

УДК 548.232.4

**ЛОКАЛЬНО-НЕРАВНОВЕСНЫЕ СВОЙСТВА  
ФАЗОВОЙ ГРАНИЦЫ ВЫСОКОСКОРОСТНОЙ  
КРИСТАЛЛИЗАЦИИ ПЕРЕОХЛАЖДЕННОГО  
РАСПЛАВА  
ЧАСТЬ 1. ТРАНСЗВУКОВОЙ ПЕРЕХОД  
НА ЛИНИИ РОСТА**

**О. Н. ШАБЛОВСКИЙ, Д. Г. КРОЛЬ, И. А. КОНЦЕВОЙ**

*Учреждение образования «Гомельский государственный  
технический университет имени П. О. Сухого»,  
Республика Беларусь*

**Ключевые слова:** переохлажденный расплав; рост кристалла; предвестник боковой ветви дендрита; неравновесный теплоперенос.

**Введение**

Процессы высокоскоростной кристаллизации глубоко переохлажденного расплава служат основой перспективных способов получения материалов с новыми функциональными свойствами. В настоящее время в экспериментальных условиях достигнуты скорости роста 20–70 м/с при глубине переохлаждения расплава до 300 °С. История данного вопроса и библиография проблемы изложены в [1].

Важным аспектом проблемы роста является дендритное ветвление и анализ морфологической неустойчивости фазовой границы (ФГ). В данной работе рассматривается рост кристалла из однокомпонентного переохлажденного расплава с позиций теории локально-неравновесного теплопереноса. Трудности теоретического исследования этой задачи обуславливают следующие обстоятельства: 1) термодинамически неравновесное состояние расплава; 2) высокая степень нестационарности процессов, происходящих на фазовой границе; 3) трехмерность поверхности дендрита. В общей постановке трехмерная нестационарная задача очень сложна. Здесь мы применяем более простой (полуобратный) подход к проблеме, позволяющий выяснить многие существенные детали процесса формирования теплового поля на поверхности роста кристалла, а именно: рассматриваем ФГ стационарной геометрической формы, перемещающуюся с постоянной скоростью. Этот случай характерен для стадии установившегося во времени режима роста. Данная работа продолжает исследования [2]–[5] и имеет следующие цели: 1) изучить градиентные свойства теплового поля на линии роста; 2) проанализировать качественные и количественные различия между тепловыми процессами на двухмерных плоской и осесимметричной ФГ.

**Кинетические соотношения на фазовой границе**

Релаксационная модель Максвелла переноса тепла в неподвижной среде состоит из уравнения для теплового потока и уравнения баланса энергии [6]:

$$\mathbf{q} + \gamma \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = -\lambda \text{grad}T; \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \text{div} \mathbf{q} = q_v, \quad du(t)/dT = c, \quad (2)$$

где  $T$  – температура;  $\mathbf{q}(q_1, q_2, q_3)$  – вектор удельного теплового потока;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности;  $c$  – объемная теплоемкость;  $\gamma$  – время релаксации теплового потока;  $q_0$  – мощность внутренних источников энергии;  $u$  – плотность энергии. В трехмерном пространстве  $(x, y, z)$  ФГ кристаллизации моделируем поверхность сильного разрыва теплового поля. На поверхности сильного разрыва  $f(x, y, z, t) = 0$  условия динамической совместности получаем обычным образом [7]:

$$N(u_j - u_*) - Q = (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n})_j - (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n})_*; \quad (3)$$

$$(\mathbf{q} \cdot \mathbf{s})_j = (\mathbf{q} \cdot \mathbf{s})_*, \quad (\mathbf{q} \cdot \mathbf{b})_j = (\mathbf{q} \cdot \mathbf{b})_*; \quad (4)$$

$$N = -\frac{\partial f / \partial t}{|\text{grad}f|}, \quad Q = L \left( N + \gamma_j \frac{dN}{dt} \right).$$

Здесь (3) – баланс энергии на ФГ; (4) – условия непрерывности касательных и бинормальных к ФГ компонент вектора теплового потока;  $L$  – теплота фазового перехода единицы объема вещества;  $\mathbf{N} = N\mathbf{n}$  – скорость перемещения ФГ. Звездочкой отмечены параметры расплава; индекс  $j$  указывает, что значение функции определено на правой стороне разрыва, в твердой фазе. Подробности вывода и обсуждение соотношений (3), (4) даны в [5]. Отметим, что при записи формул (3), (4) используется ортогональный базис  $\mathbf{s}$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{b}$ , соответствующий касательной, главной нормали и бинормали к поверхности ФГ. Алгоритм построения такого базиса аналогичен тому, что применялся в газодинамической теории ударных волн [8].

