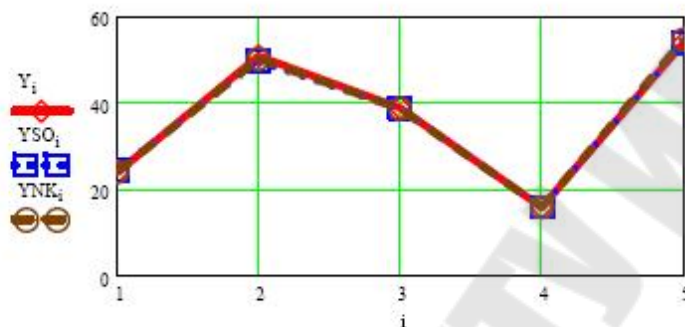
$$SYM2 := \sum_i (Y_i - Y_{NK_i})^2 \quad SYM2 = 1.152$$

5. Отображение исследований в виде графиков трех функций:

- исходная зависимость средних значений шероховатости  $\bar{Y}_i$ ;

- эмпирическая математическая модель степенной зависимости, полученной методом средних отклонений  $Y_{SO_i}$ ;

- эмпирическая математическая модель степенной зависимости, полученной методом наименьших квадратов  $Y_{NK_i}$ ;



6. Сравнение суммы квадратов, полученных методом средних отклонений и методом наименьших квадратов.

Сравнивая суммы квадратов отклонений, полученных методом средних отклонений и методом наименьших квадратов, делаем вывод, что минимальную сумму квадратов отклонений (SYM2) имеет математическая модель, полученная методом наименьших квадратов

$$10.673 \cdot S^{-0.128} M^{0.71}$$

7. Вычисление дисперсии адекватности

$n := 5$  - количество опытов

$k := 3$  - число параметров в модели

$kk := 3$  - количество параллельных наблюдений

$$Sad := \frac{if(SYM1 < SYM2, SYM1, SYM2)}{(n - k - 1)}$$

$Sad = 1.152$  - дисперсия адекватности  $f1 := n - k - 1$   $f2 := n \cdot (kk - 1)$

$f1 = 1$   $f2 = 10$  - числа степеней свободы

8. Вычисление дисперсии воспроизводимости

$$SS_i := \sum_{j=1}^3 (Y_i - t_{i,j})^2$$

$$S_y := \frac{\sum_i SS_i}{f2} \quad S_y = 3.349 \text{ - дисперсия воспроизводимости}$$

8. Вычисление расчетного значения критерия Фишера и сравнение его с табличным  $F_f$

Продолжение рисунка 2.1

$$Fr := \frac{Sad}{Sy} \quad Fr = 0.344 \quad \text{- расчетное значение критерия Фишера}$$

Так как  $Fr < Ff$  ( $0.344 < 4.96$ ), делаем вывод, что математическая модель степенной зависимости, полученная методом наименьших квадратов  $10.673 \cdot S^{-0.128} M^{0.71}$  адекватна.

**9. Определение средней ошибки аппроксимации**

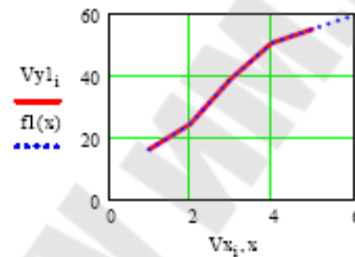
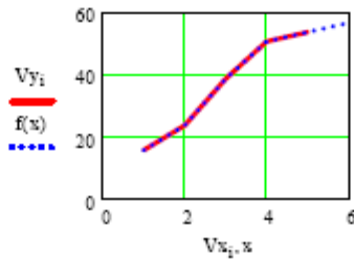
$$P := \left( \sum_i \frac{|Y_i - \text{if}(\text{SYM1} < \text{SYM2}, \text{YSO}_i, \text{YNK}_i)|}{Y_i} \right) \cdot \frac{100}{5} \quad P = 0.791$$

Следовательно, можно предложить, что значения шероховатости, рассчитанные по математической модели, в среднем на 0.791% будут отличаться от оценок шероховатости, полученных в опытах.

**10. Линейная интерполяция результатов**

$$Vx_i := 1 \quad Vy_i := \text{son}(1)_i \quad Vy1_i := \text{son}(1)(\text{SYM1} < \text{SYM2}, \text{YSO}, \text{YNK})_i$$

$$x := 1, 1.2..6 \quad f(x) := \text{linterp}(Vx, Vy, x) \quad f1(x) := \text{linterp}(Vx, Vy1, x)$$

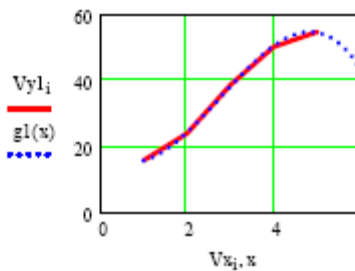
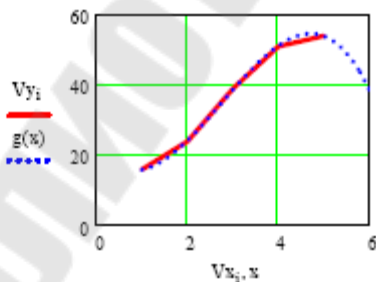


**11. Построение аппроксимирующей функции**

$$F(x) := \begin{pmatrix} x^3 \\ x^2 \\ x \\ 1 \end{pmatrix} \quad k := \text{linfit}(Vx, Vy, F) \quad k1 := \text{linfit}(Vx, Vy1, F)$$

$$g(x) := F(x) \cdot k \quad g1(x) := F(x) \cdot k1$$

$$k = \begin{pmatrix} -1.333 \\ 11.071 \\ -15.595 \\ 21.8 \end{pmatrix} \quad k1 = \begin{pmatrix} -1.131 \\ 9.428 \\ -11.811 \\ 19.413 \end{pmatrix} \quad Vy = \begin{pmatrix} 16 \\ 24 \\ 39 \\ 51 \\ 54 \end{pmatrix} \quad Vy1 = \begin{pmatrix} 15.983 \\ 24.126 \\ 38.799 \\ 50.315 \\ 54.792 \end{pmatrix}$$



Продолжение рисунка 2.1

**Построение линий тренда для результатов эксперимента**

Исходные данные -опыты

16
24
39
51
54



Исходные данные -по модели

15,983
24,126
38,799
50,315
54,792

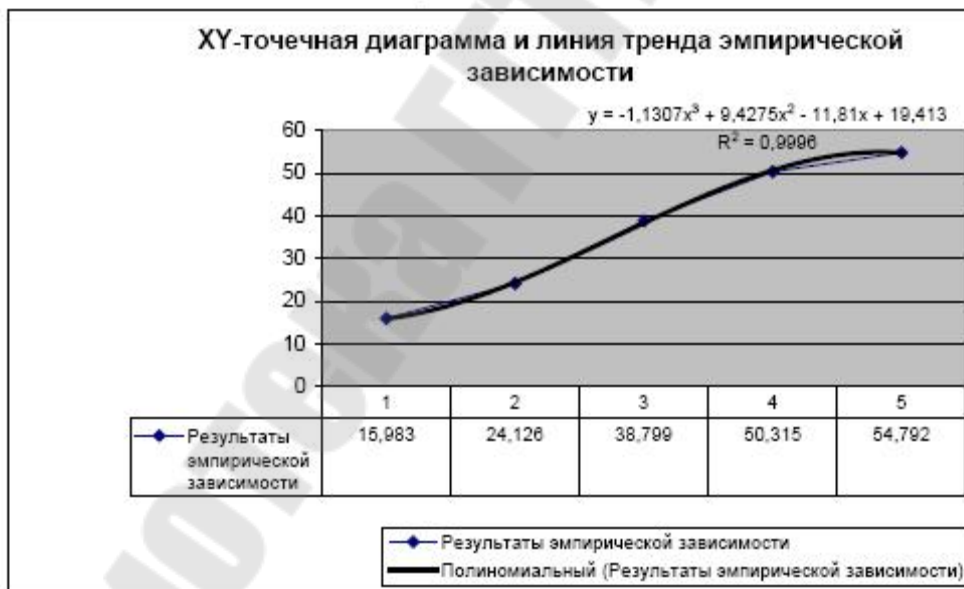


Рисунок 2. 2 Пример построения линий тренда в Excel

## Варианты индивидуальных заданий

### Вариант №1

N	S	m	t'	t''	t'''
1	13,4	4,1	11,790	11,23	10,68
2	68,6	18,9	61,468	58,54	55,63
3	41	11,5	34,942	33,27	31,51
4	2	1	2,2	1,96	1,84
5	80	22	58,119	59,13	60,15

### Вариант №2

N	S	m	t'	t''	t'''
1	13,4	4,1	12,693	12,09	11,49
2	68,6	18,9	52,296	55,04	57,79
3	41	11,5	34,135	32,51	30,89
4	2	1	2,0	2,1	1,9
5	80	22	55,605	52,25	54,50

### Вариант №3

N	S	m	t'	t''	t'''
1	13,4	4,1	12,816	13,48	14,15
2	68,6	18,9	60,340	63,51	66,68
3	41	11,5	38,539	36,70	34,87
4	2	1	2,2	1,95	1,85
5	80	22	60,6	64,7	68,86

### Вариант №4

N	S	m	t'	t''	t'''
1	13,4	0	6,47	6,79	7,14
2	68,6	1	23,0	24,0	25,3
3	41	0,5	13,820	14,55	15,28
4	2	0	2,4	1,76	1,84
5	80	1	23,8	26,9	30,0

### Вариант №5

N	S	m	t'	t''	t'''
1	13,4	0	7,14	6,79	6,47
2	68,6	1	25,25	24,9	23,85
3	41	0,5	14,39	15,15	15,91
4	2	0	2,3	1,86	1,84
5	80	1	27,8	26,9	28,4

### Вариант №6

N	S	m	t'	t''	t'''
1	13,4	0	6,5	6,76	7,14
2	68,6	1	22,4	21,47	20,33
3	41	0,5	13,02	13,7	14,38
4	2	0	2,42	1,74	1,84
5	80	1	23,8	22,0	24,9

### Вариант №7

N	S	m	t'	t''	t'''
1	52	3,2	6,49	6,82	6,19
2	158	13,8	23,10	24,29	25,51
3	105	8,5	19,21	18,3	17,39
4	30	1	2,4	3,10	2,90
5	180	16	28,40	28,29	27,91

### Вариант №8

N	S	m	t'	t''	t'''
1	69	19	34,3	35,9	37,8
2	16	5	13,5	13,8	14,7
3	42,5	12	23,75	25,05	26,20
4	80	22	3,31	3,1	2,59
5	5	2	39,2	39,1	38,7

### Вариант №9

N	S	m	t'	t''	t'''
1	69	19	44,1	41,9	40,0
2	16	5	19,95	18,95	18,1
3	42,5	12	31,5	29,9	28,6
4	80	22	45,31	45,1	44,59
5	5	2	7,2	7,1	6,7

### Вариант №10

N	S	m	t'	t''	t'''
1	69	19	53,55	50,95	48,5
2	16	5	26,7	27,9	29,4
3	42,5	12	37,05	39,1	40,86
4	80	22	54,33	54,1	53,57
5	5	2	14,2	14,1	13,7

### Вариант №11

N	S	m	t'	t''	t'''
1	69	19	25,2	23,8	23,0
2	16	5	11,5	11,9	12,6
3	42,5	12	18,8	18,1	17,1
4	80	22	25,1	24,9	25,0
5	5	2	3,4	2,9	2,7

### Вариант №12

N	S	m	t'	t''	t'''
1	69	19	32,5	33,8	35,7
2	16	5	21,0	19,9	19,1
3	42,5	12	25,65	27,15	28,2
4	80	22	35,65	34,94	34,4
5	5	2	9,9	10,3	9,8

Вариант №13

N	S	m	t'	t''	t'''
1	69	19	47,24	44,95	42,8
2	16	5	33,6	31,9	30,5
3	42,5	12	40,84	39,06	37,1
4	80	22	45,25	45,15	45,6
5	5	2	20,8	21,7	20,5

Вариант №14

N	S	m	t'	t''	t'''
1	22	7,2	20,03	20,97	22,0
2	78	22,8	43,81	45,89	48,3
3	50	15	36,3	38,4	39,3
4	90	25	47,27	49,03	50,7
5	10	4	12,05	14,35	15,6

Вариант №15

N	S	m	t'	t''	t'''
1	22	7,2	31,5	29,9	28,6
2	78	22,8	57,7	54,9	52,4
3	50	15	47,6	47,8	46,1
4	10	4	23,8	23,9	31,3
5	90	25	55,2	57,9	60,9

Вариант №16

N	S	m	t'	t''	t'''
1	22	7,2	13,6	13,0	12,4
2	78	22,8	23,7	25,1	26,2
3	50	15	23,2	24,7	21,1
4	10	4	6,9	7,9	6,2
5	90	25	24,8	25,9	27,3

Вариант №17

N	S	m	t'	t''	t'''
1	22	7,2	21,9	21,1	20,0
2	78	22,8	36,7	34,9	33,4
3	50	15	33,8	33,3	31,9
4	10	4	16,8	16,5	14,7
5	90	25	36,2	37,7	34,1

Вариант №18

N	S	m	t'	t''	t'''
1	22	7,2	34,5	33,1	31,4
2	78	22,8	43,8	45,9	48,3
3	50	15	43,7	42,9	45,4
4	10	4	27,3	35,9	23,8
5	90	25	46,8	47,9	46,3

Вариант №19

N	S	m	t'	t''	t'''
1	17	5,2	19,8	19,1	18,1
2	73	20,8	46,2	43,9	41,9
3	45	13	31,4	33,5	36,6
4	5	2	9,8	9,2	8,0
5	85	24	44,9	46,9	49,2

Вариант №20

N	S	m	t'	t''	t'''
1	17	5,2	29,4	27,9	26,7
2	73	20,8	55,5	53,1	50,4
3	45	13	40,0	45,0	42,5
4	5	2	17,8	16,2	14,0
5	85	24	54,7	56,1	57,2

Вариант №21

N	S	m	t'	t''	t'''
1	17	5,2	13,6	12,9	12,5
2	73	20,8	26,1	25,1	23,8
3	45	13	18,3	20,1	21,6
4	5	2	2,8	2,9	2,3
5	85	24	26,4	25,1	23,5

Вариант №22

N	S	m	t'	t''	t'''
1	17	5,2	20,08	20,97	22,0
2	73	20,8	33,35	34,95	36,7
3	45	13	28,8	30,1	31,1
4	5	2	11,25	9,95	8,8
5	85	24	36,43	34,97	33,6

Вариант №23

N	S	m	t'	t''	t'''
1	17	5,2	33,6	31,9	30,5
2	73	20,8	48,2	46,1	43,7
3	45	13	38,3	40,1	41,6
4	5	2	22,2	21,4	19,4
5	85	24	43,9	46,3	47,8

Вариант №24

N	S	m	t'	t''	t'''
1	13	5	15,74	14,96	14,3
2	69	19	44,1	41,9	40,0
3	41	12	30,4	28,4	31,2
4	2	2	9,4	8,5	9,1
5	80	22	43,9	45,1	46,0

Вариант №25

N	S	m	t'	t''	t'''
1	13	5	22,9	28,9	25,2
2	69	19	53,53	50,97	48,5
3	41	12	39,9	40,3	36,8
4	2	2	17,46	16,34	14,2
5	80	22	55,67	53,93	52,4

Вариант №26

N	S	m	t'	t''	t'''
1	13	5	7,34	6,96	6,7
2	69	19	35,2	23,9	22,9
3	41	12	18,1	19,2	16,7
4	2	2	3,3	2,9	2,8
5	80	22	23,9	25,1	26,0

Вариант №27

N	S	m	t'	t''	t'''
1	13	5	16,8	15,9	15,3
2	69	19	32,4	33,9	35,7
3	41	12	27,7	27,1	25,2
4	2	2	9,2	10,92	9,88
5	80	22	33,6	35,55	35,85

Вариант №28

N	S	m	t'	t''	t'''
1	13	5	28,2	27,1	25,7
2	69	19	47,1	45,1	42,8
3	41	12	39,3	40,1	37,6
4	2	2	21,7	21,1	20,2
5	80	22	46,0	47,1	44,9

Вариант №29

N	S	m	t'	t''	t'''
1	13	5	47,24	44,96	42,8
2	69	19	33,6	31,9	30,5
3	41	12	40,84	39,06	37,1
4	2	2	46,25	46,15	45,6
5	80	22	20,8	21,7	20,5

Вариант №30

N	S	m	t'	t''	t'''
1	22	7,2	20,03	20,97	22,0
2	78	22,8	43,81	45,89	48,3
3	50	15	36,3	38,4	39,3
4	90	26	47,27	49,03	50,7
5	10	4	12,05	14,35	15,6

Вариант №31

N	S	m	t'	t''	t'''
1	22	7,2	31,5	29,9	28,6
2	78	22,8	57,7	54,9	52,4
3	50	15	47,6	47,3	46,1
4	10	4	23,8	23,9	21,3
5	90	26	55,2	57,9	60,9

Вариант №32

N	S	m	t'	t''	t'''
1	22	7,2	13,6	13,0	12,4
2	78	22,8	23,7	25,1	26,2
3	50	15	23,2	24,7	21,1
4	10	4	6,9	7,9	6,2
5	90	26	24,8	25,9	27,3

Вариант №33

N	S	m	t'	t''	t'''
1	22	7,2	21,9	21,1	20,0
2	78	22,8	36,7	34,9	33,4
3	50	15	33,8	33,3	31,9
4	10	4	16,8	16,5	14,7
5	90	26	36,2	37,7	34,1

Вариант №34

N	S	m	t'	t''	t'''
1	22	7,2	34,5	33,1	31,4
2	78	22,8	43,8	45,9	48,3
3	50	15	43,7	42,9	45,4
4	10	4	27,3	26,9	23,8
5	90	26	46,8	47,9	46,3

Вариант №35

N	S	m	t'	t''	t'''
1	17	5,2	19,8	19,1	18,1
2	73	20,8	46,2	43,9	41,9
3	45	13	31,4	33,5	35,6
4	5	2	9,8	9,2	8,0
5	85	24	44,9	46,9	49,2

Вариант №36

N	S	m	t'	t''	t'''
1	17	5,2	29,4	27,9	25,7
2	73	20,8	55,5	53,1	50,4
3	45	13	40,0	45,0	42,5
4	5	2	17,8	16,2	14,0
5	85	24	54,7	56,1	57,2

Вариант №37

N	S	m	t'	t''	t'''
1	17	5,2	13,6	12,9	12,5
2	73	20,8	26,1	25,1	23,8
3	45	13	18,3	20,1	21,6
4	5	2	3,8	2,9	2,3
5	85	24	26,4	25,1	23,5

Вариант №38

N	S	m	t'	t''	t'''
1	17	5,2	20,03	20,97	22,0
2	73	20,8	33,35	34,95	36,7
3	45	13	28,8	30,1	31,1
4	5	2	11,25	9,95	8,8
5	85	24	36,43	34,97	33,6

Вариант №39

N	S	m	t'	t''	t'''
1	17	5,2	33,5	31,9	30,5
2	73	20,8	48,2	46,1	43,7
3	45	13	38,3	40,1	41,6
4	5	2	22,2	21,4	19,4
5	85	24	43,9	46,3	47,8

Вариант №40

N	S	m	t'	t''	t'''
1	13	5	15,74	14,96	14,3
2	69	19	44,1	41,9	40,0
3	41	12	30,4	28,4	31,2
4	2	2	9,4	8,5	9,1
5	80	22	43,9	45,1	46,0

Вариант №41

N	S	m	t'	t''	t'''
1	13	5	22,9	23,9	25,2
2	69	19	53,53	50,97	48,5
3	41	12	39,9	40,3	36,8
4	2	2	17,46	16,34	14,2
5	80	22	55,67	53,93	52,4

Вариант №42

N	S	m	t'	t''	t'''
1	13	5	7,34	6,96	6,7
2	69	19	25,2	23,9	22,9
3	41	12	18,1	19,2	16,7
4	2	2	3,3	2,9	2,8
5	80	22	23,9	25,1	26,0

Вариант №43

N	S	m	t'	t''	t'''
1	17	5,2	10,76	11,3	11,87
2	73	20,8	41,56	43,7	45,99
3	45	13	27,58	28,9	26,26
4	5	2	3,98	4,13	4,28
5	85	24	48,7	50,6	52,5

Вариант №44

N	S	m	t'	t''	t'''
1	17	5,2	8,36	8,78	9,23
2	73	20,8	28,47	29,95	31,46
3	45	13	19,56	18,58	20,54
4	5	2	3,11	3,56	4,01
5	85	24	32,92	34,33	35,74

Вариант №45

N	S	m	t'	t''	t'''
1	17	5,2	7,53	7,90	8,30
2	73	20,8	22,71	23,9	25,09
3	45	13	17,11	16,3	15,49
4	5	2	2,97	3,38	3,79
5	85	24	26,1	27,0	27,9

Вариант №46

N	S	m	t'	t''	t'''
1	13	5	8,90	9,38	9,83
2	69	19	38,95	41,01	43,04
3	41	12	25,34	26,61	24,07
4	2	2	1,99	2,24	2,49
5	80	22	45,8	47,3	48,8

Вариант №47

N	S	m	t'	t''	t'''
1	13	5	16,8	15,9	15,3
2	69	19	32,4	33,9	36,7
3	41	12	27,7	27,1	26,2
4	2	2	9,2	10,92	9,88
5	80	22	33,5	35,55	35,85

Вариант №48

N	S	m	t'	t''	t'''
1	13	5	28,2	27,1	25,7
2	69	19	47,1	45,1	42,8
3	41	12	39,3	40,1	37,6
4	2	2	21,7	21,1	20,2
5	80	22	46,0	47,1	44,9



### 3 ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2 «ОПТИМИЗАЦИЯ ОСНАЩЕНИЯ ОБРАБАТЫВАЮЩЕГО ЦЕНТРА»

**Цель работы.** Овладение навыками разработки математической модели и решение задачи оптимизации оснащения магазина обрабатывающего центра с помощью теории графов, «Поиска решения» в MS Excel, с помощью метода перебора с возвратом в MathCAD.

#### Постановка задачи

Имеется  $n$  различных видов инструментов для оснащения магазина обрабатывающего центра, причем число инструментов каждого вида можно считать неограниченным. Известно, что каждый инструмент  $i$ -го вида занимает  $a_i$  гнезд обрабатывающего центра и время его переточки равно  $c_i$ . После установки по одному инструменту каждого вида осталось  $b$  свободных гнезд обрабатывающего центра. Необходимо оснастить оставшуюся свободной части магазина таким образом, чтобы суммарное время работы инструментов было максимальным (минимальным). Для всех вариантов число свободных гнезд магазина обрабатывающего центра равно 7.

В лабораторной работе требуется решить следующие четыре задачи.

1. Суммарное время работы инструментов должно быть максимальным, причем в одном гнезде может быть несколько экземпляров одного инструмента.
2. Суммарное время работы инструментов должно быть минимальным, причем в одном гнезде может быть несколько экземпляров одного инструмента.
3. Суммарное время работы инструментов должно быть максимальным, причем в одном гнезде может быть только один инструмент.
4. Суммарное время работы инструментов должно быть минимальным, причем в одном гнезде может быть только один инструмент.

## Методические рекомендации

Математическим описанием этой задачи является задача «целочисленный рюкзак с ограничением – равенством» Для положительных целых чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n, b$  и неотрицательных вещественных чисел  $c_1, c_2, \dots, c_n$  найти неотрицательные целые значения переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , максимизирующие (минимизирующие) целевую функцию

$$z = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n \quad (3.1)$$

при ограничении

$$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = b \quad (3.2)$$

Покажем сводимость сформулированной рюкзачной задачи к задаче ДЛИННЕЙШИЙ ПУТЬ (КРАТЧАЙШИЙ ПУТЬ).

Можно считать, что коэффициенты уравнения (3.2) различны. Если же найдутся такие  $u$  и  $v$ , что  $a_u = a_v, c_u \leq c_v$ , то переменную  $x_u$  ( $x_v$ ) можно приравнять нулю, поскольку предметы типа  $v$  ( $u$ ) имеют тот же объем и не меньшее (не большее) время переточки, чем предметы типа  $u$  ( $v$ ). Находя все пары  $u, v$  с указанным свойством и устраняя переменные  $x_u$  ( $x_v$ ), можно добиться того, что коэффициенты при оставшихся переменных будут различны. Полученную таким образом задачу будем называть приведенной.

Построим оргграф с вершинами  $0, 1, 2, \dots, b$ . Дугу  $i \rightarrow k$  проведем всякий раз, когда среди индексов коэффициентов  $1, 2, \dots, n$ , найдется такой индекс  $j$ , что  $a_j = k - i$ . Поскольку коэффициенты  $a_1, \dots, a_n$  различны, для каждой дуги существует единственный такой индекс. Это позволяет нагрузить дуги  $i \rightarrow k$  числами  $c_j$ .

Для решения поставленной задачи инструментов  $j$ -го вида необходимо брать столько, сколько содержится в длиннейшем (кратчайшем) пути из вершины  $0$  в вершину  $b$  дуг  $(i, k)$  со свойством  $a_j = k - i$ .

## Нахождение кратчайшего пути в графе с ребрами произвольной длины

Общее правило для нахождения кратчайшего пути в графе состоит в том, чтобы каждой вершине  $x_i$  приписать индекс  $\lambda_i$ , равный длине кратчайшего пути из данной вершины в конечную.

1. Каждая вершина  $x_i$  помечается индексом  $\lambda_i$ . Первоначально конечной вершине  $x_0$  приписывается индекс  $\lambda_0 = 0$ . Для остальных вершин предварительно полагаем  $\lambda_i = \infty$ .
2. Ищем такую дугу  $(x_i, x_j)$ , для которой  $\lambda_j - \lambda_i > l(x_i, x_j)$ , и заменяем индекс  $\lambda_j$  индексом  $\lambda'_j = \lambda_i + l(x_i, x_j) < \lambda_j$ .

Продолжаем этот процесс замены до тех пор, пока остается хотя бы одна дуга, для которой можно уменьшить  $\lambda_j$ .

Пусть  $x_n = a$  - начальная вершина с индексом  $\lambda_n$ . Ищем вершину  $x_{p_1}$ , такую, что  $\lambda_{p_n} - \lambda_{p_1} = l(x_{p_n}, x_{p_1})$ , и т.д. до тех пор, пока не дойдем до конечной вершины  $x_{p_{k+1}} = x_0 = b$ . Путь  $\mu(x_n, \dots, x_{k_1}, \dots, x_{k_s}, x_0)$ , длина которого равна  $\lambda_n$ , является кратчайшим.

## Нахождение длиннейшего пути в графе с ребрами произвольной длины

Алгоритм нахождения длиннейшего пути представляет собой процесс приписывания индексов для вершин графа и заключается в следующем.

1. Каждая вершина  $x_i$  помечается индексом  $\lambda_i$ . Первоначально начальной вершине  $x_0$  приписывается индекс  $\lambda_0 = 0$ . Для остальных вершин предварительно полагаем  $\lambda_i = -\infty$ .
2. Ищем такую дугу  $(x_i, x_j)$ , для которой  $\lambda_j - \lambda_i < l(x_i, x_j)$ , и заменяем индекс  $\lambda_j$  индексом  $\lambda'_j = \lambda_i + l(x_i, x_j) > \lambda_j$ .

Продолжаем этот процесс замены до тех пор, пока остается хотя бы одна дуга, для которой можно уменьшить  $\lambda_j$ .

Пусть  $x_n = b$  - конечная вершина с индексом  $\lambda_n$ . Ищем вершину  $x_{p_1}$ , такую, что  $\lambda_{p_1} - \lambda_{p_n} = l(x_{p_1}, x_{p_n})$ , и т.д. до тех пор, пока не дойдем до

начальной вершины  $x_{p_{k+1}} = x_0 = a$ . Путь  $\mu(x_0, \dots, x_{k_s}, \dots, x_{k_1}, x_n)$ , длина которого равна  $\lambda_n$ , является длиннейшим.

### Пример расчета в Excel

Рассмотрим задачу №1, математическая модель которой

$$\max : z(x) = 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 2x_6 + 2x_7 \quad (3.3)$$

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 4x_5 + 3x_6 = 7 \quad (3.4)$$

$$x_i \geq 0, \quad x_i - \text{целые} \quad (3.5)$$

Решение Составим Excel-таблицу (см. рис. 3.1).

	А	В	С	Д	Е	Ф	Г	Н	И
1	Инструменты	1	2	3	4	5	6		
2	Стойкость	3	3	4	5	2	2	max z(x)	=СУММПРОИЗВ(В2:G2;В4:G4)
3	Число занимаемых гнезд	1	2	4	2	4	3	ограничение	=СУММПРОИЗВ(В3:G3;В4:G4)
4	Оптимальное решение	0	0	0	0	0	0	емкость магазина	7
5									

Рисунок 3.1 Таблица данных для задачи №1

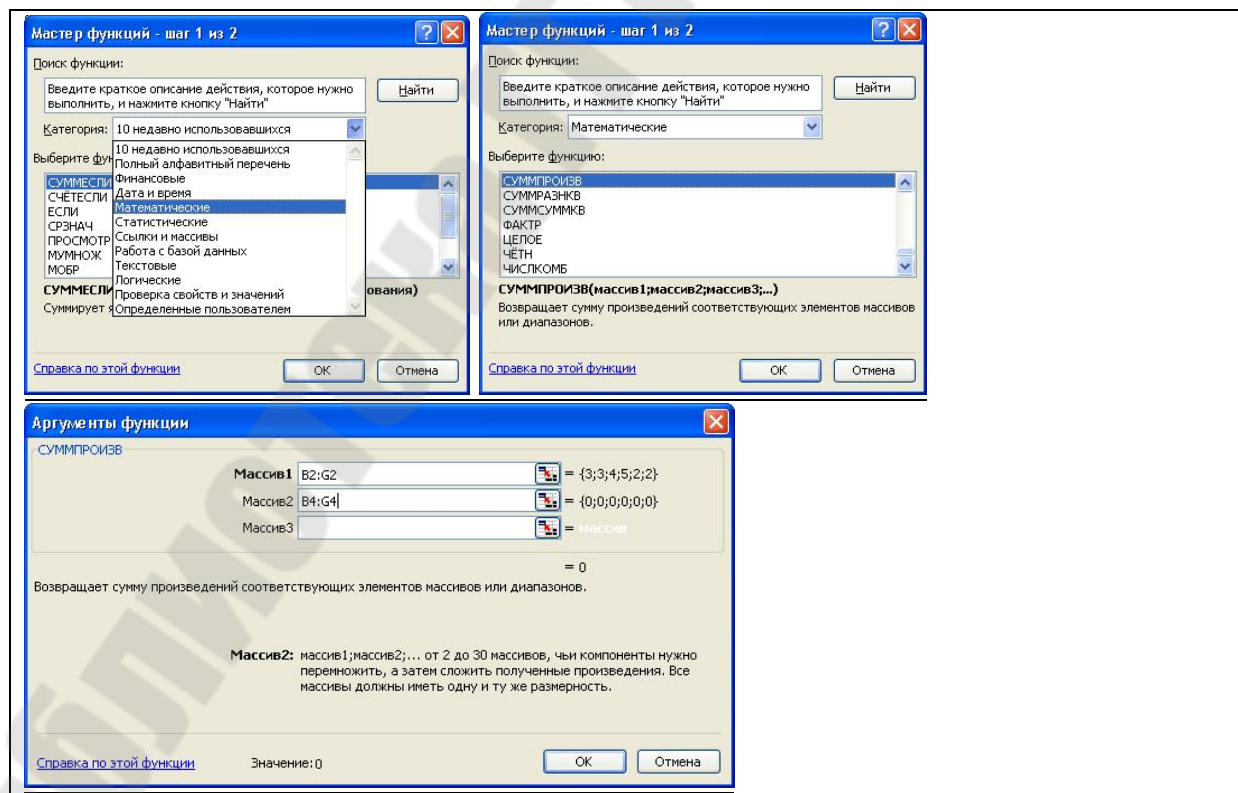


Рисунок 3.2 Вызов функции СУММПРОИЗВ

В ячейку I2 занесем формулу (3.3), вызвав Мастер функций (см. рис. 3.2).

Аналогично в ячейку I3 занесем формулу (3.4). Выделим ячейку с целевой функцией I2.

Решим задачу (3.3)-(3.5) с помощью Поиска Решения. Необходимо выбрать Сервис/Поиск решения. Если в меню *Сервис* нет Поиска решения, то его надо активизировать, выбрав Сервис/Надстройки (см рис. 3.3).

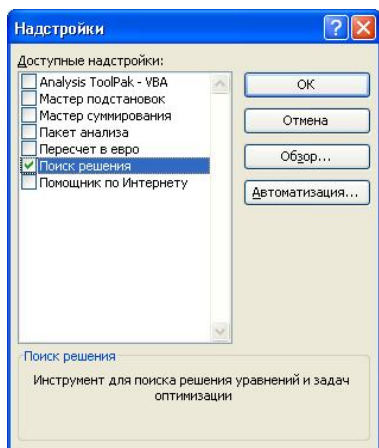


Рисунок 3.3 Активизация Надстройки «Поиск решения»

После выбора Поиска решения появится диалоговое окно «Поиск решения» (см. рис. 3.4).

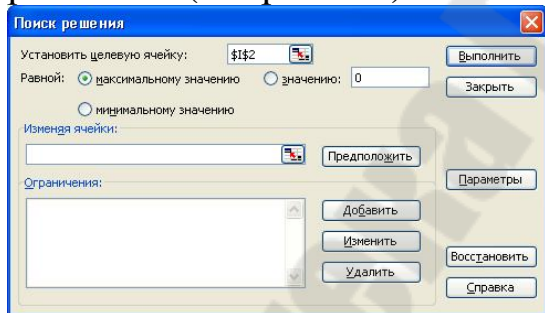


Рисунок 3.4 Диалоговое окно «Поиск решения»

В этом окне необходимо выполнить следующие действия:

- Установить целевую ячейку, в данном примере- I2;
- Равной, в данном случае – *максимальному значению*;
- Изменяя ячейки – выделить мышкой диапазон ячеек, который будет содержать оптимальное решение, в данном примере – *B4:G4*;
- Для добавления ограничений (3.4) и (3.5) необходимо нажать кнопку «Добавить».

- Появится диалоговое окно «Добавление ограничения» (см рис. 3.5).

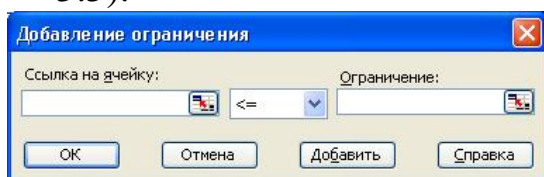


Рисунок 3.5 Диалоговое окно «Добавление ограничения»

- Для ограничения (3.4) в поле «Ссылка на ячейку» мышкой указать на ячейку – ограничения, в данном примере *I3*. Затем в раскрывающемся списке выбрать знак «=»; в поле «Ограничения» указать на ячейку, содержащую емкость магазина, в данном примере *I4* (рис.3.6).

