УДК 631.35

АНАЛИЗ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ТРАНСМИССИИ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННОЙ МАШИНЫ

В. Б. ПОПОВ

Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого», Республика Беларусь

Ю. В. ЧУПРЫНИН, Д. В. ДЖАСОВ

Научно-технический центр комбайностроения ОАО «Гомсельмаш», Республика Беларусь

Ключевые слова: трансмиссия, собственная частота, вековое уравнение, матрица, динамический коэффициент, сельскохозяйственная машина.

Введение

Трансмиссия сельскохозяйственной машины является одной из основных систем, которая обеспечивает функционирование рабочих органов и, соответственно, выполнение технологического процесса. Нагруженность трансмиссии зависит не только от рабочей нагрузки, которую в силу своего функционального назначения передают валы и элементы привода. Большое влияние на нагруженность элементов трансмиссии оказывают внутренние крутильные колебания системы. Увеличение нагруженности происходит за счет наложения вынужденных колебаний трансмиссии на собственные. Поэтому при выборе элементов трансмиссии при проектировании сельскохозяйственных машин необходимо знать собственные частоты системы и обеспечить необходимый уровень отстройки от них.

Для определения собственных частот трансмиссии важно иметь в распоряжении удобный и легко реализуемый математический аппарат. В специальной технической литературе широко освещены различные методы определения собственных частот для крутильных систем, к которым приводится механическая трансмиссия. Это, в частности, прямой метод расчета [1], метод последовательного приближения, предложенный Толле [2], [3], метод непрерывных дробей (метод В. Терских) [4] и многие др. В данной работе опустим детальное изложение приведенных в литературе методов, ограничимся лишь краткой характеристикой основного, присущего этим методам недостатка. Все эти методы являются трудно реализуемыми в программных алгоритмах в силу того, что по мере детализации механической системы, что является необходимым условием для адекватного описания трансмиссий сельскохозяйственных машин и, особенно, при наличии в системе разветвленных связей, аналитические выражения для этих методов усложняются на несколько порядков и становятся практически не реализуемыми. Именно поэтому при исследовании частотных свойств трансмиссии сельскохозяйственных машин требуется применение иного, легко реализуемого в программных алгоритмах и удобного в использовании метода.

Также необходимым условием для обеспечения достаточной отстройки от собственных частот системы на этапе проектирования машины является выработка четкого и понятного критерия по необходимой величине отстройки.

Целью работы является формирование математического аппарата оценки собственных частотных свойств трансмиссии, оценки опасности возникновения резонанса и формирование критериев отстройки от резонанса.

Математическая модель

В качестве метода для определения собственных частот трансмиссии сельскохозяйственной машины предлагается применить метод с использованием теоремы о разделении корней векового уравнения.

Использование векового уравнения [2], описывающего поведение механической системы, для исследования частотных свойств широко распространено в различных сферах технических расчетов. В основном это элементы несущих конструкций с большим количеством степеней свободы, статически неопределимые, состояние которых описывается матрицами жесткости.

Авторами данной работы предложен способ использования теоремы о разделении корней векового уравнения для расчета спектра частот собственных колебаний механических трансмиссий [5], [6].

Использование данного метода позволяет не только вычислить частоты, но и определить их количество в заданном интервале спектра, что иногда важно.

Суть метода применительно к трансмиссии заключается в следующем.

Система дифференциальных уравнений движения механической системы может быть получена на основе уравнения Лагранжа II-го рода.

После подстановки в уравнение Лагранжа производных от энергий системы и необходимых преобразований уравнения движения, записанные в матричной форме, примут вид:

$$\begin{bmatrix} J \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{\varphi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} H \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{\varphi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M \end{Bmatrix}, \qquad (1)$$

где $\begin{bmatrix} J \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} H \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C \end{bmatrix}$ – матрицы инерционности, демпфирования и жесткости, соответственно; $\begin{Bmatrix} \varphi \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \dot{\varphi} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \ddot{\varphi} \end{Bmatrix}$ – вектор углов поворота и его производные; $\begin{Bmatrix} M \end{Bmatrix}$ – вектор внешних воздействий моментов на систему.