Рассмотрим формальным образом трехмерное пространство  $x_1 = x + b_1 t$ ,  $x_2 = y$ ,  $x_3 = z$  с ортонормированным базисом  $\mathbf{i}_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ . Уравнение ФГ имеет вид  $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ . Единичный вектор нормали к ФГ равен:

$$\mathbf{n} = \frac{\text{grad}f}{|\text{grad}f|}; \quad \mathbf{G} \equiv \text{grad}f = \mathbf{i}_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \mathbf{i}_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \mathbf{i}_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}; \quad G = |\text{grad}f|.$$

Координатная ось  $x_1$  направлена вдоль вектора теплового потока  $\mathbf{q}_*$  (рис. 1).

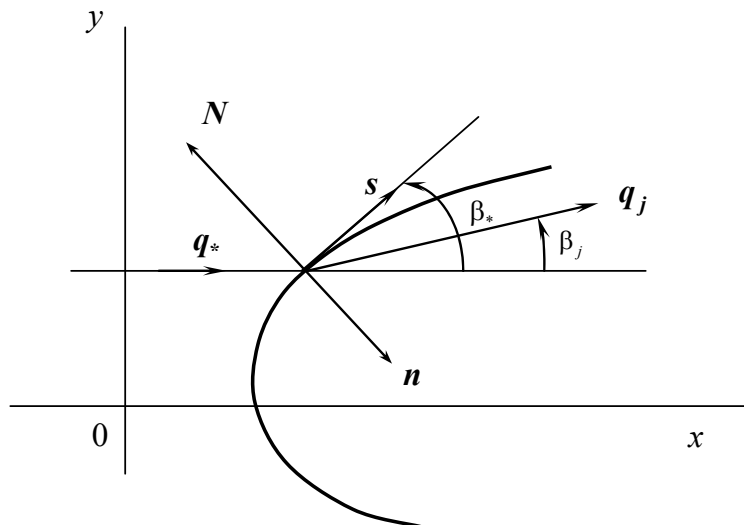


Рис. 1. Основные геометрические параметры ФГ кристаллизации

Вектор  $\mathbf{n}$  направлен в сторону кристаллической фазы:  $\mathbf{q}_* \cdot \text{grad}f \geq 0$ . Единичный вектор касательной  $\mathbf{s}$  лежит в плоскости  $(\mathbf{n}, \mathbf{q}_*)$ . Вектор  $\mathbf{b}$  бинормали перпендикулярен плоскости  $(x_1, x_2)$  и вместе с  $\mathbf{s}$ ,  $\mathbf{n}$  образует правую систему векторов  $\mathbf{s}$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{b}$ :  $\mathbf{s} = \mathbf{n} \times \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{b} = \mathbf{s} \times \mathbf{n}$ . Вектор  $\mathbf{q}_j$ , очевидно, лежит в плоскости  $(x_1, x_2)$ , т. е. в плоскости  $(\mathbf{n}, \mathbf{q}_*)$ . На плоскости  $(\mathbf{s}, \mathbf{n})$  расположение векторов  $\mathbf{q}_*$ ,  $\mathbf{q}_j$  характеризуется углами  $\beta_*$ ,  $\beta_j$ , которые отсчитываются от оси  $x_1$  так, как показано на рис. 1. Это означает, что  $\beta_j$  есть угол поворота вектора теплового потока за ФГ. Теперь можем записать вектор бинормали в виде:

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{q}_* \times \mathbf{n}}{|\mathbf{q}_*| \cos \beta_*}, \quad \mathbf{q}_* = q_*(\mathbf{s} \cos \beta_* + \mathbf{n} \sin \beta_*), \quad \sin \beta_* = \frac{\mathbf{q}_* \cdot \text{grad}f}{q_* |\text{grad}f|},$$

где  $q_* = |\mathbf{q}_*| > 0$ . В случае нормального механизма роста известное кинетическое условие для температуры на ФГ имеет вид:

$$|N| = \mu(T_e - T_j), \quad T_e = T_c \left( 1 - \frac{UK}{L} \right),$$

где  $\mu$  – кинетический коэффициент роста;  $T_e$  – температура равновесия между твердой и жидкой фазами;  $T_c$  – равновесная температура кристаллизации;  $U$  – поверхностная энергия границы раздела фаз;  $K$  – средняя кривизна ФГ. Считается, что  $K > 0$ , если ФГ вогнута в сторону кристалла.