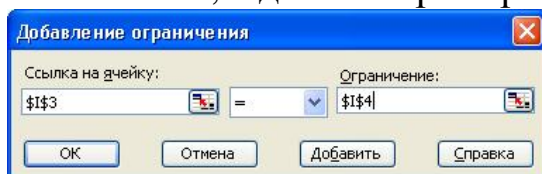


Рисунок 3.6 Добавления ограничения - равенства (3.4)

- Затем нажать кнопку «Добавить», чтобы добавить очередное ограничения, в данном случае (3.5). Мы добавим только ограничение на целочисленность, а не отрицательность отметим другим способом.
- В поле «Ссылка на ячейку» мышкой указать на диапазон ячеек, которые содержат оптимальное решение, в данном примере – *B4:G4*. Затем в раскрывающемся списке выбрать «цел» и нажать кнопку «ОК» (см. рис. 2.9)

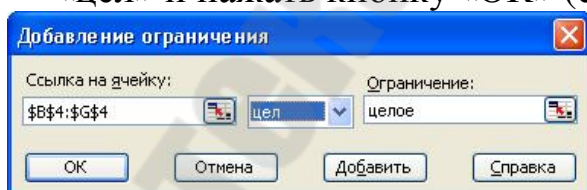


Рисунок 3.7 Добавления ограничения целочисленности (3.5)

В итоге диалоговое окно «Поиск решения» примет следующий вид (см рис. 3.8).

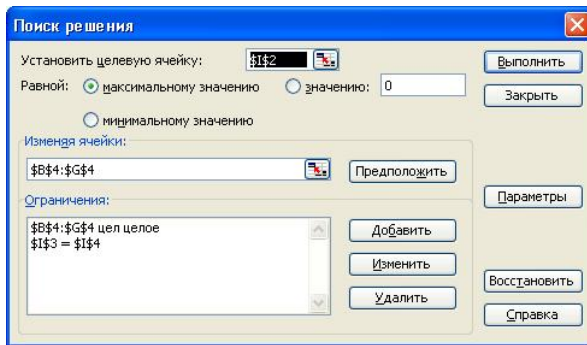


Рисунок 3.8 «Поиск решения» для задачи (3.3)-(3.5)

В постановке задачи еще не указано, что математическая модель - *линейная модель* и оптимальное решение имеет *неотрицательные значения*. Для этого необходимо нажать на кнопку «Параметры» и установить требуемые значения, а затем нажать кнопку «ОК» (см рис. 3.9).

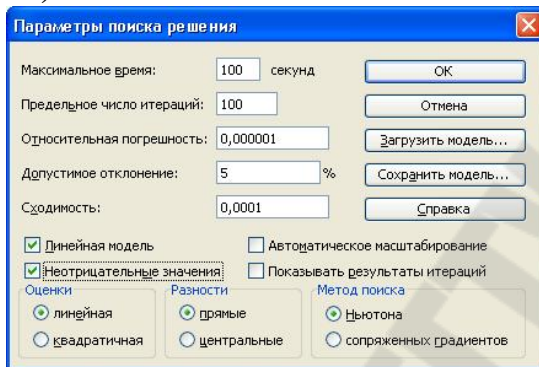


Рисунок 3.9 Диалоговое окно «Параметры поиска решения»

Вернувшись в диалоговое окно «Поиск решения» нажать кнопку «Выполнить»

Задача считается решенной, если в диалоговом окне «Результаты поиска решения», выдано сообщение – *Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены* (рис. 3.10).

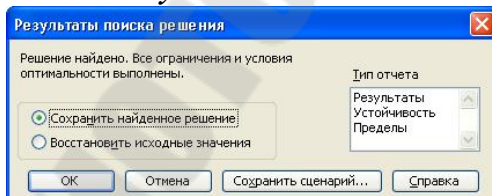


Рисунок 3.10 Диалоговое окно «Результаты поиска решения»

В лабораторной работе требуется решить следующие задачи:

1. Суммарное время работы инструментов должно быть максимальным, причем в одном гнезде может быть несколько

экземпляров одного инструмента. Решение данной задачи рассмотрено выше.

2. Суммарное время работы инструментов должно быть минимальным, причем в одном гнезде может быть несколько экземпляров одного инструмента. Математическая модель в рассматриваемом примере будет следующей:

$$\min : z(x) = 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 2x_5 + 2x_6 \quad (3.6)$$

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 4x_5 + 3x_6 = 7 \quad (3.7)$$

$$x_i \geq 0, \quad x_i - \text{целые} \quad (3.8)$$

3. Суммарное время работы инструментов должно быть максимальным, причем в одном гнезде может быть только один инструмент. Математическая модель в рассматриваемом примере будет следующей:

$$\max : z(x) = 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 2x_5 + 2x_6 \quad (3.9)$$

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 4x_5 + 3x_6 = 7 \quad (3.10)$$

$$x_i \text{ 0 или 1} \quad (3.11)$$

4 Суммарное время работы инструментов должно быть минимальным, причем в одном гнезде может быть только один инструмент. Математическая модель в рассматриваемом примере будет следующей:

$$\min : z(x) = 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 2x_5 + 2x_6 \quad (3.12)$$

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 4x_5 + 3x_6 = 7 \quad (3.13)$$

$$x_i - 0 \text{ или } 1 \quad (3.14)$$

В задачах №3-4 ограничения (3.11), (3.14) заносятся следующим образом (см рис. 3.11):

- В поле «Ссылка на ячейку» мышкой указать на диапазон ячеек, которые содержат оптимальное решение, в данном примере – *B4:G4*. Затем в раскрывающемся списке выбрать «двоич» и нажать кнопку «ОК»

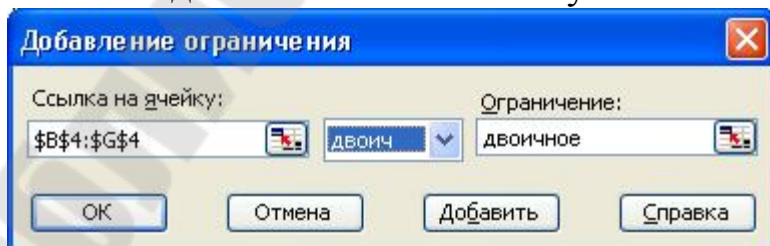


Рисунок 3.11 Добавления ограничения двоичности



### Решение задачи №3 методом перебора с возвратом

Задачу №3 можно решить в MathCAD (см. рис. 3.12) с помощью метода перебора с возвратом, запрограммировав две функции  $KS(PC, Q, ne, pos, pt, j)$ ,  $KSack(PC, Q)$ , где в первую строку матрицы  $PC$  необходимо занести число занимаемых гнезд обрабатывающего центра, а во вторую строку – время на переточку инструмента;  $Q$  – емкость магазина. Используя функцию  $KSack$ , можно подобрать оптимальное значение  $Q$  с максимальным значением целевой функции  $z(x)$ .

**Оптимизация оснащения обрабатывающего центра**  
**Задача №3 Возвратная рекурсия**

$PC := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$  число занимаемых гнезд  
 время работы инструмента

$Q := 7$  емкость магазина  
 $j := 0$

$ne := \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$   $ot := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$   $pos := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  рабочие массивы

$Ks(PC, Q, ne, pos, ot, j) :=$

```

m ← cols(PC)
k ← m + 1
for i ∈ 0..m - 1
  if posi = 0
    nem ← nem + PC0,i
    nek ← nek + PC1,i
    posi ← 1
    nej ← i
    if nem ≤ Q
      ot ← Ks(PC, Q, ne, pos, ot, j + 1) if j < m - 1
      ot ← ne if otk < nek
    nem ← nem - PC0,i
    nek ← nek - PC1,i
    posi ← 0
  ot
    
```

Рисунок 3.12 Оптимизация оснащения обрабатывающего центра в MathCAD

$$\text{Ksack}(\text{PC}, \text{Q}) := \begin{cases} m \leftarrow \text{cols}(\text{PC}) \\ k \leftarrow m + 1 \\ \text{pos}_{m-1} \leftarrow [\text{ot}_k \leftarrow (\text{ne}_k \leftarrow 0)] \\ \text{ne} \leftarrow \text{ne} - 1 \\ \text{ne}_m \leftarrow (\text{ne}_k \leftarrow 0) \\ \text{Ks}(\text{PC}, \text{Q}, \text{ne}, \text{pos}, \text{ot}, 0) \end{cases}$$

$$\text{Ksack}(\text{PC}, 7) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Вывод: максимальное суммарное время работы инструментов равно 12. Емкость магазина будет заполнена полностью, если взять первый, третий и четвертый инструменты

**Для этой модели возможны следующие варианты решений**

$$\text{Ksack}(\text{PC}, 8) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \\ -1 \\ -1 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ksack}(\text{PC}, 9) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \\ 9 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ksack}(\text{PC}, 12) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \\ -1 \\ 12 \\ 17 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ksack}(\text{PC}, 13) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ -1 \\ 13 \\ 17 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ksack}(\text{PC}, 16) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 16 \\ 19 \end{pmatrix}$$

Продолжение рисунка 3.12

## Решение задачи с помощью теории графов

Задачу (3.3)-(3.5) решим с помощью алгоритма ДЛИННЕЙШИЙ ПУТЬ. Так как  $a_2 = 2 = a_4$ ,  $c_2 = 3 < c_4 = 5$  и  $a_3 = 4 = a_5$ ,  $c_3 = 4 > c_5 = 2$ , тогда  $x_2 = 0$  и  $x_5 = 0$ . Таким образом приведенная задача примет следующий вид.

$$\max : z(x) = 3x_1 + 4x_3 + 5x_4 + 2x_6 \quad (3.15)$$

$$x_1 + 4x_3 + 2x_4 + 3x_6 = 7 \quad (3.16)$$

$$x_i \geq 0 \text{ и } x_i - \text{целые} \quad (3.17)$$

Построим оргграф с вершинами 0, 1, ..., 7. Соединим вершины дугами, предварительно записав следующие правила построения.

Для вершины 0:

$$0 \rightarrow 1, \quad 1 - 0 = 1 = a_1, \quad c_1 = 3$$

$$0 \rightarrow 2, \quad 2 - 0 = 2 = a_4, \quad c_4 = 5$$

$$0 \rightarrow 3, \quad 3 - 0 = 3 = a_6, \quad c_6 = 2$$

$$0 \rightarrow 4, \quad 4 - 0 = 4 = a_3, \quad c_3 = 4$$

Для вершины 1:

$$1 \rightarrow 2, \quad 2 - 1 = 1 = a_1, \quad c_1 = 3$$

$$1 \rightarrow 3, \quad 3 - 1 = 2 = a_4, \quad c_4 = 5$$

$$1 \rightarrow 4, \quad 4 - 1 = 3 = a_6, \quad c_6 = 2$$

$$1 \rightarrow 5, \quad 5 - 1 = 4 = a_3, \quad c_3 = 4$$

Для вершины 2:

$$2 \rightarrow 3, \quad 3 - 2 = 1 = a_1, \quad c_1 = 3$$

$$2 \rightarrow 4, \quad 4 - 2 = 2 = a_4, \quad c_4 = 5$$

$$2 \rightarrow 5, \quad 5 - 2 = 3 = a_6, \quad c_6 = 2$$

$$2 \rightarrow 6, \quad 6 - 2 = 4 = a_3, \quad c_3 = 4$$

Для вершины 3:

$$3 \rightarrow 4, \quad 4 - 3 = 1 = a_1, \quad c_1 = 3$$

$$3 \rightarrow 5, \quad 5 - 3 = 2 = a_4, \quad c_4 = 5$$

$$3 \rightarrow 6, \quad 6 - 3 = 3 = a_6, \quad c_6 = 2$$

$$3 \rightarrow 7, \quad 7 - 3 = 4 = a_3, \quad c_3 = 4$$

Для вершины 4:

$$4 \rightarrow 5, \quad 5 - 4 = 1 = a_1, \quad c_1 = 3$$

$$4 \rightarrow 6, \quad 6 - 4 = 2 = a_4, \quad c_4 = 5$$

$$4 \rightarrow 7, \quad 7 - 4 = 3 = a_6, \quad c_6 = 2$$

Для вершины 5:

$$5 \rightarrow 6, \quad 6 - 5 = 1 = a_1, \quad c_1 = 3$$

$$5 \rightarrow 7, \quad 7 - 5 = 2 = a_4, \quad c_4 = 5$$

Для вершины 6:

$$6 \rightarrow 7, \quad 7 - 6 = 1 = a_1, \quad c_1 = 3$$

На рис. 3.13 представлен оргграф с длиннейшим путем. Ему соответствует решение задачи (3.15)-(3.17):

$$x_1^* = 7, \quad x_2^* = x_3^* = x_4^* = x_5^* = x_6^* = 0, \quad z_{\max} = 21.$$

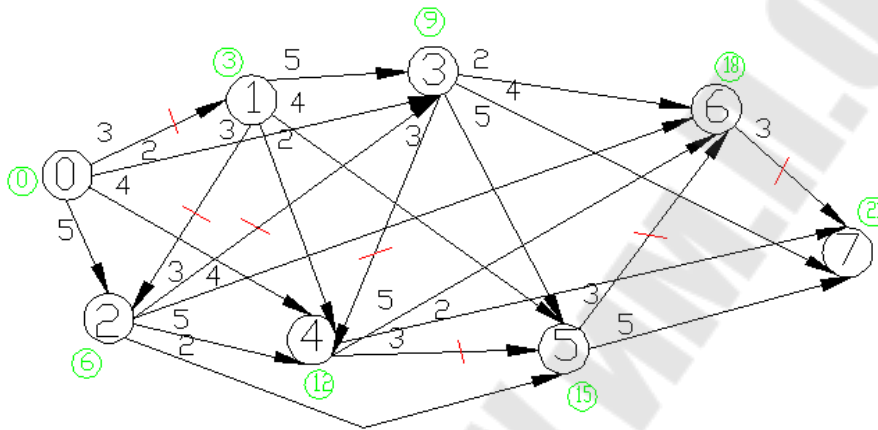


Рисунок 3.13 Оргграф и длиннейший путь

Задачу (3.6)-(3.8) решим с помощью алгоритма КРАТЧАЙШИЙ ПУТЬ. Так как  $a_2 = 2 = a_4$ ,  $c_2 = 3 < c_4 = 5$  и  $a_3 = 4 = a_5$ ,  $c_3 = 4 > c_5 = 2$ , тогда  $x_4 = 0$  и  $x_3 = 0$ . Таким образом приведенная задача примет следующий вид.

$$\min : z(x) = 3x_1 + 3x_2 + 2x_5 + 2x_6 \quad (3.18)$$

$$x_1 + 2x_2 + 4x_5 + 3x_6 = 7 \quad (3.19)$$

$$x_i \geq 0 \text{ и } x_i - \text{целые} \quad (3.20)$$

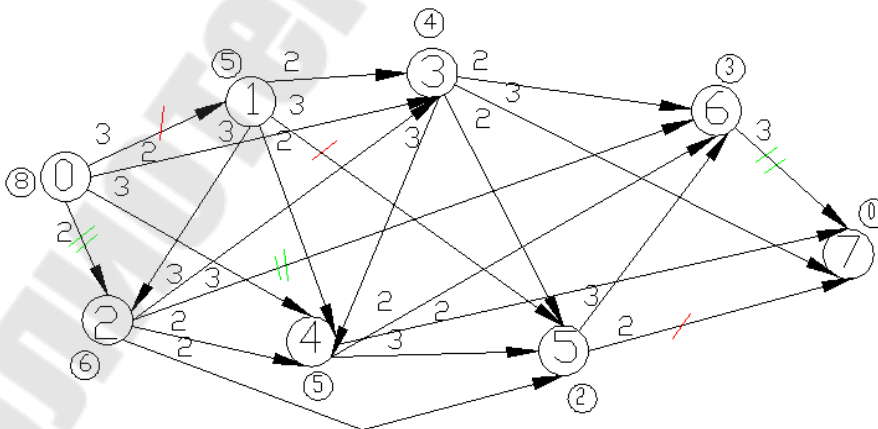


Рисунок 3.14 Оргграф и кратчайший путь

Построение орграфа для задачи (3.18)-(3.20) аналогично построению орграфу для задачи (3.15)-(3.17) за исключением нагрузки дуг. Те дуги, которые в задаче (3.15)-(3.17) были нагружены весом 4 и 5, в задаче (3.18)-(3.20) будут нагружены весом 3 и 2 соответственно.

На рис. 3.14 представлен орграф с кратчайшим путем. Ему соответствует решение задачи (3.18)-(3.20):

$$x_1^* = 1, \quad x_2^* = 1, \quad x_3^* = x_4^* = x_6^* = 0, \quad x_5^* = 1, \quad z_{\min} = 8.$$

### Содержание отчета

1. Название работы.
2. Постановка задачи.
3. Математическая модель задачи №1. Ее решение в Excel – таблица с решением, копии экранов диалоговых окон «Поиск решения» и «Параметры поиска решения»
4. Математическая модель задачи №2. Ее решение в Excel – таблица с решением, копии экранов диалоговых окон «Поиск решения» и «Параметры поиска решения»
5. Математическая модель задачи №3. Ее решение в Excel – таблица с решением, копии экранов диалоговых окон «Поиск решения» и «Параметры поиска решения»
6. Математическая модель задачи №4. Ее решение в Excel – таблица с решением, копии экранов диалоговых окон «Поиск решения» и «Параметры поиска решения»
7. Решение задач №3 в MathCad с помощью метода перебора с возвратом.
8. Длиннейший путь в орграфе для задачи №1. Записать приведенную модель задачи, а само решение выполнить в AutoCad на формате листа А3.
9. Кратчайший путь в орграфе для задачи №2. Записать приведенную модель задачи, а само решение выполнить в AutoCad на формате листа А3.

### Вопросы для защиты

1. Алгоритм поиска длиннейшего пути в графе.
2. Алгоритм поиска кратчайшего пути в графе.
3. Изложить методику решения задачи с помощью «Поиска решения» в Excel.

## Варианты заданий

### Вариант1

Инструменты	1	2	3	4	5	6
Стойкость	1	3	1	2	3	3
Число гнезд	1	2	3	2	5	4

### Вариант2

Инструменты	1	2	3	4	5	6
Стойкость	1	4	4	2	1	3
Число гнезд	1	2	3	4	3	4

### Вариант3

Инструменты	1	2	3	4	5	6
Стойкость	2	3	1	4	2	1
Число гнезд	5	4	3	3	2	1

### Вариант4

Инструменты	1	2	3	4	5	6
Стойкость	2	3	5	1	3	3
Число гнезд	4	2	3	1	5	4

### Вариант5

Инструменты	1	2	3	4	5	6
Стойкость	2	3	4	6	1	1
Число гнезд	4	2	3	4	5	1

### Вариант6

Инструменты	1	2	3	4	5	6
Стойкость	2	4	1	1	2	7
Число гнезд	3	2	3	1	5	4

### Вариант7

Инструменты	1	2	3	4	5	6
Стойкость	2	3	4	5	3	1
Число гнезд	2	2	3	4	5	1

### Вариант8

Инструменты	1	2	3	4	5	6
Стойкость	2	3	7	1	9	8
Число гнезд	5	2	3	1	5	4

### Вариант9

Инструменты	1	2	3	4	5	6
Стойкость	2	7	6	2	8	5
Число гнезд		4	3	1	5	2

### Вариант10

Инструменты	1	2	3	4	5	6
Стойкость	2	4	6	5	7	1
Число гнезд	1	2	3	4	5	1

### Вариант 11

Инструменты	1	2	3	4	5	6
Стойкость	1	7	4	1	5	3
Число гнезд	1	4	2	3	5	4

### Вариант 12

Инструменты	1	2	3	4	5	6
Стойкость	3	7	5	1	8	9
Число гнезд	1	4	2	1	3	5

### Вариант13

Инструменты	1	2	3	4	5	6
Стойкость	4	3	6	1	4	3
Число гнезд	5	5	1	2	3	4

### Вариант14

Инструменты	1	2	3	4	5	6
Стойкость	1	3	7	5	8	9
Число гнезд	4	4	2	1	3	5

### Вариант 15

Инструменты	1	2	3	4	5	6
Стойкость	2	7	3	1	4	3
Число гнезд	1	4	2	1	3	4

Вариант16

Инструменты	1	2	3	4	5	6
Стойкость	3	6	7	2	8	9
Число гнезд	1	4	2	1	3	5

Вариант 17

Инструменты	1	2	3	4	5	6
Стойкость	1	7	1	8	2	2
Число гнезд	1	4	3	5	2	2

Вариант 18

Инструменты	1	2	3	4	5	6
Стойкость	9	5	4	2	8	3
Число гнезд	1	1	3	5	3	2

Вариант19

Инструменты	1	2	3	4	5	6
Стойкость	5	3	6	2	9	3
Число гнезд	3	3	5	2	1	4

Вариант20

Инструменты	1	2	3	4	5	6
Стойкость	7	8	4	2	3	3
Число гнезд		4	1	2	3	5

Вариант 21

Инструменты	1	2	3	4	5	6
Стойкость	4	9	10	5	1	3
Число гнезд	5	1	3	2	4	5

Вариант22

Инструменты	1	2	3	4	5	6
Стойкость	1	1	4	4	5	3
Число гнезд	5	2	2	4	3	1

Вариант23

Инструменты	1	2	3	4	5	6
Стойкость	6	9	5	2	4	3
Число гнезд	4	2	2	1	5	3

Вариант 24

Инструменты	1	2	3	4	5	6
Стойкость	1	7	4	5	1	6
Число гнезд	2	3	4	5	1	1

Вариант25

Инструменты	1	2	3	4	5	6
Стойкость	3	3	4	5	2	2
Число гнезд	1	2	4	2	4	3

Вариант26

Инструменты	1	2	3	4	5	6
Стойкость	5	1	4	9	10	6
Число гнезд	1	1	5	4	3	2

Вариант27

Инструменты	1	2	3	4	5	6
Стойкость	7	3	5	9	10	6
Число гнезд	1	1	5	4	3	2

Вариант28

Инструменты	1	2	3	4	5	6
Стойкость	8	3	4	5	2	7
Число гнезд	5	2	4	2	1	3

Вариант29

Инструменты	1	2	3	4	5	6
Стойкость	3	5	4	9	10	6
Число гнезд	1	5	5	4	3	2

Вариант30

Инструменты	1	2	3	4	5	6
Стойкость	3	6	4	9	8	6
Число гнезд	1	4	5	4	3	2

## 4 ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3 «ОПТИМИЗАЦИЯ РАСКРОЯ ПРОМЫШЛЕННЫХ МАТЕРИАЛОВ»

**Цель работы.** Овладение навыками использования метода линейного программирования для решения технологических задач. Изучение функции *minimize* в MathCAD. Применение «Поиска решений» в Excel в оптимизации раскроя промышленных материалов.

### Постановка задачи

Из листового проката двух (одного) типа необходимо вырезать некоторое количество заготовок для производства 90 штук изделий с минимальными отходами. Для одного изделия требуется деталей первого типа – 3 штуки, второго – 2, третьего (если это предусмотрено в варианте задания) – 1. Возможности заготовительного участка не ограничены. Размеры листов проката и типы заготовок указаны в вариантах заданий на рис. 4.1. При решении задачи разработать не менее трех вариантов раскроя для каждого из двух типов листового проката или не менее шести, если прокат только одного типа.

Поставленную задачу требуется решить:

- с помощью симплекс-метода (если полученное решение нецелочисленное, то применить алгоритм Р. Гомори);
- с помощью функции *minimize* в MathCAD;
- с помощью «Поиска решения» в Excel найти целочисленное решение.

### Содержание отчета

1. Название работы.
2. Постановка задачи.
3. Эскизы листов проката и заготовок (AutoCad).
4. Варианты раскроя листов проката и заготовок.
5. Математическая модель задачи.
6. Решение задачи симплекс-методом, если полученное решение нецелочисленное, то применить алгоритм Р. Гомори.
7. Решение задачи в MathCAD.
8. Решение задачи в Excel «Поиск решение».
9. Отчет должен быть оформлен в текстовом редакторе Word.



## Вопросы для защиты

1. Сформулировать основную задачу ЗЛП
2. Графический метод решения ЗЛП
3. Что такое допустимое решение ЗЛП (допустимый базис)?
4. Понятие базисных и свободных переменных.
5. Как найти начальный допустимый базис?
6. «Поиск решение» – назначение и порядок работы

## Варианты заданий

В таблице 4.1 представлены варианты заданий, а рис. 4.1 необходимые для раскрытия детали.

Таблица 4.1 Варианты заданий

Вариант	Лист проката 1		Лист проката 2		Типы заготовок		
	a	b	a	b	Тип 1	Тип 2	Тип 3
1	4	13	5	11	А	Г	-
2	4	13	5	15	А	В	-
3	4	14	4	8	А	Е	-
4	4	11	4	7	А	Ж	-
5	4	15	4	9	А	З	-
6	4	13	5	10	Б	И	-
7	4	12	5	10	В	И	-
8	3	11	5	9	Г	И	-
9	4	14	5	9	Д	И	-
10	4	14	5	10	Е	И	-
11	3	11	4	9	Г	Ж	-
12	3	12	4	8	Е	Ж	-
13	5	12	-	-	А	Б	В
14	4	13	-	-	А	Б	Г
15	3	14	-	-	А	Б	З
16	3	15	-	-	А	Б	Г
17	4	15	-	-	А	Б	Ж
18	5	15	-	-	А	Б	Е
19	5	14	-	-	А	В	Ж
20	4	15	-	-	И	Б	Е

21	5	13	-	-	И	Б	Г
22	4	14	-	-	И	Б	Е
23	4	14	-	-	Д	И	Ж
24	5	13	-	-	Д	Б	Е
25	4	15	-	-	З	И	А
26	5	13	-	-	Б	Е	Ж
27	5	14	-	-	З	И	Ж
28	4	17	-	-	Г	Д	Е
29	5	17	-	-	А	З	Д
30	5	16	-	-	Б	Ж	З

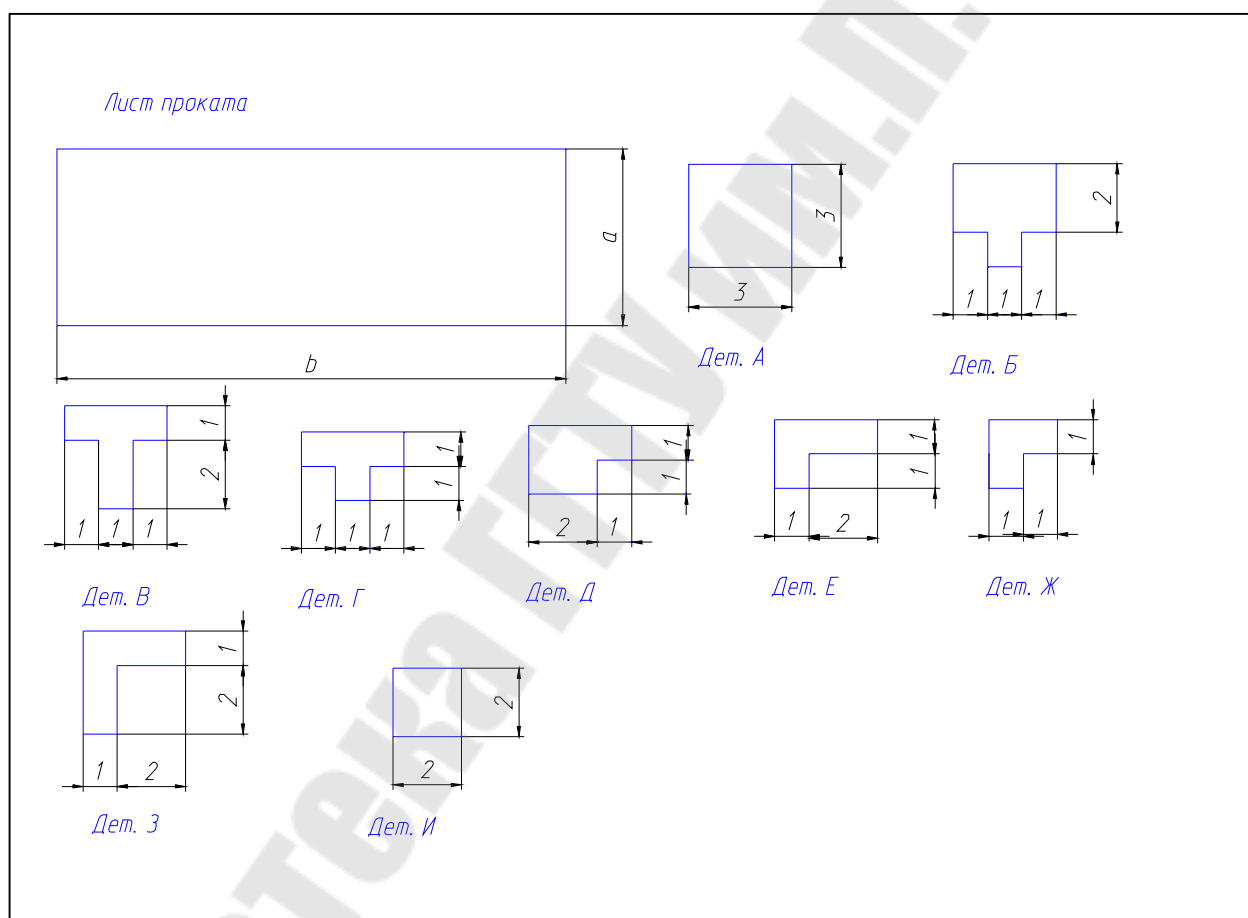


Рисунок 4.1 Эскизы листа проката и заготовок

## Методические рекомендации

### Построение математической модели и решение задачи симплекс-методом

**Пример.** Даны две детали Дет1 и Дет2, размеры которых представлены на рис. 4.2, и два листа проката: Лист1 -  $4 \times 13$  ед<sup>2</sup> и Лист2 -  $5 \times 10$  ед<sup>2</sup>.

Требуется самостоятельно разработать 6 вариантов раскроя этих деталей. Приведем одним из возможных способов такого раскроя (см рис. 4.3 -4.8).

Составим математическую модель данной задачи.

Введем следующие обозначения:

- $x_1$  – количество листов Лист1 по 1-му варианту раскроя;
- $x_2$  – количество листов Лист1 по 2-му варианту раскроя;
- $x_3$  – количество листов Лист1 по 3-му варианту раскроя;
- $x_4$  – количество листов Лист2 по 4-му варианту раскроя;
- $x_5$  – количество листов Лист2 по 5-му варианту раскроя;
- $x_6$  – количество листов Лист2 по 6-му варианту раскроя.

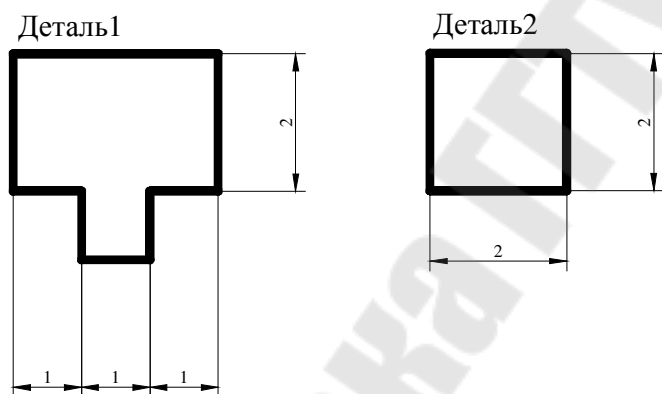


Рисунок 4.2 – Эскизы деталей

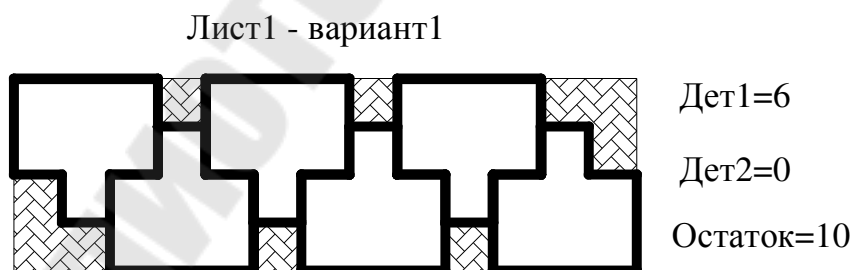


Рисунок 4.3 – Лист1  $4 \times 13$  – Вариант1

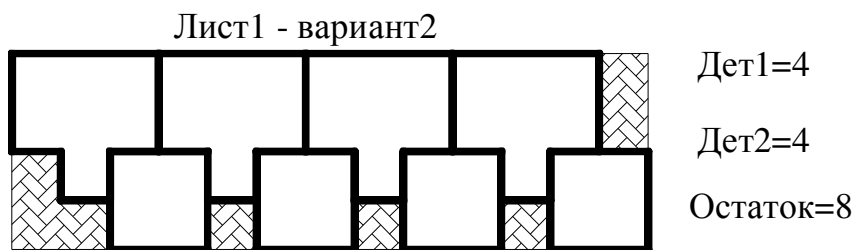


Рисунок 4.4– Лист1 4x13 – Вариант2

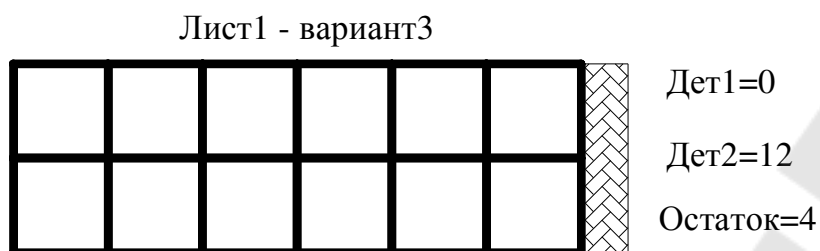


Рисунок 4.5– Лист1 4x13 – Вариант3

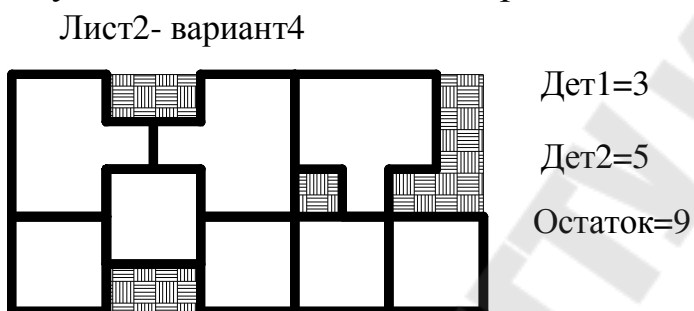


Рисунок 4.6– Лист2 5x10 – Вариант4

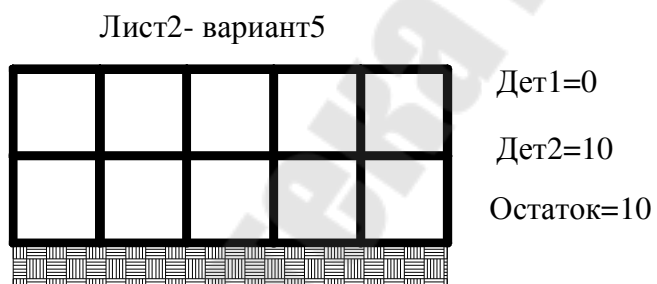


Рисунок 4.7– Лист2 5x10 – Вариант5

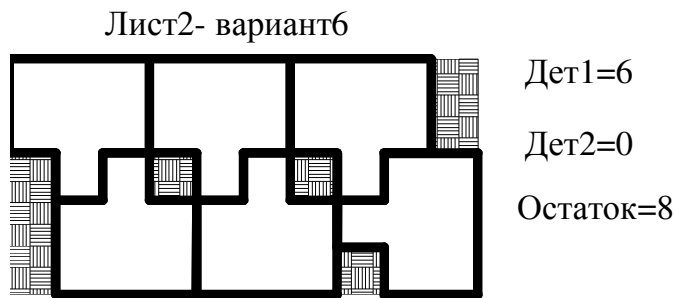


Рисунок 4.8– Лист2 5x10 – Вариантб

Составим целевую функцию, выписав остатки раскроя (см рис. 4.3-4.8):

$$f(x)=10x_1+8x_2+4x_3+9x_4+10x_5+8x_6.$$

Согласно условию задачи, необходимо раскроить 270 штук Дет1. Проанализировав рисунки 4.3-4.8, запишем ограничения для Дет1:

$$6x_1+4x_2+0x_3+3x_4+0x_5+6x_6=270.$$

Согласно условию задачи, необходимо раскроить 180 штук Дет2. Проанализировав рисунки 4.3-4.8, запишем ограничения для Дет2:

$$0x_1+4x_2+12x_3+5x_4+10x_5+0x_6=180$$

**Математическая модель задачи**

Минимизировать остатки раскроя:

$$\min: f(x)=10x_1+8x_2+4x_3+9x_4+10x_5+8x_6. \quad (4.1)$$

при ограничениях

- на план выпуск

$$6x_1+4x_2+0x_3+3x_4+0x_5+6x_6=270$$

$$0x_1+4x_2+12x_3+5x_4+10x_5+0x_6=180 \quad (4.2)$$

- на целочисленность

$$x_i - \text{целые}, i = \overline{1,6} \quad (4.3)$$

- на неотрицательность

$$x_i \geq 0, i = \overline{1,6} \quad (4.4)$$

**Примечание** В ситуации, когда в задании задан только Лист1, но 3 детали: Дет1, Дет2, Дет3, предлагается разработать следующие варианты раскроя:

- вариант1 – на Лист1 размещаются только Дет1;
  - вариант2 – на Лист1 размещаются только Дет2;
  - вариант3– на Лист1 размещаются только Дет3;
- следующие 3 варианты по усмотрению, например:
- вариант4– на Лист1 размещаются Дет1, Дет2, Дет3;
  - вариант5 – на Лист1 размещаются только Дет2, Дет3;

- вариант 6 – на Лист 1 размещаются только Дет 1, Дет 2.