Воспользовавшись операционным исчислением, векторы перемещений запишем следующим образом:

$$\begin{Bmatrix} \ddot{\varphi} \end{Bmatrix} = S^2 \begin{Bmatrix} \varphi \end{Bmatrix}; \qquad (2)$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{\varphi} \end{Bmatrix} = S \begin{Bmatrix} \varphi \end{Bmatrix}, \qquad (3)$$

где S – оператор Лапласа:

$$S = j\omega, \qquad (4)$$

где $j = \sqrt{-1}$ – мнимая единица; ω – круговая частота колебаний.

С учетом (2)–(4) выражение (1) примет следующий вид:

$$\left(\left[J\right]S^2+\left[H\right]S+\left[C\right]\right)\cdot\left\{\varphi\right\}=\left\{M\right\}. \quad (5)$$

Для исследования системы на собственные частоты необходимо отбросить все внешние воздействия и исключить затухание колебаний. Поэтому для нахождения собственных значений выражение (5) примет следующий вид:

$$\left(\left[J\right]S^2+\left[\mathrm{C}\right]\right)\cdot\left\{\varphi\right\}=0, \quad (6)$$

или с учетом (4):

$$\left(\left[C\right]-\omega^2\left[J\right]\right)\cdot\left\{\varphi\right\}=0. \quad (7)$$

Очевидно, что данное равенство имеет нетривиальное решение в том и только в том случае, если определитель полученной матрицы равен нулю:

$$D=\det\left(\left[C\right]-\omega^2\left[J\right]\right)=0\,. \quad (8)$$

Поскольку потенциальная энергия трансмиссии является положительно определенной квадратичной функцией, то корни векового уравнения (8) положительны и разделяются главными диагональными минорами определителя D.

Составим последовательность из главных диагональных миноров определителя D, дополнив ее $D_n = 1$:

$$D,\ D_1,\ D_2,\ D_3,\ \ldots,\ D_{n-1},\ 1. \quad (9)$$

Согласно теореме о разделении корней векового уравнения [2], при $\omega^2 = 0$ все члены ряда (9) положительны, а число перемен знака в последовательности равно нулю. При $\omega^2 \to \infty$ ряд (9) имеет N перемен знака. Если при заданном ω_1 количество перемен знака рядом (9) равно K_1, а при ω_2 – соответственно, K_2, то в интервале частотной оси $0 \le \omega \le \omega_1$ находится K_1 собственных частот, в интервале $0 \le \omega \le \omega_2$ – K_2 частот.

Очевидно, что в интервале $\omega_1 \le \omega \le \omega_2$ находится $\mathrm{K} = \mathrm{K}_2 - \mathrm{K}_1$ частот. Последовательно сокращая интервал $[\omega_1, \omega_2]$, можно выделить область, в которой находится единственная собственная частота. Эта частота далее может быть выделена с любой заданной точностью. Наиболее удобным способом выделения частот является метод деления частотных интервалов пополам. Данный способ хорошо алгоритмизируется для использования программных методов расчета путем применения матричного исчисления [7]–[10].

В механических трансмиссиях (в отличие от несущих конструкций) число масс в системе больше на единицу количества степеней свободы. Это объясняется тем, что в таких системах нет замыкания на неподвижную массу. Размерность матриц в описанном методе определяется количеством масс. В этом случае при $\omega \to 0$ имеется и $\omega = 0$ частота, которая является «фиктивной» частотой системы. Количество действительных частот для такой системы равно $N - 1$.

Описанный способ удобен не только для вычисления всего спектра собственных частот трансмиссии, но и для определения их количества в заданных частотных областях.

Оценка достоверности результатов, получаемых изложенным методом, проведена сравнением с аналитическими решениями частотных уравнений для простых систем и сравнением с результатами расчета собственных частот системы другими методами.

Рассмотрим способ составления векового уравнения на примере 5-массовой системы с последовательным соединением масс (рис. 1).

