Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Техническая механика»

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

КУРС ЛЕКЦИЙ
по одноименной дисциплине
для студентов инженерно-технических специальностей
заочной формы обучения
В трех частях
Часть 1
Статика

Гомель 2009

Библиотека ГГТУ им.П.О.Сухого

УДК 531(075.8)
ББК 22.21я73
Т33

Рекомендовано научно-методическим советом
машиностроительного факультета ГГТУ им. П. О. Сухого
(*протокол № 3 от 29.11.2008 г.*)

Составитель: *С. Ф. Андреев*

Рецензент: доц. каф. «Технология машиностроения» ГГТУ им. П. О. Сухого
канд. техн. наук *Э. И. Дмитриченко*

Т33 **Теоретическая** механика : курс лекций по одноим. дисциплине для студентов инженерно-техн. специальностей заоч. формы обучения : в 3 ч. Ч. 1. Статика / сост. С. Ф. Андреев. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2009. – 68 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: http://lib.gstu.local. – Загл. с титул. экрана.

Содержит краткую историческую справку об истории развития механики, краткий обзор элементарных математических основ и сведения об элементах векторной алгебры, значительное место отводится истолкованию основных понятий и положений статики.

Для студентов инженерно-технических специальностей заочной формы обучения.

УДК 531(075.8)
ББК 22.21я73

© Андреев С. Ф., составление, 2009
© Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого», 2009

Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Краткая история развития механики

Механика - это наука, изучающая закономерности механического движения и причины, вызывающие или изменяющие это движение.

Механическое движение - изменение с течением времени взаимного расположения тел или их частей

Механика - одна из древнейших наук, возникновение и развитие которой обусловлено потребностями практических нужд человеческого общества.

Механика тесно связана с развитием земледелия, ростом городов, возникновением ремесла и мореплавания, военным исскуством. Известно, что при постройке египетских пирамид применялись простейшие механические приспособления: рычаги, блоки, наклонная плоскость.

Термин "механика" происходит он от древнегреческого слова, которым называли все искусно придуманные машины и механизмы. Первоначально оно обозначало название подъемных машин, в частности машин, с помощью которых в греческих театрах поднимали и опускали актеров или машин, поднимающих воду для орошения в Египте. Позже "механикой" стали называть различные метательные аппараты.

На первой стадии развития механики в результате изучения простейших машин создается учение о силах. В примитивном виде первичные понятия силы и скорости появились еще в античный период: практическое применение катков, наклонной плоскости, рычага, блоков при постройке грандиозных сооружений древности (пирамид и дворцов).

Человечество еще в древние времена овладело некоторым эмпирическими знаниями по механике, но потребовался длительный период времени для того, чтобы установить *основные законы механики* и заложить фундамент этой науки, как науки об общих законах механического движения и взаимодействия материальных тел.

В древности не существовало деления науки по отраслям знания, и поэтому механика наряду с философией, естествознанием и естественными науками являлась составной частью единой науки о природе и обществе. Лишь после Аристотеля (384-322 гг. до н.э.), древнегреческого мыслителя, начинается процесс выделения отдельных наук из общего естествознания. Аристотель большое внимание уделял решению важных технических задач того времени. Так, в трактате "Механические проблемы" Аристотель рассматривает конкретные практические задачи, решаемые при помощи метода, основанного на законе рычага. Однако Аристотель ошибочно полагал, что скорости падающих тел пропорциональны их силам тяжести и что равномерное и прямолинейное движение является результатом действия постоянной силы. Потребовалось почти два тысячелетия, чтобы преодолеть эти ошибочные представления и заложить научные основы динамики.

К числу достижений античной механики относятся работы древнегреческого математика и механика Архимеда (287-212 гг. до н.э.), который получил первые существенные научные результаты в области механики. Ему принадлежит один из основных законов гидростатики (закон Архимеда), *теория рычага, учение о равновесии и центре тяжести.*

В течение XIV-XVII столетий под влиянием торгового мореплавания и военного дела возник обширный комплекс задач. Эти задачи были связанны с движением небесных тел, полетом снарядов, прочностью кораблей, ударом тел, небесной механики.

Галилео Галилей(1566-1642) - итальянский астроном, механик и физик сформулировал принцип относительности классической механики, установил первый основной закон механики – закон инерции (хотя и не в общем виде). Галилей также заложил основы современной кинематики. Он впервые открыл законы свободного падения тел, построил количественную теорию движения тяжелого тела по наклонной плоскости и теорию движения тела, брошенного под углом к горизонту. Галилею принадлежат работы по статике, он изучал условия равновесия рычага.

Неоценимое влияние на развитие механики оказали работы Исаака Ньютона (1642-1727) – английского физика, механика, астронома и математика. В выдающемся труде "Математические начала натуральной философии" Ньютоном сформулированы основные положения классической механики. Он впервые вводит понятие массы, устанавливает основной закон динамики, связывающий массу точки, ее ускорение и действующую на нее силу, устанавливает закон равенства действия и противодействия.

Библиотека БГТУ им. П.О.Сухого

Огромным достижением Ньютона было установление закона всемирного тяготения. Можно отметить также разработку Ньютоном дифференциального и интегрального исчисления.

Период развития механики после Ньютона в значительной мере связан с именем Леонарда Эйлера (1707-1783), члена Петербургской академии наук. Труды Эйлера оказали огромное влияние на дальнейшее развитие динамики точки, им была предложена естественная форма дифференциальных уравнений движения материальной точки, он заложил основы динамики твердого тела, имеющего одну неподвижную точку.

Эйлер является основателем гидродинамики, теории корабля и теории упругой устойчивости стержней. Эйлер получил ряд важных результатов и в кинематике (углы и кинематические уравнения Эйлера, теорема о распределении скоростей в твердом теле). Ему принадлежит заслуга создания первого курса механики в аналитическом изложении.

Успехи физики в начале нынешнего века, ознаменовавшиеся новыми исследованиями в области электродинамики и строения материи показали, что законы классической механики Галилео-Нъютона применимы только к движению тел, размеры которых значительно больше размеров атома, а скорости значительно меньше скорости света.

Для тел очень малых размеров, движущихся с очень большими скоростями, выводы классической механики теряют свою силу, и сама механика нуждается в дальнейшем развитии. Классическая механика оказалась неприменимой к теории строения атома.

В XX веке появилась современная теория относительности, созданная Эйнштейном, в которой законы классической механики Ньютона рассматриваются как асимптотические приближения, вытекающие из более общих закономерностей.

В современной технике преимущественно применяется классическая механика Ньютона, за исключением тех случаев, когда, например, требуется исследовать движение элементарных частиц-электронов, которые движутся со скоростями порядка скорости света в пустоте.

В классической механике Ньютона метрические свойства пространства считаются не зависящими от движущейся в нем материи, и оно рассматривается как однородное и изотропное по всем направлениям. Время в механике Ньютона также считается

Библиотека БГТУ им. В.Г. Шухова

абсолютным, не связанным с движущейся материей, протекающим одинаково во всех точках пространства, на любых движущихся друг относительно друга в телах.

Трехмерное Евклидово пространство и абсолютное время отражает реальные свойства пространства и времени лишь приблизительно, однако, это приближение дает достаточную точность при изучении движений тел, со скоростями, малыми по сравнению со скоростью света.

1.2. Основные понятия и определения теоретической механики

Абстрактность в механике. Ни одна физическая задача не может быть решена абсолютно точно, получают ее приближенное решение. Степень приближения определяется характером задачи, в которой пренебрегают не существенными в данном случае факторами. В этом случае метод абстракции играет очень важную роль. В теоретической механике, отвлекаясь при изучении механических движений макроскопических тел от всего частного, незначительного, мы рассматриваем только свойства, которые в данной задаче являются основными. В задачах механики пренебрегают различными физическими свойствами тела, например электромагнитными или оптическими, рассматривая лишь его размеры, форму и массу. В этом случае произвольное макроскопическое тело, состояние которого изучается, называется *материальным телом.*

В некоторых задачах механики нет необходимости учитывать размеры и форму материального тела, например, для изучения траектории летающего объекта. Такие тела называют материальной точкой, то есть телом, размерами которого в данной задаче можно пренебречь. Таким образом, *материальная точка* отличается от геометрической точки, тем, что имеет массу.

Вопрос о том, можно ли данное конкретное тело рассматривать как материальную точку или нет, зависит от условий задачи. Материальная точка – абстракция, но ее введение облегчает решение практических задач.

Изучение внутренней структуры тел выходят за рамки теоретической механики. Для описания свойств материальных тел ограничиваются абстрактными моделями.

Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

Всякое материальное тело представляется совокупностью малых взаимодействующих между собой частей, каждая из которых рассматривается как материальная точка. Такая совокупность называется системой материальных точек. Любая совокупность материальных точек называется *механической системой***.** Характер взаимодействия материальных точек зависит от свойств изучаемого тела.

Метод абстракции позволяет представить систему материальных точек, в которой расстояния между точками всегда остаются постоянными. Такую систему называют абсолютно твердым телом. *Абсолютно твердое тело*- абстракция, таких тел нет, мы условно пренебрегаем деформацией и изучаем движение недеформируемого тела.

Свойства системы отсчёта. Механические явления протекают неодинаково в разных местах пространства. Это свойство связано с неоднородностью пространства, под которой понимается зависимость характера протекания явления от места (системы отсчёта), в котором мы наблюдаем это явление. Под неоднородностью здесь понимается зависимость характера протекания явления от места, в котором мы наблюдаем это явление.

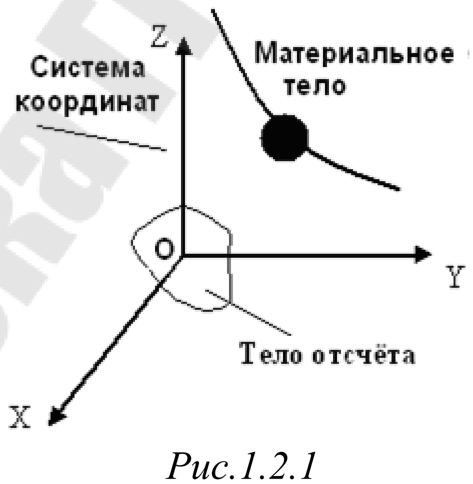


Рис.1.2.1

Движение тела относительно системы отсчёта может быть различным в зависимости от направления. Например, течение реки с севера на юг вдоль меридиана; полёт снаряда, и так далее. Свойство механических систем, зависимое от направления, называется анизотропностью.

Библиотека ГГТУ им.П.О.Сухого

Эти свойства системы отсчёта (*неоднородность и анизотропность*) затрудняют наблюдение за движением тела. Необходима абстрактная *инерциальная система отсчёта*, для которой пространство однородно и изотропно по отношению к явлениям механики.

Теоретическая механика построена на законах Ньютона, справедливость которых проверена многовековой практической деятельностью человека.

Ньютоном были сформулированы основные законы механики, поэтому теоретическая механика часто называется механикой Ньютона. Законы Ньютона справедливы не во всех системах отсчета.

Те системы отсчета, в которых выполняются законы Ньютона, называются инерциальными системами. Все системы отсчёта, движущиеся относительно исходной системы прямолинейно и равномерно, будут инерциальными.

Инерциальная система отсчёта – такая, собственное движение которой не может быть обнаружено никаким механическим опытом. Многочисленные опыты и измерения показывают, что с высокой степенью точности система отсчета с началом в центре Солнечной системы и осями, направленными к далеким "неподвижным" звездам, является инерциальной системой отсчета. Такая система отсчета называется гелиоцентрической или основной инерциальной системой отсчета. Используется также геоцентрическая система: центр системы - в центре Земли.

Во многих задачах механики за инерциальную систему отсчета принимают систему, связанную с поверхностью Земли - техническая система отсчета.

Условно в механике за систему отсчета часто принимают правую прямоугольную систему координат (рис. 1.2.1).

Основные величины и их размерность. В теоретической механике основными показателями движения материального тела являются:

- положение тела в пространстве;
- форма и размеры тела;
- масса тела;
- время.

Важнейшими единицами механики, измеряющими эти показатели, являются метр, килограмм и секунда. Эти же единицы

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

являются базисными единицами Международной системы единиц (СИ).

Все названные величины являются скалярными, т.е. определяются одним числом и могут быть постоянными (неизменяющими) или переменными (например – точка переменной массы, время и т.д.).

Переменные величины называются *параметром*, по которым определяется состояние тела, например – время, когда положение материальной точки зависит от времени.

Положение любой материальной точки определяется координатами X, Y, Z, имеющими размерность длины (линейными координатами). Длина определяет геометрическое расстояние между двумя точками. В системе СИ единицей длины является метр , $[L]=м$.

Размеры материального тела, как системы материальных точек, определяются протяженностью отдельных его участков, то есть тоже определяются размерностью длины.

Относительное положение материального тела характеризуется углом его поворота относительно какой-то точки или оси, измеряемого в радианах, $[\varphi]= рад$. Эта единица измерения является безразмерной величиной.

Масса m некоторого тела по определению есть мера количества вещества, содержащегося в этом теле. Единицей массы в системе СИ является килограмм ,$[m]=кг$.

Характер движения тела будет зависеть от степени податливости тела, оказываемому на него внешнему воздействию, или, как говорят от степени инертности тела. Чем больше инертность, тем медленнее изменяется движение тела, меньше инертность - быстрее изменяется движение. Мерой инертности материального тела является масса. Таким образом, массой измеряется количества вещества, и масса характеризует инертность тела.

Геометрическая форма тела характеризует распределение материальных точек в заданном объеме, и, следовательно, форма тела взаимосвязана с массой тела и его инертностью.

Время измеряется между двумя событиями в одном и том же месте. Как параметр, время t – переменная величина, изменяющаяся в одном направлении, позволяет исследовать движение между двумя событиями. Время может быть фиксированным, это постоянная физическая величина, определяющая состояние тела в заданный

Библиотека ГГТУ им.П.О.Сухого

момент времени. В системе СИ единицей времени является секунда *([t]=c)*.