При построении математической (4.1)-(4.4) следует учесть дополнительное ограничение на выпуск Дет 3 – 90 штук.

### Решение задачи (4.1)-(4.4) симплекс –методом

Приведем задачу (4.1)-(4.4) к каноническому виду (целевая функция должна стремиться к максимуму) путем ввода функции  $z(x)$ , равной:  $z(x) = -f(x)$

$$\max: z(x) = -10x_1 - 8x_2 - 4x_3 - 9x_4 - 10x_5 - 8x_6 \quad (4.5)$$

Решение задачи (4.5), (4.2)-(4.4) симплексным методом складывается из двух этапов:

- 1) нахождение начального опорного плана;
- 2) определение среди опорных планов задачи оптимального.

Найдем начальный опорный план, для этого систему (4.2) представим в виде:

$$0 = 270 - (6x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 3x_4 + 0x_5 + 6x_6)$$

$$0 = 180 - (0x_1 + 4x_2 + 12x_3 + 5x_4 + 10x_5 + 0x_6)$$

Составим симплекс-таблицу 4.2.

Таблица 4.2 подвергается симплексным преобразованиям. В качестве разрешающего столбца на этом этапе можно выбрать любой, не обращая на знаки в последней строке – цель вместо 0 в столбце БП ввести переменную  $x_i$ .

Таблица 4.2 Симплекс-таблица 1

БП	СЧ	-x1	-x2	-x3	-x4	-x5	-x6
0	270	6	4	0	3	0	6 ⇒
0	180	0	4	12	5	10	0
$z(x)$	0	10	8	4	9	10	8

æ

1. Выбираем из небазисных переменных, например  $x_1$  Отмечаем этот столбец æ,  $x_1$
2. Определяем, какой 0 из области базисных переменных будет выведен. Для этого определяем минимальное частное от деления соответствующих свободных членов и положительных коэффициентов столбца, отмеченных ↑:  $\min (270/6) = 45$ . Отмечаем строку 1 ⇒.
3. Разрешающий элемент 6

4. Вводимую в базис переменную  $x_1$  выражаем через  $0$ , выводимый из базиса и небазисные переменные  $x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ . Для этого составляем новую симплекс- таблицу (см. табл. 4.3). В ней базис выражается переменными  $x_1, 0$ . Делим строку табл. 4.2, отмеченную  $\Rightarrow$ , на разрешающий элемент.
5. Все остальные базисные переменные  $0$  и целевую функцию выражаем через новые небазисные переменные  $x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ , используя правило прямоугольника. После заполнения табл. 4.3 расчет повторяется с пункта 1).

Таблица 4.3 Симплекс-таблица2

БП	СЧ	-x1	-x2	-x3	-x4	-x5	-x6
x1	45	1	2/3	0	1/2	0	1
0	180	0	4	12	5	10	0 $\Rightarrow$
z(x)	-450	0	4/3	4	4	10	-2

$\approx$

Таблица 4.4 Симплекс-таблица3

БП	СЧ	-x1	-x2	-x3	-x4	-x5	-x6
x1	45	1	2/3	0	1/2	0	1
x3	15	0	1/3	1	5/12	5/6	0
z(x)	-512	0	0	0	7/3	20/3	-2

Итак, первый этап завершен:

БП={ $x_1, x_3$ }, СП={ $x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ }.

После этого переходим ко второму этапу решения задачи

Таблицу 4.4 перепишем в таблицу 4.5

Таблица 4.5 Симплекс-таблица4

БП	СЧ	-x1	-x2	-x3	-x4	-x5	-x6
x1	45	1	2/3	0	1/2	0	1 $\Rightarrow$
x3	15	0	1/3	1	5/12	5/6	0
z(x)	-512	0	0	0	7/3	20/3	-2

$\uparrow$

После заполнения исходной симплекс- таблицы (табл. 4.5) начинается подготовка к заполнению новой таблицы. Для этого используется алгоритм симплекс – метода.

- 1) Проверка базисного решения на оптимальность. Просматриваем знаки коэффициентов функции  $z$  (последняя строка таблицы, кроме

коэффициентов при свободном члене и базисных переменных). Наличие отрицательных коэффициентов, говорит о том, что исходное решение еще не оптимально.

- 2) Проверяем задачу на наличие решения. Так как под всеми отрицательными коэффициентами целевой функции нет ни одного столбца с неположительными числами, это значит, что задача имеет решение.
- 3) Выбираем из небазисных переменных ту, которая способна при введении ее в базис увеличить значения целевой функции:  $\max_{j \in n} \{c_j\}, c_j < 0$ . Отмечаем этот столбец ↑, **х6**.
- 4) Определяем, какая из базисных переменных должна будет выведена из базиса. Для этого определяем минимальное частное от деления соответствующих свободных членов и положительных коэффициентов столбца, отмеченных ↑:  $\min(45/1)= 45$ . Из базиса будет выведена переменная **х1**. Эту строку отметим ⇒.
- 5) Вводимую в базис переменную **х6** выражаем через переменную **х1**, выводимую из базиса и небазисные переменные **х2**, **х4**, **х5**. Для этого составляем новую симплекс- таблицу (табл. 4.6). В ней базис выражается переменными **х6**, **х3**. Делим строку табл. 4.5, отмеченную ⇒, на разрешающий элемент.
- 6) Все остальные базисные переменные **х3** и целевую функцию выражаем через новые небазисные переменные **х2**, **х4**, **х5**, используя правило прямоугольника. После заполнения табл. 4.6 расчет повторяется с пункта 1).

Таблица 4.6 Симплекс-таблица5

БП	СЧ	-х1	-х2	-х3	-х4	-х5	-х6
Х6	45	1	2/3	0	1/2	0	3
х3	15	0	1/3	1	5/12	5/6	0
z(x)	-420	0	4/3	0	10/3	20/3	0

В таблице 4.6 последняя строка не содержит отрицательных коэффициентов, следовательно, находим оптимальное решение, максимизирующее критерий оптимальности. Решение задачи следующее:

$$X^{\text{opt}}=(0, 0, 15, 0, 0, 45), f_{\text{min}}=4*15+8*45=420.$$

**Примечание** Правило прямоугольника

Прочие элементы симплекс – таблицы вычисляются по формуле:



$$b'_{ij} = \frac{b_{ij} \cdot b_{ks} - b_{is} \cdot b_{kj}}{b_{ks}} \quad (i = 0, \dots, m, \quad i \neq k, \quad j = 0, \dots, n - m, \quad j \neq s) \quad (4.6)$$

где  $b_{ks}$  – разрешающий элемент.

При вычислении элементов по формуле (3.6) удобно пользоваться правилом прямоугольника. Элементы, входящие в эту формулу, расположены в вершинах воображаемого «прямоугольника».

$$\begin{array}{cccccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & b_{ij} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & b_{kj} & \cdot & \cdot & \boxed{b_{ks}} & \cdot \end{array}$$

Диагональ этого прямоугольника, на которой расположены разрешающий  $b_{ks}$  и преобразуемый  $b_{ij}$  элементы, называется главной, а другая – побочной. Преобразованный элемент  $b'_{ij}$  равен разности произведений элементов главной и побочной диагоналей, деленной на разрешающий элемент.

Сформированного правила придерживаются независимо от того, в какой вершине прямоугольника расположен разрешающий элемент.

### Пример применения алгоритма Р.Гомори в поиске целочисленного решения

**Пример.** Найти максимальное значение целевой функции  $f = 2x_1 + 3x_2$  при ограничениях

$$3x_1 + 5x_2 \leq 60;$$

$$3x_1 + 4x_2 \leq 34;$$

$$x_2 \leq 8;$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \quad x_1, x_2 - \text{целые числа.}$$

**Решение.** Приведем задачу к каноническому виду:

$$\max : f(x) = 2x_1 + 3x_2$$

$$3x_1 + 5x_2 + x_3 = 60$$

$$3x_1 + 4x_2 + x_4 = 34$$

$$x_2 + x_5 = 8$$

Начальный базисный план:

$$x_3 = 60 - (3x_1 + 5x_2)$$

$$x_4 = 34 - (3x_1 + 4x_2)$$

$$x_5 = 8 - x_2$$

$$БП = (x_3, x_4, x_5), \quad СП = (x_1, x_2)$$

$$X_{нач} = (0, 0, 60, 34, 8)$$

Решим задачу симплекс –методом (см табл. 4.7-4.9).

Таблица 4.7 Симплекс-таблица1

БП	СЧ	-X1	-X2	-X3	-X4	-X5
X3	60	3	5	1	0	0
X4	34	3	4	0	1	0 ⇒
X5	8	0	1	0	0	1
f(x)	0	-2	-3	0	0	0

↑

$$\max\{|-2|, |-3|\} = 3, \quad \min\left\{\frac{60}{3}, \frac{34}{4}, \frac{8}{1}\right\} = 8$$

Таблица 4.8 Симплекс-таблица2

БП	СЧ	-X1	-X2	-X3	-X4	-X5
X3	20	3	0	1	0	-5
X4	2	3	0	0	1	-4 ⇒
X2	8	0	1	0	0	1
f(x)	24	-2	0	0	0	3

↑

$$\max\{|-2|\} = 2$$

$$\min\left\{\frac{20}{3}, \frac{2}{3}\right\} = \frac{2}{3}$$

Таблица 4.9 Симплекс-таблица3

БП	СЧ	-X1	-X2	-X3	-X4	-X5
X3	18	0	0	1	-1	-1
X1	2/3	1	0	0	1/3	-4/3
X2	8	0	1	0	0	1
f(x)	25 1/3	0	0	0	2	1/3

Решая задачу симплекс- методом, получаем оптимальный план (табл. 4.9):

$$x^* = (2/3; 8; 18; 0; 0) \text{ со значением целевой функции } f_{\max} = 25 \frac{1}{3}.$$

Однако полученный план не удовлетворяет условию

целочисленности. По строке переменной  $x_1$ , получившей нецелочисленное значение в оптимальном плане, составляем дополнительное ограничение:

$$\left\{ \frac{1}{3} \right\} x_4 + \left\{ -\frac{4}{3} \right\} x_5 \geq \left\{ \frac{2}{3} \right\} \quad \text{или} \quad \frac{1}{3} x_4 + \frac{2}{3} x_5 \geq \frac{2}{3}, \text{ где } \{a\} - \text{ дробная часть числа } a.$$

Вводя дополнительную целочисленную переменную  $x_6 \geq 0$ , получаем

$$\frac{1}{3} x_4 + \frac{2}{3} x_5 - x_6 = \frac{2}{3}$$

$$0 = \frac{2}{3} - \left( \frac{1}{3} x_4 + \frac{2}{3} x_5 - x_6 \right)$$

Составляем симплекс-таблицу расширенной задачи (табл. 4.10).

Таблица 4.10 Расширенная симплекс-таблица1

БП	СЧ	-X1	-X2	-X3	-X4	-X5	-X6
X3	18	0	0	1	-1	-1	0
X1	2/3	1	0	0	1/3	-4/3	0
X2	8	0	1	0	0	1	0
0	2/3	0	0	0	1/3	<span style="border: 1px solid black;">2/3</span>	-1 ⇒
f(x)	25 $\frac{1}{3}$	0	0	0	2	1/3	0

↑

$$\min \left\{ \frac{2}{3}, \frac{8}{2}, \frac{1}{1} \right\} = 1$$

Таблица 4.11 Расширенная симплекс-таблица2

БП	СЧ	-X1	-X2	-X3	-X4	-X5	-X6
X3	19	0	0	1	-1/2	0	-2/3
X1	2	1	0	0	1	0	-2
X2	7	0	1	0	-1/2	0	3/2
X5	1	0	0	0	2	<span style="border: 1px solid black;">1</span>	-3/2
f(x)	25	0	0	0	1/2	0	1/2

Повторив процесс решения симплексным методом применительно к расширенной задаче, получим оптимальный целочисленный план (табл. 4.11)  $x^* = (2; 7; 19; 0; 1; 0)$ ,  $f_{\max} = 25$ .

## Пример оптимизации раскроя в MathCAD

На рис. 4.9 представлено решения задачи оптимизации в MathCAD.

**Оптимизация раскроя промышленных материалов в MathCAD**  
*Математическая модель задачи*

$$\min: f(x) = 10 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 + 9 \cdot x_4 + 10 \cdot x_5 + 8 \cdot x_6$$

$$6 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 3 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 6 \cdot x_6 = 270$$

$$0 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 12 \cdot x_3 + 5 \cdot x_4 + 10 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 = 180$$

$$x_1 \geq 0$$
  

$$d := \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 4 \\ 9 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \text{-остатки раскроя} \quad B := \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 4 & 4 \\ 0 & 12 \\ 3 & 5 \\ 0 & 10 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{-варианты раскроя} \quad X := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{-решение}$$
  

$$C := \begin{pmatrix} 270 \\ 180 \end{pmatrix} \quad \text{-план раскроя} \quad f(X) := d \cdot X \quad \text{-целевая функция}$$
  

**Решение**

Given

$$B^T \cdot X = C \quad X \geq 0 \quad X := \text{Minimize}(f, X)$$
  

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \\ 0 \\ 0 \\ 45 \end{pmatrix} \quad f(X) = 420$$

Рисунок 4.9 Пример решения задачи в MathCAD

## Пример оптимизации раскроя в Excel

На рис 3.10 представлен в режиме формул лист книги в Excel для решения задачи оптимизации раскроя промышленных материалов, а на рис. 3.11 диалоговые окна «Поиска решения» и «Параметры поиска решения».

В ячейки B16:C21 занести варианты раскроя. В ячейки D16:21 занести остатки раскроя. Ячейки E16:E21 заполнить нулями (здесь впоследствии будет находится оптимальное решение). В ячейку B23 занести формулу первого ограничения (4.2): =СУММПРОИЗВ(B16:B21;E16:E21). В ячейку C23 занести формулу второго ограничения (4.2): =СУММПРОИЗВ(C16:C21;E16:E21). В

ячейку E23 занести формулу целевой функции (4.1):  
 $=\text{СУММПРОИЗВ}(D16:D21;E16:E21)$ .

Примечание. Порядок вызова «Поиска решения» в Excel подробно рассмотрен в лабораторной работе №2 и в дальнейших работах будут приводиться только диалоговые окна.

	A	B	C	D	E
1		<b>Задача о раскрое материалов</b>			
2		<b>Математическая модель</b>			
3					
4		$\min: f(x) = 10x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 9x_4 + 10x_5 + 8x_6$			
5		$6x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 3x_4 + 0x_5 + 6x_6 = 270$			
6		$0x_1 + 4x_2 + 12x_3 + 5x_4 + 10x_5 + 0x_6 = 180$			
7		$x_1 \geq 0$			
8					
9					
10					
11					
12		$x_i$ - целые			
13					
14	Номер варианта	Размер заготовки		Остаток	План раскроя
16	1	6	0	10	0
17	2	4	4	8	0
18	3	0	12	4	0
19	4	3	5	9	0
20	5	0	10	10	0
21	6	6	0	8	0
22	Количество деталей, штук	270	180		
23	Ограничение	$=\text{СУММПРОИЗВ}(B16:B21;E16:E21)$	$=\text{СУММПРОИЗВ}(C16:C21;E16:E21)$	$\min f(x)$	$=\text{СУММПРОИЗВ}(D16:D21;E16:E21)$

Рисунок 4.10 Оптимизация раскроя в Excel

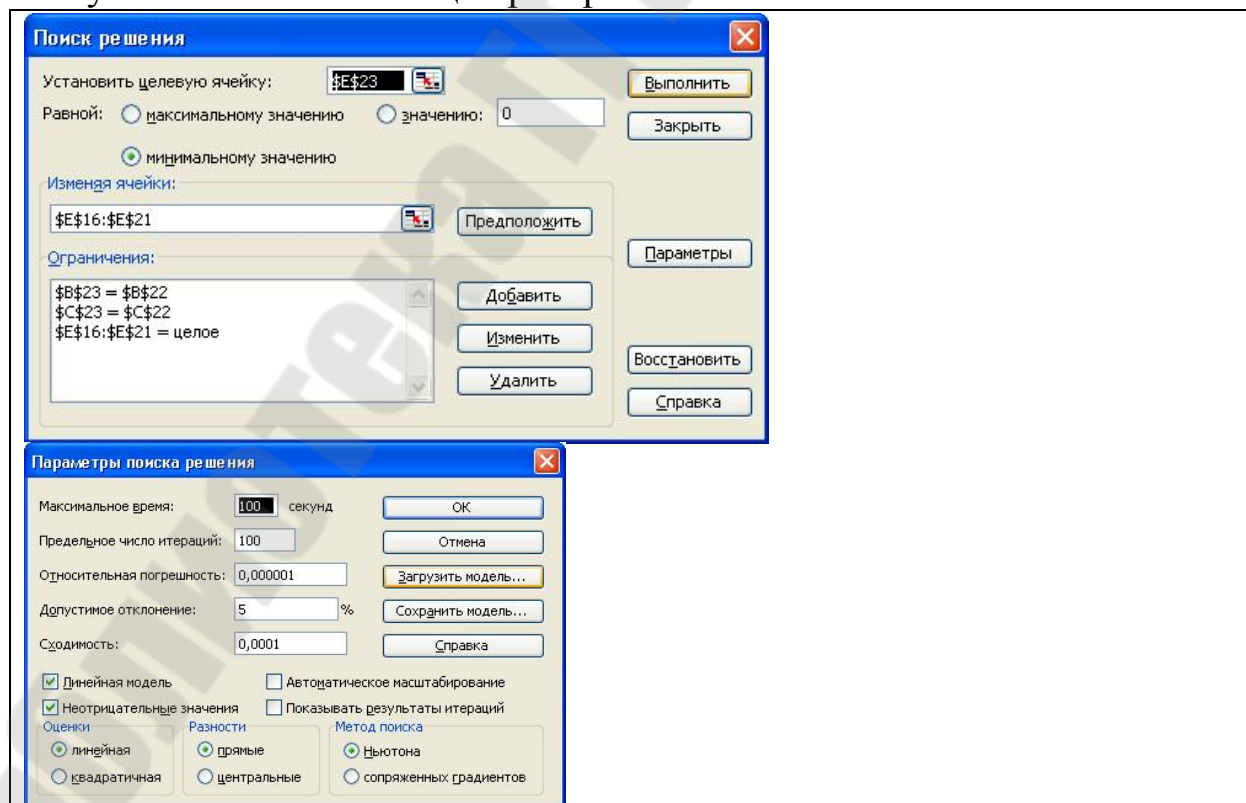


Рисунок 4.11 Диалоговые окна для поиска решения задачи

## 5 ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №4 «ОПТИМИЗАЦИЯ РАСЧЕТА РЕЖИМОВ РЕЗАНИЯ»

**Цель работы.** Овладение графическим способом решения и симплекс-методом задач линейного программирования на примере расчета режимов резания для токарной обработки.

### Постановка задачи

1. Определить оптимальные режимы резания для токарной обработки.
2. Варианты заданий приведены в [7] (М/у 2866) и выбираются по списку в журнале.
3. В математическую модель следует включить из [7] только следующие номера ограничений 1)-6), 11)-13).
4. Для решения задачи в Excel необходимо заполнить табл. 3.1 и 3.2 из [7].
5. Для решения в MathCAD подробное описание определения коэффициентов приводить не следует, достаточно воспользоваться математической моделью, полученной в Excel.

### Содержание отчета

1. Название работы.
2. Постановка задачи.
3. Математическая модель задачи.
4. Решение задачи в EXCEL «Поиск решение».
5. Решение задачи в MathCad с помощью функции *maximize* и графическим способом.
6. Решение задачи отразить на операционном чертеже.
7. Решение задачи вручную графическим методом.

### Вопросы для защиты

1. Сущность графического метода решения задачи линейного программирования.
2. Нахождение начального базисного плана транспортной задачи методом северо-западного угла, минимального элемента.

## Методические рекомендации

Графический метод используется для решения задач линейного программирования с двумя переменными, заданными в симметричной форме, и многими переменными, заданными в канонической форме (при условии, что они содержат не более двух свободных переменных).

Задачу линейного программирования с двумя переменными можно записать так:

$$\max : f = c_1x_1 + c_2x_2 \quad (5.1)$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1$$

$$L \ L \ L \ L \ L \ L \quad (5.2)$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq b_m$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \quad (5.3)$$

Решение задачи графическим способом проводится в такой последовательности:

- записывают уравнения граничных прямых  $a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 = b_k$ ,  $k=1, \dots, m$ , и строят их на плоскости  $X_1OX_2$ ;
- определяют полуплоскости, соответствующие исходным ограничениям-неравенствам (5.2). Для этого берут произвольную точку, лежащую по ту или иную сторону от граничной прямой, и ее координаты подставляют в левую часть ограничения-неравенства. Если оно удовлетворяется, то искомой будет полуплоскость, которая содержит выбранную точку; если оно не удовлетворяется, то искомой будет полуплоскость, которой данная точка не принадлежит;
- выделяют область допустимых решений как общую часть  $m+2$  полуплоскостей, где  $m$  полуплоскостей соответствуют исходным неравенствам (5.2), а 2 полуплоскости – условию неотрицательности переменных ( $x_1 \geq 0$  - правая координатная полуплоскость;  $x_2 \geq 0$  - верхняя координатная полуплоскость);
- строят вектор  $p = (c_1; c_2)$  и перпендикулярно к нему одну из прямых семейства  $f$ , например,  $f=0$ ;
- определяют экстремальную точку многоугольника решений путем параллельного перемещения вспомогательной прямой  $f=0$  в направлении вектора  $p$ . Это будет наиболее удаленная крайняя точка, в которой прямая  $f$  встречается с областью допустимых решений. Если необходимо найти точку, которой соответствует

минимальное значение функции  $f$ , то вспомогательную прямую перемещают в направлении вектора  $p$  до пересечения с первой точкой допустимой области (либо прямую  $f=0$  перемещают в направлении вектора  $(-p)$ );

- вычисляют координаты оптимальной точки и значения функции  $f$ .

На рис. 5.1 показано решение задачи в MathCAD с помощью функции *maximize*, а на рис. 5.2 – графический способ решения задачи.

**Оптимизация режимов резания методом  
линейного программирования**

```

f(x1, x2) := x1 + x2
x1 := 0      x2 := 0

Given
x1 + 0.45·x2 ≤ 9.8
x1 + 0.75·x2 ≤ 12.8
x1 + x2 ≥ 10.7
x1 ≥ 2.5      x1 ≤ 7.8      x1 ≤ 7.4
x2 ≥ 3.9      x2 ≤ 7.9      x2 ≤ 6.3

⎛ x1 ⎞
⎝ x2 ⎞ := Maximize(f, x1, x2)

x1 = 6.965      x2 = 6.3      f(x1, x2) = 13.265
n := ex1      n = 1.059 × 103      s :=  $\frac{e^{x2}}{1000}$       s = 0.545
    
```

Рисунок 5.1 Решение задачи с помощью функции *maximize*



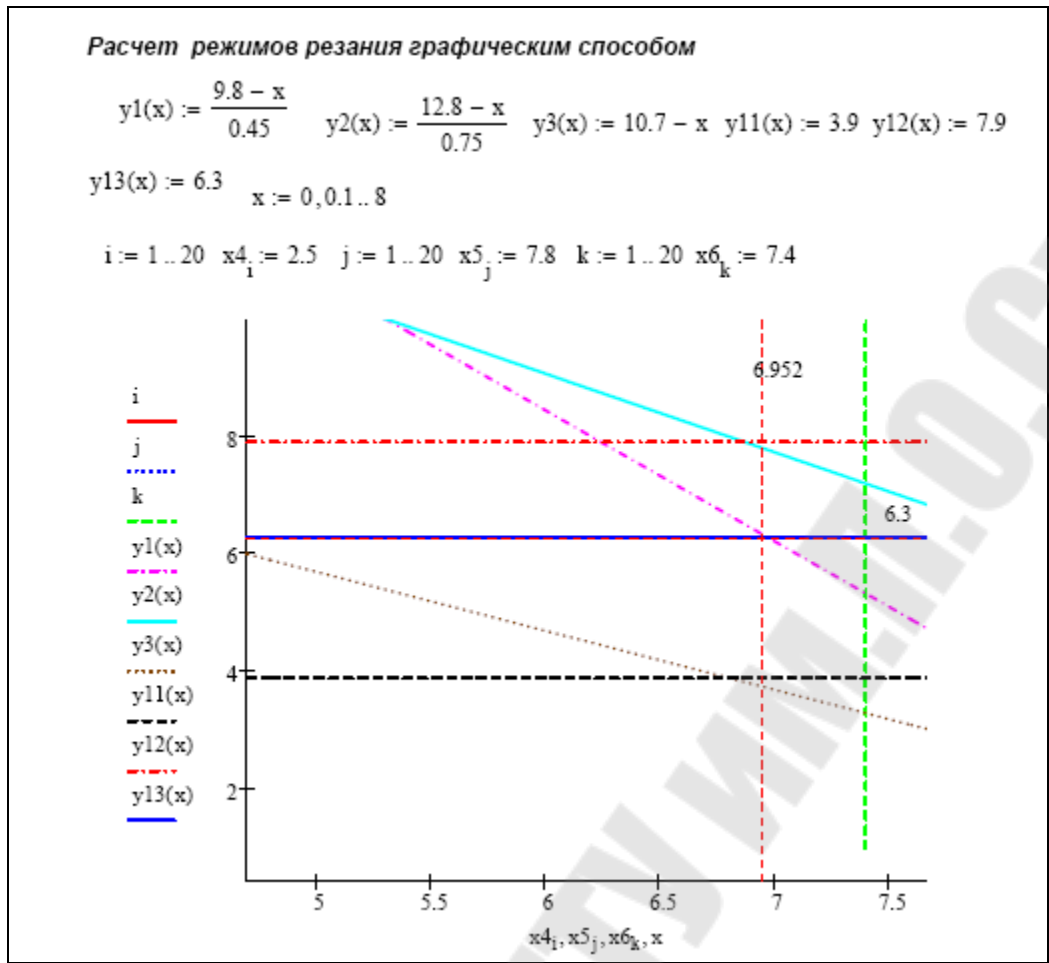


Рисунок 5.2 Решение задачи графическим способом в MathCAD

## 6 ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5 «ОПТИМИЗАЦИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ПЕРЕНАЛАДОК ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ ЛИНИИ»

**Цель работы** Овладение навыками использования метода ветвей и границ, метода динамического программирования для решения технологических задач, метода возврата с перебором.

### Постановка задачи

Для обработки на технологической линии поступило 7 (5) партий заготовок. При переходе от обработки одной партии к обработке следующей необходимо выполнить переналадку технологической линии, для обработки всей партий необходимо 6 таких переналадок. Задача состоит в определении такого порядка запуска заготовок на обработку, при котором суммарное время переналадок было бы минимальным.

Поставленную задачу требуется решить:

- с помощью алгоритма Литтла для 5 партий заготовок;
- методом динамического программирования для 5 партий заготовок;
- методом перебора с возвратом в MathCAD для 5 (7) партий заготовок;
- с помощью «Поиска решения» в Excel для 5 (7) партий заготовок.

### Математическая модель задачи

Математическая модель задачи о переналадки технологической линии ставится следующей:

$$\min : f(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (6.1)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad (6.2)$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если есть переход из } i \text{ в } j \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}, \quad (6.3)$$

для любых  $u_i, u_j$ :

$$u_i - u_j + (n-1)x_{i,j} \leq n-2, \quad (6.4)$$

где  $n$  – количество партий заготовок,  $c_{ij}$  - время на переналадку с  $i$ - ой на  $j$ -ую партию заготовок.

### Содержание отчета

1. Название работы.
2. Постановка задачи.
3. Решение задачи «Поиск решения» при условии, что поступило 7 партий заготовок.
4. Решение задачи «Поиск решения» при условии, что поступило 5 партий заготовок.
5. Решение задачи методом возврата с перебором в MathCAD при условии, что поступило 5 партий заготовок.
6. Решение задачи методом возврата с перебором в MathCAD при условии, что поступило 7 партий заготовок.
7. Решение задачи алгоритмом Литтла при условии, что поступило 5 партий заготовок.
8. Решение задачи с помощью методом динамического программирования при условии, что поступило 5 партий заготовок.
9. Отчет должен быть оформлен в текстовом редакторе MSWord.

### Контрольные вопросы

1. Сущность метода ветвей и границ.
2. Задача о коммивояжере.
3. Алгоритм Литтла для решения задачи о коммивояжере.
4. Решение задачи о коммивояжере с помощью динамического программирования.
5. Метод возврата с перебором.