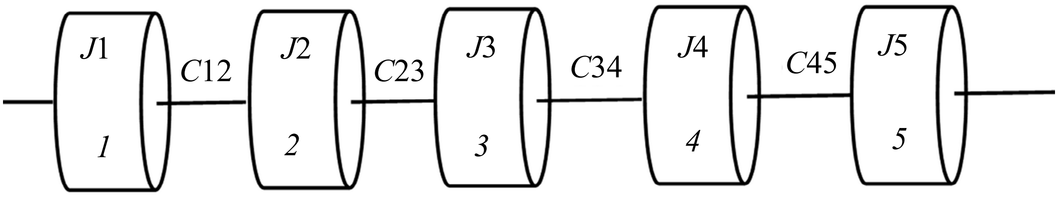

Рис. 1. Расчетная схема модели с последовательным соединением

Запишем систему дифференциальных уравнений, описывающих поведение системы, без учета диссипативных сил (10):

$$\begin{bmatrix} J1\cdot\ddot{\varphi}1+C12(\varphi1-\varphi2)=0; \\ J2\cdot\ddot{\varphi}2+C12(\varphi2-\varphi1)+C23(\varphi2-\varphi3)=0; \\ J3\cdot\ddot{\varphi}3+C23(\varphi3-\varphi2)+C34(\varphi3-\varphi4)=0; \\ J4\cdot\ddot{\varphi}4+C34(\varphi4-\varphi3)+C45(\varphi4-\varphi5)=0; \\ J5\cdot\ddot{\varphi}5+C45(\varphi5-\varphi4)=0. \end{bmatrix} \tag{10}$$

С учетом (2)–(4) и сгруппировав члены уравнений, систему (10) можно записать в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} (J1\cdot S^2+C12)\varphi1-C12\cdot\varphi2=0; \\ -C12\cdot\varphi1+(J2\cdot S^2+C12+C23)\varphi2-C23\cdot\varphi3=0; \\ -C23\cdot\varphi2+(J3\cdot S^2+C23+C34)\varphi3-C34\cdot\varphi4=0; \\ -C34\cdot\varphi3+(J4\cdot S^2+C34+C45)\varphi4-C45\cdot\varphi5=0; \\ -C45\cdot\varphi4+(J5\cdot S^2+C45)\varphi5=0. \end{bmatrix} \tag{11}$$

Система уравнений (11) представляет собой не что иное как сумму матриц инерционности и жесткости, умноженных на вектор перемещений. Матрицы инерционности и жесткости при этом имеют следующий вид:

$$\begin{bmatrix} J \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} J1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J5 \end{vmatrix}; \tag{12}$$

$$\left[C\right] = \begin{vmatrix} C12 & -C12 & 0 & 0 & 0 \\ -C12 & C12 + C23 & -C23 & 0 & 0 \\ 0 & -C23 & C23 + C34 & -C34 & 0 \\ 0 & 0 & -C34 & C34 + C45 & -C45 \\ 0 & 0 & 0 & -C45 & C45 \end{vmatrix}. \qquad (13)$$

Вектор перемещений – это обычный вектор – столбец углов поворота соответствующих масс системы (14):

$$\left\{\varphi\right\} = \begin{bmatrix} \varphi 1 \\ \varphi 2 \\ \varphi 3 \\ \varphi 4 \\ \varphi 5 \end{bmatrix}. \qquad (14)$$

Анализируя матрицу жесткости (13), можно выявить закономерность ее формирования без составления системы дифференциальных уравнений. Для этого необходимо в таблицу, размерность которой должна быть по вертикали и горизонтали равна количеству масс в системе, записать в ячейки, находящиеся на пересечении столбца и строки, номера которых соответствуют номерам соединяемых масс, жесткость соединяющего эти массы звена с отрицательным знаком. Главная диагональ при этом останется незаполненной. Для заполнения главной диагонали необходимо просуммировать все элементы строки или столбца, на пересечении которых находится данная ячейка, и взять их с обратным знаком.

Эта закономерность составления матрицы жесткости справедлива не только для линейных систем, но и для любых многомассовых систем со сложной разветвленной структурой.