### Разрушение теплового поля

Рассмотрим двумерный тепловой процесс, когда ФГ имеет вид:

$$f = x + b_1 t - B(y) = 0; \quad x_1 = x + b_1 t, \quad x_2 = y, \quad x_3 \equiv 0.$$

Применяем уравнения теплопереноса (1), записанные в плоскости  $(x_1, y)$ :

$$cb_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} + \frac{\partial q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial q_2}{\partial y} + \frac{v}{y} q_2 = 0, \quad q_1 + \gamma b_1 \frac{\partial q_1}{\partial x_1} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_1}, \quad q_2 + \gamma b_1 \frac{\partial q_2}{\partial x_1} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y},$$

где  $v = 0$  для плоского случая;  $v = 1$  – для осесимметричного процесса ( $y = 0$  – ось симметрии). Координатные линии  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ , соответствующие осям  $\mathbf{s}$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{b}$ , имеют вид:

$$\xi_1 = x_1 + \int \frac{dy}{\dot{B}(y)}, \quad \xi_2 = \begin{cases} -z; h_2 = 1 & \text{при } v = 0; \\ \varphi; h_2 = r & \text{при } v = 1; \end{cases} \quad \xi_3 = x_1 - B(y);$$

$$\dot{B}(y) = dB(y)/dy, \quad h_1 = \frac{\dot{B}(y)}{G}, \quad h_3 = \frac{1}{G}, \quad G = (1 + \dot{B}^2)^{1/2}, \quad h_1 = \cos \beta_*, \quad h_3 = \sin \beta_*,$$

где  $r \equiv y$  и  $\varphi$  – соответственно, радиальная и угловая координаты при  $v = 1$ . Процедура построения этих координатных линий будет изложена во второй части данной работы.

Компоненты векторов теплового потока для жидкой и твердой фаз:

$$(\mathbf{q}_*)_s = q_* \cos \beta_*, \quad (\mathbf{q}_*)_n = q_* \sin \beta_*; \quad q_* = |\mathbf{q}_*|;$$

$$(\mathbf{q}_j)_s = q_j \cos(\beta_* - \beta_j), (\mathbf{q}_j)_n = q_j \sin(\beta_* - \beta_j), (\mathbf{q}_j)_b \equiv 0; q_j = |\mathbf{q}_j|.$$

Компоненты градиента температуры:

$$(\text{grad}T)_s = \frac{1}{h_1} \frac{\partial T}{\partial \xi_1}, (\text{grad}T)_b = \frac{1}{h_2} \frac{\partial T}{\partial \xi_2}, (\text{grad}T)_n = \frac{1}{h_3} \frac{\partial T}{\partial \xi_3}.$$

Скорость перемещения ФГ есть  $N = -b_1 / G$ . Динамические условия совместности на ФГ:

– непрерывность касательных компонент теплового потока:

$$q_{sj} \equiv q_j \cos(\beta_* - \beta_j) = q_* \cos \beta_*; \quad (5)$$

– баланс энергии:

$$q_{nj} \equiv q_j \sin(\beta_* - \beta_j) = q_* \sin \beta_* + Q_1; \quad (6)$$

$$Q_1 = N(u_j - u_*) - LN, \quad dN/dt \equiv 0; \quad u_j - u_* = c_j T_j - c_* T_* + T_c(c_* - c_j); \quad c_*, c_j - \text{const};$$

– кинетическое условие:

$$T_j = T_c - \frac{UT_c}{L} K - \frac{b_1}{\mu} \sin \beta_*; \quad (7)$$

$$K_1(y) = \frac{\ddot{B}(y)}{G^3(y)}; \quad U, b_1, \mu - \text{const}; \quad K = K_1 + K_2; \quad K_2(y) = \frac{v\dot{B}(y)}{yG(y)}.$$

Операторы дифференцирования преобразуются следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \frac{\partial}{\partial \xi_3}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \xi_1} \text{tg} \beta_* - \frac{\partial}{\partial \xi_3} \frac{1}{\text{tg} \beta_*}; \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1} = h_1 \frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \cos \beta_*, \quad \frac{\partial}{\partial \xi_3} = h_3 \frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n} \sin \beta_*, \quad (9)$$