## Варианты заданий

### Вариант 1

	1	2	3	4	5	6	7
1	$\infty$	13	14	6	8	4	12
2	12	$\infty$	12	16	15	7	7
3	11	10	$\infty$	8	8	5	17
4	8	8	5	$\infty$	10	9	8
5	6	8	9	7	$\infty$	4	9
6	7	6	15	14	16	$\infty$	10
7	9	14	8	15	7	12	$\infty$

### Вариант 4

	1	2	3	4	5	6	7
1	$\infty$	7	8	9	7	9	6
2	13	$\infty$	8	14	8	8	7
3	14	5	$\infty$	6	7	5	6
4	4	13	4	$\infty$	13	14	5
5	6	11	5	12	$\infty$	17	4
6	17	7	7	11	2	$\infty$	10
7	5	6	6	16	8	9	$\infty$

### Вариант 7

	1	2	3	4	5	6	7
1	$\infty$	9	5	6	12	3	9
2	13	$\infty$	14	7	14	4	8
3	14	8	$\infty$	8	15	5	9
4	11	7	13	$\infty$	16	6	12
5	10	6	11	9	$\infty$	7	11
6	12	5	2	6	16	$\infty$	8
7	9	14	13	8	7	9	$\infty$

### Вариант 2

	1	2	3	4	5	6	7
1	$\infty$	8	9	7	8	9	6
2	12	$\infty$	11	4	7	4	6
3	3	5	$\infty$	6	7	4	7
4	6	2	3	$\infty$	4	9	9
5	7	4	5	7	$\infty$	8	8
6	6	3	9	5	7	$\infty$	10
7	5	5	8	12	11	11	$\infty$

### Вариант 5

	1	2	3	4	5	6	7
1	$\infty$	6	7	8	13	14	8
2	7	$\infty$	5	6	8	9	15
3	13	14	$\infty$	8	9	9	6
4	12	7	4	$\infty$	5	5	7
5	11	6	3	3	$\infty$	14	8
6	14	5	12	14	11	$\infty$	9
7	3	14	11	6	7	8	$\infty$

### Вариант 8

	1	2	3	4	5	6	7
1	$\infty$	11	10	12	6	7	8
2	16	$\infty$	5	6	11	8	8
3	11	10	$\infty$	11	5	6	7
4	6	8	13	$\infty$	7	6	8
5	7	4	5	7	$\infty$	8	8
6	14	6	7	14	11	$\infty$	6
7	6	15	6	8	10	7	$\infty$

### Вариант 3

	1	2	3	4	5	6	7
1	$\infty$	11	10	17	6	8	9
2	9	$\infty$	14	15	7	8	9
3	7	9	$\infty$	5	8	4	5
4	6	10	7	$\infty$	5	8	6
5	15	12	6	9	$\infty$	7	7
6	7	14	7	8	7	$\infty$	6
7	9	11	7	8	10	5	$\infty$

### Вариант 6

	1	2	3	4	5	6	7
1	$\infty$	11	9	11	12	6	7
2	6	$\infty$	12	8	16	13	5
3	15	7	$\infty$	13	7	15	4
4	13	14	8	$\infty$	14	6	4
5	6	12	14	9	$\infty$	5	5
6	8	7	13	12	8	$\infty$	6
7	7	9	8	2	11	7	$\infty$

### Вариант 9

	1	2	3	4	5	6	7
1	$\infty$	6	13	5	6	6	7
2	11	$\infty$	12	4	7	8	15
3	12	9	$\infty$	11	10	9	13
4	11	12	3	$\infty$	13	13	7
5	13	13	14	6	$\infty$	15	9
6	14	12	11	10	13	$\infty$	8
7	5	6	7	8	9	7	$\infty$

Вариант 10

	1	2	3	4	5	6	7
1	$\infty$	5	6	11	10	8	9
2	4	$\infty$	7	8	13	10	7
3	5	9	$\infty$	9	8	12	7
4	6	6	7	$\infty$	7	8	8
5	7	9	9	4	$\infty$	6	7
6	8	8	10	11	6	$\infty$	5
7	5	9	7	4	5	6	$\infty$

Вариант 13

	1	2	3	4	5	6	7
1	$\infty$	12	7	9	13	8	6
2	14	$\infty$	5	8	9	8	11
3	5	9	$\infty$	7	3	7	5
4	4	6	6	$\infty$	7	6	9
5	6	7	12	3	$\infty$	8	10
6	5	8	10	4	6	$\infty$	7
7	7	5	11	13	5	4	$\infty$

Вариант 16

	1	2	3	4	5	6	7
1	$\infty$	1	12	17	9	4	16
2	15	$\infty$	1	14	17	2	16
3	4	15	$\infty$	9	8	14	2
4	2	14	13	$\infty$	3	2	14
5	2	9	7	17	$\infty$	9	3
6	2	13	6	8	15	$\infty$	12
7	15	6	8	1	15	7	$\infty$

Вариант 11

	1	2	3	4	5	6	7
1	$\infty$	14	15	6	7	8	14
2	13	$\infty$	5	8	9	8	11
3	5	14	$\infty$	7	8	7	15
4	14	6	6	$\infty$	7	6	11
5	6	7	12	3	$\infty$	8	10
6	5	8	13	4	6	$\infty$	9
7	7	5	12	13	5	4	$\infty$

Вариант 14

	1	2	3	4	5	6	7
1	$\infty$	9	8	7	7	8	9
2	5	$\infty$	6	7	6	5	4
3	8	9	$\infty$	5	13	15	5
4	5	8	7	$\infty$	6	5	4
5	6	8	15	2	$\infty$	11	12
6	3	6	6	6	5	$\infty$	8
7	14	5	8	5	12	9	$\infty$

Вариант 17

	1	2	3	4	5	6	7
1	$\infty$	3	4	16	8	14	12
2	2	$\infty$	10	16	15	17	7
3	11	13	$\infty$	8	8	15	17
4	18	8	15	$\infty$	10	9	18
5	16	18	9	7	$\infty$	14	9
6	7	16	15	14	16	$\infty$	12
7	9	14	8	15	17	12	$\infty$

Вариант 12

	1	2	3	4	5	6	7
1	$\infty$	9	8	7	7	8	7
2	5	$\infty$	6	7	6	5	15
3	8	9	$\infty$	5	12	4	13
4	5	8	7	$\infty$	6	5	7
5	6	8	4	2	$\infty$	11	9
6	13	6	6	6	5	$\infty$	8
7	4	5	8	5	4	9	$\infty$

Вариант 15

	1	2	3	4	5	6	7
1	$\infty$	3	4	16	8	4	2
2	2	$\infty$	12	6	5	17	7
3	1	10	$\infty$	18	8	15	17
4	8	18	15	$\infty$	11	9	8
5	6	18	9	17	$\infty$	4	9
6	7	16	15	14	16	$\infty$	10
7	9	4	8	5	7	12	$\infty$

Вариант 18

	1	2	3	4	5	6	7
1	$\infty$	8	10	17	8	9	16
2	12	$\infty$	11	14	7	14	6
3	13	5	$\infty$	16	7	14	7
4	6	12	3	$\infty$	14	9	9
5	17	4	15	7	$\infty$	18	8
6	6	13	9	15	17	$\infty$	10
7	15	5	8	12	11	11	$\infty$

Вариант 19

	1	2	3	4	5	6	7
1	$\infty$	3	4	6	8	4	2
2	2	$\infty$	2	6	5	7	7
3	1	10	$\infty$	8	8	5	7
4	8	8	5	$\infty$	10	9	8
5	6	8	9	7	$\infty$	4	9
6	7	6	5	4	6	$\infty$	10
7	9	4	8	5	7	2	$\infty$

Вариант 22

	1	2	3	4	5	6	7
1	$\infty$	17	8	9	17	9	6
2	13	$\infty$	8	14	8	8	17
3	14	5	$\infty$	6	17	5	6
4	14	13	4	$\infty$	13	14	5
5	6	11	5	12	$\infty$	17	14
6	17	7	17	11	2	$\infty$	10
7	5	6	6	16	8	9	$\infty$

Вариант 25

	1	2	3	4	5	6	7
1	$\infty$	9	15	6	12	3	9
2	13	$\infty$	14	7	14	4	8
3	14	8	$\infty$	8	15	15	9
4	11	7	13	$\infty$	16	6	12
5	10	6	11	9	$\infty$	7	11
6	12	15	12	6	16	$\infty$	8
7	9	14	13	18	17	9	$\infty$

Вариант 20

	1	2	3	4	5	6	7
1	$\infty$	8	9	7	8	9	6
2	2	$\infty$	1	4	7	4	6
3	3	5	$\infty$	6	7	4	7
4	6	2	3	$\infty$	4	9	9
5	7	4	5	7	$\infty$	8	8
6	6	3	9	5	7	$\infty$	10
7	5	5	8	2	1	1	$\infty$

Вариант 23

	1	2	3	4	5	6	7
1	$\infty$	16	7	8	13	14	8
2	7	$\infty$	5	16	8	9	15
3	13	14	$\infty$	8	9	9	6
4	12	7	4	$\infty$	5	5	7
5	11	16	13	13	$\infty$	14	8
6	14	5	12	14	11	$\infty$	9
7	13	14	11	16	7	8	$\infty$

Вариант 26

	1	2	3	4	5	6	7
1	$\infty$	11	10	12	6	7	8
2	16	$\infty$	15	16	11	8	8
3	11	10	$\infty$	11	15	16	7
4	6	8	13	$\infty$	7	6	8
5	7	14	15	7	$\infty$	8	8
6	14	6	7	14	11	$\infty$	6
7	6	15	6	8	10	7	$\infty$

Вариант 21

	1	2	3	4	5	6	7
1	$\infty$	12	11	18	16	9	9
2	9	$\infty$	14	5	7	8	9
3	7	9	$\infty$	5	8	14	5
4	6	10	17	$\infty$	5	8	6
5	15	12	16	9	$\infty$	17	7
6	7	14	7	8	7	$\infty$	16
7	9	11	7	8	10	5	$\infty$

Вариант 24

	1	2	3	4	5	6	7
1	$\infty$	11	9	11	12	16	7
2	16	$\infty$	12	8	16	13	5
3	15	7	$\infty$	13	7	15	4
4	13	14	18	$\infty$	14	16	4
5	16	12	14	9	$\infty$	5	5
6	18	7	13	12	18	$\infty$	6
7	7	9	18	2	11	7	$\infty$

Вариант 27

	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7
2	$\infty$	16	13	5	16	6	7
3	11	$\infty$	12	4	17	8	15
4	12	9	$\infty$	11	10	9	13
5	11	12	13	$\infty$	13	13	7
6	13	13	14	6	$\infty$	15	9
7	14	12	11	10	13	$\infty$	8

## Методические рекомендации

### Алгоритм Литгла

**Пример 1.** Решить задачу о коммивояжере для матрицы расстояний, представленной в табл. 6.1.

Таблица 6.1 Матрица расстояний  $C$

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	$u_i$
1	$\infty$	30	40	15	6	6
2	10	$\infty$	18	7	9	7
3	20	30	$\infty$	1	10	1
4	25	10	35	$\infty$	5	5
5	9	8	7	6	$\infty$	6

Решение

1. Справа к табл. 6.1 присоединим столбец  $u_i$ , в котором записываем минимальные элементы строк. Вычитаем элементы  $u_i$  из соответствующих элементов матрицы  $C$ , получим матрицу приведенную по строкам (табл. 6.2)  $C'$ .

Таблица 6.2 Матрица, приведенная по строкам  $C'$

$i \setminus j$	1	2	3	4	5
1	$\infty$	24	34	9	0
2	3	$\infty$	11	0	2
3	19	29	$\infty$	0	9
4	20	5	30	$\infty$	0
5	3	2	1	0	$\infty$
$v_j$	3	2	1	0	0

2. Внизу матрицы (табл. 6.2) присоединяем строку  $v_j$ , в которой записываем минимальные элементы столбцов. Вычитаем элементы  $v_j$  из соответствующих столбцов матрицы  $C'$  (табл. 6.3).

Таблица 6.3 Матрица, приведенная по столбцам  $C''$

$i \setminus j$	1	2	3	4	5
1	$\infty$	22	33	9	$0^9$
2	$0^0$	$\infty$	10	$0^0$	2
3	16	27	$\infty$	$0^9$	9
4	17	3	29	$\infty$	$0^3$
5	$0^0$	$0^3$	$0^{10}$	$0^0$	$\infty$

3. Вычислим константу приведения

$$\gamma = \sum_{i=1}^5 u_i + \sum_{j=1}^5 v_j = 25 + 6 = 31.$$

Нижней границей множества всех гамильтоновых контуров будет число  $\gamma = 31 = \varphi(\Omega^0) \leq f(X)$ .

4. Находим степени нулей полностью приведенной матрицы (табл. 6.3). Для этого мысленно заменяем в ней нули на  $\infty$  и устанавливаем сумму минимальных элементов соответствующей строки и столбца. Степени нулей записаны в правых верхних углах клеток, для которых  $c''_{ij} = 0$  (табл. 6.3).
5. Определяем максимальную степень нуля. Она равна 10 и соответствует клетке (5; 3). Таким образом, претендентом на включение в гамильтонов контур является дуга (5, 3).
6. Разбиваем множество всех гамильтоновых контуров  $\Omega^0$  на два  $\Omega_{53}^1$  и  $\Omega_{53}^1$ . Матрицу  $\Omega_{53}^1$  с дугой (5, 3) получаем из табл. 6.3 путем вычеркивания строки 5 и столбца 3. Чтобы не допустить образования негамильтонова контура, заменяем элемент (3, 5) на  $\infty$  (табл. 6.4).

Таблица 6.4 Множество гамильтоновых контуров с дугой (5,3)  $\Omega_{53}^1$

i\j	1	2	4	5	$u_i$
1	$\infty$	22	9	0	0
2	0	$\infty$	0	2	0
3	16	27	0	$\infty$	0
4	17	3	$\infty$	0	0
$v_j$	0	3	0	0	

7. Матрицу гамильтоновых контуров  $\Omega_{53}^1$  получим из табл. 6.3 путем замены элемента  $c''_{53}$  на  $\infty$  (табл. 6.5).

Таблица 6.5 Множество гамильтоновых контуров без дуги (5,3)  $\Omega_{53}^1$

i\j	1	2	3	4	5	$u_i$
1	$\infty$	22	33	9	0	0
2	0	$\infty$	10	0	2	0
3	16	27	$\infty$	0 <sup>9</sup>	9	0
4	17	3	29	$\infty$	0	0
5	0	0	$\infty$	0	$\infty$	0
$v_j$	0	0	10	0	0	



8. Делаем дополнительное приведение матрицы контуров  $\Omega_{53}^1$ :

$$h_{53}^1 = \sum_i u_i + \sum_j v_j = 0 + 3 = 3 \quad (\text{табл.6.6}). \text{ Нижняя граница множества}$$

$$\Omega_{53}^1 \text{ равна } \varphi(\Omega_{53}^1) = \varphi(\Omega^0) + h_{53}^1 = 31 + 3 = 34.$$

9. Находим константу приведения для множества контуров  $\Omega_{53}^1$ :

$$h_{53}^1 = \sum_i u_i + \sum_j v_j = 0 + 10 = 10. \text{ Следовательно, нижняя граница}$$

$$\varphi(\Omega_{53}^1) = \varphi(\Omega^0) + h_{53}^1 = 31 + 10 = 41.$$

Таблица 6.6 Приведенное множество гамильтоновых контуров  $\Omega_{53}^1$

i\j	1	2	4	5
1	$\infty$	19	9	$0^9$
2	$0^{16}$	$\infty$	$0^0$	2
3	16	24	$0^{16}$	$\infty$
4	17	$0^{19}$	$\infty$	$0^0$

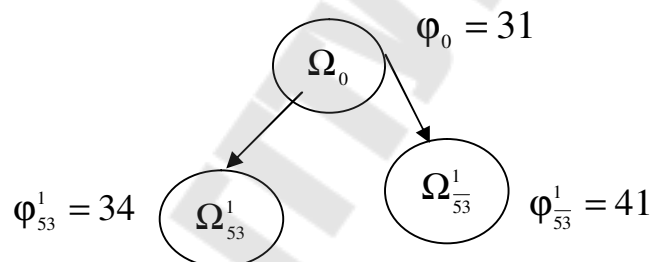


Рисунок 6.1 Ветвление по дуге (5, 3)

10. Сравниваем нижние границы подмножеств  $\Omega_{53}^1$  и  $\Omega_{53}^1$ . Так как

$\varphi(\Omega_{53}^1) = 34 < \omega(\Omega_{53}^1) = 41$ , то дальнейшему ветвлению подвергаем множество  $\Omega_{53}^1$  (табл. 6.4). На рис. 6.1 представлено ветвление по дуге (5, 3).

11. Переходим к ветвлению подмножества  $\Omega_{53}^1$ . Его приведенная матрица представлена в табл. 6.6. Узнаем степени нулей этой матрицы (табл. 6.6).

12. Претендентом на включение в гамильтонов контур будет дуга (4, 2). Разбиваем множество  $\Omega_{53}^1$  на два подмножества  $\Omega_{42}^2$  и  $\Omega_{42}^2$  (табл. 6.7 и 6.8).

13. Определяем константы приведения этих матриц:

$$h_{42}^2 = \sum_i u_i + \sum_j v_j = 0 + 0 = 0, \quad h_{42}^2 = \sum_i u_i + \sum_j v_j = 0 + 19 = 19.$$

Следовательно,

$$\varphi(\Omega_{42}^2) = \varphi(\Omega_{53}^1) + h_{42}^2 = 34 + 0 = 34, \quad \varphi(\Omega_{42}^2) = \varphi(\Omega_{53}^1) + h_{42}^2 = 34 + 19 = 53.$$

На рисунке 6.2 представлено ветвление с использованием дуги (4, 2). Так как  $\varphi(\Omega_{42}^2) < \varphi(\Omega_{42}^2)$ , то ветвлению подлежит подмножество  $\Omega_{42}^2$  (табл. 6.7).

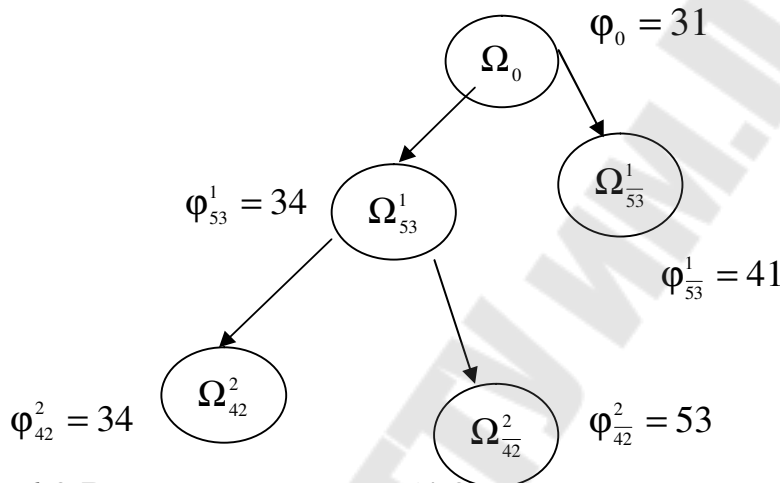


Рисунок 6.2 Ветвление по дуге (4,2)

Таблица 6.7 Контурь  $\Omega_{42}^2$

i\j	1	4	5	$u_i$
1	$\infty$	9	$0^{11}$	0
2	$0^{18}$	$\infty$	2	0
3	16	$0^{25}$	$\infty$	0
$v_j$	0	0	0	0

Таблица 6.8 Контурь  $\Omega_{42}^1$

i\j	1	2	4	5	$u_i$
1	$\infty$	19	9	0	0
2	0	$\infty$	0	2	0
3	16	24	0	$\infty$	0
4	17	$\infty$	$\infty$	0	0
$v_j$	0	19	0	0	

14. Вычислим степени нулей матрицы. Претендентом к включению в гамильтонов контур станет дуга (3, 4). Разбиваем множество  $\Omega_{42}^2$  на подмножества  $\Omega_{34}^3$  и  $\Omega_{34}^3$  (табл. 6.9 и 6.10). Очевидно,

$$\varphi(\Omega_{34}^3) = \varphi(\Omega_{42}^2) + h_{34}^3 = 34 + 0 = 34, \quad \varphi(\Omega_{34}^3) = \varphi(\Omega_{42}^2) + h_{34}^3 = 34 + 25 = 59$$

Следовательно, ветвлению нужно подвергнуть подмножество  $\Omega_{34}^3$ . Но его матрица имеет размерность 2x2. Поэтому в гамильтонов

контур следует включить дуги, соответствующие в матрице подмножества  $\Omega_{34}^3$  нулевым элементам, т.е. дуги (1,5), (2,1).

Таблица 6.9  $\Omega_{34}^3$

i\j	1	5	$u_i$
1	$\infty$	0	0
2	0	2	0
$v_j$	0	0	

Таблица 6.10  $\Omega_{34}^3$

i\j	1	4	5	$u_i$
1	$\infty$	9	0	0
2	0	$\infty$	2	0
4	17	$\infty$	$\infty$	16
$v_j$	0	9	0	

На рис. 6.3 представлено дерево ветвлений. Определим полученный гамильтонов контур. В него вошли дуги  $\{(5,3), (4,2), (3,4), (1,5), (2,1)\}$ . Длина контура равна  $c_{53}+c_{34}+c_{15}+c_{21}+c_{42}=7+10+1+6+10=34$ . Так как границы оборванных ветвей больше длины контура  $5-3-4-2-1-5$ , то этот контур имеет наименьшую длину. На рис. 6.4 представлен замкнутый маршрут минимальной длины.

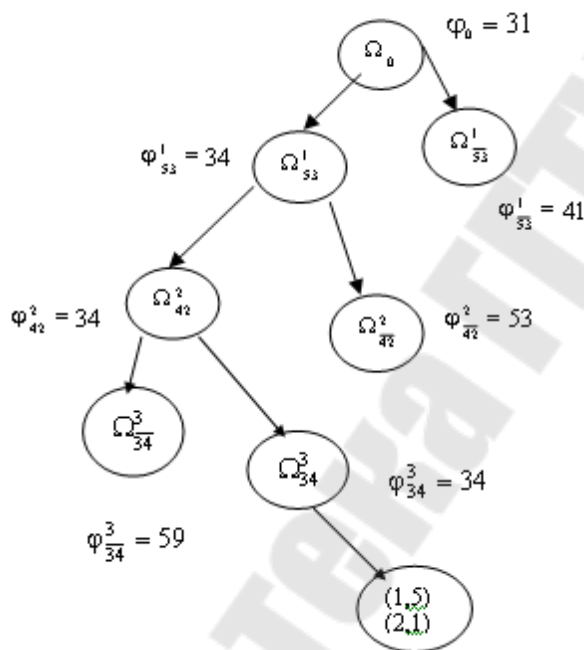


Рисунок 6.3 Дерево ветвлений

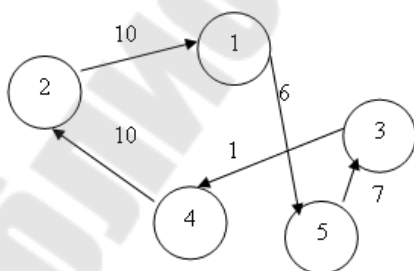


Рисунок 6.4 Замкнутый маршрут минимальной длины

## Решение задачи коммивояжера методом динамического программирования

Решение задачи коммивояжера методом динамического программирования было предложено Беллманом, Хелдом и Кэрпом.

Предположим, что решается задача коммивояжера для  $n$  городов с матрицей расстояний  $C$ . Без потери общности выберем некоторый город  $s_0$  в качестве исходного. После этого разобьем все множество городов на четыре непересекающиеся подмножества:

1.  $\{s_0\}$  - множество, состоящее только из одного исходного города;
2.  $\{s_i\}$  - множество, состоящее только из одного города (не исходного);
3.  $\{S_k\}$  - множество, состоящее из  $k$  городов, за исключением  $\{s_0\}$  и  $\{s_i\}$ ;
4.  $\{S_{n-k-2}\}$  - множество оставшихся  $(n-k-2)$  городов.

Пусть далее, известен оптимальный порядок прохождения городов, начинающийся и заканчивающийся городом  $\{s_0\}$ . Тогда можно выбрать город  $\{s_0\}$  и подмножество  $\{S_k\}$ , состоящее из  $k$  городов, таким образом, что этот оптимальный маршрут начинается в  $\{s_0\}$  и проходит через множество  $\{S_{n-k-2}\}$ , затем через  $\{s_i\}$ , после чего, пройдя множество городов  $\{S_k\}$ , оканчивается в  $\{s_i\}$ .

Теперь рассмотрим только ту часть маршрута, которая связывает  $\{s_i\}$  и  $\{s_0\}$  с промежуточным посещением городов  $\{S_k\}$ . Заметим, что для этого участка нам известен наикратчайший путь. Если бы это не так, то, не изменяя части маршрута до города  $\{s_i\}$  можно было бы найти лучший путь его завершения и, следовательно, наикратчайший путь целиком. Но это невозможно, поскольку противоречит исходному предположению, что оптимальный маршрут известен.

Пусть  $f(s_i; \{S_k\})$  - длина наикратчайшего пути от  $\{s_i\}$  к  $\{s_0\}$  с промежуточным посещением множества  $\{S_k\}$ . Заметим, что при  $k=0$

$$f(s_i; \emptyset) = c_{i0},$$

есть элемент матрицы  $C$ . Если  $k=n-1$  и  $\{s_i\}$  совпадает с началом движения, то  $f(s_0; \{S_{n-1}\})$  является длиной оптимального маршрута исходной задачи. Идея метода динамического программирования состоит в том, чтобы, начиная с  $k=0$ , шаг за шагом увеличивать  $k$ . При

этом, начав с  $s_i$  маршрут проходит в обратном порядке до  $s_0$  и тем самым находится оптимальное решение.

Для рассматриваемой задачи основное функциональное уравнение динамического программирования имеет вид

$$f(s_i; \{s_k\}) = \min_{c_j \in \{C_k\}} [c_{ij} + f(s_j; \{s_k\} - \{s_j\})].$$

Это уравнение показывает, что для того, чтобы найти лучший путь, начинающийся в  $s_i$  и завершающийся в  $s_0$  с промежуточным посещением  $k$  городов, нужно выбрать наикратчайший из  $k$  возможных путей, начинающихся переходом из  $s_i$  в один из  $k$  и затем проходящий кратчайшим образом в  $s_0$  с промежуточным посещением  $(k-1)$  других. Любой из этих  $k$  вариантов, в свою очередь, представляет собой наикратчайший из  $(k-1)$  возможных путей в соответствии с приведенным ранее уравнением. В конце концов достигается точка, в которой правая часть уравнения, представляет собой просто элемент  $C$ .

Пример 2. Решить задачу коммивояжера методом динамического программирования. Матрица  $C$  представлена в таблице 6.11

Таблица 6.11 Матрица  $C$

	1	2	3	4	5
1	$\infty$	30	40	15	6
2	10	$\infty$	18	7	9
3	20	30	$\infty$	1	10
4	25	10	35	$\infty$	5
5	9	8	7	6	$\infty$

Решение.

На нулевом шаге ищется решение для четырех вариантов при  $k=0$ .

0-й шаг.  $k=0$

$$f(s_1, \emptyset) = c_{1,5} = 6$$

$$f(s_2, \emptyset) = c_{2,5} = 9$$

$$f(s_3, \emptyset) = c_{3,5} = 10$$

$$f(s_4, \emptyset) = c_{4,5} = 5$$

На первом шаге при  $k=1$  решения выражаются через известные решения при  $k=0$ .

1-й шаг.  $k=1$

$$f(s_1, \{s_2\}) = c_{1,2} + f(s_2, \emptyset) = 30 + 9 = 39$$

$$f(s_1, \{s_3\}) = c_{1,3} + f(s_3, \emptyset) = 40 + 10 = 50$$

$$f(s_1, \{s_4\}) = c_{1,4} + f(s_4, \emptyset) = 15 + 5 = 20$$

$$f(s_2, \{s_1\}) = c_{2,1} + f(s_1, \emptyset) = 10 + 6 = 16$$

$$f(s_2, \{s_3\}) = c_{2,3} + f(s_3, \emptyset) = 18 + 10 = 28$$

$$f(s_2, \{s_4\}) = c_{2,4} + f(s_4, \emptyset) = 7 + 5 = 12$$

$$f(s_3, \{s_1\}) = c_{3,1} + f(s_1, \emptyset) = 20 + 6 = 26$$

$$f(s_3, \{s_2\}) = c_{3,2} + f(s_2, \emptyset) = 30 + 9 = 39$$

$$f(s_3, \{s_4\}) = c_{3,4} + f(s_4, \emptyset) = 1 + 5 = 6$$

$$f(s_4, \{s_1\}) = c_{4,1} + f(s_1, \emptyset) = 25 + 6 = 31$$

$$f(s_4, \{s_3\}) = c_{4,3} + f(s_3, \emptyset) = 35 + 10 = 45$$

$$f(s_4, \{s_2\}) = c_{4,2} + f(s_2, \emptyset) = 10 + 9 = 19$$

На втором шаге решения при  $k=2$  выражаются через известные решения при  $k=1$ .

2-й шаг.  $k=2$

$$f(s_1, \{s_2, s_3\}) = \min[c_{1,2} + f(s_2, \{s_3\}), c_{1,3} + f(s_3, \{s_2\})] = \min[30 + 28, 40 + 39] = 58$$

$$f(s_1, \{s_2, s_4\}) = \min[c_{1,2} + f(s_2, \{s_4\}), c_{1,4} + f(s_4, \{s_2\})] = \min[30 + 12, 15 + 19] = 34$$

$$f(s_1, \{s_3, s_4\}) = \min[c_{1,3} + f(s_3, \{s_4\}), c_{1,4} + f(s_4, \{s_3\})] = \min[40 + 6, 15 + 45] = 46$$

$$f(s_2, \{s_1, s_3\}) = \min[c_{2,1} + f(s_1, \{s_3\}), c_{2,3} + f(s_3, \{s_1\})] = \min[10 + 50, 18 + 26] = 44$$

$$f(s_2, \{s_1, s_4\}) = \min[c_{2,1} + f(s_1, \{s_4\}), c_{2,4} + f(s_4, \{s_1\})] = \min[10 + 20, 7 + 31] = 30$$

$$f(s_2, \{s_3, s_4\}) = \min[c_{2,3} + f(s_3, \{s_4\}), c_{2,4} + f(s_4, \{s_3\})] = \min[18 + 6, 7 + 45] = 24$$

$$f(s_3, \{s_1, s_2\}) = \min[c_{3,1} + f(s_1, \{s_2\}), c_{3,2} + f(s_2, \{s_1\})] = \min[20 + 39, 30 + 16] = 46$$

$$f(s_3, \{s_1, s_4\}) = \min[c_{3,1} + f(s_1, \{s_4\}), c_{3,4} + f(s_4, \{s_1\})] = \min[20 + 20, 1 + 31] = 32$$

$$f(s_3, \{s_2, s_4\}) = \min[c_{3,2} + f(s_2, \{s_4\}), c_{3,4} + f(s_4, \{s_2\})] = \min[30 + 12, 1 + 19] = 20$$

$$f(s_4, \{s_1, s_2\}) = \min[c_{4,1} + f(s_1, \{s_2\}), c_{4,2} + f(s_2, \{s_1\})] = \min[25 + 39, 10 + 16] = 26$$

$$f(s_4, \{s_1, s_3\}) = \min[c_{4,1} + f(s_1, \{s_3\}), c_{4,3} + f(s_3, \{s_1\})] = \min[25 + 50, 35 + 26] = 61$$

$$f(s_4, \{s_2, s_3\}) = \min[c_{4,2} + f(s_2, \{s_3\}), c_{4,3} + f(s_3, \{s_2\})] = \min[10 + 28, 35 + 39] = 38$$

Переходим к третьему шагу, использующему каждое из решений второго шага.

Шаг третьей ( $k=3$ ).

$$f(s_1, \{s_2, s_3, s_4\}) = \min(c_{1,2} + f(s_2, \{s_3, s_4\}); c_{1,3} + f(s_3, \{s_2, s_4\}); c_{1,4} + f(s_4, \{s_2, s_3\})) = \min(30 + 24; 40 + 20; 15 + 38) = 53$$

$$f(s_2, \{s_1, s_3, s_4\}) = \min(c_{2,1} + f(s_1, \{s_3, s_4\}); c_{2,3} + f(s_3, \{s_1, s_4\}); c_{2,4} + f(s_4, \{s_1, s_3\})) = \min(10+46; 18+32; 7+61) = 50$$

$$f(s_3, \{s_1, s_2, s_4\}) = \min(c_{3,1} + f(s_1, \{s_2, s_4\}); c_{3,2} + f(s_2, \{s_1, s_4\}); \underline{c_{3,4} + f(s_4, \{s_1, s_2\})}) = \min(20+34; 30+30; 1+26) = 27$$

$$f(s_4, \{s_1, s_2, s_3\}) = \min(c_{4,1} + f(s_1, \{s_2, s_3\}); c_{4,2} + f(s_2, \{s_1, s_3\}); c_{4,3} + f(s_3, \{s_1, s_2\})) = \min(25+58; 10+44; 35+46) = 54$$

Наконец, на четвертом шаге получаем решение исходной задачи.

Шаг четвертый ( $k=4$ ).

$$f(s_5, \{s_1, s_2, s_3, s_4\}) = \min(c_{5,1} + f(s_1, \{s_2, s_3, s_4\}); c_{5,2} + f(s_2, \{s_1, s_3, s_4\}); \underline{c_{5,3} + f(s_3, \{s_1, s_2, s_4\})}; c_{5,4} + f(s_4, \{s_1, s_2, s_3\})) = \min(9+53; 50+8; 27+7; 54+6) = 34$$

Итак, значение целевой функции  $f(x)=34$ . Сам маршрут найдем, если будем двигаться в обратном направлении с четвертого шаге к нулевому, проходя по минимальному значению (выделено жирным подчеркиванием). На рис. 6.5 представлен замкнутый маршрут минимальной длины.

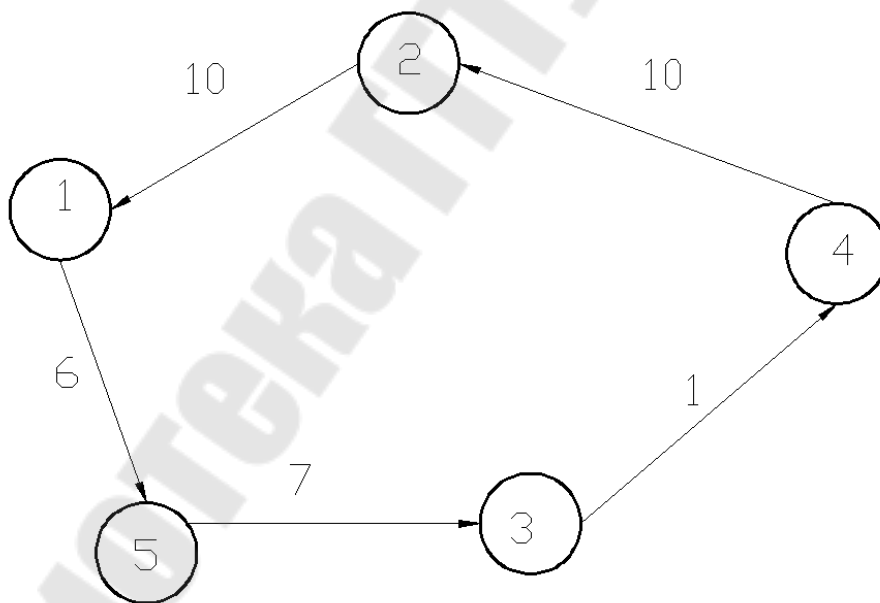


Рисунок 6.5 Замкнутый маршрут минимальной длины

## Решение задачи о переналадке станков методом возвратной рекурсии

На рис. 6.6 представлена программа в MathCAD, реализующая метод перебора с возвратом.

Решение задачи о переналадке станков методом возвратной рекурсии

$$U := \begin{pmatrix} 0 & 30 & 40 & 15 & 6 \\ 10 & 0 & 18 & 7 & 9 \\ 20 & 30 & 0 & 1 & 10 \\ 25 & 10 & 35 & 0 & 5 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Исходная матрица времен переналадок станков

```

commi2(n, ne, po, ot, j) :=
    for i ∈ 0..n - 1
        if poi = 0
            s ← n + 1
            poi ← 1
            nej ← i
            nes ← nes + U(nej-1, i)
            if nes < ots, 0
                ot ← commi2(n, ne, po, ot, j + 1) if j < n - 1
                otherwise
                    nes ← nes + U(nej, ne0)
                    ot ← ne if nes < ots, 0
                    ot ← augment(ot, ne) if nes = ots, 0 otherwise
            poi ← 0
            nes ← nes - U(nej-1, i)
        ot

masom2(n, k) :=
    nen+1 ← (pon-1 ← 0)
    ne0 ← (nen ← k)
    pok ← 1
    otn+1, 0 ← ∞
    commi2(n, ne, po, ot, 1)

masom2(5, 0)T = (0 4 2 3 1 0 34)
    
```

все возможные решения решение: первые семь элементов каждой строки - это гамильтонов контур; последний элемент - значение целевой функции.  
**Обратите внимание!** в алгоритме индексы считаются с 0, поэтому при записи оптимального порядка запуска деталей, необходимо каждый индекс увеличить на 1.

Оптимальные порядки запуска деталей в производство:  
 1-5-3-4-2-1

Суммарные затраты на переналадки равны 34 ед. времени

Рисунок 6.6 Метод перебора с возвратом для переналадки станков



## Решение задачи коммивояжера «Поиском решения» в Excel

На рис. 6.7 представлен лист книги Excel необходимый для реализации математической модели задачи (6.1)-(6.4).

В ячейках A5:F10 занесены исходные данные для 5 партий деталей. В ячейках B15:F19 будет находится оптимальное решение (первоначально это область заполняется нулями). В ячейках C23:F23 располагаются дополнительные переменные для формулы (6.4) (первоначально это область заполняется нулями).

В ячейку B21 занесена формула целевой функции (6.1), использующая функцию Excel СУММПРОИЗВ. В ячейках B20:F20, G15:G19 занесены формулы (6.2), использующие функцию Excel СУММ. В ячейках B27:E30 записаны формулы (6.4).