Составление матрицы инерционности (12) не представляет труда, так как единственные ненулевые элементы этой матрицы расположены по главной диагонали. Элементами главной диагонали являются моменты инерции тех масс, на пересечении номеров столбца и строки которых находится ячейка.

Описанным выше методом можно достаточно точно (в пределах погрешностей определения исходных данных) выявить спектр собственных частот трансмиссии.

Если на систему действует внешнее циклическое возмущение, оно будет усилено тем больше, чем ближе находится частота возмущающей силы к одной из собственных частот трансмиссии. Поэтому в качестве оценочного критерия опасности приближения собственной частоты к частоте возмущающей силы целесообразно принять динамический коэффициент [3], [11]:

$$k_d = \frac{1}{1 - \frac{\varpi^2}{\omega^2}}, \qquad (15)$$

где ϖ – частота возбуждающей силы; ω – собственная частота.

Анализируя зависимость (15), можно увидеть, что при приближении частоты возбуждающей силы к собственной частоте динамический коэффициент увеличивается до бесконечности (без учета демпфирования).

Динамический коэффициент изменяется: при $\varpi < \omega$ – от 1 до $+\infty$; при $\varpi > \omega$ – от $-\infty$ до 0.

Знак минус после перехода через резонанс говорит о том, что колебания в системе, порождаемые возбуждающей силой, будут происходить в противофазе к этой силе. Так как при частоте возмущающей силы меньше собственной частоты динамический коэффициент стремится к 1, а после перехода через резонанс стремится к нулю, то в первом случае система будет медленно повторять действия возбуждающего сигнала, а во втором она будет самоизолироваться от него.

Пусть величина $P\omega$ (16) есть процент отстройки от резонансной частоты:

$$P\omega = \frac{(\omega - \varpi)}{\omega} 100\ \%. \tag{16}$$

Тогда задавшись допустимой величиной динамического коэффициента, можно определить требуемый процент отстройки от резонанса.

На рис. 2 показаны графики изменения динамического коэффициента для системы без учета демпфирования и процента отстройки от резонанса при изменении величины собственной частоты при фиксированной вынужденной частоте в районе 10 Гц.

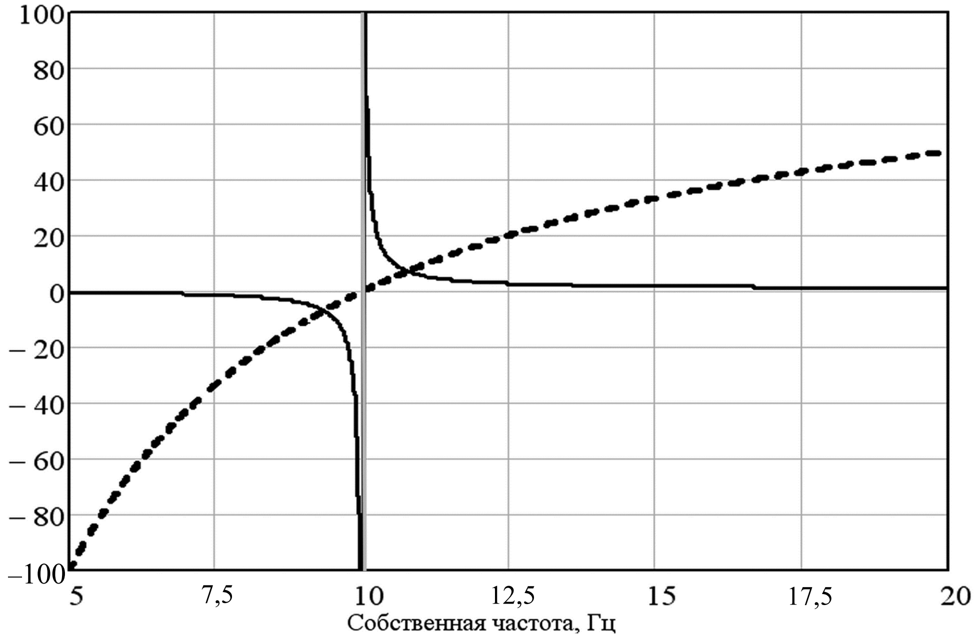

Рис. 2. Графики изменения динамического коэффициента и процента отстройки от резонанса при изменении величины собственной частоты при фиксированной вынужденной частоте:
——— – динамический коэффициент; - - - – процент отстройки, %

Из графиков видно, что в зоне резонанса имеет место сингулярность, т. е. функция динамического коэффициента имеет разрыв и стремится к бесконечности.