Другие физические величины, являющиеся производными от базисных величин, приведены в Таблице 1.2.1.

Таблица 1.2.1

Важнейшие механические единицы, применяемые в теоретической механике.

Наименование величины	Определяющее уравнение	Единица измерения	Сокращенное обозначение единицы измерений		Размер единицы измерения
			русское	латинское	
Частота	$f=\frac{1}{T}$	герц	$гц$	Hz	$1/(1c)$
Угловая скорость	$\omega=\frac{\varphi}{t}$	радиан в секунду	$рад/c$	rad/s	$(1рад)/(1c)$
Угловое ускорение	$\varepsilon=\frac{\omega}{t}$	радиан на секунду в квадрате	$рад/c^2$	rad/s^2	$(1рад)/(1c)^2$
Скорость	$\upsilon=\frac{l}{t}$	метр в секунду	$м/c$	m/s	$(1м)/(1c)$
Ускорение	$a=\frac{\upsilon}{t}$	метр на секунду в квадрате	$м/c^2$	m/s^2	$(1м)/(1c)^2$
Площадь	$S=l^2$	квадратный метр	$м^2$	m^2	$(1м)^2$
Объем	$V=l^3$	кубический метр	$м^3$	m^3	$(1м)^3$
Плотность	$\rho=\frac{m}{V}$	килограмм на кубический	$кг/м^3$	kg/m^3	$(1кг)/(1м)^3$

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

		метр			
Сила	$F = ma$	ньютон	$н$	N	$\frac{(1кг)\cdot(1м)}{(1с)^2}$
Удельный вес	$d = \frac{G}{V}$	ньютон на кубический метр	$н/м^3$	N/m^3	$(1н)/(1м)^3$
Момент инерции	$I = mr^2$	Килограмм-метр в квадрате	$кг \cdot м^2$	$kg \cdot m^2$	$(1кг)\cdot(1м)^2$
Работа (энергия)	$A = Fl$	джоуль	$дж$	J	$(1н)\cdot(1м)$
Мощность	$N = \frac{A}{t}$	ватт	$вт$	W	$(1дж)/(1с)$
Напряжение (давление)	$P = \frac{F}{S}$	ньютон на квадратный метр	$н/м^2$	N/m^2	$(1н)/(1м)^2$
Динамическая вязкость	$\eta = \frac{F \Lambda l}{s \upsilon}$	ньютон-секунда на квадратный метр	$н \cdot с/м^2$	$N \cdot s/m^2$	$\frac{(1н)\cdot(1с)}{(1м)^2}$
Кинематическая вязкость	$\nu = \frac{\eta}{\rho}$	квадратный метр на секунду	$м^2/с$	m^2/s	$(1м)^2/(1с)$
Момент силы	$M=Fr$	ньютон-метр	$н \cdot м$	$N \cdot m$	$(1н)\cdot(1м)$
Момент количества движения	$L=I\omega$	Килограмм-метр	$кг \cdot м^2 \cdot$ $\cdot рад/с$	$kg \cdot m^2 \cdot$ $\cdot rad/s$	$(1кг)\cdot(1м)^2 \cdot$ $\cdot(1рад)/(1с)$
Удельный объём	$\upsilon = \frac{V}{m}$	метр кубический на килограмм	$м^3/кг$	m^3/kg	$(1м)^3/(1кг)$

Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

Количество движения	$K=m\upsilon$	килограмм метр в секунду	$кг \cdot м/с$	$kg \cdot m/s$	$\frac{(1кг)\cdot(1м)}{(1с)}$
Импульс силы р	$p=Ft$	ньютон-секунда	$н \cdot сек$	$N \cdot s$	$(1н)\cdot(1с)$
Импульс момента силы	$L = Mt$	ньютон-метр-секунда или джоуль-секунда	$н \cdot м \cdot с$ или $дж \cdot с$	$N \cdot m \cdot s$ или $J \cdot c$	$(1н)\cdot(1м)\cdot(1с)$

Структура курса теоретическая механика. При изучении теоретической механики ее методически удобно разделить на кинематику и динамику, из динамики часто выделяют раздел статики.

Статика - учение о силах взаимодействия тел и их равновесии, как часть динамики изучает те условия, при которых материальные объекты могут оставаться в покое. В статике на основе понятий векторного исчисления рассматриваются свойства различных систем сил, действующих на материальное тело.

Кинематика – изучает движение материальной точки и материального тела без учета причин, вызвавших это движение. То есть силы, обусловливающие движение, кинематика не рассматривает. Кинематика- это геометрия движения, использующая в своих исследованиях векторное исчисление и дифференциальные уравнения.

Динамика – на основе понятий статики и кинематики изучает движение материальной точки и материального тела с учетом причин, вызвавших это движение. Это учение о влиянии сил на движение тел.

1.3. Классификация сил в классической механике

Причиной изменения положения материальных тел в пространстве является их взаимодействие. В качестве меры механического взаимодействия материальных тел в механике вводится понятие силы, являющейся векторной величиной.

Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

Силами будем называть объективные причины, являющиеся результатом взаимодействия материальных объектов, способные вызвать движение тел из состояния покоя или изменить существующее движение последних. Для данного тела сила является внешним фактором, изменяющим его движение.

Вопрос о природе сил рассматривается в физике.

Силы, определяющие механическое взаимодействие тел, часто называют силами физическими или реальными силами, чтобы не путать их с другими величинами, в название, которых тоже входит слово ”сила”, например - сила инерции.

Физические силы встречаются в природе попарно и подчиняются III закону Ньютона: два тела взаимодействуют с силами, равными по величине и противоположными по направлению, то есть сила действия равна силе противодействия.

Каждая физическая сила вызывает ускорение точечного тела, к которому она приложена в соответствии со II законом Ньютона.

Физические силы в классической механике, можно разделить на силы дальнодействия (ньютоновы силы) и близкодействия, в частности контактные силы (реакции связей).

Силы дальнодействия являются мерой взаимодействия материального тела с другими телами бесконтактным способом, через силовое поле, например: силы тяготения, электростатические и электромагнитные силы.

Силы близкодействия выражают меру механического взаимодействия тел при их непосредственном соприкосновении. Контактное воздействие на данное тело со стороны другого твердого тела характеризуется силой, которая называется реакцией связи. Чаще всего реакции связи определяются в процессе решения конкретной задачи.

Реакции связи, будучи физическими силами, складываясь с силами дальнодействия, обусловливают ускорение тел данной механической системы, а в частном случае покоя уравновешивают друг друга, например, грузик, подвешенный на нити.

К силам близкодействия относятся также распределенные нормальные и касательные усилия, с которыми сплошная среда воздействует на поверхность данного тела, например, давление жидкости на стенку сосуда.

При рассмотрении движения тел относительно неинерциальных систем отсчета, I закон Ньютона, нарушается, а в уравнениях II закона

Ньютона появляются новые математические величины, имеющие размерность силы. Это так называемые *силы инерции*.

В отличие от физических сил, силы инерции не обладают материальными источниками и соответственно не сопровождаются противодействиями. Тем самым они не следуют III закону Ньютона, вследствие чего их нередко называю фиктивными силами (нереальными).

Важно отметить - посредством приборов и датчиков измеряются лишь физические силы, а не силы инерции. Величина сил инерции устанавливается косвенно - по формулам, которыми они связаны с физическими силами согласно уравнениям движения.

Таким образом, в механике силы могут быть различными по существу, однако все они определяются как векторные величины одной размерности, и, следовательно, их можно включать в одно уравнение.

При изучении механического движения и равновесия материальных тел знание природы сил не обязательно, достаточно знать только их величины и направление. Поэтому в теоретической механике не изучают физическую природу сил, ограничиваясь только рассматриванием связи между силами и движением тел. Реальные тела взаимодействуют, при этом возникают силы, которые меняют состояние движения системы. Это и есть суть теоретической механики.

В теоретической механике рассматриваются две категории сил.

1) Активные силы – создают или способны создать движение твёрдого тела. Например, сила тяжести.

2) Пассивные – не создающие движения, но ограничивающие перемещения твёрдого тела, препятствующие перемещениям. Их называют еще реакциями связей, то есть тел, ограничивающих перемещение. Например, сила натяжения нерастяжимой нити (рис.1.3.1).

Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

Рис.1.3.1

2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ СТАТИКИ

Наиболее отчетливый и гибкий математический аппарат для выражения и математического исследования многих проблем механики (как и других физических теорий) представляет теория векторов.

Излагаемые в этой главе элементы теории векторов (геометрической теории) находят приложение во многих важных вопросах геометрии, механики, физики. Так, например, векторами изображаются скорости, ускорения, силы, количество движения и так далее.

В противоположность векторным величинам положительные и отрицательные вещественные числа и величины, выражаемые такими числами, называются скалярами (время, температура, давление, масса, кинетическая энергия и т. д.). Скалярными величинами (скалярами) называются такие, которые характеризуются только числовым значением. Над скалярными величинами производятся все алгебраические действия: сложение, вычитание, деление и так далее.

Над векторными величинами также как и над скалярными, можно производить действия векторного сложения, векторного вычитания, векторного умножения, и так далее. *Нельзя складывать или вычитать скалярные и векторные величины, имеющие различный физический смысл, то есть величины различной размерности.*

Во вводной главе краткого лекционного курса изложим основные понятия и элементарные правила исчисления векторов. Студент, изучающий элементы теории векторов, должен иметь знакомство с элементарными понятиями алгебры, геометрии и тригонометрии.

Библиотека ГГТУ им.П.О.Сухого

2.1. Некоторые формулы алгебры и геометрии.

Квадрат суммы (разности) двух чисел:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \ .$$

Разность квадратов двух чисел:

$$a^2 + b^2 = (a+b)(a-b) \ .$$

Квадратное уравнение общего вида: $ax^2 + bx + c = 0$.

Тригонометрические функции для прямоугольного треугольника (рис.2.1.1):

$$\sin\alpha = a/c; \quad \cos\alpha = b/c; \quad tg\,\alpha = a/b \ .$$

Теорема Пифагора: $a^2 + b^2 = c^2$.

Соотношения между тригонометрическими функциями одного аргумента:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \qquad tg\,\alpha = \sin\alpha / \cos\alpha \ ;$$

-синус и косинус двойного угла;

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha\ ; \ \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha\ ; \ \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

Соотношение сторон и углов в треугольнике (рис.2.1.2):

-теорема синусов $\dfrac{a}{\sin(\alpha)} = \dfrac{b}{\sin(\beta)} = \dfrac{c}{\sin(\gamma)}$;

теорема косинусов – $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$.

Зависимость между различными мерами угла: [α]-рад. и [α^0]-град.

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

$$\alpha = \alpha^0 \frac{\pi}{180} \quad , \quad a^0 = a \frac{180}{\pi} \ .$$

Длина дуги центрального угла φ и радиуса R (рис.2.1.3):

$$S = \varphi \cdot R \ .$$

Здесь угол φ измеряется в радианах (рад.).

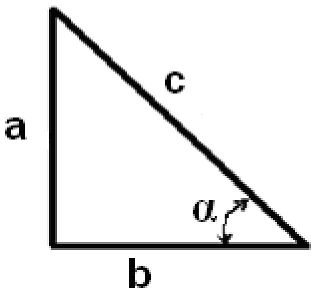


Рис.2.1.1

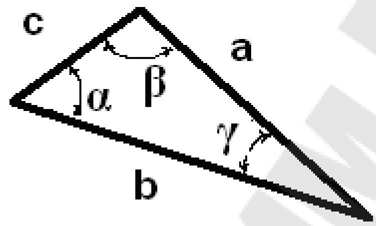


Рис.2.1.2

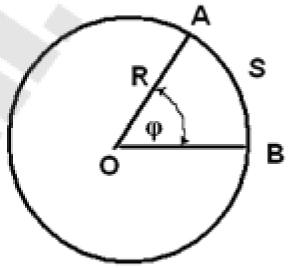


Рис.2.1.3

2.2. Основные определения векторной алгебры.

Обход отрезка *AB* может быть направленным, например от точки *A* к точке *B*, или от точки *B* к точке *A*. Если отрезку присвоено направление от *A* к *B*, то он называется ориентированным и обозначается символом $\overrightarrow{AB}$. Такой отрезок называется геометрической величиной или *вектором*, (рис.2.2.1).

Точка *A* называется началом, или первой конечной точкой отрезка, а *B* — концом (свободным концом), или второй конечной точкой отрезка; прямая $m-n$, на которой отрезок лежит, называется *линией действия вектора*.

Векторы обозначаются в печати латинскими буквами жирного шрифта (**AB, a** и т.д.) или латинскими буквами со стрелкой сверху $\overrightarrow{AB}$, или $\vec{a}$.

Вектор $\overrightarrow{AB}$ обычно определяется следующими элементами:

- началом или точкой приложения *A*;

Библиотека ГГТУ им.П.О.Сухого

- линией действия, совпадающей с неограниченной прямой $m-n$;

- направлением, обозначаемым стрелкой на конце ориентированного отрезка $\overrightarrow{AB}$;

- модулем, или численным значением, характеризующим длину отрезка.

На чертеже вектор изображается прямолинейным отрезком со стрелкой. Длина отрезка в выбранном масштабе определяет модуль вектора. *Модуль вектора* – положительная скалярная величина, выраженная арифметическим числом.