где  $\partial/\partial s$  и  $\partial/\partial n$  – операторы дифференцирования вдоль касательной и вдоль нормали к линии ФГ. Компоненты вектора  $\mathbf{q}(q_1, q_2)$  на плоскости  $(x, y)$  и этого же вектора  $\mathbf{q}(q_s, q_n)$  на плоскости  $(s, n)$  связаны между собой так:  $q_1 = q_n \sin \beta_* + q_s \cos \beta_*$ ,  $q_2 = -q_n \cos \beta_* + q_s \sin \beta_*$ . Отсюда ясно, что  $q_{1j}$ ,  $q_{2j}$  определяются через  $q_{sj}$ ,  $q_{nj}$ , которые известны из условий на ФГ. Выполняя по формулам (8), (9) преобразования независимых переменных  $(x_1, y) \rightarrow (\xi_1, \xi_3) \rightarrow (s, n)$ , получаем вместо исходных уравнений теплопереноса:

– уравнение энергии:

$$cb_1 \sin \beta_* \frac{\partial T}{\partial n} + \frac{\partial q_n}{\partial n} = \Pi_1, \quad (10)$$

$$\Pi_1 = -cb_1 \cos \beta_* \frac{\partial T}{\partial s} - \frac{\partial q_s}{\partial s} - \frac{v}{y} (q_s \sin \beta_* - q_n \cos \beta_*) - \left( \frac{q_s}{\text{tg} \beta_*} + q_n \right) \frac{\partial \beta_*}{\partial s};$$

– уравнение теплового потока в проекции на ось  $x$ :

$$\lambda \sin \beta_* \frac{\partial T}{\partial n} + \gamma b_1 \sin^2 \beta_* \frac{\partial q_n}{\partial n} + \gamma b_1 \sin \beta_* \cos \beta_* \frac{\partial q_s}{\partial n} = \Pi_2, \quad (11)$$

$$\Pi_2 = -\lambda \cos \beta_* \frac{\partial T}{\partial s} - \gamma b_1 \cos^2 \beta_* \frac{\partial q_s}{\partial s} - \gamma b_1 \sin \beta_* \cos \beta_* \frac{\partial q_n}{\partial s} - q_n \sin \beta_* - q_s \cos \beta_*;$$

– уравнение теплового потока в проекции на ось  $y$ :

$$-\lambda \cos \beta_* \frac{\partial T}{\partial n} - \gamma b_1 \sin \beta_* \cos \beta_* \frac{\partial q_n}{\partial n} + \gamma b_1 \sin^2 \beta_* \frac{\partial q_s}{\partial n} = \Pi_3, \quad (12)$$

$$\Pi_3 = -\lambda \sin \beta_* \frac{\partial T}{\partial s} + q_n \cos \beta_* - q_s \sin \beta_* + \gamma b_1 \cos^2 \beta_* \frac{\partial q_n}{\partial s} - \gamma b_1 \sin \beta_* \cos \beta_* \frac{\partial q_s}{\partial s}.$$

Уравнения (10)–(12) представляют собой систему трех линейных неоднородных алгебраических уравнений относительно производных  $\partial T / \partial n$ ,  $\partial q_n / \partial n$ ,  $\partial q_s / \partial n$ . Определитель этой системы равен:

$$\Delta = b_1 \lambda \gamma \sin \beta_* (M^2 - 1), \quad (13)$$

$$M^2 = N^2 / w_j^2, \quad N^2 = b_1^2 \sin^2 \beta_*, \quad w_j^2 = \lambda / (c\gamma),$$

где  $M$  – тепловое число Маха;  $c = c_j$ ,  $\lambda = \lambda_j$ ,  $\gamma = \gamma_j$ .

В данном случае ФГ перемещается со скоростью, не зависящей от времени, поэтому естественно допустить, что тепловое поле расплава находится в отрелаксировавшем состоянии:  $q_* \equiv 0$ ,  $T_* \equiv \text{const}$ . Тогда  $q_{sj} = 0$ ,  $\partial q_{sj} / \partial s = 0$ . После дифференцирования по  $s$  динамических условий (5)–(7) находим:

$$q_{nj} = N(u_j - u_* - L), \quad \frac{\partial N}{\partial s} = b_1 K \cos \beta_*,$$

$$\frac{\partial q_{nj}}{\partial s} = (u_j - u_* - L) b_1 K \cos \beta_* + N c_j \frac{\partial T_j}{\partial s}, \quad N = -b_1 \sin \beta_*, \quad (14)$$

$$\frac{\partial T_j}{\partial s} = -\frac{UT_c}{L} \dot{K} \sin \beta_* + \frac{b_1}{\mu} K \cos \beta_*, \quad \dot{K} = dK / dy.$$

Нормальные производные от температуры и компонент вектора теплового потока определяются такими выражениями:

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \frac{\tilde{\Delta}_1}{\lambda(M^2 - 1)}, \quad \frac{\partial q_n}{\partial n} = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \frac{\partial q_s}{\partial n} = -\frac{\lambda}{b_1 \gamma \sin \beta_*} \frac{\partial T}{\partial s}, \quad (15)$$

$$\Delta_1 = \gamma b_1 \sin \beta_* \cdot \tilde{\Delta}_1,$$

$$\tilde{\Delta}_1 = (u_j - u_* - L)(\gamma b_1^2 K \cos 2\beta_* - b_1 \sin \beta_*) + \frac{v}{2y} \gamma b_1 q_n \sin 2\beta_* - \gamma b_1^2 c_j \frac{\partial T_j}{\partial s} \sin 2\beta_*;$$

$$\Delta_2 = \lambda \gamma c b_1^2 \sin \beta_* \cos \beta_* \frac{\partial T}{\partial s} - \gamma^2 c b_1^3 \sin^2 \beta_* \cos \beta_* \frac{\partial q_n}{\partial s} - \gamma c b_1^2 \sin^2 \beta_* q_n.$$

В этих формулах  $0 < \beta_* \leq \pi/2$ . Чтобы определить значения нормальных производных на ФГ в твердой фазе, нужно воспользоваться выражениями  $q_{sj}$ ,  $q_{nj}$ ,  $T_j$  из (5)–(7) и выражениями  $\partial q_{nj}/\partial s$ ,  $\partial T_j/\partial s$ ,  $\partial N/\partial s$  из (14).

Проанализируем полученные формулы. Из (13) ясно, что в звуковой точке ( $M^2 = 1$ ) возникает градиентная катастрофа теплового поля:  $M^2 \rightarrow 1$ ,  $\partial T/\partial n \rightarrow \infty$ . Другими словами, происходит разрушение теплового поля на линии роста кристалла. Этот математический признак служит моделью предвестника боковой ветви дендрита на ФГ кристаллизации [5].

Отметим еще, что при  $\partial T_j/\partial s \equiv 0$  формула (15) дает  $\partial q_s/\partial n \equiv 0$ . Для искривленной ФГ, когда  $K_1 \neq 0$ ,  $\dot{K}_1 \neq 0$ , т. е.  $\partial T_j/\partial s \neq 0$ , имеем сильную зависимость  $\partial q_s/\partial n$  от времени релаксации  $\gamma$  и от скорости перемещения вершины дендрита ( $-b_1$ ). В самом деле, при  $\gamma \rightarrow 0$  будет  $\partial q_s/\partial n \rightarrow \infty$ . Значит,  $\gamma > 0$  является параметром регуляризации поведения касательной компоненты теплового потока на криволинейной ФГ. Если  $\dot{K}(y) \neq 0$ , то  $\partial q_s/\partial n \sim (-b_1)^{-1}$ , т. е. эта производная существенно зависит от скорости движения ФГ. Из формул (15) следует, что для дозвукового ( $M^2 < 1$ ) и сверхзвукового ( $M^2 > 1$ ) режимов движения ФГ такие важные факторы, как кривизна и осесимметричность проявляют себя по-разному и в количественном, и в качественном отношении. Если во всех точках ФГ имеем  $N^2 > w^2$  либо  $N^2 < w^2$ , то градиентная катастрофа не возникает; ее появление связано именно с существованием звуковой точки на ФГ.

### Результаты расчетов: кристаллизация никеля

На рис. 2–5 приведены результаты расчетов тепловых свойств ФГ кристаллизации никеля; черным кружком отмечена звуковая точка. Были приняты следующие значения теплофизических параметров:  $T_c = 1728$  °К,  $T_* = 1562$  °К,  $L = 2,14 \cdot 10^9$  Дж/м<sup>3</sup>,  $c = 5,62 \cdot 10^6$  Дж/(м<sup>3</sup> · К),  $U = 1,81$  Дж/м<sup>2</sup>,  $\lambda = 69$  Вт/(м · К),  $\gamma = 1,38 \cdot 10^{-7}$  с,  $\mu = 9,53$  м/(с · К),  $b_1$  изменяется от 5,3 м/с до 29,35 м/с. Числовое значение  $\mu$  выбрано на основе формул, полученных в [4]. Напомним, что здесь  $y$  – расстояние от оси дендрита до линии роста; вычисления выполнены для случаев плоской ( $\nu = 0$ ) и осевой ( $\nu = 1$ ) симметрий.