На рис.6.8 показана реализация задачи (6.1)-(6.4) в Excel.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Лабораторная работа № 6 «ОПТИМИЗАЦИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ПЕРЕНАЛАДОК ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ ЛИНИИ»							
2	Исходные данные							
3	Матрица переналадок C							
4								
5	Номер детали	1	2	3	4	5		
6	1	10000000000	30	40	15	6		
7	2	10	10000000000	18	7	9		
8	3	30	30	10000000000	1	10		
9	4	35	10	35	10000000000	5		
10	5	9	8	7	6	10000000000		
11								
12	Задача Коши							
13	Матрица переменных							
14		1	2	3	4	5		Ограничения
15	1	0	0	0	0	0		=СУММ(B15:F15)
16	2	0	0	0	0	0		=СУММ(B16:F16)
17	3	0	0	0	0	0		=СУММ(B17:F17)
18	4	0	0	0	0	0		=СУММ(B18:F18)
19	5	0	0	0	0	0		=СУММ(B19:F19)
20	Ограничения	=СУММ(B15:B19)	=СУММ(C15:C19)	=СУММ(D15:D19)	=СУММ(E15:E19)	=СУММ(F15:F19)		
21	Целевая функция	=СУММПРОИЗВ(B6:F10;B15:F19)						Количество деталей
22		Переменные u	u2	u3	u4	u5		a
23			0	0	0	0		
24	Формулы для ограничений на дополнительные переменные u							
25								
26		u2	u3	u4	u5			
27	u2	=C\$23-C23+(H\$21-1)*C16	=C\$23-D23+(H\$21-1)*D16	=C\$23-E23+(H\$21-1)*E16	=C\$23-F23+(H\$21-1)*F16			
28	u3	=D\$23-C23+(H\$21-1)*C17	=D\$23-D23+(H\$21-1)*D17	=D\$23-E23+(H\$21-1)*E17	=D\$23-F23+(H\$21-1)*F17			
29	u4	=E\$23-C23+(H\$21-1)*C18	=E\$23-D23+(H\$21-1)*D18	=E\$23-E23+(H\$21-1)*E18	=E\$23-F23+(H\$21-1)*F18			
30	u5	=F\$23-C23+(H\$21-1)*C19	=F\$23-D23+(H\$21-1)*D19	=F\$23-E23+(H\$21-1)*E19	=F\$23-F23+(H\$21-1)*F19			
31								
32	Ответ: порядок запуска деталей в производство	1-5-3-4-2-1						
33								
34								
35								
36								
37								

Рисунок 6.7 Лист книги Excel для решения задачи о переналадки станков для 5 партий заготовок

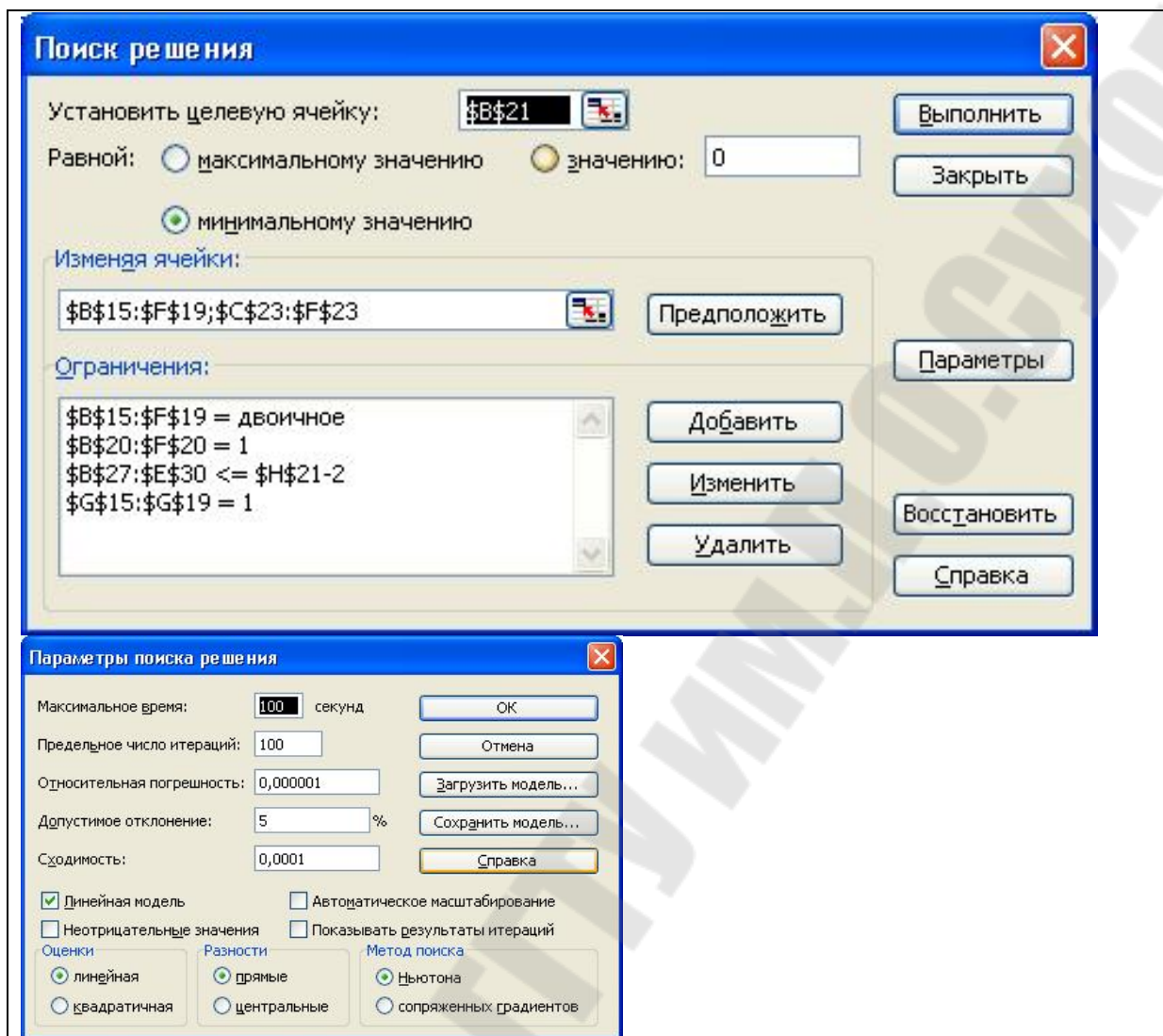


Рисунок 6.8 Решение задачи «Поиском решения»

## 7 ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 6 «ОПТИМИЗАЦИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ГОРЯЧЕЙ ОБРАБОТКИ»

**Цель работы** Овладение навыками использования метода ветвей и границ, метода «ближайшего соседа», метода перебора с возвратом для решения технологических задач.

### Постановка задачи

На линии горячей обработки, состоящей из 4 станков, нужно обработать 5 различных деталей. Все детали должны проходить вдоль линии в одном направлении через каждый станок. Заданы длительности  $p_{i,j}$  обработки детали  $i$  на  $j$ -м станке  $\forall i = \overline{1,5}, \forall j = \overline{1,4}$ . Требуется составить последовательность горячей обработки деталей, позволяющую закончить ее за минимальное время.

Поставленную задачу требуется решить:

- с помощью алгоритма Литтла;
- с помощью методом «ближайшего соседа»;
- с помощью функции метода перебора с возвратом в MathCAD;
- с помощью «Поиска решения» в Excel;
- поострить расписание горячей обработки (график Ганта в AutoCAD).

### Основные положения

Горячая обработка давлением отличается тем свойством, что каждая деталь может ожидать обработку только перед первым станком линии, а перед остальными ожидание недопустимо. В данной работе рассматриваются только компактные расписания горячей обработки, которые отличаются тем, что при выбранной последовательности сократить время обработки невозможно.

Задача о горячей обработке сводится к известной задаче о коммивояжере. С этой целью вводится в рассмотрение фиктивная  $(h+1)$ -я деталь, с нулевыми временами обработки  $p_{h+1,1}, p_{h+1,2}, \dots, p_{h+1,m} = 0$ , где  $h$  – количество деталей;  $m$  – станков. В качестве городов выступают детали, в качестве расстояний между ними – величины  $w_{i,j}$ , равные временам между моментами начала

обработки  $i$ -й и  $j$ -й деталей, при условии, что  $j$ -ая деталь обрабатывается сразу за  $i$ -й. Эти величины вычисляются по формуле

$$w_{i,j} = \max_{1 \leq k \leq m} \left\{ \sum_{s=1}^k p_{i,s} - \sum_{s=1}^{k-1} p_{j,s} \right\}.$$

Очевидно,  $w_{i,h+1} = p_{i,1} + p_{i,2} + \dots + p_{i,m}$ , т.е. обработка фиктивной детали начинается только после окончания всей предыдущей обработки.

### Содержание отчета

1. Название работы.
2. Постановка задачи.
3. Решение задачи «Поиском решения» в Excel.
4. Решение задачи методом перебора с возвратом в MathCAD.
5. Расписание горячей обработки (график Ганта - формат А3 (А4) в AutoCAD).
6. Решение задачи алгоритмом Литтла.
7. Решение задачи методом «ближайшего соседа».
8. Отчет должен быть оформлен в текстовом редакторе MSWord.

### Контрольные вопросы

1. Понятие горячей обработки.
2. Для чего при решении задачи вводится фиктивная деталь.
3. В чем заключается физический смысл величин  $w_{ij}$ .
4. Метод ближайшего соседа.

### Варианты заданий

Вариант 1

i/j	1	2	3	4
1	5	12	11	8
2	3	7	10	8
3	4	2	9	5
4	7	8	8	7
5	4	7	5	11

Вариант2

i/j	1	2	3	4
1	8	7	11	3
2	4	7	10	8
3	4	2	9	5
4	3	8	8	7
5	4	7	5	5

Вариант 3

i/j	1	2	3	4
1	8	7	3	8
2	12	4	10	7
3	4	2	9	5
4	7	8	8	7
5	4	8	5	5

Вариант4

i/j	1	2	3	4
1	4	6	11	8
2	13	7	10	8
3	7	5	3	5
4	9	8	8	7
5	5	7	5	9

Вариант 5

i/j	1	2	3	4
1	9	3	11	8
2	6	7	3	8
3	4	2	9	5
4	7	8	8	7
5	4	7	4	8

Вариант6

i/j	1	2	3	4
1	11	3	11	8
2	6	7	10	5
3	4	2	9	5
4	7	8	8	7
5	4	7	5	11

Вариант 7

i/j	1	2	3	4
1	5	6	11	8
2	7	9	10	3
3	4	2	9	5
4	7	8	7	7
5	11	7	5	11

Вариант8

i/j	1	2	3	4
1	7	12	6	11
2	3	4	10	8
3	4	10	9	5
4	10	8	9	7
5	4	7	5	6

Вариант 9

i/j	1	2	3	4
1	6	4	11	2
2	7	7	5	8
3	4	9	4	5
4	7	8	8	7
5	11	7	5	11

Вариант10

i/j	1	2	3	4
1	9	12	9	8
2	11	5	3	8
3	4	12	9	5
4	7	8	8	7
5	4	7	5	11

Вариант 11

i/j	1	2	3	4
1	5	6	13	8
2	13	7	10	5
3	14	12	9	5
4	7	5	8	7
5	12	7	5	11

Вариант12

i/j	1	2	3	4
1	15	10	3	8
2	3	7	10	8
3	4	12	9	5
4	7	8	8	7
5	4	7	5	11

Вариант 13

i/j	1	2	3	4
1	7	10	10	6
2	9	7	10	8
3	6	12	9	5
4	4	8	4	8
5	8	5	5	11

Вариант14

i/j	1	2	3	4
1	10	5	11	4
2	13	7	10	8
3	4	12	9	15
4	7	8	8	7
5	4	7	5	11

Вариант 15

i/j	1	2	3	4
1	15	12	11	18
2	13	7	10	18
3	14	2	9	15
4	17	8	8	17
5	14	7	5	11

Вариант16

i/j	1	2	3	4
1	8	17	11	13
2	4	17	10	18
3	4	12	9	15
4	3	18	8	17
5	4	17	5	15

Вариант 17

i/j	1	2	3	4
1	5	12	11	8
2	6	7	10	8
3	8	4	9	4
4	7	8	8	7
5	4	7	4	11

Вариант18

i/j	1	2	3	4
1	6	6	11	7
2	3	7	10	8
3	4	4	9	5
4	3	8	8	7
5	5	7	5	5

Вариант 19

i/j	1	2	3	4
1	3	12	11	6
2	5	7	10	8
3	7	3	9	6
4	7	8	8	7
5	4	7	5	11

Вариант20

i/j	1	2	3	4
1	9	7	9	3
2	4	8	10	8
3	8	3	11	6
4	9	8	8	7
5	4	7	5	5

Вариант 21

i/j	1	2	3	4
1	5	12	11	8
2	3	7	10	8
3	4	2	9	5
4	7	8	8	7
5	4	7	5	11

Вариант22

i/j	1	2	3	4
1	18	17	11	3
2	14	17	10	8
3	14	12	9	5
4	13	18	8	7
5	14	17	5	5

Вариант 23

i/j	1	2	3	4
1	5	5	7	8
2	3	7	8	6
3	4	5	9	5
4	7	8	7	7
5	4	7	5	11

Вариант24

i/j	1	2	3	4
1	2	4	8	4
2	3	6	7	8
3	4	2	9	5
4	3	8	8	7
5	4	7	5	5

Вариант 25

i/j	1	2	3	4
1	9	12	10	12
2	9	7	13	13
3	5	6	9	5
4	7	8	8	7
5	4	7	5	11

Вариант26

i/j	1	2	3	4
1	8	17	11	13
2	4	17	10	18
3	4	12	13	15
4	3	18	8	17
5	4	17	5	15

Вариант 27

i/j	1	2	3	4
1	2	2	3	8
2	2	5	4	5
3	4	2	9	5
4	3	6	8	7
5	4	7	5	4

Вариант28

i/j	1	2	3	4
1	3	5	6	5
2	9	7	8	8
3	6	5	6	6
4	3	8	8	7
5	4	7	5	6

### Методические рекомендации Решение задачи алгоритмом Литтла

Пример. В таблице 7.1 представлен вариант задания на лабораторную работу.

Таблица 7.1 Вариант №XX

j/i	1	2	3	4
1	3	7	5	4
2	6	4	3	5
3	9	3	7	6
4	7	8	6	9
5	5	4	7	4

Для удобства расчетов табл. 7.1 представим в виде таблицы 7.2.



Таблица 7.2 Матрица  $P_{ij}$  – время обработки  $i$  –ой детали на  $j$ -ом станке

	Станок1	Станок2	Станок3	Станок4
Деталь1	3	7	5	4
Деталь2	6	4	3	5
Деталь3	9	3	7	6
Деталь4	7	8	6	9
Деталь5	5	4	7	4

Для решения задачи алгоритмом Литтла введем фиктивную Деталь6. Составим таблицу 7.3 «Матрица времени между началами обработки», элементы которой вычисляются по следующим формулам:

$$w_{6,i} = 0, i = \overline{1,5}$$

$$w_{i,6} = \sum_{j=1}^5 P_{i,j},$$

$$W_{1,2} = \max\{3, 3+7-6, 3+7+5-6-4, 3+7+5+4-6-4-3\} = \max\{3, 4, 5, 6\} = 6$$

$$W_{1,3} = \max\{3, 3+7-9; 3+7+5-9-3, 3+7+5+4-9-3-7\} = \max\{3, 1, 3, 0\} = 3$$

$$W_{1,4} = \max\{3, 3+7-7, 3+7+5-7-8, 3+7+5+4-7-8-6\} = \max\{3, 3, 0, -2\} = 3$$

$$W_{1,5} = \max\{3, 3+7-5, 3+7+5-5-4, 3+7+5+4-5-4-7\} = \max\{3, 5, 6, 3\} = 6$$

$$W_{2,1} = \max\{6, 6+4-3, 6+4+3-3-7, 6+4+3+5-3-7-5\} = \max\{6, 7, 3, 3\} = 7$$

$$W_{2,3} = \max\{6, 6+4-9, 6+4+3-9-3, 6+4+3+5-9-3-7\} = \max\{6, 1, 1, -1\} = 6$$

$$W_{2,4} = \max\{6, 6+4-7, 6+4+3-7-8, 6+4+3+5-7-8-6\} = \max\{6, 3, -2, -3\} = 6$$

$$W_{2,5} = \max\{6, 6+4-5, 6+4+3-5-4, 6+4+3+5-5-4-7\} = \max\{6, 5, 4, 2\} = 6$$

$$W_{3,1} = \max\{9, 9+3-3, 9+3+7-3-7, 9+3+7+6-3-7-5\} = \max\{9, 9, 9, 10\} = 10$$

$$W_{3,2} = \max\{9, 9+3-6, 9+3+7-6-4, 9+3+7+6-6-4-3\} = \max\{9, 6, 9, 12\} = 12$$

$$W_{3,4} = \max\{9, 9+3-7, 9+3+7-7-8, 9+3+7+6-7-8-6\} = \max\{9, 5, 4, 4\} = 9$$

$$W_{3,5} = \max\{9, 9+3-5, 9+3+7-5-4, 9+3+7+6-5-4-7\} = \max\{9, 7, 10, 9\} = 10$$

$$W_{4,1} = \max\{7, 7+8-3, 7+8+6-3-7, 7+8+6+9-3-7-5\} = \max\{7, 12, 11, 15\} = 15$$

$$W_{4,2} = \max\{7, 7+8-6, 7+8+6-6-4, 7+8+6+9-6-4-3\} = \max\{7, 9, 11, 17\} = 17$$

$$W_{4,3} = \max\{7, 7+8-9, 7+8+6-9-3, 7+8+6+9-9-3-7\} = \max\{7, 6, 9, 11\} = 11$$

$$W_{4,5} = \max\{7, 7+8-5, 7+8+6-5-4, 7+8+6+9-5-4-7\} = \max\{7, 10, 12, 14\} = 14$$

$$W_{5,1} = \max\{5, 5+4-3, 5+4+7-3-7, 5+4+7+4-3-7-5\} = \max\{5, 6, 6, 5\} = 6$$

$$W_{5,2} = \max\{5, 5+4-6, 5+4+7-6-4, 5+4+7+4-6-4-3\} = \max\{5, 3, 6, 7\} = 7$$

$$W_{5,3} = \max\{5, 5+4-9, 5+4+7-9-3, 5+4+7+4-9-3-7\} = \max\{5, 0, 4, 1\} = 5$$

$$W_{5,4} = \max\{5, 5+4-7, 5+4+7-7-8, 5+4+7+4-7-8-6\} = \max\{5, 2, 1, -1\} = 5$$

Таблица 7.3 Матрица  $W$  времени между началами обработки

j \ i	1	2	3	4	5	6	$u_i$
1	$\infty$	6	3	3	6	19	3
2	7	$\infty$	6	6	6	18	6
3	10	12	$\infty$	9	10	25	9
4	15	17	11	$\infty$	14	30	11
5	6	7	5	5	$\infty$	20	5
6	0	0	0	0	0	$\infty$	0

Математическая модель задачи представляется в следующем виде:

$$\min : f(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij} x_{ij} \quad (7.1)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad (7.2)$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если есть переход из } i \text{ в } j \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}, \quad (7.3)$$

Для любых  $u_i, u_j$

$$u_i - u_j + (n-1)x_{i,j} \leq n-2, \quad (7.4)$$

где  $n$  – количество деталей ( $n=6$ ),  $w_{ij}$  – время между началами обработки  $i$ -ой и  $j$ -ой детали.

Для нахождения гамильтонова контура выполняется следующая последовательность действий.

1. Справа к табл. 7.3 присоединим столбец  $u_i$ , в котором записываем минимальные элементы строк. Вычитаем элементы  $u_i$  из соответствующих элементов матрицы  $W$  получим матрицу приведенную по строкам (табл. 7.4).

Таблица 7.4 Матрица  $W$  приведенная по строкам

i \ j	1	2	3	4	5	6
1	$\infty$	3	0	0	3	16
2	1	$\infty$	0	0	0	12
3	1	3	$\infty$	0	1	16
4	4	6	0	$\infty$	3	19
5	1	2	0	0	$\infty$	15
6	0	0	0	0	0	$\infty$
$v_j$	0	0	0	0		12

2. Внизу матрицы табл. 7.4 Присоединяем строку  $v_j$ , в которой записываем минимальные элементы столбцов. Вычитаем элементы  $v_j$  из соответствующих столбцов матрицы (табл. 7.5).

Таблица 7.5 Множество всех гамильтоновых контуров  $G^0$

i \ j	1	2	3	4	5	6
1	$\infty$	3	$0^0$	$0^0$	3	4
2	1	$\infty$	$0^0$	$0^0$	$0^0$	$0^3$
3	1	3	$\infty$	$0^1$	1	4
4	4	6	$0^3$	$\infty$	3	7
5	1	2	$0^0$	$0^0$	$\infty$	3
6	$0^1$	$0^2$	$0^0$	$0^0$	$0^0$	$\infty$

3. Вычислим константу приведения

$$\gamma = \sum_{i=1}^5 u_i + \sum_{j=1}^5 v_j = 3 + 6 + 9 + 11 + 5 + 12 = 46.$$

Нижней границей множества всех гамильтоновых контуров будет число  $\gamma = 46 = \varphi(G^0) \leq f(X)$ .

4. Находим степени нулей полностью приведенной матрицы табл. 7.5. Для этого мысленно заменяем в ней нули на  $\infty$  и устанавливаем сумму минимальных элементов соответствующей строки и столбца. Степени нулей записаны в правых верхних углах клеток, для которых  $c_{ij} = 0$ .
5. Определяем максимальную степень нуля. Она равна 3 и соответствует клеткам(2,6) и (4,3). Выберем любую. Таким

образом, претендентом на включение в гамильтонов контур является дуга (4, 3).

6. Разбиваем множество всех гамильтоновых контуров  $G^0$  на два  $G_{43}^1$  и  $G_{43}^1$ . Матрицу  $G_{43}^1$  с дугой (4, 3) получаем из табл. 7.5 путем вычеркивания строки 4 и столбца 3. Чтобы не допустить образования негамильтонова контура, заменяем элемент (3, 4) на  $\infty$  (табл. 7.6).

Таблица 7.6 Множество  $G_{43}^1$

	1	2	4	5	6	$u_i$
1	$\infty$	3	0	3	4	0
2	1	$\infty$	0	0	0	0
3	1	3	$\infty$	1	4	1
5	1	2	0	$\infty$	3	0
6	0	0	0	0	$\infty$	0
$v_j$	0	0	0	0	0	

7. Матрицу гамильтоновых контуров  $G_{43}^1$  получим из табл. 6.5 путем замены элемента (4,3) на  $\infty$  (табл. 7.7).

Таблица 7.7 Множество всех гамильтоновых контуров  $G_{43}^1$

$i$ $j$	1	2	3	4	5	6	$u_i$
1	$\infty$	3	0	0	3	4	0
2	1	$\infty$	0	0	0	0	0
3	1	3	$\infty$	0	1	4	0
4	4	6	$\infty$	$\infty$	3	7	3
5	1	2	0	0	$\infty$	3	0
6	0	0	0	0	0	$\infty$	0
$v_j$	0	0	0	0	0	0	

8. Делаем дополнительное приведение матрицы контуров  $G_{43}^1$ :

$$h_{43}^1 = \sum_i u_i + \sum_j v_j = 1 + 0 = 1 \quad (\text{табл. 7.8}). \quad \text{Нижняя граница}$$

$$\text{множества } G_{43}^1 \text{ равна } \varphi(G_{43}^1) = h_{43}^1 + \varphi(G^0) = 46 + 1 = 47.$$

Таблица 7.8 Приведенное множество  $G_{43}^1$

	1	2	4	5	6
1	$\infty$	3	$0^3$	3	4
2	1	$\infty$	$0^0$	$0^0$	$0^3$
3	$0^0$	2	$\infty$	$0^0$	3
5	1	2	$0^1$	$\infty$	3
6	$0^0$	$0^2$	$0^0$	$0^0$	$\infty$

9. Находим константу приведения для множества контуров  $G_{43}^1$ :

$$h_{43}^1 = \sum_i u_i + \sum_j v_j = 3 + 0 = 3. \text{ Следовательно, нижняя граница}$$

$$\varphi(G_{43}^1) = h_{43}^1 + \varphi(G^0) = 46 + 3 = 49.$$

10. Сравниваем нижние границы подмножеств  $G_{43}^1$  и  $G_{43}^1$ . Так как  $\varphi(G_{43}^1) = 47 < \omega(G_{43}^1) = 49$ , то дальнейшему ветвлению подвергаем множество  $G_{43}^1$  (табл. 7.8).

11. Узнаем степени нулей этой матрицы (табл. 7.8). Претендентом на включение в гамильтонов контур будет, например, дуга (1, 4). Разбиваем множество  $G_{43}^1$  на два подмножества  $G_{14}^2$  и  $G_{14}^2$  (табл. 7.9 и 7.10).

Таблица 7.9 Множество  $G_{14}^2$

	1	2	5	6	$u_i$
2	1	$\infty$	0	0	0
3	0	2	0	3	0
5	1	2	$\infty$	3	1
6	0	0	0	$\infty$	0
$v_j$	0	0	0	0	

Таблица 7.10 Множество  $G_{14}^2$

	1	2	4	5	6	$u_i$
1	$\infty$	3	$\infty$	3	4	3
2	1	$\infty$	0	0	0	0
3	0	2	$\infty$	0	3	0
5	1	2	0	$\infty$	3	0
6	0	0	0	0	$\infty$	0
$v_j$	0	0	0	0	0	

12. Определяем константы приведения этих матриц:  $h_{14}^2 = 1$ ,  $h_{14}^2 = 3$ .

Следовательно,

$$\varphi(G_{14}^2) = h_{14}^2 + \varphi(G_{43}^1) = 47 + 1 = 48, \quad \varphi(G_{14}^2) = h_{14}^2 + \varphi(G_{43}^1) = 47 + 3 = 50.$$

Так как  $\varphi(G_{14}^2) < \varphi(G_{14}^2)$ , то ветвлению подлежит подмножество  $G_{14}^2$  (табл. 7.11).

Таблица 7.11 Приведенное множество  $G_{14}^2$

	1	2	5	6
2	1	$\infty$	$0^0$	$0^2$
3	$0^0$	2	$0^0$	3
5	$0^1$	1	$\infty$	2
6	$0^0$	$0^1$	$0^0$	$\infty$

13. Узнаем степени нулей этой матрицы (табл. 7.11). Претендентом на включение в гамильтонов контур будет, например, дуга (2, 6). Разбиваем множество  $G_{14}^2$  на два подмножества  $G_{26}^3$  и  $G_{26}^3$  (табл. 7.12 и 7.13).

Таблица 7.12 Множество  $G_{26}^3$

	1	2	5	$u_i$
3	0	2	0	0
5	0	1	$\infty$	0
6	0	$\infty$	0	0
$v_j$	0	1	0	0

Таблица 7.13 Множество  $G_{26}^3$

	1	2	5	6	$u_i$
2	1	$\infty$	0	$\infty$	0
3	0	2	0	3	0
5	0	1	$\infty$	2	0
6	0	0	0	$\infty$	0
$v_j$	0	0	0	2	

14. Определяем константы приведения этих матриц:

$$h_{26}^3 = 1, \quad h_{26}^3 = 2.$$

Следовательно,  $\varphi(G_{26}^3) = 48 + 1 = 49$ ,  $\varphi(G_{26}^3) = 48 + 2 = 50$ . Так как  $\varphi(G_{26}^3) < \varphi(G_{26}^3)$ , то ветвлению подлежит подмножество  $G_{26}^3$  (табл. 6.14).

Таблица 7.14 Приведенное множество  $G_{26}^3$

	1	2	5
3	$0^0$	1	$0^0$
5	$0^0$	$0^1$	$\infty$
6	$0^0$	$\infty$	$0^0$

15. Узнаем степени нулей этой матрицы (табл. 7.14). Претендентом на включение в гамильтонов контур будет дуга (5, 2). Разбиваем множество  $G_{26}^3$  на два подмножества  $G_{52}^4$  и  $G_{52}^4$  (табл. 7.15 и 7.16).

Таблица 7.15 Множество  $G_{52}^4$

	1	5	$u_i$
3	0	0	0
6	0	0	0
$v_j$	0	0	

Таблица 7.16 Множество  $G_{52}^4$

	1	2	5	$u_i$
3	0	1	0	0
5	0	$\infty$	$\infty$	0
6	0	$\infty$	0	0
$v_j$	0	1	0	

Очевидно,  $\varphi(G_{52}^4) = 49$ ,  $\varphi(G_{52}^4) = 49 + 1 = 50$ . Следовательно, ветвлению нужно подвергнуть подмножество  $G_{52}^4$ . Но его матрица имеет размерность  $2 \times 2$ . Поэтому в гамильтонов контур следует включить дуги, соответствующие в матрице подмножества  $G_{52}^4$  нулевым элементам, т.е. дуги (3,5), (6,1).

Определим полученный гамильтонов контур по дереву ветвления (см. рис. 7.1). В него вошли дуги  $\{(5,2), (4,3), (3,5), (1,4), (2,6), (6,1)\}$ . Длина контура равна  $7+11+10+3+18+0=49$ . Так как границы оборванных ветвей больше длины контура  $1-4-3-5-2-6-1$ , то

этот контур имеет наименьшую длину. На рис. 7.2 представлен замкнутый маршрут минимальной длины.

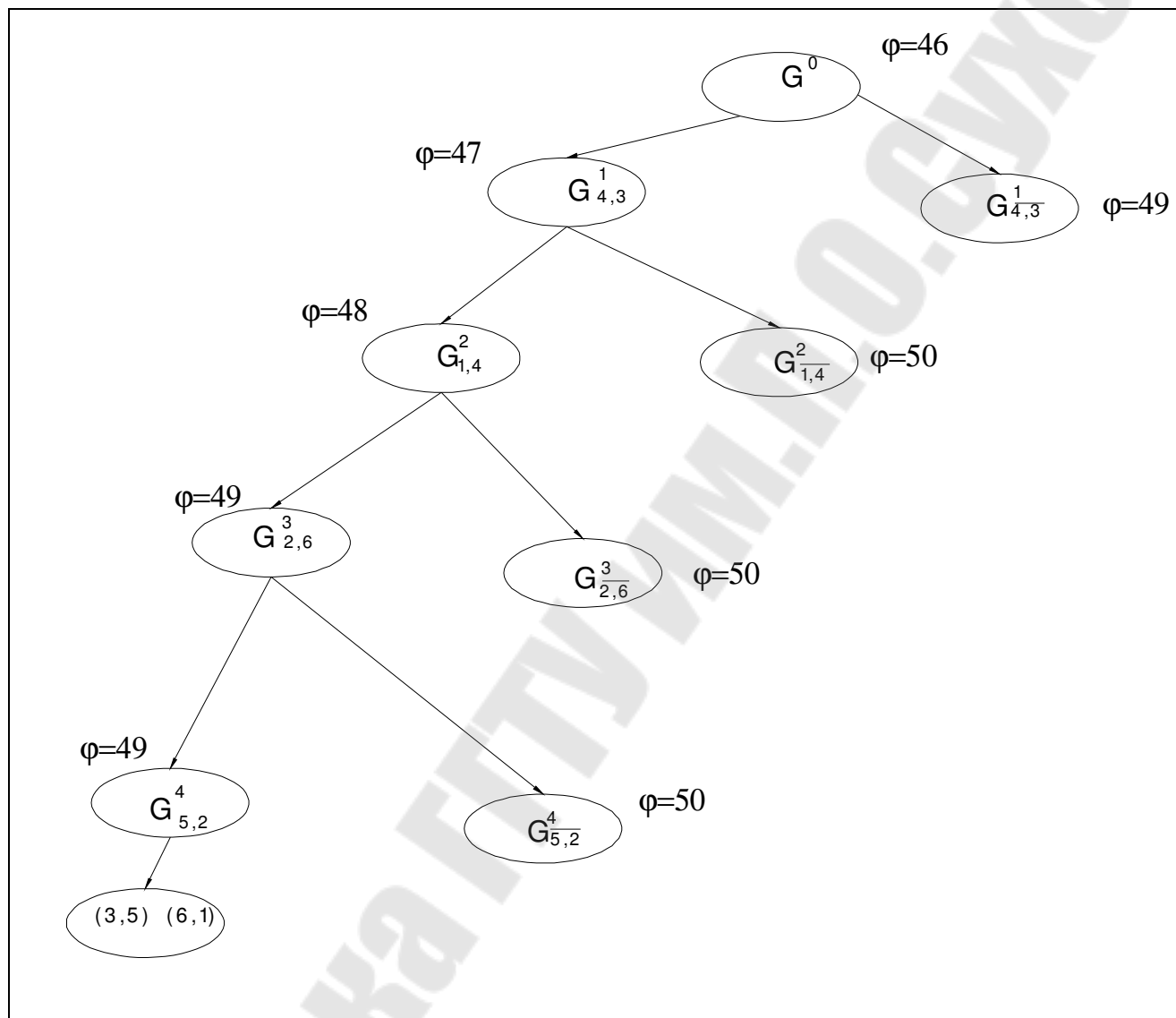


Рисунок 7.1 Дерево ветвлений

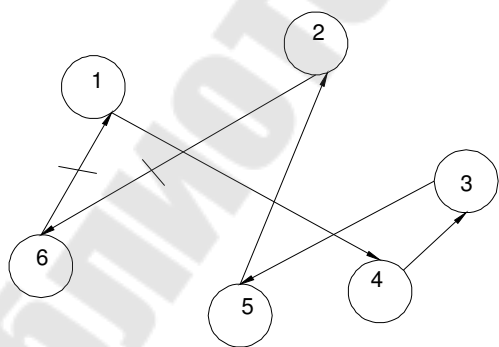


Рисунок 7.2 Гамильтонов контур



$$\text{Матрица решений } X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Исключив фиктивную деталь 6 из гамильтонова контура, получим требуемый гамильтонов путь: 1-4-3-5-2.

Для построения графика Ганта понадобятся значения таблицы 7.2 и из таблицы 7.3 следующие значения:

$$W_{1,4}=3;$$

$$W_{4,3}=11;$$

$$W_{3,5}=10;$$

$$W_{5,2}=7.$$

На рисунке 7.3 представлен график Ганта

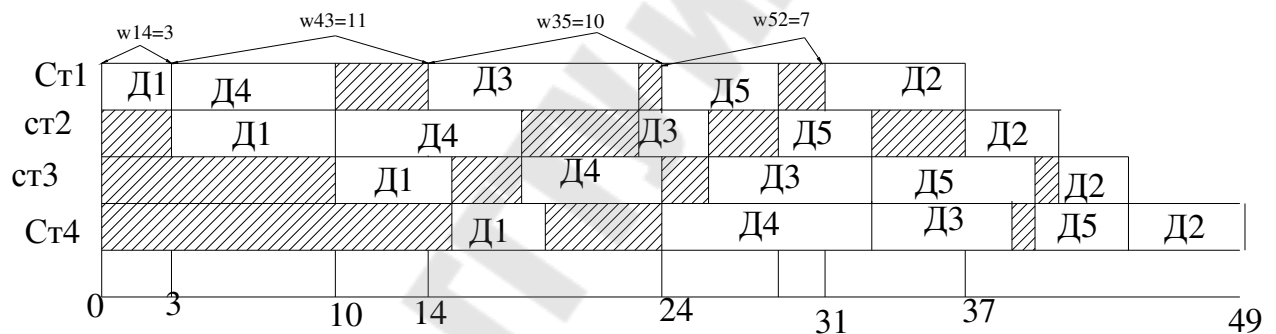


Рисунок 7.3 График Ганта

### Решение задачи коммивояжера методом «ближайшего соседа»

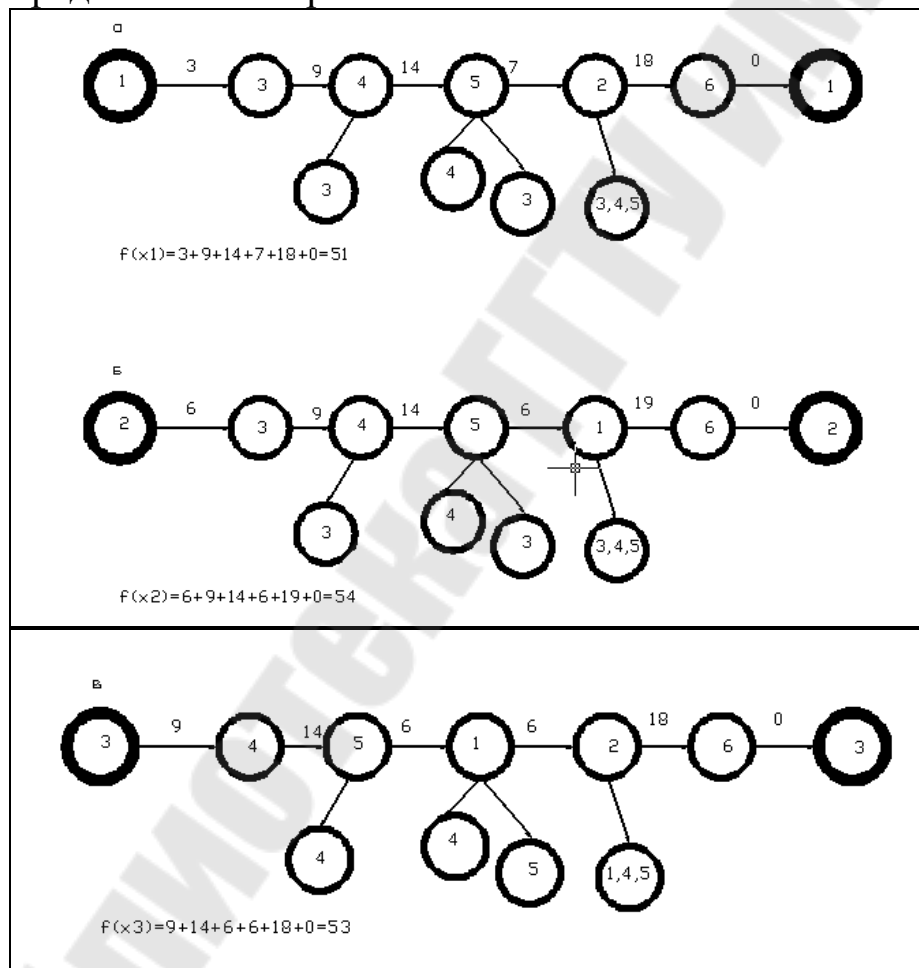
В настоящее время существует более ста приближенных методов решения задачи коммивояжера, среди которых прост метод ближайшего соседа. Он реализует требование включать в искомый замкнутый контур вершину, ближайшую к только что найденной. Алгоритм «ближайшего соседа» состоит в последовательном добавлении к начальной вершине ближайшей к ней и т.д. Метод очень прост, однако степень приближения к оптимальному решению зависит от выбора начальной точки. Поэтому алгоритм целесообразно применять, начиная с каждой вершины, и затем выбрать замкнутый контур, наименьшей длины. Отметим, что если ближайший сосед для некоторой вершины уже вошел в контур, то берется следующая по близости вершина и т.д.