Модуль вектора обозначается символами:

$\mathrm{mod}\,\overrightarrow{AB}$ или $\mathrm{mod}(\vec{a})$; а также $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ или $|\vec{a}|$;

В нашем конспекте мы будем обозначать модуль векторной величины той же буквой курсивного шрифта, которой обозначен вектор, например $\mathrm{mod}(\vec{a}) = a$ или $\mathrm{mod}\,\overrightarrow{AB} = AB$. Для удобства записи, мы будем применять обозначения: вектор -$\vec{a}$ или $\overrightarrow{AB}$; модуль - a, или $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

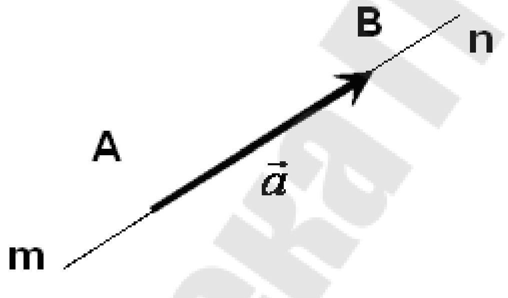


Рис.2.2.1

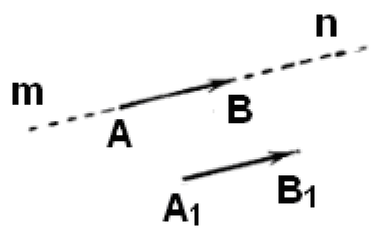


Рис.2.2.2

Различают три типа векторных величин.

Векторы скользящие – векторы, за начало которых может быть принята любая точка, лежащая на линии действия данного вектора. Если точка *A* (начало вектора) перемещается вдоль линии действия вектора, то вектор называется *скользящим* (например, вектор силы).

Векторы связанные - векторы, начало которых связано с определенной точкой пространства, точкой приложения вектора. Если точка *A* не может перемещаться по линии действия, то вектор называется связанным (например, вектор скорости).

Векторы свободные – векторы, за начало которых может быть принята любая точка пространства, т.е. векторы, не связанные с определенной линией действия. Если вектор можно переносить в пространстве параллельно себе, то это свободный вектор (например, момент пары сил).

Два свободных вектора называются *геометрически равными,* если они параллельны, имеют одинаковые модули и одинаково направлены (рис.2.2.2).

Два свободных вектора называются *равными и противоположными,* если они численно равны, параллельны и направлены в разные стороны.

Для аналитического задания вектора рассмотрим следующие определения.

Проекцией точки A на ось *OX* называется точка A_1 пересечения этой оси с плоскостью, проходящей через данную точку *A* перпендикулярно OX (рис. 2.2.3). Обозначается проекция точки на ось координатой X_A.

Проекцией точки A на плоскость *XOY* называется точка A_1 пересечения перпендикуляра к этой плоскости, проходящей через точку *A* (рис. 2.2.4). Обозначается проекция точки на плоскость координатами X_A, Y_A.

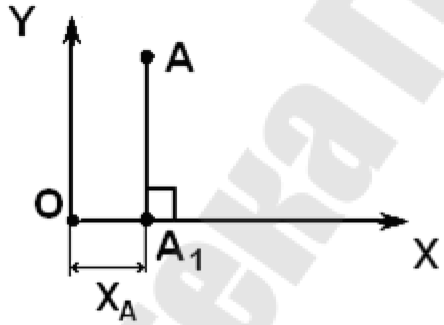


Рис.2.2.3

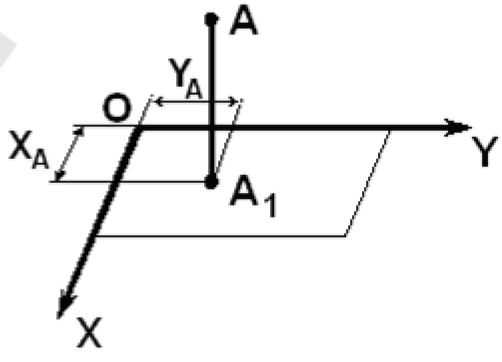


Рис.2.2.4

Проекцией вектора на ось называется алгебраическая (скалярная) величина, числено равная длине отрезка A_1B_1, где A_1 и B_1 проекции точек *A* и *B* на данную ось (рис. 2.2.5 и рис. 2.2.6). Обозначается проекция вектора на ось как AB_X или a_X. Вычисляется проекция вектора, как катет треугольника AB^*B, по формулам

$$AB_X = AB \cdot \cos\alpha \text{, или } a_x = a \cdot \cos\alpha .$$

Библиотека ГГТУ им.П.О.Сухого

Проекция силы на ось берется со знаком плюс или минус в зависимости от направления отрезка, определяющего данную проекцию. Если его направление совпадает с положительным направлением оси, то проекция считается положительной, в противном случае она отрицательна (рис. 2.2.6).

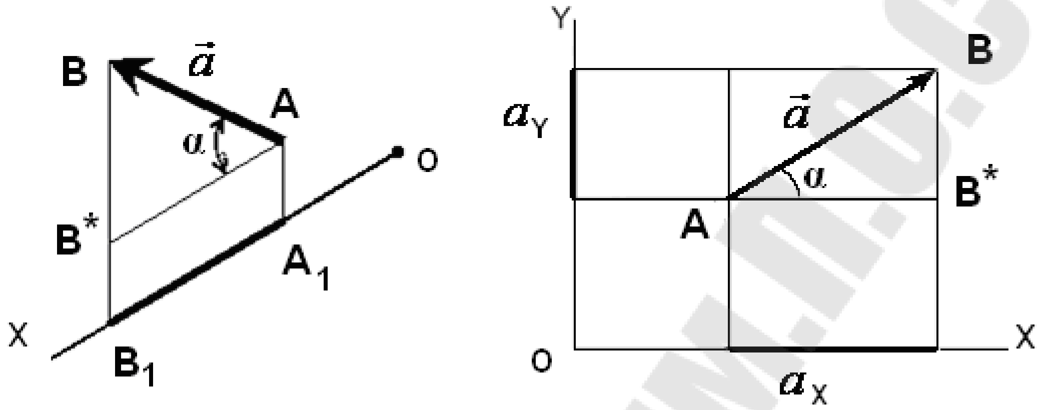


Рис.2.2.5

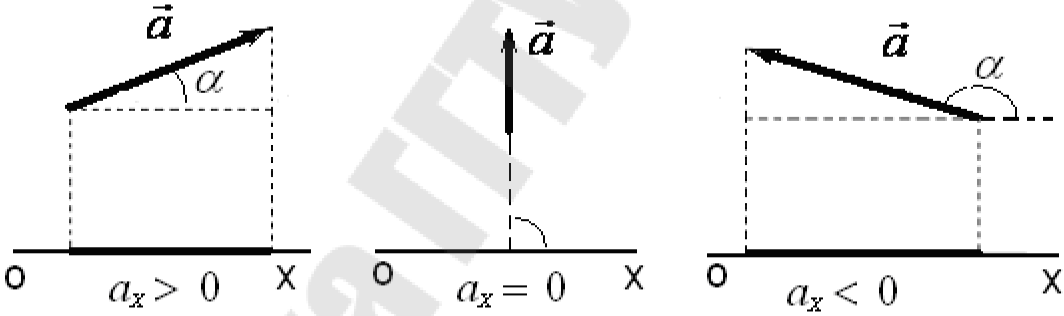


Рис.2.2.6

Проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на плоскость *XOY* называется вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$, где A_1 и B_1 проекции точек *A* и *B* на эту плоскость, (рис. 2.2.7). Здесь вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ также является катетом треугольника AB^*B:

$$A_1B_1 = AB \cdot \cos \alpha .$$

Направление вектора $\vec{a}$ в прямоугольной системе координат задаётся направляющими косинусами, для которых справедлива формула

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

из которой видно, что из трех значений углов α, β и γ независимы только два угла.

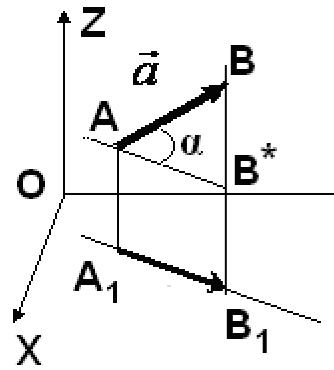


Рис.2.2.7

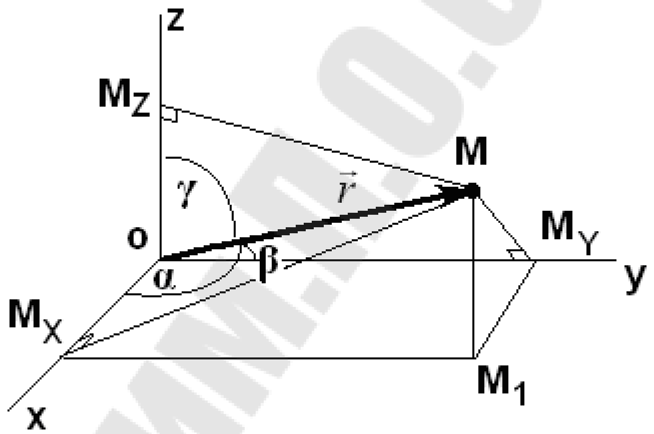


Рис.2.2.8

Таким образом, векторная величина в пространстве определяется тремя скалярными величинами: модулем вектора и двумя направляющими косинусами.

Направляющие косинусы углов α, β, γ , (рис. 2.2.8) , между вектором и осями координат вычисляются как катеты прямоугольных треугольников *OM_XM, OM_YM и OM_ZM*:

$$\cos\alpha = \frac{OM_X}{OM}, \ \cos\beta = \frac{OM_Y}{OM},$$

Здесь координаты точки M равны соответственно:

$$X = OM_X, \ \ Y = OM_Y, \ \ Z = OM_Z.$$

Вектор $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, начало которого совпадает с началом координат, называется радиус – вектором точки *M*. *Радиус – вектор точки* определяет её положение в пространстве.

Модуль радиус – вектора определяется как диагональ параллелепипеда, длины сторон которого равны проекциям точки на соответствующие оси координат (рис.2.2.9):

$$r = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}\,.$$

Направляющие косинусы радиус-вектора точки равны

$$\cos\alpha = \frac{X}{r}\ ;\ \cos\beta = \frac{Y}{r}\ ;\ \cos\gamma = \frac{Z}{r}\,.$$

Формулы дают возможность определить аналитически модуль и направление радиус-вектора точки

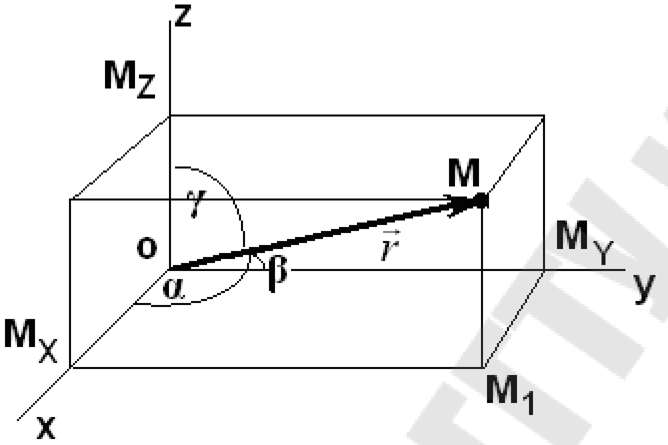


Рис.2.2.9

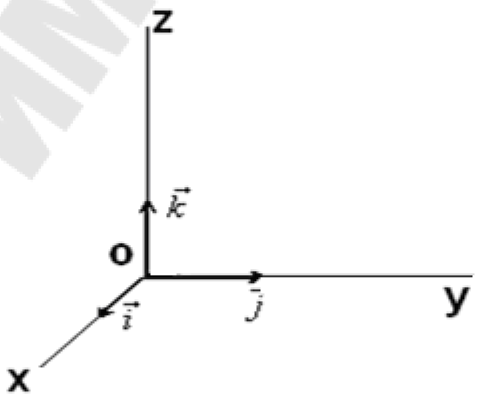


Рис.2.2.10

Вектор, длина которого равна единице, называется единичным вектором. *Единичный вектор* устанавливает определенное ориентированное направление. Для прямоугольной системы координат *OXYZ* единичные векторы $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$ задают направление координатных осей (рис. 2.2.10). Радиус – вектор может быть записан векторной формулой

$$\vec{r} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}\,.$$

Аналитически любая векторная величина $\overrightarrow{AB}$, или $\vec{a}$, определяется координатами начала и конца вектора, то есть значениями X_A, Y_A, Z_A и X_B, Y_B, Z_B, или координатами его начала X_A, Y_A, Z_A, и проекциями a_X, a_Y, a_Z отрезка *AB* на эти оси (рис.

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

2.2.11). При этом знаки проекций определяются обычными правилами аналитической геометрии.

Эти проекции, очевидно, равны:

$$a_X = X_B - X_A,\ \ a_Y = Y_B - Y_A \ \ ,\ \ a_Z = Z_B - Z_A \ .$$

Или,

$a_X = a \cdot \cos\alpha$, $a_Y = a \cdot \cos\beta$,. $a_Z = a \cdot \cos\gamma$.

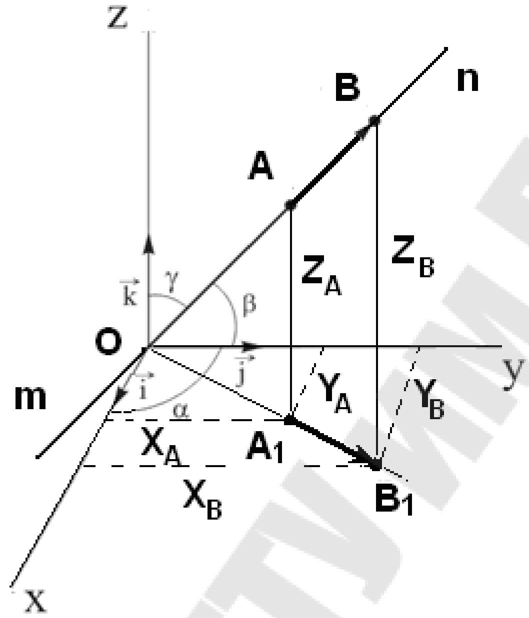


Рис.2.2.11

В этом случае вектор записывается как

$$\vec{a} = a_X \vec{i} + a_Y \bar{j} + a_z \vec{k}$$

А его модуль равен $a = \sqrt{{a_X}^2 + {a_Y}^2 + {a_Z}^2}$.