Динамический коэффициент по своей сути является множителем для величины внешнего воздействия, усиливаемого системой. В большинстве случаев при проектировании механического привода коэффициенты запаса прочности для различных узлов и агрегатов выбираются в пределах от 1,5 до 2,5 [12], [13]. Отсюда можно получить рекомендуемую величину минимально допустимой отстройки по частоте от резонанса.

Тогда рекомендуемая величина отстройки сверху и снизу (с точки зрения соблюдения условия прочности) в соответствии с вышеприведенными зависимостями будет разной. При уходе от резонансной частоты вниз требуемая отстройка составит 18–29 %, при уходе вверх – 22,5–42 %.

Проиллюстрируем использование описанного выше метода исследованием простейшей трансмиссии, показанной на рис. 1, задавшись условно произвольными значениями моментов инерции и жесткостью соединяющих валов.

Так, например, если принять, что $J_1 = 4$ кг · м^2; $J_2 = 2$ кг · м^2; $J_3 = 1$ кг · м^2; $J_4 = 2$ кг · м^2; $J_5 = 0{,}5$ кг · м^2; $C_{12} = 2000$ Н · м/рад; $C_{23} = 100000$ Н · м/рад; $C_{34} = 4000$ Н · м/рад; $C_{45} = 6000$ Н · м/рад, тогда спектр собственных частот системы, вычисленный описанным выше способом, будет следующий: $n_1 = 261$ об/мин ($f_1 = 4{,}35$ Гц); $n_2 = 542$ об/мин ($f_2 = 9{,}03$Гц); $n_3 = 1188$ об/мин ($f_3 = 19{,}8$ Гц); $n_4 = 3736$ об/мин ($f_4 = 62{,}26$ Гц).

Если предположить, что в системе присутствуют источники вынужденных колебаний с частотой 100, 200, 350, 750, 2000, 3000 и 5000 об/мин, то, используя выражение (15), можно вычислить динамические коэффициенты усиления этих внешних воздействий в зонах, приближенных к резонансу.

На рис. 3 показаны в виде столбиков динамические коэффициенты усиления внешних воздействий для трансмиссии, схема которой показана на рис. 1, при приближении к зоне резонанса снизу и сверху.