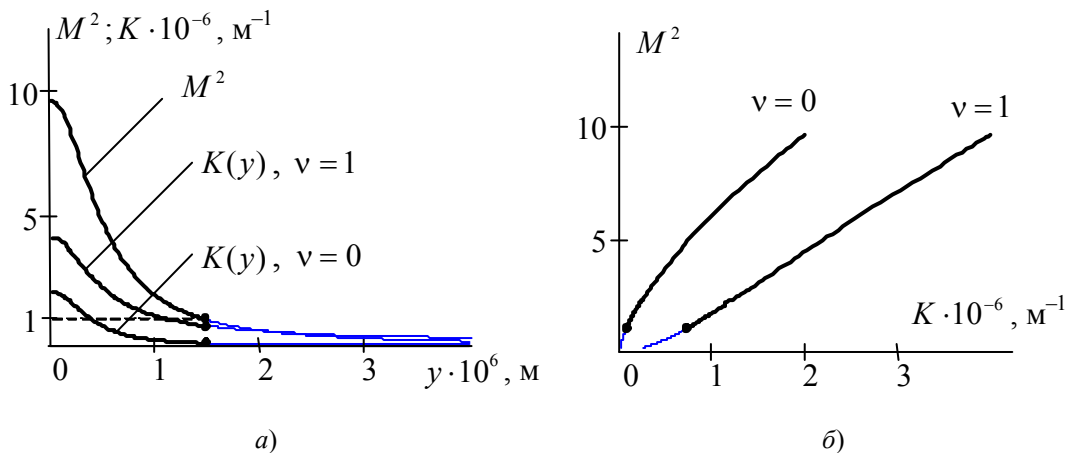


Рис. 2. Корреляция «кривизна – квадрат теплового числа Маха»: а – зависимость этих величин от поперечной координаты; б – различия между плоской и осесимметричной ФГ

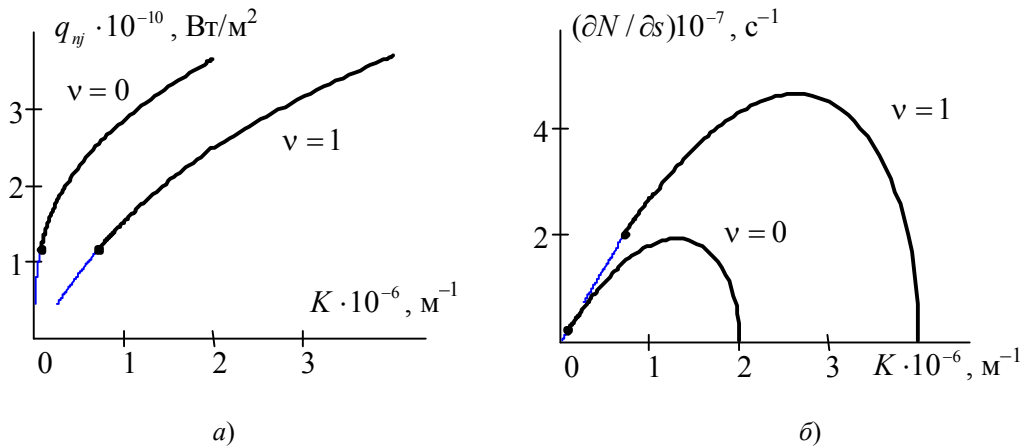


Рис. 3. Влияние кривизны и типа симметрии на свойства ФГ:  
 а – нормальный к ФГ тепловой поток; б – производная от скорости роста по дуговой координате