Аналогично для плоской прямоугольной системы координат *XOY*, имеем (рис. 2.2.8):

$$\cos\gamma = 0, \qquad \cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1,$$

$$a_X = X_B - X_A \ ,\ \ a_Y = Y_B - Y_A$$

$$\vec{r} = X\vec{i} + Y\bar{j} \ ,\ \ r = \sqrt{X^2 + Y^2},$$

$$\vec{a} = a_X \vec{i} + a_Y \vec{j}, \qquad a = \sqrt{a_X^{\ 2} + a_Y^{\ 2}},$$

$$\cos\alpha = \frac{a_X}{a}, \qquad \cos\beta = \frac{a_Y}{a},$$

Геометрической суммой двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется третий вектор $\vec{c}$, определяемый геометрическим сложением $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$, и геометрически соответствующий диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как на сторонах. Вектор $\vec{c}$ также может быть определен или стороной векторного треугольника (рис. 2.2.12).

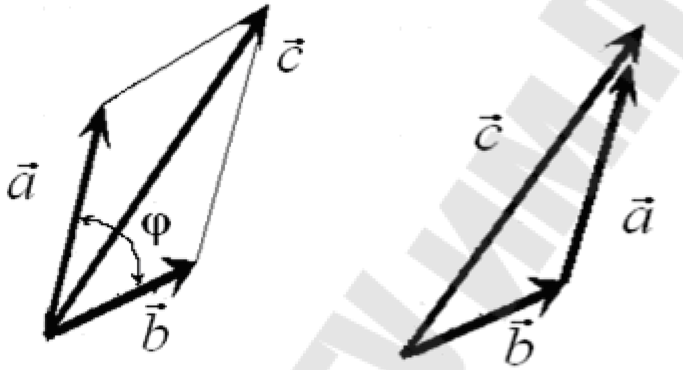
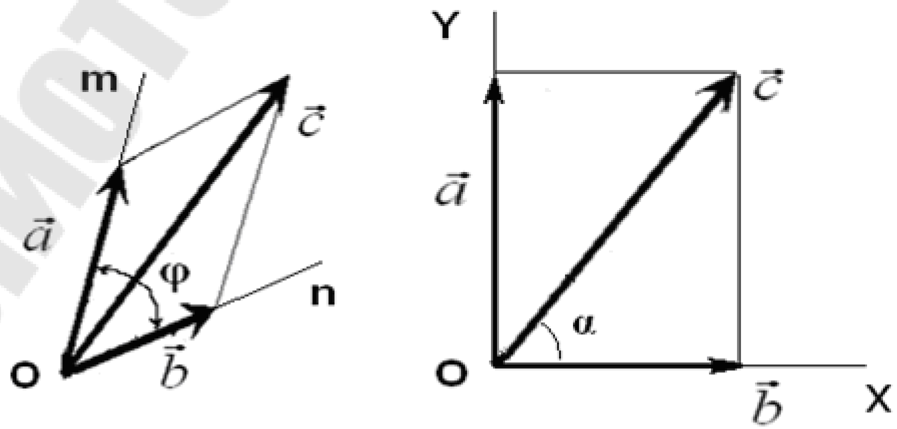


Рис.2.2.12

Модуль вектора $\vec{c}$ равен длине диагонали параллелограмма (правило параллелограмма):

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\varphi}\,/$$

Можно выполнить обратное действие - разложить вектор $\vec{c}$ на два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, направления *Om* и *On* или *OX* и *OY* которых заданы (рис. 2.2.13).



Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

Рис.2.2.13

Если угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен $\varphi = \pi/2$, то получаем, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, с как диагональ прямоугольника.

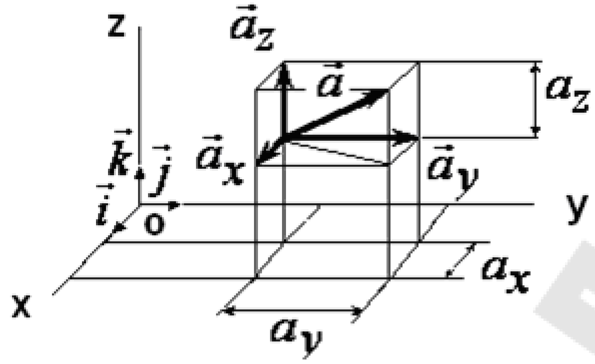


Рис.2.2.14

В пространственной системе координат вектор $\vec{a}$ можно представить суммой трех составляющих вектора. Выберем направления линий действия составляющих параллельно координатным осям прямоугольной системы координат $OXYZ$ (рис. 2.2.14), тогда

$$\vec{a} = \vec{a}_X + \vec{a}_Y + \vec{a}_Z.$$

Составляющие вектора $\vec{a}$, в прямоугольной системе определяются как

$$\vec{a}_X = a_X\vec{i}; \qquad \vec{a}_Y = a_Y\vec{j}; \qquad \vec{a}_Z = a_Z\vec{k}.$$

Координатами вектора $\vec{a}$, в прямоугольной системе координат *OXYZ* будем называть проекции вектора $\vec{a}$ на оси координат. Если $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орты координатных осей (единичные векторы), то вектор $\vec{a} = \{a_X, a_Y, a_Z\}$ можно представить в виде

$$\vec{a} = a_X\vec{i} + a_Y\vec{j} + a_Z\vec{k}.$$

Модуль вектора $\vec{a}$ вычисляется как диагональ параллелепипеда:

$$a = \sqrt{a_X^2 + a_Y^2 + a_Z^2} \,/$$

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

Геометрической суммой n векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ называется вектор $\vec{a}$, начало которого совпадает с началом вектора $\vec{a}_1$, а точка приложения каждого последующего вектора $\vec{a}_k$ совпадает с концом предыдущего $\vec{a}_{k-1}$ (рис. 2.2.15):

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + ... + \vec{a}_k . + \vec{a}_n .$$

Сумма *n* векторов обладает свойством сочетательности, то есть, слагаемые можно группировать в любом порядке.

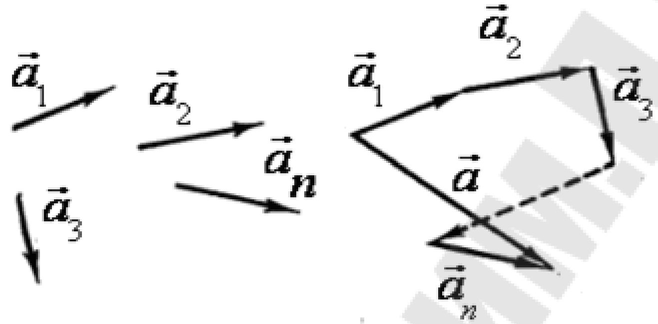


Рис.2.2.15

Необходимо напомнить, что геометрическое сложение (также как и алгебраическое) проводится с векторными величинами одной размерности. В векторном уравнении должны присутствовать лишь одни физические величины, значения которых определены одинаковой единицей измерения.

Например:

$\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + ... + \vec{P}_k . + \vec{P}_n .$ - сумма сил *(Н)*;

$\vec{M}_O(\vec{P}) = \vec{M}_O(\vec{P}_1) + \vec{M}_O(\vec{P}_2) + ... + \vec{M}_O(\vec{P}_k) + \vec{M}_O(\vec{P}_n)$ - сумма моментов сил ($Н \cdot м$);

$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + ... + \vec{V}_k . + \vec{V}_n .$ - сумма линейных скоростей.

Проекция равнодействующей системы векторов

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + ... + \vec{a}_n$$

на координатную ось *OX*, равна сумме проекций составляющих вектора (рис. 2.2.16):

$$a_X = a_{1X} + a_{2X} + ... + a_{nX} .$$

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

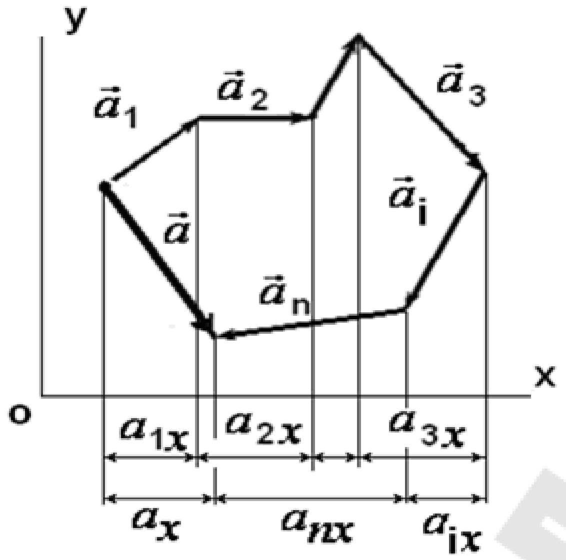


Рис.2.2.16

Скалярное произведение двух векторных величин $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образует скалярную величину $\vec{a}\,\vec{b}$ (рис. 2.2.17а), равную

$$\vec{a}\vec{b} = ab \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) \,, \quad \text{или} \quad \vec{a}\,\vec{b} = a_X b_X + a_Y b_Y + a_Z b_Z \,.$$

Эти выражения называются скалярным произведением и обозначаются символом.

Скалярное произведение вектора $\vec{a}$ самого на себя обозначают символом $|\vec{a}\,|^2$.

Если учесть направления единичных векторов в прямоугольной системе координат OXYZ, то можно записать равенства:

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1, \qquad \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{i} \cdot \vec{k} = 0.$$

Векторным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, удовлетворяющий условиям, (рис. 2.2.17б):

вектор $\vec{c}$ перпендикулярен каждому из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$,

модуль вектора $\vec{c}$ равен произведению модулей векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, на синус угла между ними, т.е.

$$c = a * b * \sin(\vec{a}, \vec{b}) \,.$$

Причем

Библиотека ГГТУ им.П.О.Сухого

$$\vec{c} = c_X \vec{i} + c_Y \vec{j} + c_Z \vec{k} \; ;$$

Где

$$c_X = a_Y b_Z - a_Z b_Y \; ; \; c_Y = a_Z b_X - a_X b_Z \; ; \; c_Z = a_X b_Y - a_Y b_X \; .$$

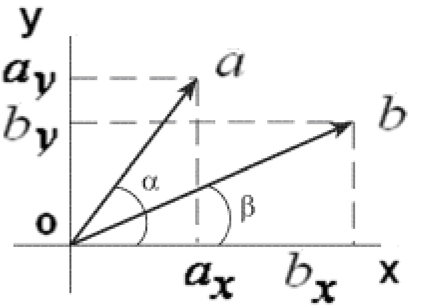


Рис.2.2.17а

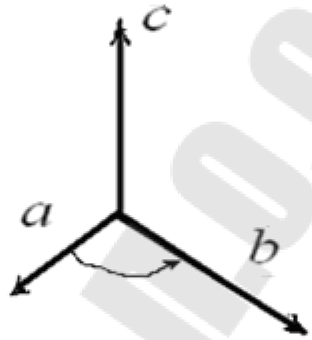


Рис.2.217б

Моментом вектора $\vec{a}$ относительно точки *O* называется вектор $\vec{M}_O$, равный векторному произведению радиус-вектора $\vec{r}$ точки А на вектор $\vec{a}$ (рис. 2.2.18) , т.е.

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{a},$$

Вектор $\vec{M}_O$ перпендикулярен вектору $\vec{a}$ и вектору $\vec{r}$, то есть перпендикулярен плоскости треугольника *OAB*. За положительное направление вектора принимают такое направление, откуда вращение отрезка h (плеча вектора) наблюдается против часовой стрелки.

Модуль момента вектора как относительно точки определяется как модуль векторного произведения

$$M_O = OA \cdot AB \cdot \sin\alpha \quad ,$$

где α угол между векторами $\vec{r}$ и $\vec{a}$.

Так как $OA \cdot \sin\alpha = h$, получаем известную из школьного курса физики формулу для момента силы:

$$M_O = AB \cdot h,$$

то есть, момент вектора (силы) относительно точки *O* равен произведению модуля вектора (модуля силы) на плечо h. Где h - кратчайшее расстояние линии действия вектора до дочки O , (рис. 2.2.19):

Знак момента вектора принимается положительным, если вращательный эффект, созданный моментом, будет наблюдаться против часовой стрелки.

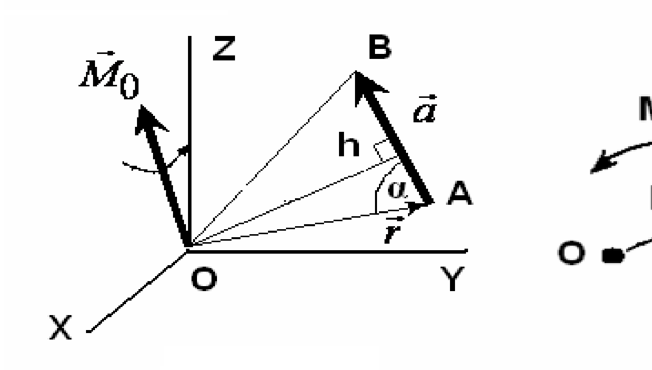


Рис.2.2.18

Рис.2.2.19

Для вычисления модуля момента силы относительно точки можно воспользоваться *теоремой Вариньона*: Момент равнодействующей системы векторов относительно точки *O,*

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + ... + \vec{a}_n,$$

равен сумме моментов составляющих относительно этой точки, т.е.

$$\vec{M}_O(\vec{a}) = \vec{M}_O(\vec{a}_1) + \vec{M}_O(\vec{a}_2) + ... + \vec{M}_O(\vec{a}_n).$$

В примере, приведенном на рис.2.2.20, требуется вычислить момент вектора $\vec{a}$ относительно точки *O*.