При  $n \leq 40$  можно применять точные методы, при  $n > 40$  – приближенные типа «ближайшего соседа».

**Пример2.** Решить задачу методом «ближайшего соседа» для таблицы 7.3

Начнем с первой вершины. Ближайшей к ней является третья вершина:  $\min w_{ij}=3$ . Процесс нахождения минимального контура целесообразно сопровождать построением дерева ветвления. Если ближайшая вершина уже попала в контур, то блокируем ее и переходим к следующей по степени близости. Ближайшей к третьей вершине является четвертая, а к четвертой – третья. Но она уже вошла в контур, поэтому блокируем ее и находим следующую по близости вершину – пятую, и т.д. дерево ветвлений, начиная с первой вершины, представлено на рисунке 6.4а.

Для начала с других вершин соответствующие деревья представлены на рис. 7.4б-7.4е.



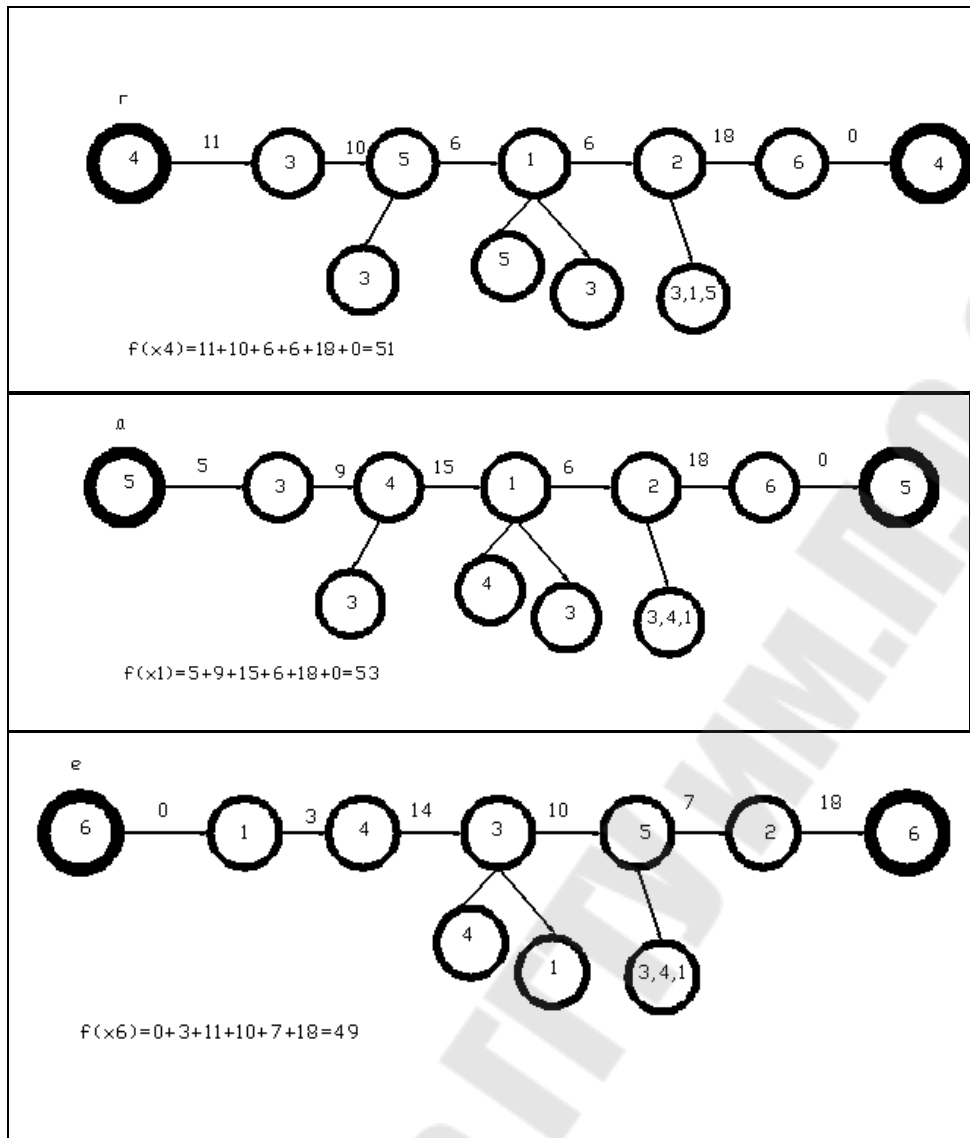


Рисунок 7.4 Деревья ветвлений «ближайшего соседа»

В результате получим  $\min\{f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4), f(x_5), f(x_6)\} = \min\{51, 54, 53, 51, 53, 49\} = 49$ .

Таким образом, минимальным контуром, найденным способом «ближайшего соседа» является контур  $\Gamma_6 = \{6-1-4-3-5-2-6\}$ ,  $f(\Gamma_6) = 49$ . Выше было найдено точное решение алгоритмом Литтла (см. рис. 7.2):  $\Gamma^* = \{6-1-4-3-5-2-6\}$ ,  $f(\Gamma^*) = 49$ .

В данном случае точное и приближенное решения совпадают. В действительности при  $n < 40$ , ошибка быть значительной.

### **Решение задачи о последовательности горячей обработки «Поиском решения» в Excel**

На рис. 7.5 - 7.6 представлены 2 страницы листа книги Excel необходимый для реализации математической модели задачи (7.1)-(7.4).

В ячейках B4:D8 занесены исходные данные для обработки 5 деталей на 4 станках. В ячейке H28 занесено количество деталей (6). В ячейках B12:F17 находятся данные и необходимые формулы для определения матрицы времени между началами обработки  $W$ . В ячейках B21:G26 будет находится оптимальное решение (первоначально это область заполняется нулями). В ячейках C30:G30 располагаются дополнительные переменные для формулы (7.4) (первоначально это область заполняется нулями). В ячейку B28 занесена формула целевой функции (7.1), использующая функцию Excel СУММПРОИЗВ. В ячейках B27:G27, H21:H26 занесены формулы (7.2), использующие функцию Excel СУММ. В ячейках B33:F37 записаны формулы (7.4).

На рис. 7.7 показана реализация задачи (7.1)-(7.4) в Excel.

1	A	B	C	D
2	<b>Оптимизация последовательности горячей обработки</b>			
3	<b>Матрица времен обработки</b>			
4		Станок1	Станок2	Станок3
5	Деталь 1	3	7	6
6	Деталь 2	6	4	3
7	Деталь 3	9	3	7
8	Деталь 4	7	8	6
9	Деталь 5	5	4	7
10	<b>Матрица переналадок W между началами обработки</b>			
11	Номер детали	1	2	3
12	1	1000000000	=МАКС(B4;B4+C4-B5;B4+C4+D4-B5-C5;B4+C4+D4+E4-B5-C5-D5)	=МАКС(B4;B4+C4-B5;B4+C4+D4-B5-C5;B4+C4+D4+E4-B5-C5-D5)
13	2	=МАКС(B5;B5+C5-B4;B5+C5+D5-B4-C5;B5+C5+D5+E5-B4-C4-D4)	1000000000	=МАКС(B5;B5+C5-B5;B5+C5+D5-B5-C5;B5+C5+D5+E5-B5-C5-D5)
14	3	=МАКС(B6;B6+C6-B4;B6+C6+D6-B4-C4;B6+C6+D6+E6-B4-C4-D4)	=МАКС(B6;B6+C6-B5;B6+C6+D6-B5-C5;B6+C6+D6+E6-B5-C5-D5)	1000000000
15	4	=МАКС(B7;B7+C7-B4;B7+C7+D7-B4-C4;B7+C7+D7+E7-B4-C4-D4)	=МАКС(B7;B7+C7-B5;B7+C7+D7-B5-C5;B7+C7+D7+E7-B5-C5-D5)	=МАКС(B7;B7+C7-B6;B7+C7+D7-B6-C6;B7+C7+D7+E7-B6-C6-D6)
16	5	=МАКС(B8;B8+C8-B4;B8+C8+D8-B4-C4;B8+C8+D8+E8-B4-C4-D4)	=МАКС(B8;B8+C8-B5;B8+C8+D8-B5-C5;B8+C8+D8+E8-B5-C5-D5)	=МАКС(B8;B8+C8-B6;B8+C8+D8-B6-C6;B8+C8+D8+E8-B6-C6-D6)
17	6	0	0	0
18	<b>Задача Коммивояжера</b>			
19	<b>Матрица переменных</b>			
20		1	2	3
21	1	0	0	0
22	2	0	0	0
23	3	0	0	0
24	4	0	0	0
25	5	0	0	0
26	6	0	0	0
27	Ограничения	=СУММ(B21:B26)	=СУММ(C21:C26)	=СУММ(D21:D26)
28	Целевая функция	=СУММПРОИЗВ(B12:G17;B21:G26)		
29	Переменные u		u2	u3
30			0	0
31	<b>Формулы для ограничений на дополнительные переменные u</b>			
32		u2	u3	u4
33	u2	=С\$30-С30+(\$H\$28-1)*C22	=С\$30-Д30+(\$H\$28-1)*D22	=С\$30-Е30+(\$H\$28-1)*E22
34	u3	=D\$30-С30+(\$H\$28-1)*C23	=D\$30-Д30+(\$H\$28-1)*D23	=D\$30-Е30+(\$H\$28-1)*E23
35	u4	=E\$30-С30+(\$H\$28-1)*C24	=E\$30-Д30+(\$H\$28-1)*D24	=E\$30-Е30+(\$H\$28-1)*E24
36	u5	=F\$30-С30+(\$H\$28-1)*C25	=F\$30-Д30+(\$H\$28-1)*D25	=F\$30-Е30+(\$H\$28-1)*E25
37	u6	=G\$30-С30+(\$H\$28-1)*C26	=G\$30-Д30+(\$H\$28-1)*D26	=G\$30-Е30+(\$H\$28-1)*E26
38	Решения задачи: 1-4-3-5-2-6-1			
39	Ответ: порядок запуска деталей в производство 1-4-3-5-2			

Рисунок 7.5 Страница1 листа книги Excel для решения задачи о последовательности горячей обработки.

	E	F	G	H
1				
2				
3	Станок4			
4	4			
5	5			
6	6			
7	9			
8	4			
9				
10				
11	4	5	6	
12	=МАКС( B4;B4+C4-B7;B4+C4+D4-B7-C7;B4+C4+D4+E4-B7-C7-D7)	=МАКС(B4;B4+C4-B8;B4+C4+D4-B8-C8;B4+C4+D4+E4-B8-C8-D8)	=СУММ(B4;E4)	
13	=МАКС( B5;B5+C5-B7;B5+C5+D5-B7-C7;B5+C5+D5+E5-B7-C7-D7)	=МАКС(B5;B5+C5-B8;B5+C5+D5-B8-C8;B5+C5+D5+E5-B8-C8-D8)	=СУММ(B5;E5)	
14	=МАКС( B6;B6+C6-B7;B6+C6+D6-B7-C7;B6+C6+D6+E6-B7-C7-D7)	=МАКС(B6;B6+C6-B8;B6+C6+D6-B8-C8;B6+C6+D6+E6-B8-C8-D8)	=СУММ(B6;E6)	
15	10000000000	=МАКС(B7;B7+C7-B8;B7+C7+D7-B8-C8;B7+C7+D7+E7-B8-C8-D8)	=СУММ(B7;E7)	
16	=МАКС(B8;B8+C8-B7;B8+C8+D8-B7-C7;B8+C8+D8+E8-B7-C7-D7)	10000000000	=СУММ(B8;E8)	
17	0	0	10000000000	
18				
19				
20	4	5	6	Ограничения
21	0	0	0	=СУММ(B21:G21)
22	0	0	0	=СУММ(B22:G22)
23	0	0	0	=СУММ(B23:G23)
24	0	0	0	=СУММ(B24:G24)
25	0	0	0	=СУММ(B25:G25)
26	0	0	0	=СУММ(B26:G26)
27	=СУММ(E21:E26)	=СУММ(F21:F26)	=СУММ(G21:G26)	
28			Количество деталей	6
29	u4	u5	u6	
30	0	0	0	
31				
32	u5	u6		
33	=C\$30-F30+(\$H\$28-1)*F22	=C\$30-G30+(\$H\$28-1)*G22		
34	=D\$30-F30+(\$H\$28-1)*F23	=D\$30-G30+(\$H\$28-1)*G23		
35	=E\$30-F30+(\$H\$28-1)*F24	=E\$30-G30+(\$H\$28-1)*G24		
36	=F\$30-F30+(\$H\$28-1)*F25	=F\$30-G30+(\$H\$28-1)*G25		
37	=G\$30-F30+(\$H\$28-1)*F26	=G\$30-G30+(\$H\$28-1)*G26		
38				
39				

Рисунок 7.6 Страница 2 листа книги Excel для решения задачи о последовательности горячей обработки.

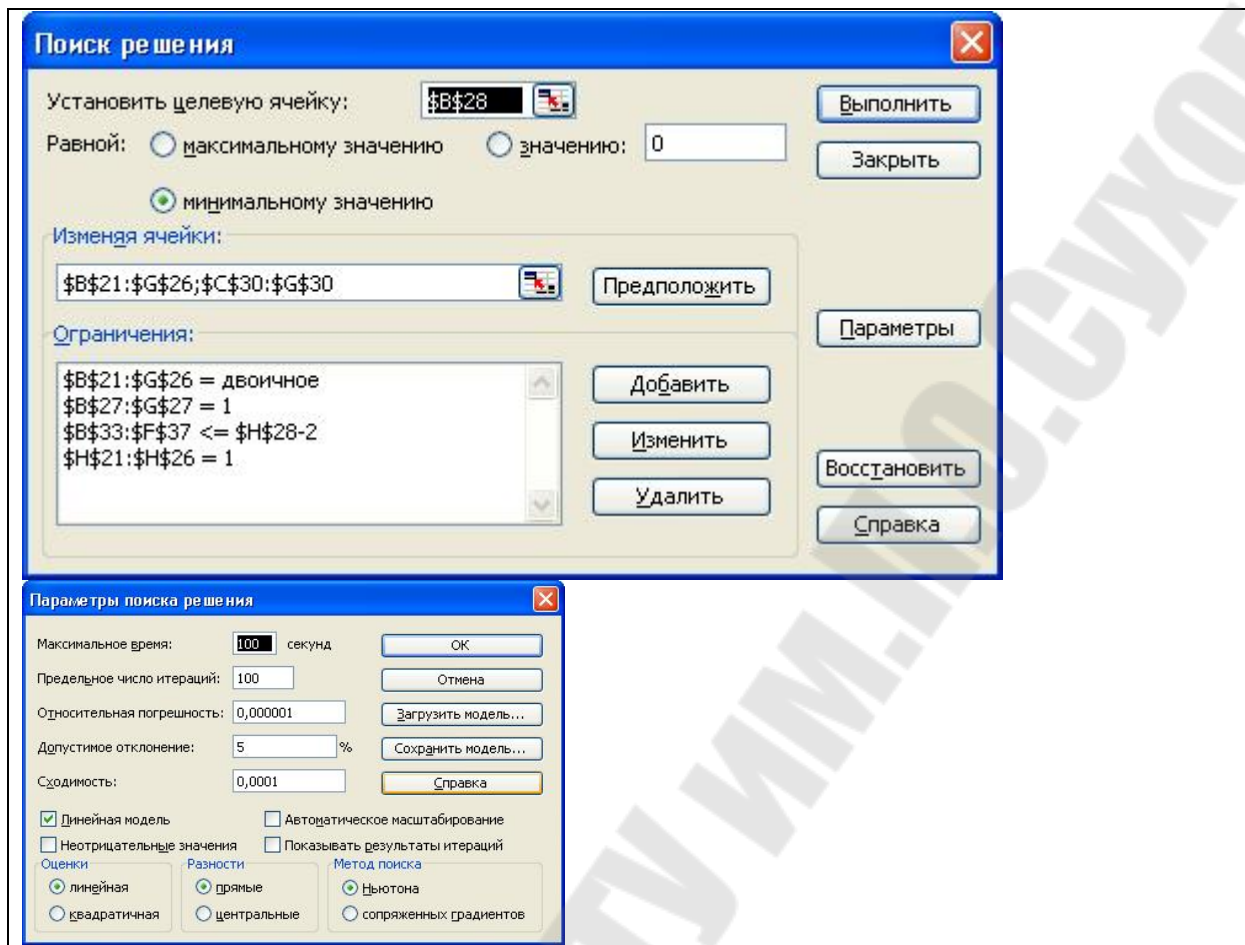


Рисунок 7.7 Решение задачи «Поиском решения»

## **8 ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №7 «ОПТИМИЗАЦИЯ ПОРЯДКА ОБРАБОТКИ ДЕТАЛЕЙ НА ТРЕХ СТАНКАХ»**

**Цель работы.** Применение алгоритма Джонсона (для частного случая) для составления оптимального расписания обработки деталей на трех станках.

### **Постановка задачи**

1. Определить оптимальный порядок обработки деталей на трех станках.
2. Разработать алгоритм и написать программу, реализующую алгоритм Джонсона.
3. Вычислить суммарное время простоя станков.
4. Программный код может быть реализован по выбору: на языке Pascal, в системе Delphi, программный код в MathCad.
5. Построить график Ганта в AutoCAD.

### **Содержание отчета**

1. Название работы.
2. Постановка задачи.
3. Исследование математической модели задачи.
4. Блок-схема алгоритма расчета
5. Программный код расчета.
6. График Ганта - формат А3 (А4) AutoCAD.
7. Отчет должен быть оформлен в текстовом редакторе MSWord.

### **Контрольные вопросы**

1. Задачи теории расписаний.
2. Алгоритмы решения задач теории расписаний для одной машины.
3. Задачи теории расписаний для двух машин.
4. Алгоритм Джонсона.
5. Задачи теории расписаний для трех машин (частные случаи).



## Варианты заданий

### Вариант 1

Станок/ Деталь	Расточка	Фрезе ровка	Чистовая обработка
Д1	7	6	4
Д2	11	5	12
Д3	8	3	7
Д4	7	5	8
Д5	6	3	3
Д6	9	4	6

### Вариант 2

Станок/ Деталь	Расточка	Фрезеро вка	Чистовая обработка
Д1	5	6	11
Д2	9	5	6
Д3	7	3	7
Д4	10	5	9
Д5	11	3	10
Д6	6	4	8

### Вариант 3

Станок/ Деталь	Расточка	Фрезе ровка	Чистовая обработка
Д1	7	4	4
Д2	11	5	12
Д3	8	3	7
Д4	7	5	8
Д5	6	3	3
Д6	5	2	6

### Вариант 4

Станок/ Деталь	Расточка	Фрезеро вка	Чистовая обработка
Д1	5	6	11
Д2	9	5	6
Д3	7	3	7
Д4	10	5	9
Д5	11	3	10
Д6	6	4	8

### Вариант 5

Станок/ Деталь	Расточка	Фрезе ровка	Чистовая обработка
Д1	7	6	4
Д2	11	5	12
Д3	8	3	7
Д4	7	5	8
Д5	10	7	3
Д6	9	4	6

### Вариант 6

Станок/ Деталь	Расточка	Фрезеро вка	Чистовая обработка
Д1	5	6	11
Д2	9	5	14
Д3	7	10	10
Д4	10	5	13
Д5	11	3	10
Д6	6	4	12

### Вариант 7

Станок/ Деталь	Расточка	Фрезе ровка	Чистовая обработка
Д1	4	3	4
Д2	5	4	12
Д3	8	3	7
Д4	7	3	8
Д5	6	2	3
Д6	9	4	6

### Вариант 8

Станок/ Деталь	Расточка	Фрезеро вка	Чистовая обработка
Д1	5	6	11
Д2	9	5	13
Д3	7	8	12
Д4	10	5	9
Д5	11	8	10
Д6	6	4	8

### Вариант 9

Станок/ Деталь	Расточка	Фрезе ровка	Чистовая обработка
Д1	9	6	4
Д2	10	5	12
Д3	14	9	7
Д4	12	5	8
Д5	11	9	3
Д6	9	4	6

### Вариант 10

Станок/ Деталь	Расточка	Фрезеро вка	Чистовая обработка
Д1	5	6	11
Д2	9	5	10
Д3	7	10	12
Д4	10	5	11
Д5	11	10	10
Д6	6	4	10

### Вариант 11

Станок/ Деталь	Расточка	Фрезе ровка	Чистовая обработка
Д1	10	10	4
Д2	11	5	12
Д3	18	9	7
Д4	17	5	8
Д5	16	9	3
Д6	10	8	6

### Вариант 12

Станок/ Деталь	Расточка	Фрезеро вка	Чистовая обработка
Д1	5	4	5
Д2	9	5	6
Д3	7	3	7
Д4	10	5	9
Д5	11	3	5
Д6	6	4	6

### Вариант 13

Станок/ Деталь	Расточка	Фрезе ровка	Чистовая обработка
Д1	8	6	4
Д2	11	5	12
Д3	8	8	7
Д4	10	5	8
Д5	11	8	3
Д6	9	4	6

### Вариант 14

Станок/ Деталь	Расточка	Фрезеро вка	Чистовая обработка
Д1	5	6	11
Д2	9	5	12
Д3	7	9	14
Д4	10	5	9
Д5	11	9	10
Д6	6	4	13

### Вариант 15

Станок/ Деталь	Расточка	Фрезе ровка	Чистовая обработка
Д1	6	6	4
Д2	11	5	12
Д3	8	3	7
Д4	7	5	8
Д5	6	3	3
Д6	7	4	6

### Вариант 16

Станок/ Деталь	Расточка	Фрезеро вка	Чистовая обработка
Д1	5	4	15
Д2	9	5	6
Д3	7	3	7
Д4	10	5	9
Д5	11	3	5
Д6	6	4	8

### Вариант 17

Станок/ Деталь	Расточка	Фрезе ровка	Чистовая обработка
Д1	10	6	4
Д2	11	5	12
Д3	8	7	7
Д4	11	5	8
Д5	7	7	3
Д6	9	4	6

### Вариант 18

Станок/ Деталь	Расточка	Фрезеро вка	Чистовая обработка
Д1	5	6	11
Д2	9	5	7
Д3	7	3	7
Д4	10	5	9
Д5	11	7	10
Д6	6	4	7

### Вариант 19

Станок/ Деталь	Расточка	Фрезе ровка	Чистовая обработка
Д1	9	6	4
Д2	11	5	12
Д3	8	5	7
Д4	10	7	8
Д5	12	8	3
Д6	9	4	6

### Вариант 20

Станок/ Деталь	Расточка	Фрезеро вка	Чистовая обработка
Д1	5	7	11
Д2	9	5	12
Д3	7	8	9
Д4	10	5	9
Д5	11	6	10
Д6	6	4	8

### Вариант 21

Станок/ Деталь	Расточка	Фрезе ровка	Чистовая обработка
Д1	17	6	4
Д2	11	5	12
Д3	8	7	7
Д4	17	5	8
Д5	16	9	3
Д6	9	8	6

### Вариант 22

Станок/ Деталь	Расточка	Фрезеро вка	Чистовая обработка
Д1	5	6	11
Д2	9	5	14
Д3	7	9	12
Д4	10	5	9
Д5	11	8	10
Д6	6	7	13

### Вариант 23

Станок/ Деталь	Расточка	Фрезе ровка	Чистовая обработка
Д1	17	6	4
Д2	11	7	12
Д3	18	9	7
Д4	10	8	8
Д5	16	10	3
Д6	10	9	6

### Вариант 24

Станок/ Деталь	Расточка	Фрезеро вка	Чистовая обработка
Д1	5	6	11
Д2	9	9	11
Д3	7	10	14
Д4	10	7	10
Д5	11	9	10
Д6	6	8	12

### Вариант 25

Станок/ Деталь	Расточка	Фрезе ровка	Чистовая обработка
Д1	7	2	4
Д2	4	4	12
Д3	8	3	7
Д4	7	2	8
Д5	6	3	3
Д6	4	4	6

### Вариант 26

Станок/ Деталь	Расточка	Фрезеро вка	Чистовая обработка
Д1	5	4	5
Д2	9	2	6
Д3	7	3	7
Д4	10	2	8
Д5	11	3	5
Д6	6	4	4

### Вариант 27

Станок/ Деталь	Расточка	Фрезе ровка	Чистовая обработка
Д1	5	4	4
Д2	8	5	12
Д3	6	3	7
Д4	7	5	8
Д5	6	3	3
Д6	5	4	6

### Вариант 28

Станок/ Деталь	Расточка	Фрезеро вка	Чистовая обработка
Д1	5	4	11
Д2	9	5	6
Д3	7	3	7
Д4	10	5	5
Д5	11	3	10
Д6	6	4	8

### Вариант 29

Станок/ Деталь	Расточка	Фрезе ровка	Чистовая обработка
Д1	7	6	4
Д2	6	5	12
Д3	8	3	7
Д4	7	4	8
Д5	6	5	3
Д6	9	4	6

### Вариант 30

Станок/ Деталь	Расточка	Фрезеро вка	Чистовая обработка
Д1	5	6	6
Д2	9	5	6
Д3	7	3	7
Д4	10	5	9
Д5	11	6	8
Д6	6	4	8

## Методические рекомендации

### Задача теории расписаний с двумя и тремя последовательными обслуживающими устройствами (Задача Джонсона)

Имеется множество  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  работ, которые должны быть выполнены на  $m$  машинах. Время работы  $i$  на машине  $j$  обозначим через  $t_{i,j}$  ( $i = 1 \div n$ ,  $j = 1 \div m$ ), предполагая его заранее известным.

Порядок выполнения операций, составляющих работу, может быть как одним и тем же, так и различным для разных работ.

Задача построения расписания состоит в указании порядка в котором должны выполняться работы, чтобы суммарное время простоя всех машин было минимальным. При построении любого расписания в том числе и оптимального должны учитываться следующие условия:

1. В любой момент времени на машине не может выполняться больше одной работы.
2. Одна работа в фиксированный момент времени может занимать только одну машину.

Сначала рассмотрим случай, когда число машин равно двум ( $M_1$  и  $M_2$ ). Каждая работа состоит из двух операций, которые выполняются сначала на первой машине, затем на второй. Время работы  $i$  на первой, а затем на второй машине равно  $t_{i,1}$  и  $t_{i,2}$  соответственно.

Считая, что порядок выполнения операций на первой и второй машине один и тот же, приведем следующий алгоритм построения оптимального расписания, который называется алгоритмом Джонсона.

Предварительный шаг. Записываем матрицу

$\|t_{i,j}\|$  ( $i = 1 \div n, j = 1, 2$ ) времени выполнения операций. Переходим к первому шагу.

Шаг 1. Выбираем в матрице  $\|t_{i,j}\|$  минимальный элемент. Если он находится в первой строке (соответствующей первой машине), то данную работу выполняем первой, если во второй строке – то последней. Переходим к шагу два.

Шаг 2. Исключаем из рассмотрения время выполнения операции, относящееся к упорядоченной работе. Если множество элементов матрицы  $\|t_{i,j}\|$  пусто, то задача решена. Если нет переходим к первому шагу.

Таким образом, для построения оптимального расписания Шаг1 и Шаг2 должны быть повторены  $n$  раз. Если же случится, что  $t_{i,1} = t_{i,2}$ , то эта работа может быть упорядочена как по  $t_{i,1}$ , так и по  $t_{i,2}$ .

Перейдем к случаю трех машин. Итак,

- $m=3$  - число машин;

- $N = \{1, 2, \dots, n\}$  - множество работ;
- $t_{ij}$  - время выполнения  $i$ -ой работы на  $j$ -ой машине;
- предполагается, что у всех работ одна и та же последовательность прохождения по машинам.

В этой ситуации справедливы нижеследующие два утверждения, которые приводятся без доказательства.

Утверждение №1. Пусть работы можно пронумеровать так, что окажутся выполненными одновременно следующие неравенства:

$$t_{11} \leq t_{21} \leq K \leq t_{n1},$$

$$t_{12} \leq t_{22} \leq K \leq t_{n2},$$

$$t_{13} \leq t_{23} \leq K \leq t_{n3},$$

$$t_{i1} \leq t_{i2} \leq t_{i3}, \forall i.$$

Тогда суммарный простой машин будет минимальным при следующем порядке запуска работ на исполнение: 1—2—...— $n$ .

Утверждение №2. Пусть для матрицы  $(t_{ij})$  выполнено хотя бы одно из двух следующих условий:

$$\min_i t_{i1} \geq \max_i t_{i2}$$

$$\min_i t_{i3} \geq \max_i t_{i2}$$

Построим новую матрицу  $(\tau_{ij})$ , в которой  $i=1, 2, \dots, n, j=1, 2$  и  $\tau_{i1} = t_{i1} + t_{i2}, \tau_{i2} = t_{i2} + t_{i3}$ , и будем считать ее матрицей времен задачи Джонсона для двух машин в последовательном варианте и множества тех же работ  $N = \{1, 2, \dots, n\}$ . Тогда суммарное время простоя исходных трех машин при выполнении исходных работ будет минимальным, если эти работы направлять на исполнение в том порядке, который является оптимальным в задаче с матрицей  $(\tau_{ij})$ .

### Пример выполнения работы

**Пример.** Построить оптимальное расписания для обработки 6 деталей на трех станках. Исходные данные представлены в таб. 8.1

**Решение.** Так как в задании дано три обслуживающих устройства (станка), то сначала проверим выполнимость Утверждения 2.

Итак, минимальное время на расточку (в других примерах на чистовую обработку) равен 6 мин, что больше или равно максимальному времени на фрезерования - 6 мин.

Таблица 8.1 Вариант № XX

Станок/Деталь	Расточка	Фрезеровка	Чистовая обработка
Д1	7	6	4
Д2	6	5	12
Д3	8	3	7
Д4	7	4	8
Д5	6	5	3
Д6	9	4	6

Тогда исходные данные можно представить в следующем виде (см табл. 8.2)

Таблица 8.2 Сведение задачи к частному случаю

	Д1	Д2	Д3	Д4	Д5	Д6
$t_{\text{расточка}} + t_{\text{фрезерования}}$	13	11	11	11	11	13
$T_{\text{чистобработка}} + t_{\text{фрезерования}}$	10	17	10	12	8	10
Оптимальный порядок обработки	4	1	3	2	6	5

Применим алгоритм Джонсона.

Предварительный шаг. Построим матрицу времен  $\|t_{i,j}\|$

$$\|t_{i,j}\| = \begin{pmatrix} 13 & 11 & 11 & 11 & 11 & 13 \\ 10 & 17 & 10 & 12 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

Шаг1 Выбираем в матрице  $\|t_{i,j}\|$  минимальный элемент -  $t_{2,5} = 8$ . Так как он находится во второй строке, то деталь Д5 будем обрабатывать последней. Переходим к Шагу 2.

Шаг 2. Исключаем из рассмотрения 5-ый столбец матрицы  $\|t_{i,j}\|$ , относящийся к упорядоченной детали Д5. Множество элементов матрицы  $\|t_{i,j}\|$  не пусто. Переходим к Шагу 1.

Шаг1 Выбираем в матрице  $\|t_{i,j}\|$  минимальный элемент -  $t_{2,1} = t_{2,3} = t_{2,6} = 10$ . Выберем, например,  $t_{2,6}$ . Так как он находится во второй строке, то деталь Д6 будем обрабатываться предпоследней (перед деталью Д5). Переходим к Шагу 2.

Шаг 2. Исключаем из рассмотрения 6-ый столбец матрицы  $\|t_{i,j}\|$ , относящийся к упорядоченной детали Д6. Множество элементов матрицы  $\|t_{i,j}\|$  не пусто. Переходим к Шагу 1.

Шаг1 Выбираем в матрице  $\|t_{i,j}\|$  минимальный элемент -  $t_{2,1} = t_{2,3} = 10$ . Выберем, например,  $t_{2,1}$ . Так как он находится во второй строке, то деталь Д1 будем обрабатывать перед деталью Д6. Переходим к Шагу 2.

Шаг 2. Исключаем из рассмотрения 1-ый столбец матрицы  $\|t_{i,j}\|$ , относящийся к упорядоченной детали Д1. Множество элементов матрицы  $\|t_{i,j}\|$  не пусто. Переходим к Шагу 1.

Шаг1 Выбираем в матрице  $\|t_{i,j}\|$  минимальный элемент -  $t_{2,3} = 10$ . Так как он находится во второй строке, то деталь Д3 будем обрабатывать перед деталью Д1. Переходим к Шагу 2.

Шаг 2. Исключаем из рассмотрения 3-ый столбец матрицы  $\|t_{i,j}\|$ , относящийся к упорядоченной детали Д3. Множество элементов матрицы  $\|t_{i,j}\|$  не пусто. Переходим к Шагу 1.

Шаг1 Выбираем в матрице  $\|t_{i,j}\|$  минимальный элемент -  $t_{1,2} = t_{1,4} = 11$ . Выберем, например,  $t_{1,2}$ . Так как он находится в первой строке, то деталь Д2 будем обрабатывать первой. Переходим к Шагу 2.

Шаг 2. Исключаем из рассмотрения 2-ой столбец матрицы  $\|t_{i,j}\|$ , относящийся к упорядоченной детали Д2. Множество элементов матрицы  $\|t_{i,j}\|$  не пусто. Переходим к Шагу 1.

Шаг1 Выбираем в матрице  $\|t_{i,j}\|$  минимальный элемент -  $t_{1,4} = 11$ . Так как он находится в первой строке, то деталь Д4 будем обрабатывать после детали Д2. Переходим к Шагу 2.

Шаг 2. Исключаем из рассмотрения 4-ый столбец матрицы  $\|t_{i,j}\|$ , относящийся к упорядоченной детали Д4. Множество элементов матрицы  $\|t_{i,j}\|$  пусто.

Итак, получено оптимальное расписание: (Д2, Д4, Д3, Д1, Д6, Д5).  
Результат занесем в последнюю строку таблицу 8.2.



В данном примере вариантов оптимальных расписаний много, укажем еще несколько из них:

(Д4, Д2, Д6, Д3, Д1, Д5)

(Д4, Д2, Д1, Д6, Д3, Д5)

Построим график Ганта для обработки деталей, например, по первому варианту (см рис. 8.1).