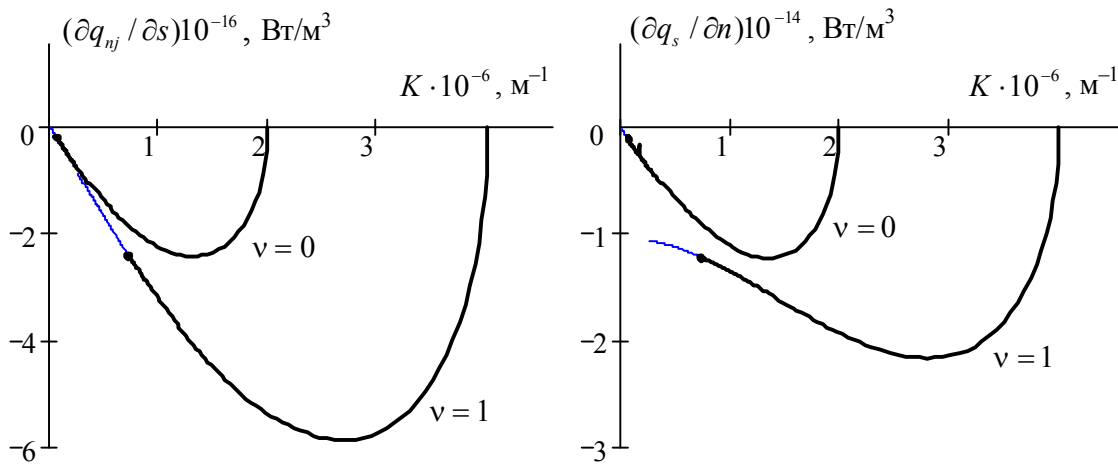


Рис. 4. Влияние типа симметрии на двухмерную структуру теплового потока:  
 а – касательная производная от  $q_{nj}$ ; б – нормальная производная от  $q_s$

В данном классе решений [см. формулы (14), (15)] зависимость  $M^2(y)$  одна и та же для обеих симметрий. Для никеля в конечной окрестности вершины (рис. 2) существует звуковая точка  $M^2 = 1$ , в которой скорость роста равна скорости распространения тепловых возмущений. Согласно (13) и (15), это является предвестником боковой ветви дендрита. Из рис. 3 ясно, что  $q_{nj}$  монотонно убывает по мере удаления от вершины. Касательная производная  $\partial N / \partial s$  ведет себя немонотонно по отношению к координате  $y$  или, что то же самое, по отношению к кривизне  $K$ : в правой конечной окрестности  $y = 0$  эта зависимость имеет максимум. Градиентные свойства температуры и теплового потока показаны на рис. 4 и 5.