Разложим вектор $\vec{a}$ на два составляющих вектора $\vec{a}_X$ и $\vec{a}_Y$ вычислим момент каждого из них:

$$M_O(\vec{a}_X) = a_X Y_O, \quad M_O(\vec{a}_Y) = -a_Y * X_O.$$

Суммируем $\vec{M}_o(\vec{a}) = \vec{M}_o(\vec{a}_X) + \vec{M}_o(\vec{a}_Y)$ и получаем:

$$M_o(\vec{a}) = a_X Y_o - a_Y * X_O.$$

Моментом вектора $\vec{a}$ **относительно оси** *OZ* называется скалярная величина, равная моменту вектора $\vec{a}^*$ относительно точки *O*. Здесь вектор $\vec{a}^*$ - проекция вектора $\vec{a}$ на плоскость *XOY* (рис.2.2.21):

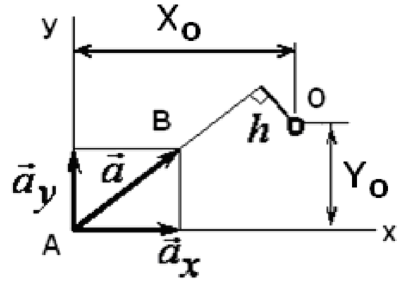


Рис.2.2.20

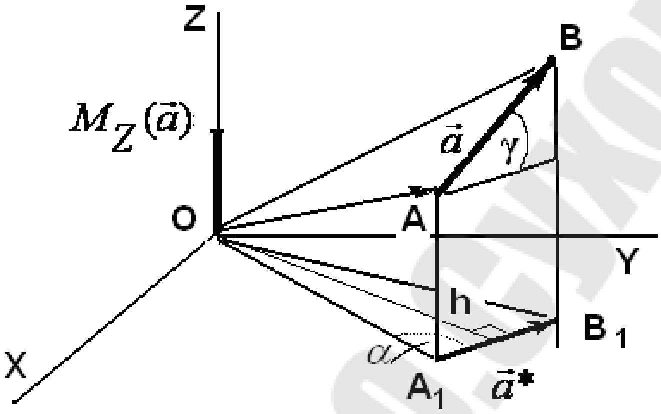


Рис.2.2.21

Правило 1: Чтобы определить момент вектора $\vec{a}$, относительно оси *OZ*, необходимо найти проекцию $\vec{a}^*$ на плоскость *XOY*, перпендикулярную оси, и вычислить момент вектора $\vec{a}^*$ относительно точки пересечения оси и плоскости, то есть относительно точки *O*:

$$M_Z(\vec{a}) = M_o(\vec{a}*) \ ,$$

$$a* = a*\cos\gamma, \quad h = OA_1 * \cos\alpha, \ , \ M_Z(\vec{a}) = a*h \quad .$$

Правило 2. Воспользовавшись теоремой Вариньона, разложим вектор $\vec{a}$ на составляющие $\vec{a}_X, \vec{a}_Y, \vec{a}_Z$, и вычислим моменты каждого вектора относительно координатных осей, результат сложим (рис. 2.2.22):

$$M_Z(\vec{a}_X) = -a_X Y_A, \qquad M_Y(\vec{a}_X) = a_X Z_A, \qquad M_X(\vec{a}_X) = 0,$$

$$M_Z(\vec{a}_Y) = a_Y X_A, \qquad M_Y(\vec{a}_Y) = 0, \qquad M_X(\vec{a}_Y) = -a_Y Z_A,$$

$$M_Z(\vec{a}_Z) = 0, \qquad M_Y(\vec{a}_Y) = -a_Z X_A, \qquad M_X(\vec{a}_Y) = a_Z Y_A,$$

$$M_Z(\vec{a}) = M_Z(\vec{a}_X) + M_Z(\vec{a}_Y),$$

$$M_Y(\vec{a}) = M_Y(\vec{a}_X) + M_Y(\vec{a}_Z)$$

$$M_X(\vec{a}) = M_X(\vec{a}_Y) + M_X(\vec{a}_Z)$$

Библиотека ГГТУ им.П.О.Сухого

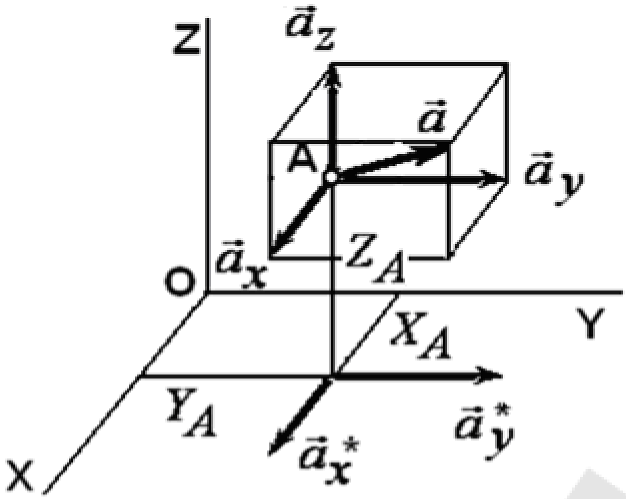


Рис.2.2.22

Окончательно получаем значения осевых моментов:

$$M_Z(\vec{a}) = a_Y X_A - a_X Y_A, \qquad M_Y(\vec{a}) = a_Z X_A - a_X Z_A,$$

$$M_X(\vec{a}) = a_Y Z_A - a_Z Y_A$$

Связь между моментами вектора относительно координатных осей и началом координат определяется формулой

$$\vec{M}_o(\vec{a}) = M_X(\vec{a})\vec{i} + M_Y(\vec{a})\vec{j} + M_Z(\vec{a})\vec{k}$$

Таким образом, мы установили, что момент $M_X(\vec{a})$ относительно координатной оси является проекцией вектора $\vec{M}_O(\vec{a})$ на эту ось.

3. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ СТАТИКИ

3.1..Связи. Реакции связей. Виды связи

Материальное тело, которое может свободно перемещаться в пространстве, называется свободным. В общем случае свободное тело, движение, которого не ограничено другими телами имеют шесть независимых перемещений (шесть степеней свободы). Эти перемещения можно представить как три линейных перемещения

Библиотека ГГТУ им.П.О.Сухого

вдоль координатных осей, и три угловых (вращательных движений) вокруг этих осей (рис.3.1.1).

Условия, ограничивающие свободу движения материального тела, называются связями, при этом ограничивается какое-нибудь перемещение.

Если связи, наложенные на тело, ограничивают все шесть перемещений - тело не свободно, находится в равновесии.

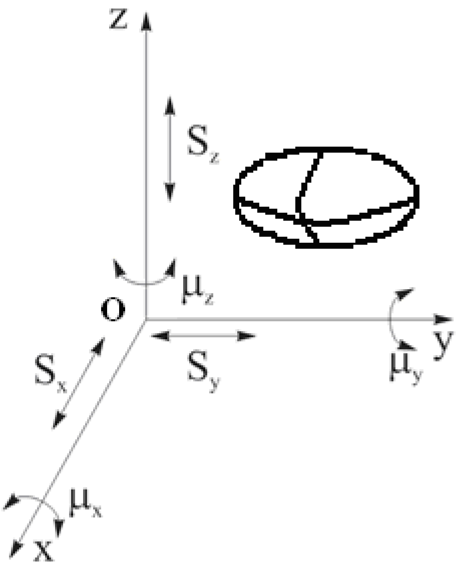


Рис.3.1.1

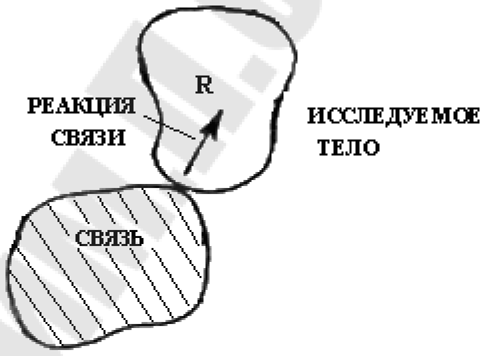


Рис.3.1.2

При решении большинства задач механики приходится иметь дело с телами несвободными, т. е. с такими, которые соприкасаются или скреплены с другими телами, благодаря чему становятся невозможными те или иные перемещения данного тела.

Сила, с которой связь действует, на тело, препятствуя его перемещению в том или ином направлении, называется силой реакции (противодействия) этой силы. В статике связи осуществляются при помощи твердых или гибких тел, контактирующих с данным твердым телом.

По закону равенства действия и противодействия, модуль реакции связи равен модулю силы давления на связь, а вектор реакции направлен в сторону, противоположную силе давления, т.е. в сторону, противоположную той, куда данная связь препятствует перемещаться телу (рис.3.1.2). Реакции связей существуют только тогда, когда данное тело взаимодействует со связью, как только прекращается это действие, перестают действовать и реакции.

Библиотека ГГТУ им.П.О.Сухого

Приведем примеры часто встречающихся видов связи.

1. *Гладкая поверхность* **-** простершая связь, осуществляемая поверхностью другою тела, препятствующего движению данного тела в определенном направлении.

Реакция направлена по нормали к поверхности (рис.3.1.3). Нормалью к поверхности называется перпендикуляр к касательной плоскости, проведенный через точку касания.

Величина реакции равна давлению, производимому телом на поверхность, и зависит от активных сил, приложенных к телу**.**

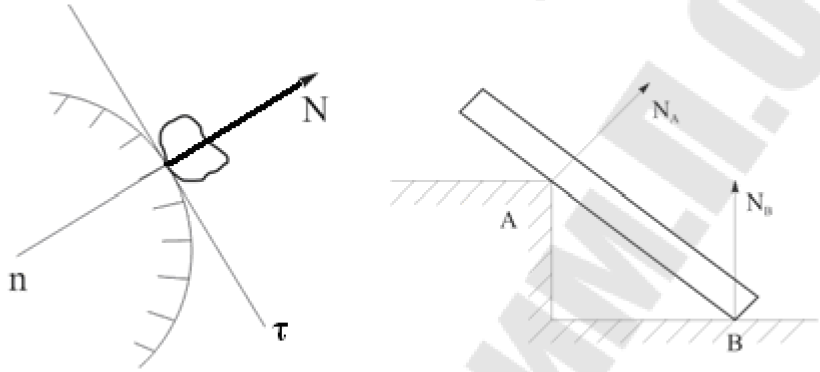


Рис.3.1.3

2. *Гибкая связь (нить, канат),* реакция направлена по нити (рис.3.1.4)..

3. *Стержневая связь,* реакция направлена вдоль стержня (рис.3.1.5).

4. *Шероховатая связь* **-** появляется сила трения, общая реакция представляет собой векторную сумму нормальной реакции и силы трения, угол μ называется углом трения, (рис.3.1.6).

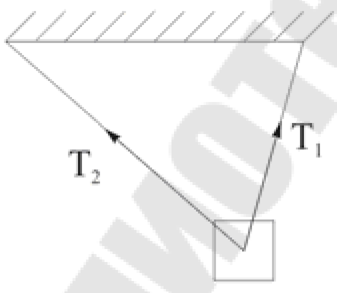


Рис.3.1.4

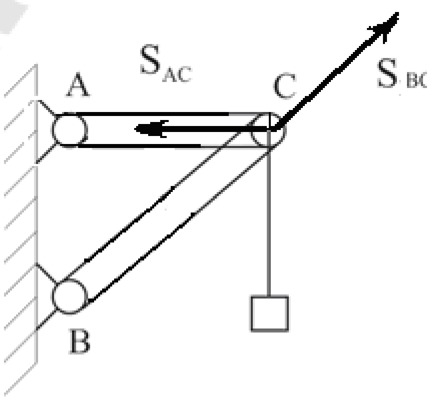


Рис.3.1.5

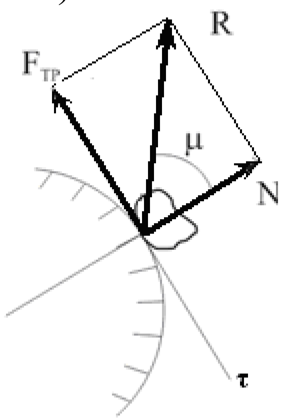


Рис.3.1.6

Библиотека ГГТУ им.П.О.Сухого

5. *Цилиндрический шарнир (подшипник, втулка)* - тело, жестко скрепленное с вращающейся осью, может вращаться вокруг оси шарнира, перпендикулярной к плоскости рисунка, (рис.3.1.6)..

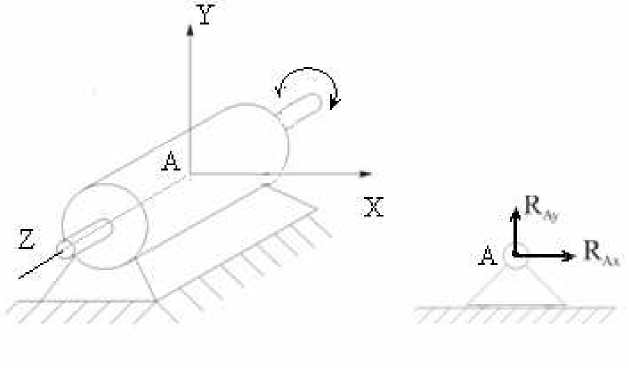


Рис.3.1.7а

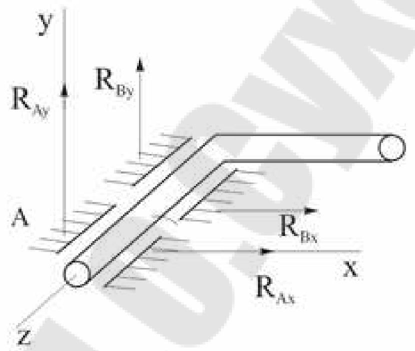


Рис.3.1.7б

Во многих случаях можно пренебречь трением в шарнире. В таком шарнире, называемом «идеальным», возникает препятствие перемещению детали в радиальном направлении (по нормали к поверхностям втулки и пальца), и, следовательно, его реакция находится в плоскости, перпендикулярной оси вращения шарнира, т.е. в плоскости *XOY*. Направление и модуль вектора $\vec{R}_A$ неизвестны, поэтому можно воспользоваться разложением этого вектора на две составляющие по направлениям координатных осей *OX* и *OY* (рис.3.1.7а).