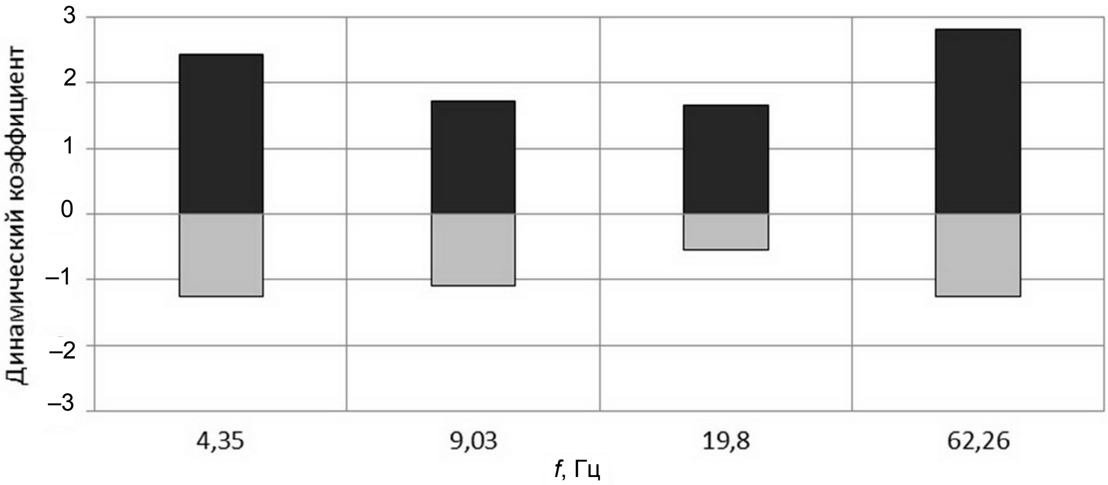

Рис. 3. Динамические коэффициенты усиления внешних воздействий

Иллюстрация динамических коэффициентов в виде столбиков различного цвета сверху и снизу позволяет наглядно анализировать опасность приближения к резонансу.

Заключение

В данной работе предложен удобный и легко алгоритмизируемый метод определения собственных частот трансмиссии сельскохозяйственной машины с использованием теоремы о разделении корней векового уравнения.

Описан способ составления матриц жесткости и инерционности системы без составления системы дифференциальных уравнений для любых трансмиссий со сложной разветвленной структурой любой степени детализации.

Предложен критерий выбора необходимого уровня отстройки от резонансных зон по величине динамического коэффициента с учетом имеющихся в системе коэффициентов запаса прочности.

Представлен удобный способ визуализации динамических коэффициентов и степени опасности приближения к резонансным зонам.

Предложенный метод анализа частотных свойств трансмиссии сельскохозяйственной машины позволяет на этапе проектирования обеспечить путем подбора параметров требуемую отстройку от резонансных зон.

Литература

1. Штейнвольф, Л. И. Динамические расчеты машин и механизмов / Л. И. Штейнвольф. – М. : Машгиз, 1961.
2. Бабаков, И. М. Теория колебаний / И. М. Бабаков. – М. : Наука, 1965. – 560 с.
3. Филиппов, А. П. Колебания деформируемых систем / А. П. Филиппов. – М. : Машиностроение, 1970. – 734 с.
4. Терских, В. П. Метод цепных дробей в применении к исследованию механических систем : в 3 т. / В. П. Терских. – Л. : Судпромгиз, 1955. – Т. 1: Простые линейные и нелинейные системы. – 375 с.
5. Громыко, О. В. Расчет собственных частот привода с использованием теоремы о разделении корней векового уравнения / О. В. Громыко, Ю. В. Чупрынин // Современные проблемы машиноведения : материалы Междунар. науч.-техн. конф., посвящ. П. О. Сухому, Гомель, 2006 г. / Гомел. политехн. ин-т. – Гомель, 1996. – С. 36–37.
6. Чупрынин, Ю. В. Частотные свойства трансмиссии самоходного энергосредства / Ю. В. Чупрынин, В. А. Шуринов, В. А. Балакин // Тракторы и с.-х. машины. – 2000. – № 10. – С. 23–26.
7. Смирнов, В. И. Курс высшей математики : в 4 т. / В. И. Смирнов. – М. : Наука, 1967. – Т. 3, ч. 1. – 323 с.
8. Смирнов, В. И. Курс высшей математики : в 4 т. / В. И. Смирнов. – М. : Наука, 1969. – Т. 3, ч. 2. – 672 с.
9. Боревич, З. И. Определители и матрицы / З. И. Боревич. – М. : Наука, 1970. – 200 с.
10. Сигорский, В. П. Математический аппарат инженера / В. П. Сигорский. – К. : Техника, 1975. – 768 с.
11. Дарков, А. В. Сопротивление материалов / А. В. Дарков, Г. С. Шпиро. – М. : Высш. шк., 1969. – 734 с.
12. Чернин, И. М. Расчеты деталей машин / И. М. Чернин, А. В. Кузьмин, Г. М. Ицкович. – Минск : Выш. шк., 1974. – 592 с.
13. Кузьмин, А. В. Расчеты деталей машин : справ. пособие / А. В. Кузьмин, И. М. Чернин, Б. С. Козинцов. – Минск : Выш. шк., 1986. – 400 с.

Получено 31.05.2017 г.