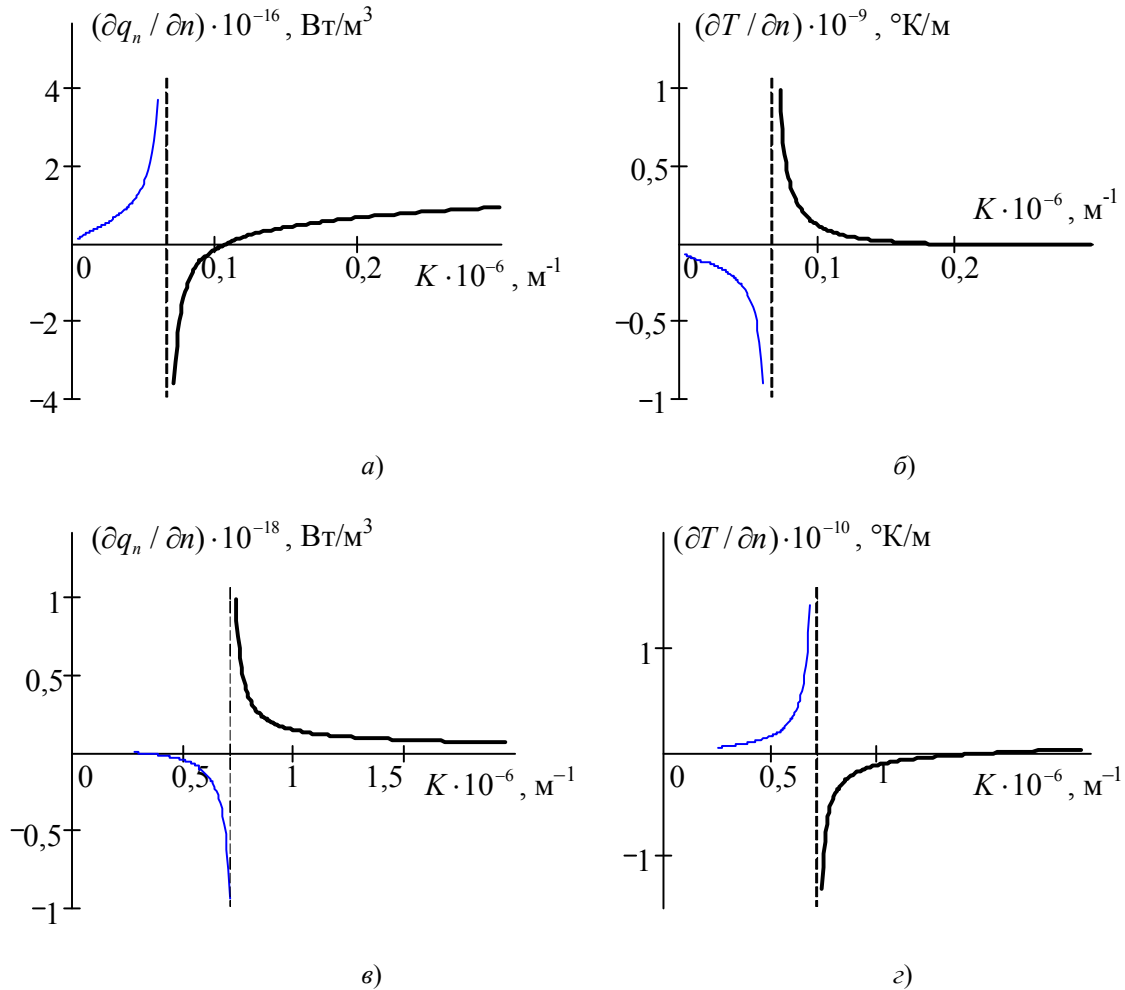


Рис. 5. Трансзвуковой переход на линии роста: разрыв нормальных производных для плоской (а, б) и осесимметричной (в, з) фазовых границ

На всех представленных здесь рисунках хорошо видны существенные количественные различия в тепловых свойствах плоской и осесимметричной ФГ. Главной причиной этих различий является большая кривизна вершины дендрита при  $\nu=1$ . Вместе с тем рис. 5 демонстрирует важное качественное различие между плоской и осевой симметриями: на периферии дендрита, т. е. в дозвуковой области, при малой кривизне  $K$  наблюдается инверсия знака производной  $\partial T / \partial n$  при переходе от  $\nu=0$ ,  $\partial T / \partial n < 0$  к  $\nu=1$ ,  $\partial T / \partial n > 0$  (рис. 5, б, з). В сверхзвуковой области имеем:  $\nu=0$ ,  $\partial T / \partial n < 0$ ;  $\nu=1$ ,  $\partial T / \partial n > 0$ . Для нормальной производной  $\partial q_n / \partial n$  в окрестности звуковой точки тоже имеем инверсию знака при переходе от плоской к осевой симметрии (рис. 5, а, в).

### Заключение

Для ФГ стационарной формы получены аналитические выражения, позволяющие определить производные от температуры и компонент вектора теплового потока в касательном и нормальном к ФГ направлениях. Установлено, что аналитическая структура формул для нормальных производных в твердой фазе существенным образом зависит от отношения скорости роста к скорости распространения тепловых возмущений. Математической моделью предвестника боковой ветви дендрита на ФГ служит появление звуковой точки: именно в этом состоянии начинается разрушение теплового поля. Показано, что время тепловой релаксации является параметром ре-



гуляризации поведения касательной компоненты теплового потока на криволинейной ФГ. Установлено, что при кристаллизации никеля из переохлажденного расплава на линии роста наблюдается переход через звуковую точку. Приведена подробная графическая информация о градиентных свойствах температуры и тепловых потоков на плоских и осесимметричных ФГ.

Во второй части данной работы будут представлены результаты расчетов кристаллизации меди и германия. В третьей части будут изучены эволюционные свойства ФГ кристаллизации, обусловленные отчетливо выраженной нестационарностью скорости и кривизны вершины дендрита.

### Литература

1. Herlach, D. M. Metastable Solids from Undercooled Melts / D. M. Herlach, P. Galenko, D. Holland-Moritz. – Oxford : Pergamon, 2007. – 448 p.
2. Шабловский, О. Н. Релаксационный теплоперенос в нелинейных средах / О. Н. Шабловский. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2003. – 382 с.
3. Шабловский, О. Н. Тепловые свойства фронта кристаллизации однокомпонентного чистого переохлажденного расплава / О. Н. Шабловский, Д. Г. Кроль // Расплавы. – 2005. – № 4. – С. 69–81.
4. Шабловский, О. Н. Расчет кинетических параметров фронта кристаллизации глубоко переохлажденного расплава / О. Н. Шабловский, Д. Г. Кроль // Материалы, технологии, инструменты. – 2007. – Т. 12, № 1. – С. 5–10.
5. Шабловский, О. Н. Тепловая градиентная катастрофа и рост двумерного свободного дендрита в переохлажденном расплаве / О. Н. Шабловский // Приклад. физика. – 2007. – № 3. – С. 29–37.
6. Жоу, Д. Расширенная необратимая термодинамика / Д. Жоу, Х. Касас-Баскес, Дж. Лебон. – Москва–Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2006. – 528 с.
7. Седов, Л. И. Механика сплошной среды / Л. И. Седов. – М. : Наука, 1973. – Т. 1. – 536 с.
8. Emanuel, G. Shock wave derivatives / G. Emanuel, Min-Shan Lin // Phys. Fluids. – 1998. – Vol. 31, № 12. – P. 3625–3633.

*Получено 04.04.2017 г.*