В пространственной задаче цилиндрический шарнир может быть изображен в системе координат *OXYZ*. Например, вал, ось вращения которого совпадает с осью *OZ* , закреплен в подшипниках *A* и *B*, реакции которых перпендикулярны оси вращения Z. Векторы $\vec{R}_A$ и $\vec{R}_B$ можно разложить на две составляющие вдоль координатных осей *OX* и *OY* (рис.3.1.7б):

$$\vec{R}_A = \vec{R}_{AX} + \vec{R}_{AY}, \qquad \vec{R}_B = \vec{R}_{BX} + \vec{R}_{BY}$$

6. *Подвижный цилиндрический шарнир*. Опора на катках не препятствует перемещению оси шарнира параллельно плоскости и представляет собой так называемую шарнирно-подвижную опору. Вектор реакции перпендикулярен возможному перемещению точки опоры, т.е. направлен по нормали к поверхности (рис.3.1.8).

7. *Подпятник* - представляет собой соединение гладкой поверхности горизонтальной опоры и цилиндрического подшипника.

Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

Например, вертикальный вал закреплен в точках A и B, в точке B-цилиндрическим шарниром, а в точке A – подпятником. В точке B имеем вектор реакции, лежащий в плоскости перпендикулярной оси OZ, поэтому вектор $\vec{R}_B$ раскладываем на составляющие параллельно осям OX и OY.

В точке A вектор реакции $\vec{R}_A$ не определен по направлению в пространстве – этот вектор представлен тремя составляющими, параллельными координатным осям (рис.3.1.9).

8. *Сферический шарнир* (рис.3.1.10). Вектор реакции также не определен в пространстве, и поэтому вектор $\vec{R}_A$ можно заменить тремя составляющими, так как $\vec{R}_A = \vec{R}_{AX} + \vec{R}_{AY} + \vec{R}_{AZ}$.

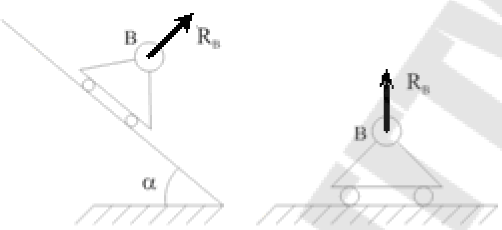


Рис.3.1.8

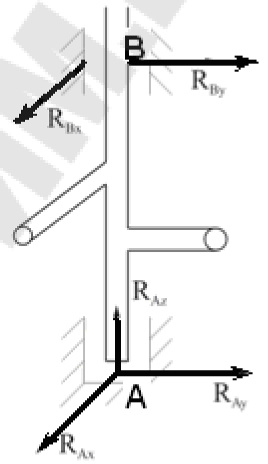


Рис.3.1.9

9. *Жесткая заделка (консольная балка),* например – гвоздь в стене. Балка не может поворачиваться вокруг точки A, поэтому дополнительно к реакциям $\vec{R}_{AX}$, $\vec{R}_{AY}$ добавляется момент M ,(рис.3.1.11).

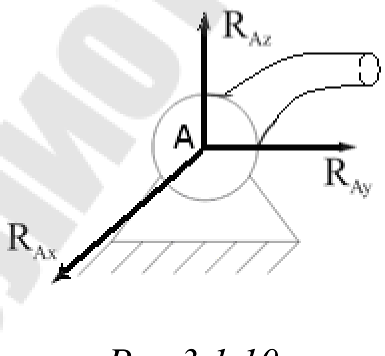


Рис.3.1.10

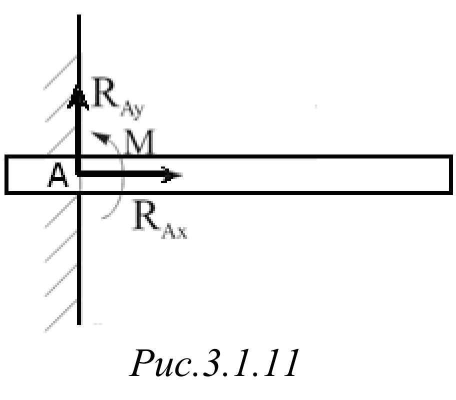


Рис.3.1.11

Библиотека БГТУ им. П.О. Сухого

3.2. Классификация сил

Все силы, действующие на твердое тело, будем разделять на два класса:

– реакции связи;

– активные силы – мера взаимодействия исследуемого тела с другими телами (со средой), которые не будем считать связями.

В некоторых случаях, связи для удобства решения, реакции связи относят к числу активных сил. Например, гладкая поверхность считается идеальной связью, и если материальное тело находится на негладкой поверхности, то возникают две реакции: нормальная реакция $\vec{N}$ поверхности и касательная реакция поверхности $\vec{F}_{\text{тр}}$ (сила трения). Если силу трения условно отнести к активным силам, т.е. не считать ее реакцию связью, то можно говорить, что на тело наложена идеальная связь.

Изучение систем сил, действующих на тело, связано со свойствами систем векторов.

Все действия над силами, как векторными величинами могут быть распространены, и использованы для других векторных величин, которые будут встречаться в курсе механики.

3.3. Системы сил

Совокупность сил, действующих на материальное тело, называется системой сил. Система сил, линии действия которых лежат в одной плоскости, будет *плоской системой сил*, а если линии действия сил не лежат в одной плоскости, — *пространственной системой сил.*

Система сил, линии действия которых пересекаются в одной точке, называется *системой сходящихся сил* (рис.3.3.1-рис.3.3.2).

Система сил, линии действия которых параллельны, называется *системой параллельных сил* (рис.3.3.3-рис.3.3.4).

Система сил, линии действия которых имеют любое направление в пространстве, *называется произвольной системой сил* (рис.3.3.5-рис.3.3.6).

Равнодействующей системы сил называется сила, заменяющая действие всей системы сил.

Уравновешивающая – сила, приводящая тело, движущееся под действием системы сил, в состояние равновесия.

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

Плоская задача

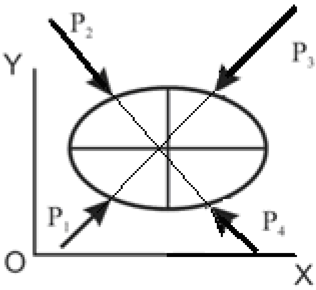


Рис.3.3.1

Пространственная задача

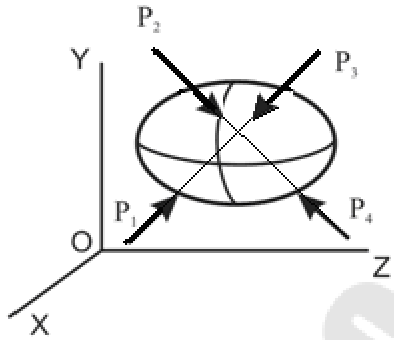


Рис.3.3.2

Плоская задача

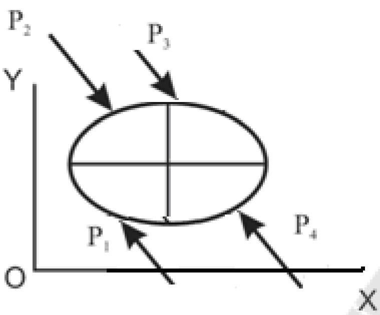


Рис.3.3.3

Пространственная задача

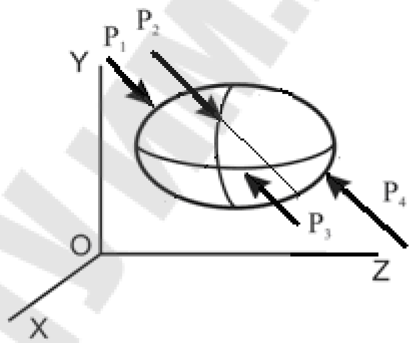


Рис.3.3.4

Плоская задача

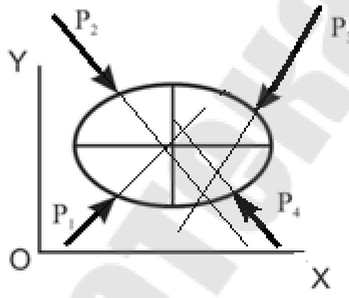


Рис.3.3.5

Пространственная задача

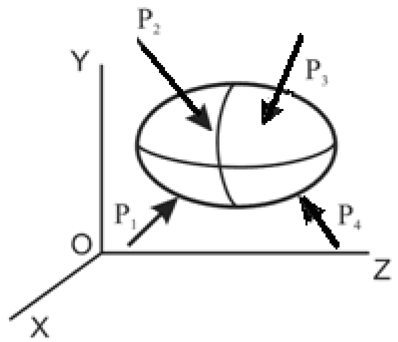


Рис.3.3.6

Уравновешивающая сила равна по модулю и противоположно направлена равнодействующей системы сил.

Система сил, под действием которой тело находится в состоянии покоя, называется уравновешенной.

Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

3.4. Аксиомы статики

Обобщая опыт изучения физических законов природы, Галилей и Ньютон сформулировали основные законы механики, которые могут рассматриваться как аксиомы механики, так как они имеют в своей основе экспериментальные факты.

Аксиома 1 (закон инерции).

Система сил, приложенная к материальной точке, является уравновешенной, если под её воздействием точка находится в состоянии покоя или движется прямолинейно и равномерно.

Аксиома 2 (условие равновесия двух сил).

Свободное твердое тело находится в равновесии при действии сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ тогда и только тогда, когда эти силы равны по модулю $(F_1 = F_2)$ и направлены вдоль одной и той же прямой в противоположные стороны (рис. 3.4.1**).**

Аксиома 3 (принцип присоединения и исключения уравновешенных сил).

Не нарушая равновесие абсолютно твердого тела, к нему можно приложить или отбросить от него уравновешенную систему сил (рис. 3.4.2). Например, на тело действует сила $\vec{F}$, приложенная к телу в точке B. Приложим в точке A, уравновешенную систему двух сил $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$, отвечающих условиям $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}|$, Отбросим от тела другую систему уравновешенных сил $\vec{F}_1 = \vec{F}$. Остается одна сила $\vec{F}_2$, приложенная в точке *A* и равная силе $\vec{F}_1$.

Следствие. Силу можно переносить вдоль линии действия.

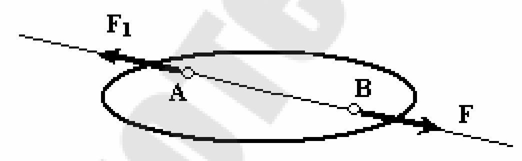


Рис.3.4.1

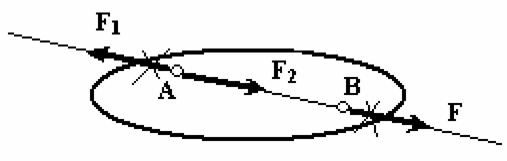


Рис.3.4.2

Вектор силы является скользящим вектором (рис.3.4.2).

Аксиома 4 (правило параллелограмма).

Равнодействующая двух сил линии действия, которых пересекаются в одной точке, выражаются диагональю параллелограмма, стороны которого образуют векторы этих сил (рис.3.4.3). Модуль равнодействующей определяется по формуле:

$$R = \sqrt{\vec{F}_1^{\,2} + \vec{F}_2^{\,2} + 2\vec{F}_1\vec{F}_2 \cos\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2\right)}.$$

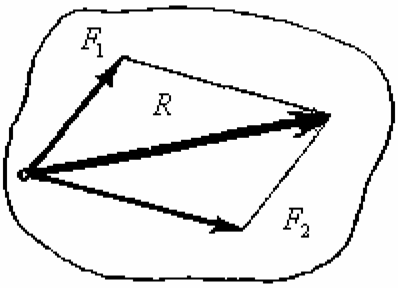


Рис.3.4.3

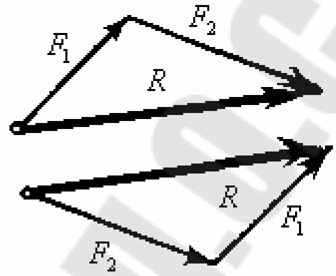


Рис.3.4.4

Закон параллелограмма сил можно сформулировать и так: две силы, приложенные к телу в одной точке, имеют равнодействующую, равную геометрической сумме этих сил и приложенную в той же точке.

Вместо параллелограмма сил можно построить треугольник сил. Направление равнодействующей $\vec{R}$ противоположно направлению обхода контура треугольника, определяемого заданными силами. В связи с этим обратите внимание на стрелки, указывающие направления сил на рис. рис.3.4.4.

С помощью параллелограмма или треугольника сил может быть решена и обратная задача - разложение силы $\vec{R}$ на две составляющие $\vec{F}_1$и $\vec{F}_2$ приложенные в той же точке и направленные по заданным линиям действия. Равнодействующая $\vec{R}$ трех сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}$ приложенных в одной точке твердого тела (рис.3.4.5), приложена в той же точке и определяется диагональю параллелепипеда, ребра которого составляют векторы заданных сил.