Рисунок 8.1 Оптимальный график Ганта для обработки деталей на трех станках

## 9 ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №8 «ОПТИМИЗАЦИЯ РАБОТЫ МАШИНОСТРОИТЕЛЬНОГО ЗАВОДА, ПРЕДСТАВЛЕННОГО В ВИДЕ ОТКРЫТОЙ СЕТИ ДЖЕКСОНА»

**Цель работы.** Овладение навыками разработки математической модели работы машиностроительного завода в стационарном режиме и ее оптимизации путем использования теории массового обслуживания.

### Постановка задачи

Требующие ремонта станки поступают на машиностроительный завод в случайные моменты времени, образуя простейший поток с параметром  $\lambda$ . На заводе имеется  $N$  цехов, причем в  $i$ -м цехе работает  $s_i$  однотипных параллельных обслуживающих устройств, длительность обслуживания каждым из которых имеет показательное распределение с параметром  $\mu_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ). Длительности обслуживания станков независимы и не зависят от поступающего на завод потока станков. Каждый поступающий на завод станок с вероятностью  $P_{0i}$  направляется в  $i$ -ый цех  $\left( i = 1, \dots, N; \sum_{i=1}^N P_{0i} = 1 \right)$ .

Обслуженный некоторым устройством  $i$ -го цеха станок направляется с вероятностью  $P_{ij}$  в  $j$ -ый цех, а с вероятностью  $P_{i0}$  покидает машиностроительный завод ( $i, j = 1, \dots, N; P_{i0} + \sum_{j=1}^N P_{ij} = 1$ ).

Поступающий станок (извне или из другого цеха) при наличии свободных обслуживающих устройств занимает любое из них, а при их отсутствии становится в очередь.

Требуется решить следующие задачи.

1. Построить диаграмму, описывающую математическую модель машиностроительного завода в виде открытой сети Джексона.
2. Составить и решить уравнения трафика (закона сохранения потока станков при прохождении цехов).
3. Установить, является ли рассматриваемая сеть эргодической.
4. Составить уравнения глобального и локального баланса для стационарных вероятностей состояний.
5. Пользуясь теоремой Джексона, определить в форме произведения стационарное распределение вероятностей состояний.

6. Найти среднее число станков, ожидающих обслуживания в каждом цехе, и среднее число станков, ожидающих обслуживания на заводе.
  7. Найти среднее число станков, находящихся в каждом цехе, и среднее число станков на заводе.
  8. Найти среднее время ожидания станком своего ремонта в каждом цехе при одном посещении этого цеха и среднее время ожидания станком своего ремонта на заводе.
  9. Найти среднее время пребывания станков в каждом цехе при одном посещении этого цеха и среднее время пребывания станка на заводе.
  10. Сделать разумную интерпретацию полученным численным результатам. Дать рекомендации об эффективной загрузки цехов.
- Примечание. При решении этой задачи считайте, что  $P_{ii} = 0$  ( $i = 1, \dots, N$ ), т.е. обслуженный в  $i$  – м цехе станок не может быть возвращен в  $i$  – ый цех сразу после окончания обслуживания в этом цеху.

### Исходные данные

Количество цехов  $N=3$ ; количество станков, поступающих на завод в сутки равен  $\lambda = 20 \frac{\text{станков}}{\text{сутки}}$ .

Остальные данные приведены в табл. 9.1 и табл. 9.2. В табл. 9.1 для каждого возможного варианта указаны  $P_{01}, P_{02}, P_{03}, P_{10}, P_{12}, P_{13}, P_{20}, P_{21}, P_{23}, P_{30}, P_{31}, P_{32}, \mu_1, \mu_2, \mu_3$  (размерность  $\mu_i$  –  $\frac{\text{стан.}}{\text{сут.}}$ ), а в табл.

9.2 –  $s_1, s_2, s_3$ .

Для подсчета своего варианта ( $i, k$ ), где  $i$  – номер строки в табл. 9.1 (порядковый номер по журналу),  $k$  – номер строки в табл. 9.2, необходимо: разделить ваш порядковый номер  $n$  в журнале группы на 6 и взять в качестве  $k$  остаток от деления (если окажется  $k=0$ , то принять  $k=6$ ).

Таблица 9.1 Исходные данные

N	P <sub>01</sub>	P <sub>02</sub>	P <sub>03</sub>	P <sub>10</sub>	P <sub>12</sub>	P <sub>13</sub>	P <sub>20</sub>	P <sub>21</sub>	P <sub>23</sub>	P <sub>30</sub>	P <sub>31</sub>	P <sub>32</sub>	μ <sub>1</sub>	μ <sub>2</sub>	μ <sub>3</sub>
1	0.21	0.00	0.79	0.78	0.05	0.17	0.57	0.13	0.30	0.82	0.06	0.12	6	3	18
2	0.22	0.16	0.62	0.43	0.23	0.34	0.46	0.26	0.28	0.53	0.16	0.31	11	12	20
3	0.25	0.01	0.74	0.41	0.21	0.38	0.66	0.01	0.33	0.54	0.12	0.34	8	9	21
4	0.35	0.08	0.57	0.43	0.22	0.35	0.38	0.28	0.34	0.74	0.11	0.15	11	7	18
5	0.18	0.07	0.75	0.58	0.19	0.23	0.68	0.08	0.24	0.80	0.08	0.12	6	5	18
6	0.10	0.03	0.87	0.71	0.06	0.23	0.58	0.20	0.22	0.78	0.00	0.22	4	6	20
7	0.40	0.16	0.44	0.93	0.02	0.05	0.51	0.12	0.37	0.60	0.07	0.33	10	8	13
8	0.29	0.13	0.58	0.88	0.04	0.08	0.54	0.10	0.36	0.46	0.19	0.35	10	9	16
9	0.16	0.16	0.68	0.83	0.00	0.17	0.64	0.17	0.19	0.51	0.17	0.32	8	9	17
10	0.32	0.22	0.46	0.87	0.04	0.09	0.44	0.14	0.42	0.63	0.17	0.20	10	8	14
11	0.16	0.01	0.83	0.54	0.10	0.36	0.74	0.02	0.24	0.88	0.03	0.09	4	3	19
12	0.29	0.17	0.54	0.51	0.17	0.32	0.96	0.00	0.04	0.45	0.25	0.30	10	10	15
13	0.18	0.15	0.67	0.53	0.02	0.45	0.57	0.03	0.40	0.56	0.16	0.28	8	9	21
14	0.22	0.19	0.59	0.54	0.08	0.38	0.70	0.05	0.25	0.88	0.05	0.07	6	6	16
15	0.17	0.02	0.81	0.48	0.24	0.28	0.45	0.16	0.39	0.54	0.09	0.37	8	11	23
16	0.35	0.16	0.49	0.41	0.19	0.40	0.47	0.07	0.46	0.54	0.09	0.37	10	13	20
17	0.38	0.13	0.49	0.43	0.21	0.36	0.50	0.14	0.36	0.71	0.08	0.21	11	9	17
18	0.40	0.02	0.58	0.54	0.04	0.42	0.57	0.13	0.30	0.56	0.20	0.24	13	6	19
19	0.33	0.15	0.52	0.80	0.08	0.12	0.60	0.20	0.20	0.56	0.16	0.28	11	8	14
20	0.19	0.02	0.79	0.75	0.09	0.16	0.51	0.10	0/39	0.58	0.03	0.39	6	9	21
21	0.20	0.05	0.75	0.78	0.05	0.17	0.57	0.13	0.30	0.82	0.06	0.12	6	9	18
22	0.20	0.18	0.62	0.43	0.23	0.34	0.46	0.26	0.28	0.53	0.16	0.31	11	12	20
23	0.23	0.05	0.72	0.41	0.21	0.38	0.66	0.01	0.33	0.54	0.12	0.34	8	9	21
24	0.30	0.15	0.55	0.43	0.22	0.35	0.38	0.28	0.34	0.74	0.11	0.15	11	13	18
25	0.18	0.10	0.73	0.58	0.19	0.23	0.68	0.08	0.24	0.80	0.08	0.12	6	9	18
26	0.10	0.05	0.85	0.71	0.06	0.23	0.58	0.20	0.22	0.78	0.00	0.22	4	6	20

Таблица 9.2 Количество оборудования в каждом цехе

К	$S_1$	$S_2$	$S_3$
1	1	2	3
2	1	3	2
3	2	1	3
4	2	3	1
5	3	1	2
6	3	2	1

### Содержание отчета

1. Постановка задачи.
2. Порядок выполнения в MathCAD.
3. Составить уравнения глобального и локального баланса для стационарных вероятностей состояний.
4. Отчет должен быть оформлен в текстовом редакторе MSWord.

### Контрольные вопросы

1. Суть закона сохранения потока автомобилей при прохождении цехов.
2. При каком условии цех не будет справляться с потоком поступающих на ремонт станков?
3. Среднее число станков, ожидающих обслуживания в каждом цехе, и среднее число станков, ожидающих обслуживания на заводе.
4. Среднее число станков, находящихся в каждом цехе, и среднее число станков на заводе.
5. Среднее время ожидания станка своего ремонта в каждом цехе при одном посещении этого цеха и среднее время ожидания станка своего ремонта на заводе.
6. Среднее время пребывания станка в каждом цехе при одном посещении этого цеха и среднее время пребывания станка на заводе.

### Методические рекомендации

#### Демонстрационный пример

Требующие ремонта станки поступают на завод в случайные моменты времени, образуя простейший поток с параметром

$\lambda = 20 \frac{\text{станков}}{\text{сутки}}$ . На заводе имеется  $N=4$  цехов, причем в  $i$ -м цехе

работает  $s_i$  однотипных обслуживающих устройств, длительность обслуживания каждым из которых имеет показательное распределение с параметром  $\mu_i$ , причем  $s_1=s_4=1$ ,  $s_2=2$ ,  $s_3=3$ ,  $\mu_1=31.8$ ,  $\mu_2=12.8$ ,  $\mu_3=8$ ,  $\mu_4=53.4$  ( $\mu$ =авт/сут). Каждый поступающий на завод станок с вероятностью  $p_{0i}$  направляется в  $i$ -й цех ( $i=1, \dots, N$ ;  $P_{01} + P_{02} + \dots + P_{0N}=1$ ), причем  $P_{01} = P_{02} = 1/2$ ,  $P_{03} = P_{04} = 0$ . Обслуженный некоторым устройством  $i$ -го цеха станок направляется с вероятностью  $P_{ij}$  в  $j$ -й цех, а с вероятностью  $P_{i0}$  покидает завод ( $i, j=1, \dots, N$ ;  $P_{i0} + P_{i2} + \dots + P_{iN}=1$ ), причем  $P_{10}=P_{12}=0$ ,  $P_{13}=1/3$ ,  $P_{14}=2/3$ ;  $P_{20}=P_{21}=P_{23}=0$ ,  $P_{24}=1$ ;  $P_{30}=1/2$ ,  $P_{31}=1/4$ ,  $P_{32}=0$ ,  $P_{34}=1/4$ ;  $P_{40}=P_{41}=P_{42}=P_{43}=1/4$ . Поступающий в цех станок (извне или из другого цеха) при наличии свободных обслуживающих устройств занимает любое из них, а при их отсутствии становится в очередь.

1. Построить диаграмму, описывающую математическую модель завода в виде открытой сети Джексона.
2. Составить и решить уравнения трафика (закона сохранения потока автомобилей при прохождении цехов).
3. Установить, является ли рассматриваемая сеть эргодической.
4. Составить уравнения глобального и локального баланса для стационарных вероятностей состояний.
5. Пользуясь теоремой Джексона, определить в форме произведения стационарное распределение вероятностей состояний.
6. Найти среднее число станков, ожидающих обслуживания в каждом цехе, и среднее число станков, ожидающих обслуживания на заводе.
7. Найти среднее число станков, находящихся в каждом цехе, и среднее число станков на заводе.
8. Найти среднее время ожидания станка своего ремонта в каждом цехе при одном посещении этого цеха и среднее время ожидания станка своего ремонта на заводе.
9. Найти среднее время пребывания станка в каждом цехе при одном посещении этого цеха и среднее время пребывания станка на заводе.

### Решение

1. Диаграмма, описывающая математическую модель завода в виде открытой сети Джексона, изображена на рис. 9.1.

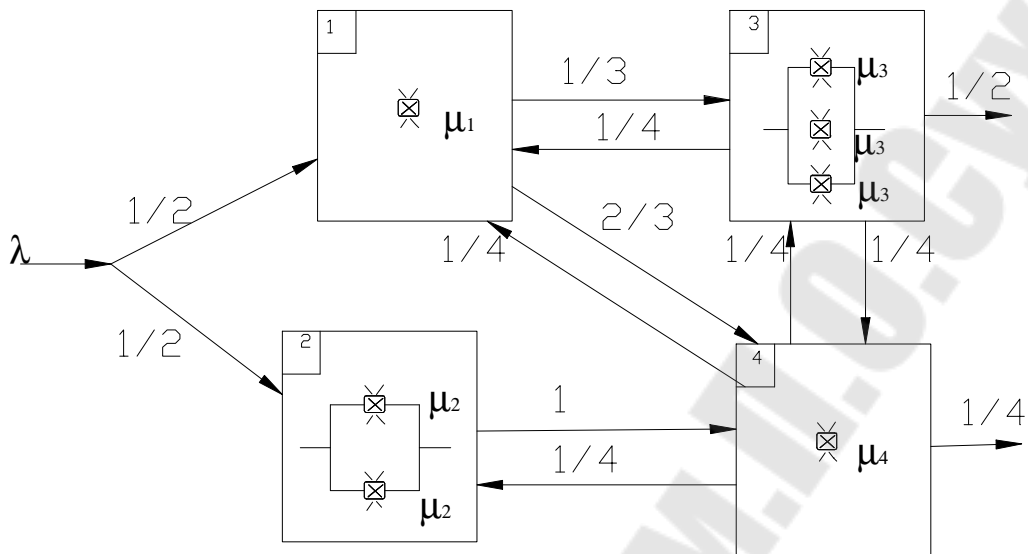


Рисунок 9.1 Диаграмма, описывающая математическую модель завода

Здесь цеха изображены в виде квадратов, в которых указаны номера этих цехов. Значками в виде скругленных квадратиков с крестом внутри изображены обслуживающие устройства, около которых стоят  $\mu_i$  – интенсивности обслуживания этими устройствами. Самая левая стрелка со значком  $\lambda$  обозначает входящий на завод простейший поток станков с параметром  $\lambda$ . Остальные стрелки указывают на возможные переходы станков после окончания обслуживания или прибытия на завод.

2. Пусть  $\lambda \varepsilon_i$  – интенсивность потока станков, уходящих из  $i$ -го цеха. Поскольку интенсивность выходящего из  $i$ -го цеха потока в стационарном режиме равна интенсивности входящего в  $i$ -й цех потока, то например, в случае первого цеха

$$\lambda \varepsilon_1 = \frac{1}{2} \lambda + \frac{1}{4} \lambda \varepsilon_3 + \frac{1}{4} \lambda \varepsilon_4.$$

Здесь  $1/2\lambda$  – интенсивность потока, входящего в цех извне,  $1/4\lambda \varepsilon_4$  – интенсивность потока, идущего в первый цех из четвертого цеха. Сократив обе части равенства на  $\lambda$ , получим

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \varepsilon_3 + \frac{1}{4} \varepsilon_4.$$

Аналогично составляем уравнения для других цехов. Поэтому уравнения трафика имеют следующую форму:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\varepsilon_3 + \frac{1}{4}\varepsilon_4 \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\varepsilon_4 \\ \varepsilon_3 = \frac{1}{3}\varepsilon_1 + \frac{1}{4}\varepsilon_4 \\ \varepsilon_4 = \frac{2}{3}\varepsilon_1 + \frac{1}{4}\varepsilon_3 + \varepsilon_2 \end{cases}$$

Решая данную систему уравнений, получим  $\varepsilon_1=1.2631$ ,  $\varepsilon_2=1.0263$ ,  $\varepsilon_3=0.9474$ ,  $\varepsilon_4=2.1053$ .

Так как  $\lambda\varepsilon_i$  – интенсивность потока станков через  $i$  –й цех, а  $\lambda$  – интенсивность входящего на завод потока, то  $\varepsilon_i$  – среднее число посещений  $i$  –го цеха поступающим на завод станкам. В нашем случае наиболее часто посещаемым цехом является четвертый.

3. Вычисляем

$$\rho_1 = \frac{\lambda\varepsilon_1}{\mu_1} = 0.7944; \quad \rho_2 = \frac{\lambda\varepsilon_2}{\mu_2} = 1.6036; \quad \rho_3 = \frac{\lambda\varepsilon_3}{\mu_3} = 2.3684; \quad \rho_4 = \frac{\lambda\varepsilon_4}{\mu_4} = 0.7885.$$

Следовательно, загрузки цехов соответственно:

$$\Phi_1 = \frac{\rho_1}{s_1} = 0.7944; \quad \Phi_2 = \frac{\rho_2}{s_2} = 0.8018; \quad \Phi_3 = \frac{\rho_3}{s_3} = 0.7895; \quad \Phi_4 = \frac{\rho_4}{s_4} = 0.7885.$$

Поскольку  $\Phi_1 < 1$ ,  $\Phi_2 < 1$ ,  $\Phi_3 < 1$ ,  $\Phi_4 < 1$ , то рассматриваемая сеть является эргодической.

4. Состояние сети в момент времени  $t$  будем характеризовать вектором

$$n(t) = (n_1(t), n_2(t), n_3(t), n_4(t)),$$

где  $n_i(t)$  – число станков в  $i$ -м цехе в момент времени  $t$ . Так сеть эргодична (марковский процесс эргодичен) то независимо от начального распределения станков по цехам существуют пределы

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P\{n_1(t) = n_1, n_2(t) = n_2, n_3(t) = n_3, n_4(t) = n_4\} = P(n_1, n_2, n_3, n_4) > 0$$

причем

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \sum_{n_3=0}^{\infty} \sum_{n_4=0}^{\infty} P(n_1, n_2, n_3, n_4) = 1.$$



При этом предельные (финальные) вероятности образуют единственное стационарное распределение  $\{P(n_1, n_2, n_3, n_4); n_1, n_2, n_3, n_4 = 0, 1, 2, \dots\}$ .

Для удобства составления уравнений баланса введем переменные интенсивности обслуживания цехами в зависимости от числа находящихся в них станков:

$$\mu_1(n_1) = \begin{cases} \mu_1, & \text{если } n_1 \geq 1, \\ 0, & \text{если } n_1 = 0; \end{cases} \quad \mu_4(n_4) = \begin{cases} \mu_4, & \text{если } n_4 \geq 1, \\ 0, & \text{если } n_4 = 0; \end{cases}$$

$$\mu_3(n_3) = \begin{cases} 3\mu_3, & \text{если } n_3 \geq 3, \\ 2\mu_3, & \text{если } n_3 = 2 \\ \mu_3, & \text{если } n_3 = 1 \\ 0, & \text{если } n_3 = 0 \end{cases} \quad \mu_2(n_2) = \begin{cases} 2\mu_2, & n_2 \geq 2 \\ \mu_2, & n_2 = 1 \\ 0, & n_2 = 0 \end{cases}$$

Здесь  $n_i$  – число автомобилей в  $i$ -м цехе ( $i = 1, 2, 3, 4$ ).

Для составления глобальных уравнений баланса приравняем поток вероятности из состояния  $n = (n_1, n_2, n_3, n_4)$  к потоку вероятности в состояние  $n = (n_1, n_2, n_3, n_4)$  из других состояний:

$$\begin{aligned} & (\lambda + \mu_1(n_1) + \mu_2(n_2) + \mu_3(n_3) + \mu_4(n_4))P(n_1, n_2, n_3, n_4) = \\ & \frac{1}{2}\lambda P(n_1 - 1, n_2, n_3, n_4) + \frac{1}{2}\lambda P(n_1, n_2 - 1, n_3, n_4) + \frac{1}{2}\mu_3(n_3 + 1)P(n_1, n_2, n_3 + 1, n_4) + \\ & + \frac{1}{4}\mu_4(n_4 + 1)P(n_1, n_2, n_3, n_4 + 1) + \frac{1}{3}\mu_1(n_1 + 1)P(n_1 + 1, n_2, n_3 - 1, n_4) + \\ & + \frac{2}{3}\mu_1(n_1 + 1)P(n_1 + 1, n_2, n_3, n_4 - 1) + \mu_2(n_2 + 1)P(n_1, n_2 + 1, n_3, n_4 - 1) + \\ & \frac{1}{4}\mu_3(n_3 + 1)P(n_1 - 1, n_2, n_3 + 1, n_4) + \frac{1}{4}\mu_3(n_3 + 1)P(n_1, n_2, n_3 + 1, n_4 - 1) + \\ & \frac{1}{4}\mu_4(n_4 + 1)P(n_1 - 1, n_2, n_3, n_4 + 1) + \frac{1}{4}\mu_4(n_4 + 1)P(n_1, n_2 - 1, n_3, n_4 + 1) + \\ & \frac{1}{4}\mu_4(n_4 + 1)P(n_1, n_2, n_3 - 1, n_4 + 1) \end{aligned}$$

Глобальные уравнения баланса можно разбить на локальные уравнения баланса. Первое уравнение локального получается, если приравнять поток вероятности из состояния  $n = (n_1, n_2, n_3, n_4)$  за счет поступления станков на завод к потоку вероятности в состояние  $n = (n_1, n_2, n_3, n_4)$  из других состояний за счет ухода станков с завода:

$$\lambda p(n_1, n_2, n_3, n_4) = \frac{1}{2} \mu_3(n_3 + 1) p(n_1, n_2, n_3 + 1, n_4) + \frac{1}{4} \mu_4(n_4 + 1) p(n_1, n_2, n_3, n_4 + 1).$$

Остальные уравнения локального баланса получаются, если приравнять поток вероятности из состояния  $n=(n_1, n_2, n_3, n_4)$  за счет завершения обслуживания в  $i$ -м цехе потоку вероятности в состоянии  $n=(n_1, n_2, n_3, n_4)$  за счет внешних поступлений и внутренних переходов в  $i$ -й цех. Так, для первого цеха ( $i=1$ ):

$$\mu_1(n_1) p(n_1, n_2, n_3, n_4) = \frac{1}{2} \lambda p(n_1 - 1, n_2, n_3, n_4) + \frac{1}{4} \mu_3(n_3 + 1) p(n_1 - 1, n_2, n_3 + 1, n_4) + \frac{1}{4} \mu_4(n_4 + 1) p(n_1 - 1, n_2, n_3, n_4 + 1),$$

для второго цеха ( $i=2$ ):

$$\mu_2(n_2) p(n_1, n_2, n_3, n_4) = \frac{1}{2} \lambda p(n_1, n_2 - 1, n_3, n_4) + \frac{1}{4} \mu_4(n_4 + 1) p(n_1, n_2 - 1, n_3, n_4 + 1)$$

для третьего цеха ( $i=3$ ):

$$\mu_3(n_3) p(n_1, n_2, n_3, n_4) = \frac{1}{3} \mu_1(n_1 + 1) p(n_1 + 1, n_2, n_3 - 1, n_4) + \frac{1}{4} \mu_4(n_4 + 1) p(n_1, n_2, n_3 - 1, n_4 + 1),$$

наконец, для четвертого ( $i=4$ ):

$$\mu_4(n_4) p(n_1, n_2, n_3, n_4) = \frac{2}{3} \mu_1(n_1 + 1) p(n_1 + 1, n_2, n_3, n_4 - 1) + \mu_2(n_2 + 1) p(n_1, n_2 + 1, n_3, n_4 - 1) + \frac{1}{4} \mu_3(n_3 + 1) p(n_1, n_2, n_3 + 1, n_4 - 1)$$

Заметим, что проще сначала составить уравнения локального баланса, а затем сложить их; тогда получится уравнение глобального баланса.

5. По теореме Джексона стационарные вероятности состояний имеют форму произведения

$$p(n_1, n_2, n_3, n_4) = p_1(n_1) p_2(n_2) p_3(n_3) p_4(n_4), \quad (9.1)$$

где  $p_i(n_i)$ - стационарная вероятность изолированного от завода цеха, в который поступает простейший поток неисправных станков с параметром  $\lambda \varepsilon_i$  ( $i=1,2,3,4$ ).

Изолированный первый цех представляет собой систему М/М/1 с ожиданием, в которую поступает простейший поток  $\lambda \varepsilon_1$  и в которой имеется единственный экспоненциальный обслуживающий прибор с

интенсивностью обслуживания  $\mu_1$ . Для такой системы по формуле ( $p_n = \rho^n (1 - \rho)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ) находим:

$$p_1(n_1) = \rho_1^{n_1} (1 - \rho_1), \quad \rho_1 = \frac{\lambda \varepsilon_1}{\mu_1}.$$

В нашем случае  $\rho_1 = 0.7944$ , поэтому

$$p_1(n_1) = 0.2056 \cdot 0.7944^{n_1} \quad (9.2).$$

Для системы M/M/ $s_i$  с ожиданием, в которую поступает простейший поток с параметром  $\lambda \varepsilon_i$  и в которой находится  $s_i$  однотипных экспоненциальных приборов с интенсивностью обслуживания  $\mu_i$  каждым из них, стационарная вероятность имеет вид:

$$p_i(n_i) = \begin{cases} \frac{\rho_i^{n_i}}{n_i!} p_i(0), & \text{если } n_i \leq s_i, \\ \frac{\rho_i^{n_i}}{s_i! s_i^{n_i - s_i}} p_i(0), & \text{если } n_i > s_i \end{cases}$$

$$\text{где } \rho_i = \frac{\lambda \varepsilon_i}{\mu_i}, \quad p_i(0) = \left[ \sum_{k=0}^{s_i} \frac{\rho_i^k}{k!} + \frac{\rho_i^{s_i+1}}{s_i!(s_i - \rho_i)} \right]^{-1}$$

Поскольку  $\rho_2 = 1.6036$ , то для изолированного второго цеха (системы M/M/2)

$$p_2(0) = \left[ 1 + \rho_2 + \frac{\rho_2^2}{2} + \frac{\rho_2^3}{2(2 - \rho_2)} \right]^{-1} = 0.1100;$$

$$p_2(n_2) = \begin{cases} 0.11 \cdot \frac{1.6036^{n_2}}{n_2!}, & \text{если } n_2 \leq 2, \\ 0.11 \cdot \frac{1.6036^{n_2}}{2^{n_2-1}}, & \text{если } n_2 > 2. \end{cases} \quad (9.3)$$

Поскольку  $\rho_3 = 2.3684$ , то для изолированного третьего цеха (системы M/M/3)

$$p_3(0) = \left[ 1 + \rho_3 + \frac{\rho_3^2}{2} + \frac{\rho_3^3}{6} + \frac{\rho_3^4}{6(3 - \rho_3)} \right]^{-1} = 0.0599;$$

$$p_3(n_3) = \begin{cases} 0.0599 \cdot \frac{2.3684^{n_3}}{n_3!}, & \text{при } n_3 \leq 3; \\ 0.0599 \cdot \frac{2.3684^{n_3}}{2 \cdot 3^{n_3-2}}, & \text{при } n_3 > 3. \end{cases} \quad (9.4)$$

Наконец, для изолированного четвертого цеха (системы М/М/1)

$$p_4(n_4) = \rho_4^{n_4} (1 - \rho_4) = 0.2115 \cdot 0.7885^{n_4}. \quad (9.5)$$

Таким образом, при любых целых неотрицательных значениях  $n_1, n_2, n_3, n_4$  стационарные вероятности могут быть подсчитаны по формуле (9.1), где  $p_1(n_1), p_2(n_2), p_3(n_3), p_4(n_4)$  вычисляются соответственно по формулам (9.2)-(9.5).

6. Среднее число станков, ожидающих ремонта в  $i$ -м цехе, определяется как среднее число заявок, ожидающих обслуживания в системе М/М/ $s_i$ , в которую поступает простейший поток интенсивности  $\lambda \varepsilon_i$  и в которой находится  $s_i$  параллельных экспоненциальных приборов с интенсивностью обслуживания  $\mu_i$  каждым из них:

$$\bar{\eta}_i = p_i(s_i) \cdot \frac{\rho_i}{s_i \left( 1 - \frac{\rho_i}{s_i} \right)^2}.$$

Для первого цеха  $s_1=1, \rho_1=0.7944$  и формуле (9.2)

$$p_1(s_1) = p_1(1) = 0.2056 \cdot 0.7994 = 0.1633.$$

Поэтому среднее число станков, ожидающих ремонта в первом цехе,

$$\bar{\eta}_1 = p_1(1) \cdot \frac{\rho_1}{(1 - \rho_1)^2} = 3.07.$$

Для второго цеха  $s_2=2, \rho_2=1.6036$ , и по формуле (9.3)

$$p_2(s_2) = p_2(2) = 0.11 \cdot \frac{1.6036^2}{2} = 0.1414.$$

Следовательно, среднее число станков, ожидающих ремонта во втором цехе

$$\bar{\eta}_2 = p_2(2) \cdot \frac{\rho_2}{\left( 1 - \frac{\rho_2}{2} \right)^2} = 2.89.$$

Для третьего цеха  $s_3=3$ ,  $\rho_3=2.3684$ , и по формуле (9.4):

$$p_3(s_3) = p_3(3) = 0.0599 \cdot \frac{2.3684^3}{3!} = 0.1327.$$

Поэтому среднее число станков ожидавших ремонта в третьем цехе,

$$\bar{\eta}_3 = p_3(3) \cdot \frac{\rho_3}{3 \cdot (1 - \frac{\rho_3}{3})} = 2.36.$$

Наконец, для четвертого цеха  $s_4=1$ ,  $\rho_4=0.7885$ , и по формуле (9.5)

$$p_4(s_4) = p_4(1) = \rho_4(1 - \rho_4) = 0.1668.$$

Следовательно, среднее число станков, ожидающих ремонта в четвертом цехе,

$$\bar{\eta}_4 = p_4(1) \cdot \frac{\rho_4}{(1 - \rho_4)^2} = 2.94.$$

Среднее число станков, ожидающих обслуживания на заводе, найдем по формуле

$$\bar{\eta} = \bar{\eta}_1 + \bar{\eta}_2 + \bar{\eta}_3 + \bar{\eta}_4 = 11.26$$

7. Среднее число станков, находящихся в  $i$ -м цехе, определим по формуле

$$\bar{\xi}_i = \bar{\eta}_i + \sum_{k=1}^{s_i-1} k \cdot p_i(k) + \frac{s_i \cdot p_i(s_i)}{1 - \frac{\rho_i}{s_i}},$$

$$\text{где } \sum_{k=1}^{s_i-1} k p_i(k) = 0, \quad \text{при } s_i = 1$$

Поэтому для первого цеха

$$\bar{\xi}_1 = \bar{\eta}_1 + \frac{p_1(1)}{1 - \rho_1} = 3.07 + \frac{0.1633}{1 - 0.7944} = 3.86,$$

для второго цеха ( $p_2(1)$  находим по формуле (9.3),  $p_2(2)$  найдено ранее)

$$\bar{\xi}_2 = \bar{\eta}_2 + p_2(1) + \frac{2 \cdot p_2(2)}{1 - \frac{\rho_2}{2}} = 2.8870 + 0.11 \cdot 1.6036 + \frac{2 \cdot 0.1414}{1 - \frac{1.6036}{2}} = 4.49,$$

для третьего цеха ( $p_3(1)$ ,  $p_3(2)$  находим по формуле (9.4),  $p_3(3)$  найдено ранее)

$$\bar{\xi}_3 = \bar{\eta}_3 + p_3(1) + 2p_3(2) + \frac{3p_3(3)}{1 - \frac{\rho_3}{3}} = 4.73,$$

наконец, для четвертого цеха

$$\bar{\xi}_4 = \bar{\eta}_4 + \frac{p_4(1)}{1 - \rho_4} = 3.73.$$

Среднее число автомобилей определим по формуле:

$$\bar{\xi} = \bar{\xi}_1 + \bar{\xi}_2 + \bar{\xi}_3 + \bar{\xi}_4 = 16.81$$

8. Среднее время ожидания станка своего обслуживания в  $i$ -м цехе при одном посещении найдем по формуле Литтла:

$$\bar{W}_1 = \frac{\bar{\eta}_1}{\lambda \varepsilon_1} = \frac{3.07}{20 \cdot 1.2631} = 0.1215 \text{сут.} \approx 2 \text{ч. } 55 \text{мин.};$$

$$\bar{W}_2 = \frac{\bar{\eta}_2}{\lambda \varepsilon_2} = \frac{2.89}{20 \cdot 1.0263} = 0.1407 \text{сут.} \approx 3 \text{ч. } 23 \text{мин.}$$

$$\bar{W}_3 = \frac{\bar{\eta}_3}{\lambda \varepsilon_3} = \frac{2.36}{20 \cdot 0.9474} = 0.1247 \text{сут.} \approx 3 \text{ч.};$$

$$\bar{W}_4 = \frac{\bar{\eta}_4}{\lambda \varepsilon_4} = \frac{2.94}{20 \cdot 2.1053} = 0.0698 \text{сут.} \approx 1 \text{ч. } 41 \text{мин.}$$

Среднее время ожидания станка своего ремонта на заводе найдем по формуле:

$$\bar{W} = \frac{\bar{\eta}}{\lambda} = \frac{11.26}{20} = 0.5368 \text{сут.} \approx 13 \text{ч. } 32 \text{мин.}$$

9. Среднее время пребывания станка в  $i$ -м цехе при одном посещении находим по формуле Литтла:

$$\bar{V}_1 = \frac{\bar{\xi}_1}{\lambda \varepsilon_1} = \frac{3.86}{20 \cdot 1.2631} = 0.1530 \text{сут.} \approx 3 \text{ч. } 41 \text{мин.};$$

$$\bar{V}_2 = \frac{\bar{\xi}_2}{\lambda \varepsilon_2} = \frac{4.49}{20 \cdot 1.0263} = 0.2188 \text{сут.} \approx 5 \text{ч. } 15 \text{мин.};$$

$$\bar{V}_3 = \frac{\bar{\xi}_3}{\lambda \varepsilon_3} = \frac{4.73}{20 \cdot 0.9474} = 0.2497 \text{сут.} \approx 6 \text{ч.};$$

$$\bar{V}_4 = \frac{\bar{\xi}_4}{\lambda \varepsilon_4} = \frac{3.73}{20 \cdot 2.1053} = 0.0885 \text{сут.} \approx 2 \text{ч. } 7 \text{мин.}$$

Среднее время пребывания станка на заводе найдем по формуле Литтла

$$\bar{V} = \frac{\bar{\xi}}{\lambda} = \frac{16.81}{20} = 0.8407 \text{сут.} \approx 20 \text{ч. } 11 \text{мин.}$$

Поскольку загрузки цехов оказались близкими между собой ( $\Phi_1 \approx \Phi_2 \approx \Phi_3 \approx \Phi_4 \approx 0.8$ ), то и средние числа автомобилей,

ожидающих ремонта в каждом цехе, оказались приблизительно одного порядка ( $\bar{\eta}_1 \approx 3, \bar{\eta}_2 \approx 2.9, \bar{\eta}_3 \approx 2.4, \bar{\eta}_4 \approx 3$ ). Времена ожидания в первых трех цехах при однократном посещении их оказались одного порядка ( $\bar{W}_1 \approx \bar{W}_2 \approx \bar{W}_3 \approx 3\text{ч.}$ ), в то время как время ожидания в четвертом цехе при одном посещении приблизительно в два раза меньше ( $\bar{W}_4 \approx 1\text{ч. } 40\text{ мин.}$ ). Но  $\varepsilon_4 \approx 2$ , следовательно, автомобиль в среднем посещает четвертый цех два раза, и среднее время ожидания в четвертом цехе (полное, а не при одном посещении) тоже порядка трех часов. Таким образом,  $\varepsilon_1 \bar{W}_1 \approx \varepsilon_2 \bar{W}_2 \approx \varepsilon_3 \bar{W}_3 \approx \varepsilon_4 \bar{W}_4$ , т.е. полное время ожидания автомобилей в цехах одного порядка, что обусловлено приближительным равенствам загрузок цехов ( $\Phi_1 \approx \Phi_2 \approx \Phi_3 \approx \Phi_4 \approx 0.8$ ).