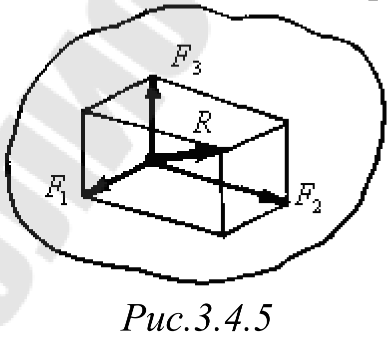


Рис.3.4.5

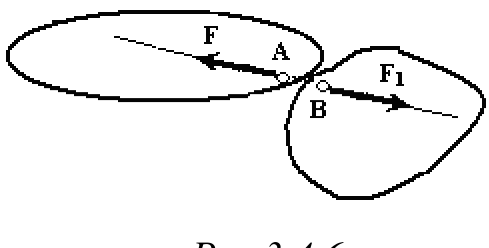


Рис.3.4.6

Согласно закону параллелепипеда, силу $\vec{F}_1$ можно разложить по трем заданным направлениям единственным образом: $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$.

Аксиома 5 (Третий закон Ньютона).

Два тела взаимодействуют друг с другом с силами, равными по модулю и противоположно направленными, (рис.3.4.6). Силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ не образуют уравновешенную систему сил, так как приложены к разным телам.

Аксиома 6 (*аксиома освобождаемости от связей*).

Несвободное твердое тел можно считать свободным, если связи, наложенные на него заменить силами реакций, действие которых эквивалентно действию связей (рис.3.4.7).

Аксиома 7 (*принцип отвердевания*).

Если нетвердое тело находится в равновесии, то это равновесие не нарушится и в том случае, если тело, станет абсолютно твердым. Принцип отвердевания позволяет применить к любому нетвердому телу и к любой изменяемой конструкции условия равновесия, устанавливаемые статикой для абсолютно твердого тела.

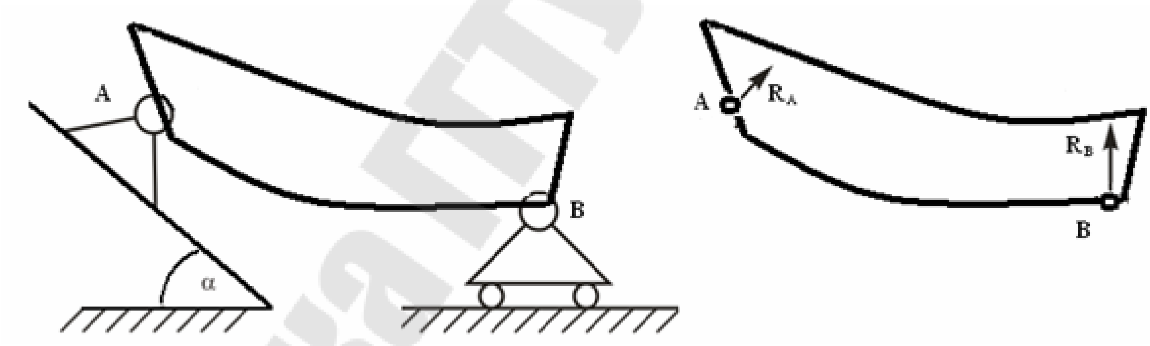


Рис.3.4.7

4. СВОЙСТВА СИСТЕМЫ СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

Задачи на равновесие твердого тела под действием системы сходящихся сил можно решать с помощью уравнений, полученных геометрическим и аналитическим методами.

В эти уравнения входят как силы задаваемые (активные), так и реакции связей, наложенных на тело.

Первым методом удобно пользоваться лишь для плоской системы и, особенно в тех случаях, когда общее число сил, действующих на тело, равно трем. При равновесии тела треугольник, построенный на этих силах, должен быть замкнутым.

Аналитическим методом можно пользоваться также и для пространственной системы сил при любом числе сил. При этом следует иметь в виду, что общее число неизвестных в задаче должно быть не больше трех для пространственной системы сходящихся сил и не больше двух для плоской системы сходящихся сил.

4.1. Геометрический способ сложения сходящихся сил.

Пусть задана система сходящихся сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$,(рис 4.1.1а).

Так как сила является скользящим вектором, совместим начала всех векторов сил с началом координат - точкой О.

Для сложения заданных сил последовательно применяем правило треугольника.

Складываем две любые силы, и получаем равнодействующую, (рис.4.1.1б):

$$\vec{R}_{1,2} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

Получаем систему трех сходящихся сил $\vec{R}_{1,2}, \vec{F}_3, \vec{F}_4$, (рис.4.1.1в).

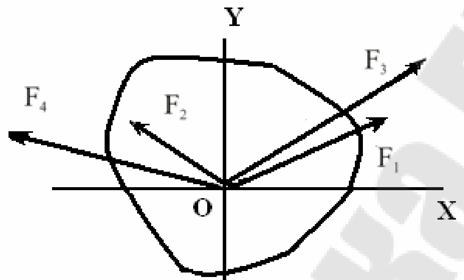


Рис.4.1.1а

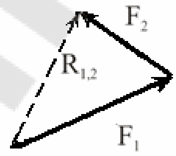


Рис.4.1.1б

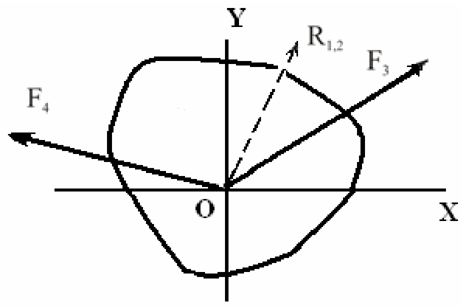


Рис.4.1.1в

Складываем равнодействующую $\vec{R}_{1,2}$ и любую из оставшихся сил, например $\vec{R}_{1,2} + \vec{F}_4 = \vec{R}_{1,2,4}$,(рис.4.1.1г).

Получаем систему двух непараллельных сил $\vec{R}_{1,2,4}$ и $\vec{F}_2$ (рис.4.1.1д), равнодействующая которых равна $\vec{R}_{1,2,4} = \vec{R}_{1,2,4} + \vec{F}_3$ (рис.4.1.1е).

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

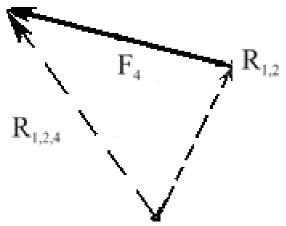


Рис.4.1.1г

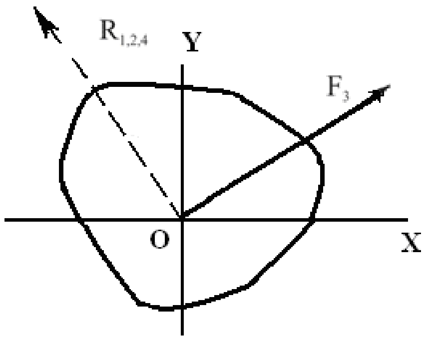


Рис.4.1.1д

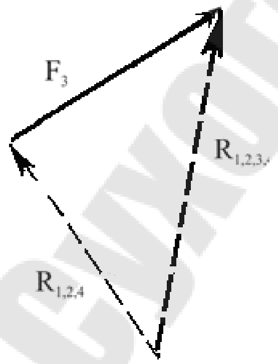


Рис.4.1.1е

Обозначим $\vec{R}_{1,2,4,3} = \vec{R}^*$, и получим равнодействующую заданной системы сил, как замыкающий вектор силового многоугольника, соединяющий начало первого вектора и конец последнего вектора (рис.4.1.1ж).

Вектор равнодействующей направлен против обхода контура, построенного из системы заданных векторов и равен векторной сумме

$$\vec{R}^* = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 \quad .$$

Полученное векторное уравнение в общем случае можно записывать в сокращенной форме:

$$\vec{R}^* = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i,$$

где n- число складываемых векторов.

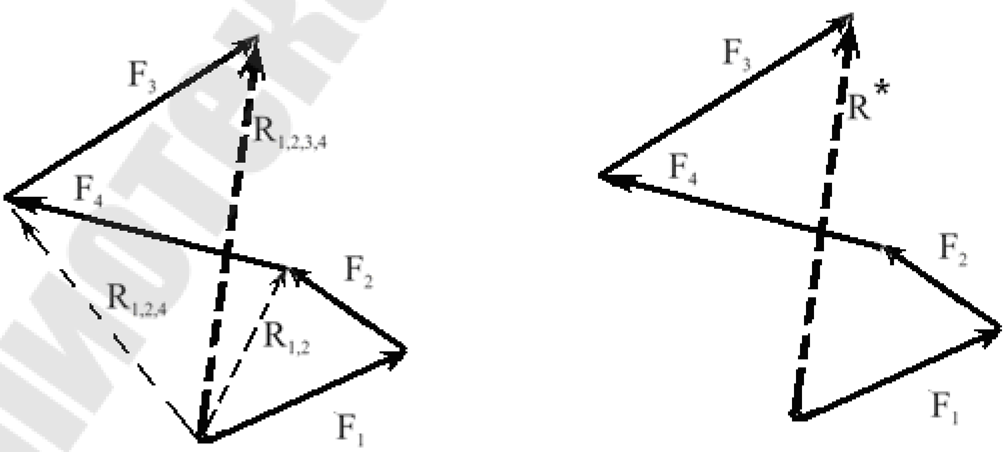


Рис.4.1.1ж

Библиотека БГТУ им. П.О. Сухого

Обратным действию геометрического сложения сил является разложение силы на составляющие.

Разложить силу на две или три составляющие — значит найти такую систему сил, которая производила бы на тело такое же действие, что и одна данная сила. Другими словами, разложить силу составляющие — это значит найти такие силы, равнодействующая которых была бы равна данной силе.

Пусть, например, какой-нибудь груз весом G подвешен в точке C кронштейна. Уравновешивающая сила $\vec{R}_C = -\vec{G}$ может быть разложена по правилу параллелограмма на два вектора $\vec{S}_{BC}$ и $\vec{S}_{AC}$ линии действия которых совпадают с направлением стержней кронштейна (рис.4.1.2).

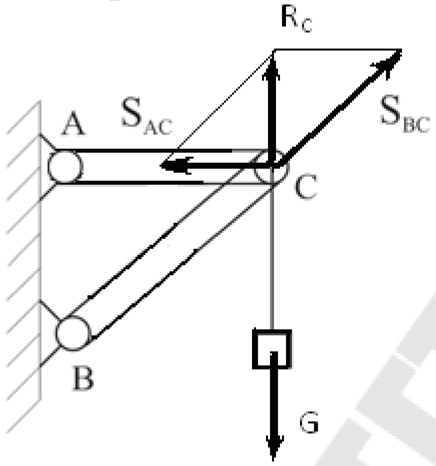


Рис.4.1.2

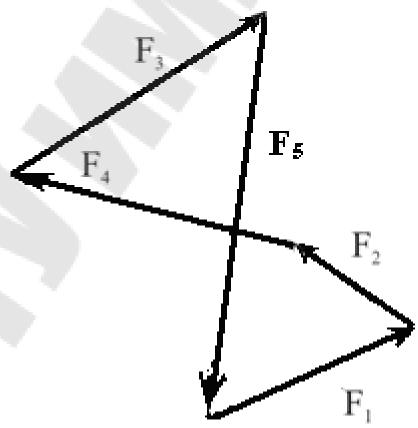


Рис.4.2.1

4.2. Геометрические условия равновесия системы сходящихся сил.

Если материальное тело или материальная точка находится в равновесии под действием системы сходящихся сил, то такая система сил называется уравновешенной. Равнодействующая такой системы сил равна нулю: $\vec{R}^* = 0,\cdot$ или $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0,$ - векторное уравнение равновесия системы сходящихся сил.

Решая векторное уравнение равновесия геометрическим способом, можем найти одну векторную величину. Таким способом удобно пользоваться лишь для плоской системы сил.

Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

Это условие означает, что силовой многоугольник должен быть замкнутым, то есть конец последнего вектора в многоугольнике должен совпадать с началом первого вектора (рис.4.2.1).

Например, для кронштейна, изображенного на рис 4.1.2. условия равновесия точки *C* можно записать в виде векторных уравнений:

$$\vec{R}_C + \vec{G} = 0 \quad , \quad \text{или } \vec{R}_C + \vec{S}_{AC} + \vec{S}_{BS} = 0 \qquad .$$

Геометрическое решение второго векторного уравнения - замкнутый силовой треугольник (рис.4.2.2), две стороны которого являются неизвестными реакциями стержней кронштейна.