### **Порядок выполнения работы в MathCAD**

Поставленная задача легко реализуется в системе MathCAD (см. рис. 9.2).

**Лабораторная работа № 8**

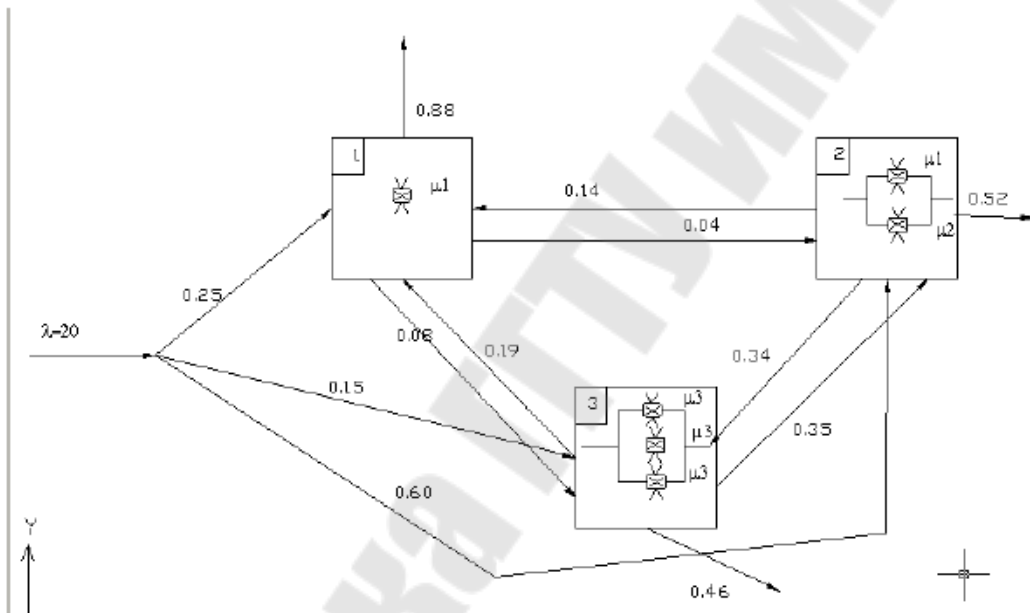
**"Оптимизация работы машиностроительного завода, представленного в виде открытой сети Джексона"**

Вариант \*\*\*

Исходные данные

$$P := \begin{pmatrix} 0 & 0.25 & 0.15 & 0.60 \\ 0.88 & 0 & 0.04 & 0.08 \\ 0.52 & 0.14 & 0 & 0.34 \\ 0.46 & 0.19 & 0.35 & 0 \end{pmatrix} \quad M := \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 16 \end{pmatrix} \quad S := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad L := 20$$

1. Построить диаграмму, описывающую математическую модель машиностроительного завода в виде открытой сети Джексона



**2. Составить и решить уравнения трафика**

$$B := \begin{pmatrix} P_{0,1} \\ P_{0,2} \\ P_{0,3} \end{pmatrix} \quad A := \begin{bmatrix} 1 & -(P_{2,1}) & -(P_{3,1}) \\ -(P_{1,2}) & 1 & -(P_{3,2}) \\ -(P_{1,3}) & -(P_{2,3}) & 1 \end{bmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -0.14 & -0.19 \\ -0.04 & 1 & -0.35 \\ -0.08 & -0.34 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.15 \\ 0.6 \end{pmatrix} \quad E := A^{-1} \cdot B \quad E = \begin{pmatrix} 0.462 \\ 0.444 \\ 0.788 \end{pmatrix}$$

Рисунок 9.2 Реализация задачи в MathCAD



$E_i$  - среднее число посещений  $i$ -того цеха,  $L \cdot E_i$  - интенсивность потока станков через  $i$ -ый цех

$$L \cdot E_0 = 9.238 \quad L \cdot E_1 = 8.886 \quad L \cdot E_2 = 15.76$$

**3. Установить является ли сеть эргодической**

$$i := 1 \dots 3$$

$$p_{0i} := \frac{L \cdot E_{i-1}}{M_{i-1}}$$

$$p_{01} = 0.924$$

$$p_{02} = 0.987 \quad p_{03} = 0.985$$

$$F_i := \frac{p_{0i}}{S_{i-1}} \quad F_1 := F_1 \quad F_2 := F_2 \quad F_3 := F_3$$

$$F_1 = 0.924 \quad F_2 = 0.494 \quad F_3 = 0.328$$

Поскольку  $F_1 < 1$ ,  $F_2 < 1$ ,  $F_3 < 1$ , то рассматриваемая сеть является эргодической

4 Составить уравнения глобального и локального баланса для стационарных вероятностей состояний  
(составить в редакторе MSWord)

**5. Определить в форме произведения стационарное распределение вероятностей состояний**

$$j := 1 \dots 3$$

$$p_{j,0} := \left[ \sum_{k=0}^{S_{j-1}} \frac{(p_{0j})^k}{k!} + \frac{(p_{0j})^{S_{j-1}+1}}{S_{j-1}! \cdot (S_{j-1} - p_{0j})} \right]^{-1} \quad p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.076 \\ 0.339 \\ 0.369 \end{pmatrix}$$

$$n_1 := 1 \dots S_0$$

$$p_{1,n_1} := \begin{cases} p_{1,n_1} \leftarrow (p_{01})^{n_1} \cdot (1 - p_{01}) & \text{if } S_0 = 1 \\ p_{1,n_1} \leftarrow \frac{(p_{01})^{n_1}}{n_1!} \cdot p_{1,0} \end{cases}$$

$$n_2 := 1 \dots S_1$$

$$p_{2,n_2} := \begin{cases} p_{2,n_2} \leftarrow (p_{02})^{n_2} \cdot (1 - p_{02}) & \text{if } S_1 = 1 \\ p_{2,n_2} \leftarrow \frac{(p_{02})^{n_2}}{n_2!} \cdot p_{2,0} \end{cases}$$

Продолжение рис. 9.2

$$n_3 := 1 \dots S_2 \quad p_{3,n_3} := \begin{cases} p_{3,n_3} \leftarrow (p_{o_3})^{n_3} \cdot (1 - p_{o_3}) & \text{if } S_2 = 1 \\ p_{3,n_3} \leftarrow \frac{(p_{o_3})^{n_3}}{n_3!} \cdot p_{3,0} & \end{cases}$$

$$p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.076 & 0.07 & 0 & 0 \\ 0.339 & 0.335 & 0.165 & 0 \\ 0.369 & 0.364 & 0.179 & 0.059 \end{pmatrix}$$

**6. Найти среднее число станков, ожидающих обслуживания в каждом цехе, и среднее число станков, ожидающих обслуживания в каждом цехе**

$$j := 1 \dots 3 \quad N_j := p_{j,S_{j-1}} \cdot \frac{p_{o_j}}{S_{j-1} \cdot \left(1 - \frac{p_{o_j}}{S_{j-1}}\right)^2}$$

$$N = \begin{pmatrix} 0 \\ 11.207 \\ 0.318 \\ 0.043 \end{pmatrix}$$

***Среднее число автомобилей, ожидающих ремонта на заводе***

$$N_0 := \sum_j N_j \quad N = \begin{pmatrix} 11.568 \\ 11.207 \\ 0.318 \\ 0.043 \end{pmatrix}$$

**7. Найти среднее число станков, находящихся в каждом цехе, и среднее число станков на заводе**

Продолжение рис. 9.2

$$SS_j := N_j + \sum_{k=1}^{S_{j-1}-1} k \cdot p_{j,k} + \frac{S_{j-1} \cdot p_{j,S_{j-1}}}{1 - \frac{p_{0j}}{S_{j-1}}} \quad SS = \begin{pmatrix} 0 \\ 12.201 \\ 1.305 \\ 1.028 \end{pmatrix}$$

*Среднее число станков, находящихся на заводе*

$$SS_0 := \sum_j SS_j \quad SS = \begin{pmatrix} 14.534 \\ 12.201 \\ 1.305 \\ 1.028 \end{pmatrix}$$

**8. Найти среднее время ожидания станка своего ремонта в каждом цехе, и среднее время ожидания станка своего ремонта на заводе**

$$W_j := \frac{N_j}{L \cdot E_{j-1}} \cdot 24 \quad W_0 := \frac{N_0}{L} \cdot 24 \quad W = \begin{pmatrix} 13.881 \\ 29.113 \\ 0.859 \\ 0.065 \end{pmatrix}$$

**Полные времена ожидания станков в цехах**

$$E_0 \cdot W_1 = 13.448 \quad E_1 \cdot W_2 = 0.382 \quad E_2 \cdot W_3 = 0.051$$

**9. Среднее время пребывания станка в i-м цехе при одном посещении находим по формуле Литтла**

$$V_j := \frac{SS_j}{L \cdot E_{j-1}} \cdot 24 \quad V_0 := \frac{SS_0}{L} \cdot 24 \quad V = \begin{pmatrix} 17.441 \\ 31.696 \\ 3.526 \\ 1.565 \end{pmatrix}$$

**Полные времена пребывания станков в цехах**

$$E_0 \cdot V_1 = 14.641 \quad E_1 \cdot V_2 = 1.566 \quad E_2 \cdot V_3 = 1.233$$

**Сделать выводы о работе каждого цеха**

Продолжение рис. 9.2

## 10 ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №9 «ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ МАТРИЧНЫХ ИГР»

**Цель работы.** Применение матричной игры к задаче линейного программирования.

### Постановка задачи для заданной игры

1. Сделать формальную постановку задачи.
2. Определить множество возможных стратегий игроков, при этом по возможности исключить эквивалентные стратегии.
3. Выписать матрицу игры в общем виде.
4. Определить максиминную и минимаксную стратегию игры.
5. Найти оптимальные стратегии игроков, используя «Поиск решения» в Excel.
6. Найти оптимальные стратегии игроков, используя MathCAD (*maximize, minimize*).
7. Найти оптимальные стратегии игроков, решив двойственную задачу симплекс-методом.

### Описание игры

Первый игрок получает одну из карт Ст (старшая) и Мл (младшая) с равными вероятностями, а затем может или «сделать ставку» или «спасовать». Если первый делает ставку, то второй может «спасовать» и потерять  $\alpha$  или «уравнять игру», и выиграть или потерять  $\beta$  в зависимости от того, имеется ли на руках у первого игрока карта Мл или Ст. Если первый игрок пасует, то второй может также пасовать, что дает выигрыш 0, или сделать ставку, выигрывая  $\alpha$ , если у первого игрока карта Мл, и теряя  $\beta$ , если у первого игрока старшая карта.

## Варианты заданий

В табл. 10.1 представлены значения  $\alpha$  и  $\beta$ .

Таблица 10.1 Значения  $\alpha$  и  $\beta$

Номер варианта	$\alpha$	$\beta$
1	2	3
2	3	4
3	2	4
4	4	7
5	2	5
6	5	8
7	2	7
8	7	9
9	2	9
10	9	11
11	3	7
12	4	8
13	3	5
14	3	6
15	6	7
16	4	5
17	5	7
18	4	6
19	6	9
20	6	8
21	8	10
22	5	8
23	8	12
24	5	9
25	9	11
25	10	12

## Содержание отчета

1. Постановка задачи.
2. Определить множество возможных стратегий игроков, при этом по возможности исключить эквивалентные стратегии
3. Построение платежной матрицы

4. Определить максиминную и минимаксную стратегию игры.
5. Математические модели для нахождения смешанных стратегий игроков.
6. Решить симплекс – методов двойственную задачу линейного программирования.
7. Найти оптимальные смешанные стратегии игроков, используя «Поиск решения»
8. Найти оптимальные смешанные стратегии игроков, используя MathCAD (maximize, minimize).
9. Сделать выводы.
10. Отчет оформить в текстовом редакторе MSWord.

### **Контрольные вопросы**

1. Что такое платежная матрица?
2. Нижняя чистая цена игры (максимин).
3. Верхняя чистая цена игры (минимакс).
4. Седловая точка матричной игры.
5. Смешанные стратегии игроков А и В.
6. Свойства оптимальных смешанных стратегий.

### **Контрольное задание**

*Для защиты требуется решить следующую задачу.*

Два сельскохозяйственных предприятий А и В выделяют денежные средства на строительство трех объектов. С учетом особенностей вкладов в и местных условий прибыль предприятия А в зависимости в зависимости

от объемов финансирования выражается элементами матрицы 
$$\begin{bmatrix} 50 & 15 & 20 \\ 25 & 40 & 30 \\ 10 & 30 & 60 \end{bmatrix}.$$

Будем предполагать, что убыток предприятия В при этом равен прибыли предприятия А. Требуется найти оптимальные стратегии предприятий А и В.

## Методические рекомендации

### Математическая постановка задачи

Как следует из описания игры, выигрыш некоторой суммы первым игроком, равнозначен проигрышу этой же суммы вторым игроком и наоборот, т.е. мы рассматриваем игру с нулевой суммой двух игроков, так называемую антагонистическую игру.

Определим все чистые стратегии игроков. Из описания получаем, что возможны следующие четыре способа действия первого игрока:

1. Делать ставку (в дальнейшем ставить) вне зависимости от того, какая карта ему пришла (старшая или младшая).
2. Пасовать также вне зависимости от пришедшей карты.
3. Ставить, если пришла старшая карта, и пасовать, если пришла младшая.
4. Ставить, если пришла младшая, а пасовать, если пришла старшая.

Аналогично для второго игрока получаем все возможные способы его действий, их будет также четыре:

1. Ставить вне зависимости от заявки первого игрока.
2. Пасовать вне зависимости первого игрока.
3. Ставить в ответ на ставку первого игрока, и пасовать в ответ на пас.
4. Ставить в ответ на пас, и пасовать в ответ на ставку.

Решение об использовании того или иного способа действий, из выше описанных, каждый игрок принимает заранее. Таким образом, эти способы действий для игроков являются их чистыми стратегиями. Обозначим их  $X_i^1, i=1..4$  для первого игрока и  $X_i^2, i=1..4$  для второго.

Зная, что вероятность прихода первому игроку любой из карт равна  $1/2$ , мы можем выписать платежную матрицу игры  $A$ . Элемент этой матрицы  $[A]_{ij}$  равен ожидаемому выигрышу первого игрока при использовании им стратегии  $X_i^1$  и использовании вторым игроком стратегии  $X_j^2$ .

Возьмем в качестве примера  $\alpha=1$  и  $\beta=3$ .

$$\text{Тогда } [A]_{11} = \frac{1}{2}(\nu \{C | C_m, C\}) + \frac{1}{2}(\nu \{C | M_l, C\}) = \frac{\beta}{2} - \frac{\beta}{2} = 0 \quad (10.1)$$

Здесь  $\nu \{3^1 | K, 3^2\}$  - размер выигрыша первого игрока, если он сделал заявку  $3^1$  при наличии у него карты достоинства  $K$ , а второй игрок сделал заявку  $3^2$ . Вычислим, аналогично (10.1) все остальные элементы матрицы:

$$[A]_{12} = \frac{1}{2}(\nu \{C | C_T, П\}) + \frac{1}{2}(\nu \{C | M_l, П\}) = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha = 1$$

$$[A]_{13} = \frac{1}{2}(\nu \{C | C_T, C\}) + \frac{1}{2}(\nu \{C | M_l, C\}) = \frac{\beta}{2} - \frac{\beta}{2} = 0$$

$$[A]_{14} = \frac{1}{2}(\nu \{C | C_T, П\}) + \frac{1}{2}(\nu \{C | M_l, П\}) = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha = 1$$

$$[A]_{21} = \frac{1}{2}(\nu \{П | C_T, C\}) + \frac{1}{2}(\nu \{П | M_l, C\}) = \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{2} = \frac{\beta - \alpha}{2} = \frac{3 - 1}{2} = 1$$

$$[A]_{22} = \frac{1}{2}(\nu \{П | C_T, П\}) + \frac{1}{2}(\nu \{П | M_l, П\}) = 0 + 0 = 0$$

$$[A]_{23} = \frac{1}{2}(\nu \{П | C_T, П\}) + \frac{1}{2}(\nu \{П | M_l, П\}) = 0 + 0 = 0$$

$$[A]_{24} = \frac{1}{2}(\nu \{П | C_T, C\}) + \frac{1}{2}(\nu \{П | M_l, C\}) = \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{2} = \frac{\beta - \alpha}{2} = \frac{3 - 1}{2} = 1$$

$$[A]_{31} = \frac{1}{2}(\nu \{C | C_T, C\}) + \frac{1}{2}(\nu \{П | M_l, C\}) = \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{2} = \frac{\beta - \alpha}{2} = 1$$

$$[A]_{32} = \frac{1}{2}(\nu \{C | C_T, П\}) + \frac{1}{2}(\nu \{П | M_l, П\}) = \frac{\alpha}{2} + 0 = \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$$

$$[A]_{33} = \frac{1}{2}(\nu \{C | C_T, C\}) + \frac{1}{2}(\nu \{П | M_l, П\}) = \frac{\beta}{2} + 0 = \frac{\beta}{2} = \frac{3}{2}$$

$$[A]_{34} = \frac{1}{2}(\nu \{C | C_T, П\}) + \frac{1}{2}(\nu \{П | M_l, C\}) = \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$[A]_{41} = \frac{1}{2}(\nu \{П | C_T, C\}) + \frac{1}{2}(\nu \{C | M_l, C\}) = \frac{\beta}{2} - \frac{\beta}{2} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0$$

$$[A]_{42} = \frac{1}{2}(\nu \{П | C_T, П\}) + \frac{1}{2}(\nu \{C | M_l, П\}) = 0 + \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$$

$$[A]_{43} = \frac{1}{2}(\nu \{П | C_T, П\}) + \frac{1}{2}(\nu \{C | M_l, C\}) = 0 - \frac{\beta}{2} = -\frac{\beta}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$[A]_{44} = \frac{1}{2}(\nu \{П | C_T, C\}) + \frac{1}{2}(\nu \{C | M_l, П\}) = \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{2} = \frac{\beta + \alpha}{2} = \frac{3 + 1}{2} = 2$$

Таким образом, получили следующую платежную матрицу:



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix} \quad (10.2)$$

Как видно из полученной матрицы, эквивалентные стратегии отсутствуют.

Нижняя цена игры равна

$$P_* = \max_i \min_j [A]_{ij} = \max_i \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = 0. \quad (10.3)$$

Верхняя цена игры

$$P^* = \min_j \max_i [A]_{ij} = \min_j \left( 1 \quad 1 \quad \frac{3}{2} \quad 2 \right) = 1. \quad (10.4)$$

Так как верхняя и нижняя цена игры не совпадают, следовательно, оптимального решения в чистых стратегиях не существует. Решение будем искать в смешанных стратегиях, т.е. необходимо найти значения  $p_i^1$ ,  $i=1..4$  - вероятности с которыми первый игрок принимает  $i$ -ю стратегию, и  $p_j^2$ ,  $j=1..4$ .

В этом случае цена игры будет равна

$$\tilde{v} = \max_{p_i^1} \min_j \sum_{i=1}^4 [A]_{ij} p_i^1. \quad (10.5)$$

Для поиска оптимальных смешанных стратегий перейдем к решению соответствующей задачи линейного программирования.

Введем величину

$$v = \min_j \sum_{i=1}^4 [A]_{ij} p_i^1 \quad (10.6),$$

тогда, очевидно,

$$\tilde{v} = \max_{p_i^1} v, \quad (10.7)$$

и получаем следующие неравенства:

$$v \leq \sum_{i=1}^4 [A]_{ij} p_i^1, \quad j=1..4. \quad (10.8)$$

Тогда из (10.6)-(10.8) получаем следующую задачу линейного программирования

$$\left\{ \begin{array}{l} v \rightarrow \max \\ \sum_{i=1}^4 [A]_{ij} p_i^1 \geq v, \quad j=1..4; \\ \sum_{i=1}^4 p_i^1 = 1 \\ p_i^1 \geq 0, \quad i=1..4 \end{array} \right. \quad (10.9)$$

Теперь, решив задачу (10.9), мы получим оптимальную смешанную стратегию для первого игрока. Решим задачу (10.9) в общем виде, перейдем к другой задаче линейного программирования с меньшим числом переменных и ограничений.

Исходя из (10.3) и (10.4), положим цену игры  $\tilde{v} > 0$  и введем новые переменные

$$x_i = \frac{p_i^1}{\tilde{v}}, \quad i=1..4 \quad (10.10).$$

Отысканию максимума величины  $v > 0$ , будет соответствовать поиск минимума  $\frac{1}{v}$ , откуда получаем:

$$\min \frac{1}{v} = \min \frac{1}{v} \sum_{i=1}^4 p_i^1 = \min \sum_{i=1}^4 x_i$$

Разделив теперь систему неравенств (10.9) на  $\tilde{v}$ , получим новую задачу линейного программирования:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^4 x_i^1 \rightarrow \min \\ \sum_{i=1}^4 [A]_{ij} x_i^1 \geq 1, \quad j=1..4; \\ x_i^1 \geq 0, \quad i=1..4 \end{array} \right. \quad (10.11)$$

Найдем, также оптимальную смешанную стратегию для второго игрока, являющуюся решением задачи линейного программирования, двойственной к (10.11):

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^4 x_i^2 \rightarrow \max \\ \sum_{j=1}^4 [A]_{ij} x_i^2 \leq 1, \quad i=1..4; \\ x_i^1 \geq 0, \quad i=1..4 \end{array} \right. \quad (10.12)$$

### Порядок выполнения работы в MathCAD

Поставленная задача легко реализуется в системе MathCAD (см. рис. 10.1).

Необходимо задать платежную матрицу А.

Математическая модель для игрока А (10.11) реализована с помощью функции *minimize*.

Математическая модель для игрока В (10.12) реализована с помощью функции *maximize*.

Смешанные стратегии игрока А находятся согласно формулы 10.10. Аналогичная формула используется и для игрока В.

## Лабораторная работа "Матричные игры"

Исходные данные

Для игрока А     $\alpha := 1$   
 Для игрока В     $\beta := 3$   
 Платежная матрица А     $A :=$

$$\begin{pmatrix} \frac{\beta}{2} - \frac{\beta}{2} & \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} & \frac{\beta}{2} - \frac{\beta}{2} & \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} \\ \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{2} & 0 + 0 & 0 + 0 & \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{2} \\ \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{2} & \frac{\alpha}{2} + 0 & \frac{\beta}{2} + 0 & \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} \\ \frac{\beta}{2} - \frac{\beta}{2} & 0 + \frac{\alpha}{2} & 0 - \frac{\beta}{2} & \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0.5 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & -1.5 & 2 \end{pmatrix}$$

### Математическая модель задачи для игрока А

$$x := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{решение игрока А} \quad f(x) := \sum x \quad \text{-целевая функция}$$

Given

$$A^T \cdot x \geq 1$$

$$x \geq 0$$

$$x := \text{Minimize}(f, x)$$

$$x = \begin{pmatrix} 0.333 \\ 0 \\ 1 \\ 0.333 \end{pmatrix} \quad f(x) = 1.667$$

Цена игры     $v := \frac{1}{f(x)} \quad v = 0.6$

Смешанные стратегии для игрока А     $q := v \cdot x \quad q = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0 \\ 0.6 \\ 0.2 \end{pmatrix}$

Проверка     $\sum q = 1$

Рисунок 10.1 Реализация задачи в MathCAD

### Математическая модель задачи для игрока В

$$y := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ решение для игрока В}$$

$$f(y) := \sum y \text{ целевая функция}$$

Given

$$A \cdot y \leq 1$$

$$y \geq 0$$

$$y := \text{Maximize}(f, y)$$

$$y = \begin{pmatrix} 0.667 \\ 0.667 \\ 0 \\ 0.333 \end{pmatrix} \quad f(y) = 1.667$$

$$\text{Цена игры} \quad v := \frac{1}{f(y)} \quad v = 0.6$$

$$\text{Смешанные стратегии для игрока В} \quad p := v \cdot y$$

$$p = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.4 \\ 0 \\ 0.2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Проверка} \quad \sum p = 1$$

Продолжение рис. 10.1

### Порядок выполнения работы в Excel

На рис. 10.2 представлен Лист книги Excel с необходимыми формулами и данными для решения поставленной задачи.

1. В ячейку C2 занести значение  $\alpha$ , а в ячейку C3 – значение  $\beta$ .
2. В ячейки B7:E10 занести формулы расчета платежной матрицы
3. В ячейку B11 занести формулу: =МАКС(B7:B10), которую распространить до ячейки E11.
4. В ячейку F7 занести формулу: =МИН(F7:F10), которую распространить до ячейки F10.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	
1	<b>Лабораторная работа "Матричные игры"</b>									
2	Для игрока А	$\alpha = 1$								
3	Для игрока В	$\beta = 3$								
4										
5	Стратегии игрока А	Стратегии игрока В					min	Оптимальное решение $x_i$	Ограничения для задачи игрока В	Смешанные стратегии игрока А
6		B1	B2	B3	B4					
7	A1	0	1	0	1	0	0,3333333	1	0,2	
8	A2	1	0	0	1	0	0	1	0	
9	A3	1	0,5	1,5	0	0	1	1	0,6	
10	A4	0	0,5	-1,5	2	-1,5	0,3333333	1	0,2	
11	max	1	1	1,5	2	1 > 0				
12	Оптимальное решение $y_j$	0,6666667	0,6666667	0	0,33333		Целевая функция для игрока А	1,666666667	Сумма вероятностей	
13	Ограничения для задачи игрока А	1	1	1	1		Целевая функция для игрока В	1,666666667	1	
14	Смешанные стратегии игрока В	0,4	0,4	0	0,2		Сумма вероятностей	1		
15	Цена игры	0,6								

Рисунок 10.2 Лист книги Excel с решением поставленной задачи

#### Для игрока В

1. В ячейки B12:E12 в качестве оптимального решения занести 0.
2. В ячейку H7 занести формулу ограничения (10.12)  $=\text{СУММПРОИЗВ}(B7:E7; \text{\$B\$12:\$E\$12)$ , которую распространить до ячейки H10.
3. В ячейку H13 занести формулу целевой функции для игрока В  $=\text{СУММ}(B12:E12)$ .
4. В ячейку B15 занести формулу определения цены игры  $=1/H13$ .
5. В ячейку B14 занести формулу для вычисления смешанной стратегии  $=\text{\$B\$15}*B12$
6. В ячейку H14 занести формулу вычисления суммы смешанных стратегий:  $=\text{СУММ}(B14:E14)$ .

#### Для игрока А

1. В ячейки G7:G10 в качестве оптимального решения занести 0.
2. В ячейку B13 занести формулу ограничения (10.11)  $=\text{СУММПРОИЗВ}(B7:B10; \text{\$G\$7:\$G\$10})$ , которую распространить до ячейки E13.
3. В ячейку H12 занести формулу целевой функции для игрока А  $=\text{СУММ}(G7:G10)$ .

4. В ячейку I7 занести формулу для вычисления смешанной стратегии  $=\$B\$15*B12$ .
5. В ячейку I13 занести формулу вычисления суммы смешанных стратегий:  $=СУММ(I7:i10)$ .

На рис.10.3 показана реализация задачи для игрока В в Excel.

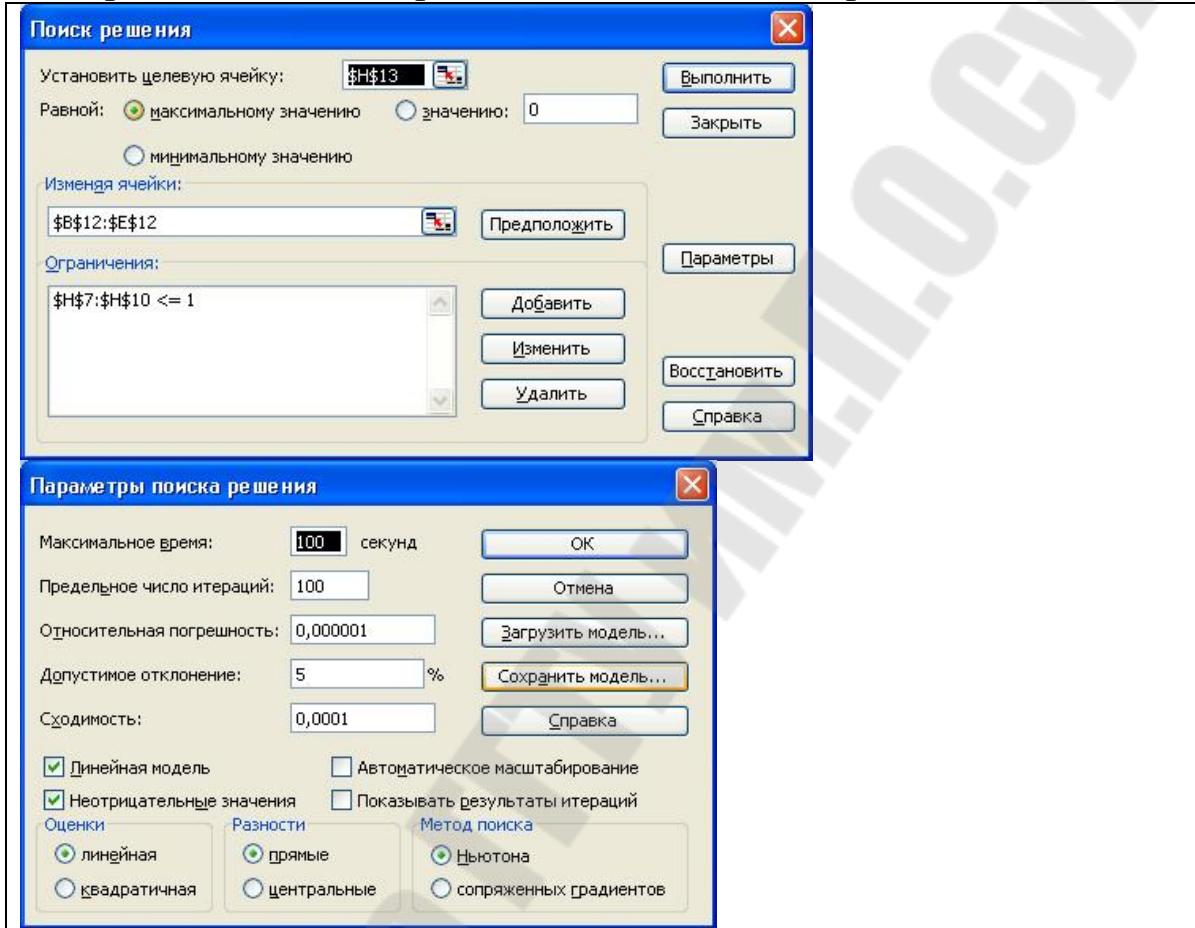


Рисунок 10.3 «Поиск решения» для игрока В в Excel

На рис.10.4 показана реализация задачи для игрока А в Excel.

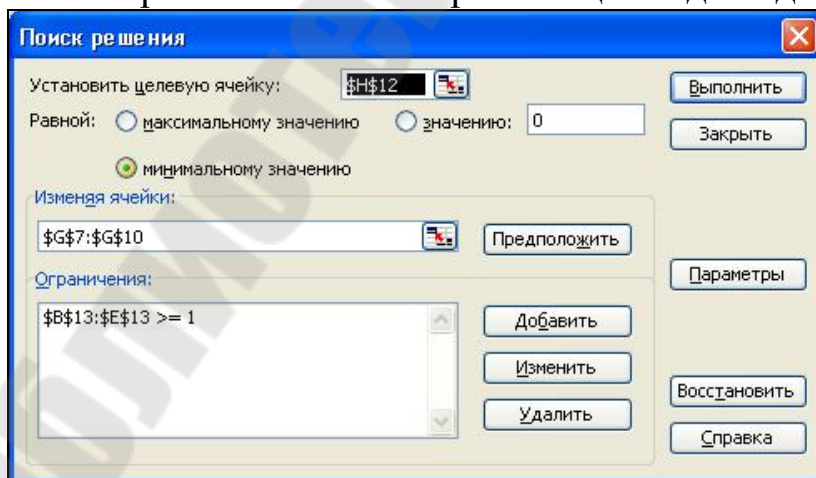


Рисунок 10.4 «Поиск решения» для игрока А в Excel

## ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов А.В., Холод Н.И. Математическое программирование: [Учеб. пособие для заочной спец. вузов]. – Мн.: Выш. шк., 1984. – 221 с.
2. Кузнецов А.В., Сакович В.А., Холод Н.И. Высшая математика: Математическое программирование: Учеб. – 2-е изд., перераб. и под. – Мн.: Выш. шк., 2001. – 351 с.
3. Сакович В.А. Исследование операций. – Мн.: выш. школа, 1985. – 256 с.
4. Тимковский В.Г. Дискретная математика в мире станков и деталей – М.: Наука, 1992 – 145 с.
5. Климович Ф.Ф., Присевок А.Ф. Математическое моделирование технологических задач в машиностроении. Учебно-методическое пособие по лабораторным работам для студентов машиностроительных специальностей высших учебных заведений. – Мн.:БГПА, 2000. – 88с.
6. Мурашко В.С. Практическое пособие к выполнению лабораторных работ по курсу «Математическое моделирование технологических задач в машиностроении» для студентов спец. Т03.01.01 – «Технология машиностроения». – Гомель: ГГТУ им. П.О. Сухого, 1999. – 60с. (М/у №2416)
7. Мурашко В.С. Оптимизация режимов резания. Практическое пособие по курсу «Математическое моделирование технологических задач в машиностроении» для студентов спец. Т.03.01.000 «Технология машиностроения» очной и заочной формы обучения». – Гомель: ГГТУ им. П.О. Сухого, 2003. – 36с. (М/у №2866).
8. Мурашко В.С. Основы систем автоматизированного проектирования. Практическое руководство к контрольным работам по одноименному курсу для студентов заочного отделения специальностей 36.01.01 «Технология машиностроения» и 36.01.03 «Технологическое оборудование машиностроительного производства» (Т.03.01.01 «Технология машиностроения»). – Гомель: ГГТУ им. П.О. Сухого, 2004. – 36с. (М/у №3017).
9. Щербаков С.А. Моделирование решений технологических задач. Учебное пособие по курсу «Основы математического моделирования» для студентов специальности 12.01- «Технология машиностроения». – Гомель: ГГТУ им. П.О. Сухого, 1995. – 66с. (М/у №1948).



**Мурашко Валентина Семеновна**

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
И АЛГОРИТМИЗАЦИЯ  
ИНЖЕНЕРНЫХ ЗАДАЧ**

**Лабораторный практикум  
для студентов специальности  
1-36 01 01 «Технология машиностроения»  
дневной и заочной форм обучения**

Подписано к размещению в электронную библиотеку  
ГГТУ им. П. О. Сухого в качестве электронного  
учебно-методического документа 08.02.10.

Пер. № 121Е.

E-mail: [ic@gstu.by](mailto:ic@gstu.by)

<http://www.gstu.by>