Для построения силового треугольника можно на плоскости провести три линии действия сил, входящих в векторное уравнение равновесия точки *C,* таким образом, чтобы эти линии не пересекались в одной точке. Тогда этими линиями образуется треугольник *ABC*. Вертикальная сторона *AB* соответствует заданной силе тяжести, направление которой определяет направление обхода силового треугольника. Считая, что $AB = G$, находим:

$$S_{AC} = G \cdot tg\alpha \ , \qquad S_{BC} = G/_{\cos\alpha} \qquad .$$

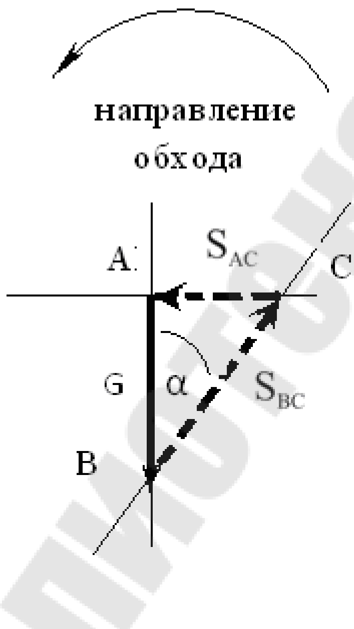


Рис.4.2.2

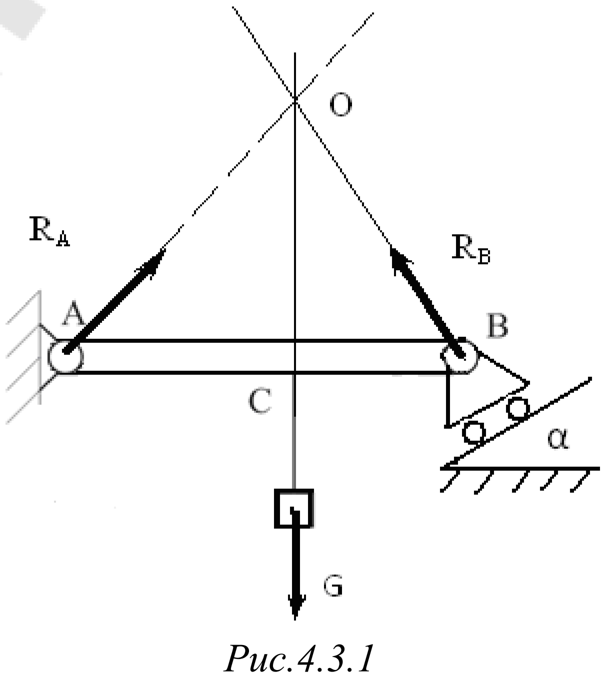


Рис.4.3.1

Библиотека ГГТУ им.П.О.Сухого

4.3. Теорема о трех силах

При решении некоторых задач можно использовать теорему о трех силах:

Если твердое тело находится в равновесии под действием трех сил и линии действия двух из этих сил пересекаются, то линия действия третьей силы проходит через эту точку пересечения, и все три силы лежат в одной плоскости (рис.4.3.1).

Например, невесомая балка AB находится в равновесии под действием трех сил. Направления вектора $\vec{R}_B$ и силы тяжести груза $\vec{G}$ известны. Требуется определить вектор $\vec{R}_A$. Проводим линию действия, проходящую через точки A и O, получаем направление неизвестного вектора.

4.4. Аналитическое определение равнодействующей системы сходящихся сил.

Аналитический метод позволяет решать как пространственные, так и плоские задачи. Число n сходящихся сил, действующих на тело, может быть каким угодно.

Вектор в пространстве характеризуется тремя скалярными величинами:

- тремя проекциями;
- модулем и двумя направляющими косинусами.

Векторное уравнение $\vec{R}^* = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$ записывается в проекциях на координатные оси

$$R_X^* = \sum_{i=1}^{n} F_{iX} \quad , R_Y^* = \sum_{i=1}^{n} F_{iY} \quad , \quad R_Z^* = \sum_{i=1}^{n} F_{iZ} \quad .$$

Модуль равнодействующей равен

$$R^* = \sqrt{(\sum_{i=1}^{n} F_{iX})^2 + (\sum_{i=1}^{n} F_{iY})^2 + (\sum_{i=1}^{n} F_{iZ})^2} \quad .$$

Направление вектора   определяется формулами:

Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

$$\cos(\vec{R}^*, X) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} F_{iX}}{\sqrt{(\sum\limits_{i=1}^{n} F_{iX})^2 + (\sum\limits_{i=1}^{n} F_{iY})^2 + (\sum\limits_{i=1}^{n} F_{iZ})^2}};$$

$$\cos(\vec{R}^*, Y) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} F_{iY}}{\sqrt{(\sum\limits_{i=1}^{n} F_{iX})^2 + (\sum\limits_{i=1}^{n} F_{iY})^2 + (\sum\limits_{i=1}^{n} F_{iZ})^2}};$$

$$\cos(\vec{R}^*, Z) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} F_{iZ}}{\sqrt{(\sum\limits_{i=1}^{n} F_{iX})^2 + (\sum\limits_{i=1}^{n} F_{iY})^2 + (\sum\limits_{i=1}^{n} F_{iZ})^2}};$$

Вектор на плоскости характеризуется двумя скалярными величинами: двумя его проекциями, или, модулем вектора и направляющим косинусом.

Для плоской системы сил, перпендикулярной оси *OZ*, в приведенных выше формулах положим:

$$R_Z^* = \sum_{i=1}^{n} F_{iZ} = 0, \quad \cos(\vec{R}^*, Z) = 0.$$

4.5. Аналитические условия равновесия системы сходящихся сил

Используем свойство скользящего вектора и уравнения равновесия твердого тела, находящегося под действием системы сходящихся сил, представляем уравнениями равновесия этой точки, (рис 4.5.1- рис 4.5.2):

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kX} = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} F_{kY} = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} F_{kZ} = 0;$$

Если на тело действуют сходящиеся силы, лежащие в одной плоскости (например, в плоскости *XOY*), то уравнений равновесия будет два: $\sum\limits_{k=1}^{n} F_{kX} = 0; \quad \sum\limits_{k=1}^{n} F_{kY} = 0$.

Библиотека ГГТУ им.П.О.Сухого

Если на покоящееся тело наложены связи с трением, то к уравнениям равновесия с учетом сил трения следует присоединить дополнительное условие

$$F_{тр} \le fN \ ,$$

где f – коэффициент трения скольжения при покое;

N – величина нормальной реакции.

Для пространственной задачи имеем три аналитических уравнения, решаем систему этих уравнений и находим три неизвестные скалярные величины.

Аналогично для плоской задачи решаем два аналитических уравнения и находим две неизвестные скалярные величины.

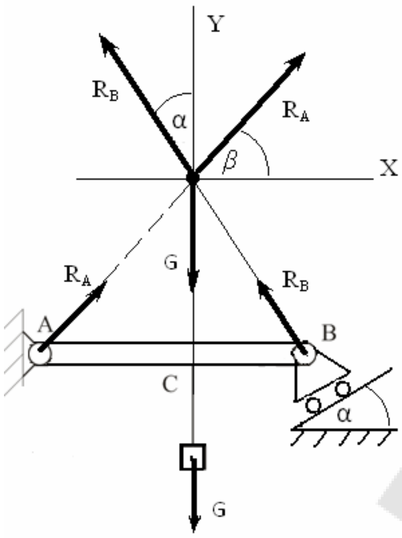


Рис.4.5.1

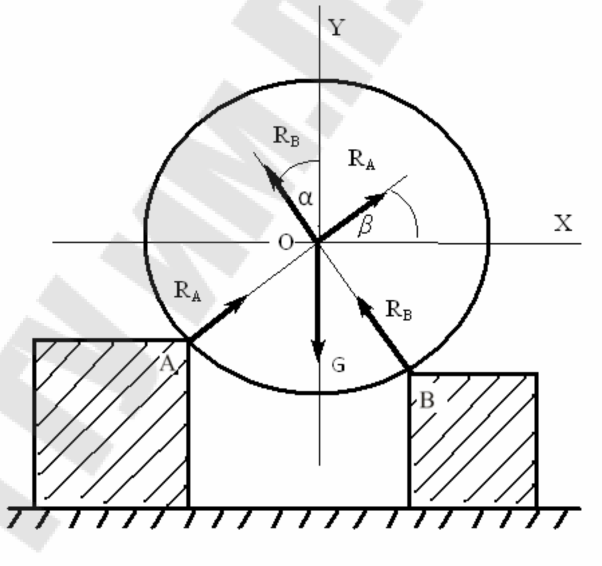


Рис.4.5.2

Например, для балки AB (рис.4.5.1) и для цилиндрической трубы (рис.4.5.2) имеем одинаковые уравнения равновесия:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kX} = -R_B \sin\alpha + R_A \cos\beta = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kY} = -G + R_B \cos\alpha + R_A \sin\beta = 0 .$$

5. СИСТЕМА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ

Совокупность сил, приложенных к твердому телу, линии действия которых не пересекаются, называется системой параллельных сил. Такая система сил может быть плоской или пространственной. Примерами системы параллельных сил могут быть

Библиотека ГГТУ им.П.О.Сухого

силы тяжести твердого тела (рис 5.1а), а также различная распределенная нагрузка, например силы давления (рис 5.1б). Системы действующих на тело параллельных сил могут быть уравновешены параллельными реакциями связей.

5.1.Система двух параллельных сил

Заданы силы параллельные силы $\vec{P}_1, \vec{P}_2$, линии действия которых проходят через точки *A* и *B*. Равнодействующая такой системы сил определяется вектором $\vec{R} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2$.

Силы $\vec{P}_1, \vec{P}_2$ могут быть направлены или в одну строну (например, вверх вдоль оси *OZ*- рис. 5.1.1а), или в разные стороны (например, сила $\vec{P}_{12}$ вниз вдоль оси OZ, а сила $\vec{P}_2$ - вверх – рис.5.1.1б).

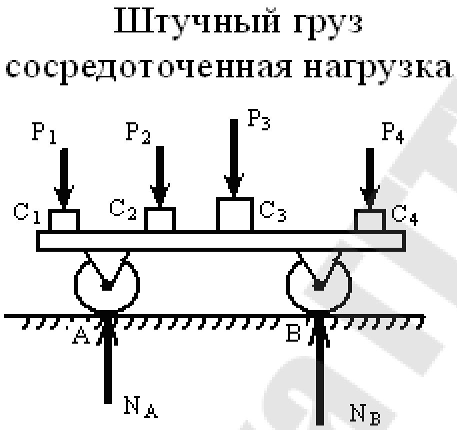


Рис.5.1а

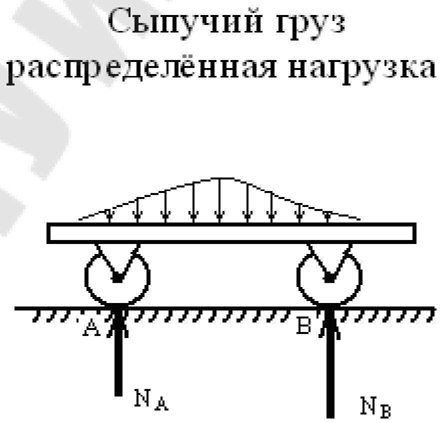


Рис.5.1б

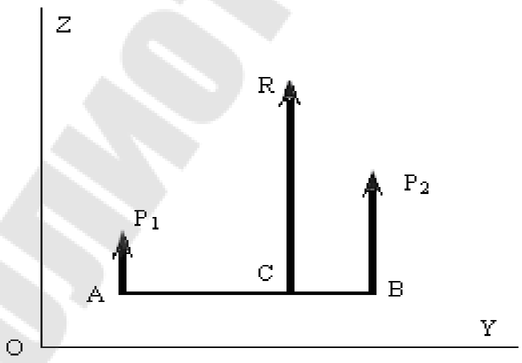


Рис.5.1.1а

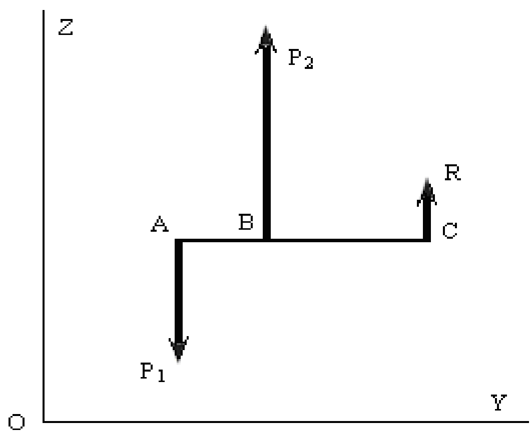


Рис.5.1.1б

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

Запишем проекции сил на ось OZ и вычислим модуль равнодействующей:

Для первого случая: $P_{1Z} = P_1$, $P_{2Z} = P_2$, $R = P_1 + P_2$.

Для второго случая: $P_{1Z} = -P_1$, $P_{2Z} = P_2$, $R = -P_1 + P_2$

Положение точки C, через которую проходит линия действия вектора $\vec{R}$, определяется соотношениями отрезков

$$P_1 \cdot AC = P_2 \cdot BC .$$

Таким образом, выполняется условие равенства моментов сил относительно точки:

$$M_C(\vec{P}_1) = M_C(\vec{P}_2) .$$

5.2 Центр параллельных сил

Определим положение вектора равнодействующей активных сил $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \vec{P}_4$ заданных на рис 5.2.1.

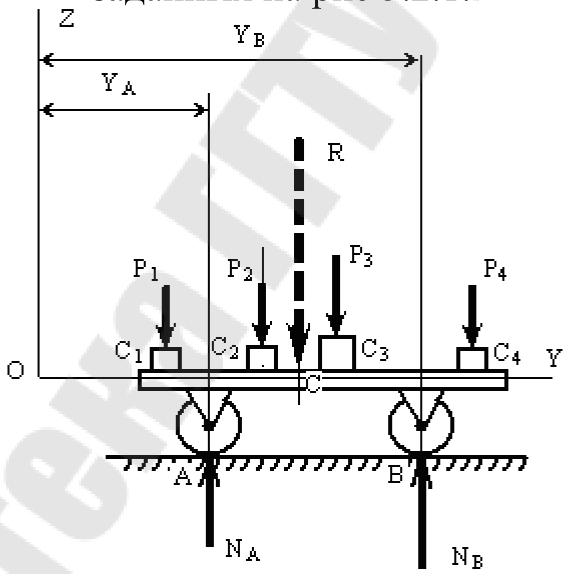


Рис.5.2.1

Очевидно, что в векторной записи равнодействующая такой системы сил будет представлена уравнением

$$\vec{R} = \sum_{k=1}^{n} \vec{P}_k \text{ , где } n=4.$$

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

Модуль равнодействующей определяется как сумма проекций всех сил на ось OZ, параллельную линиям действия системы сил

$$R_Z = \sum_{k=1}^{n} P_{kZ} \quad .$$

Поскольку, все действующие на тележку активные силы имеют одно направление, то $.R = P_1 + P_2 + P_3 + P_4.$

Выберем систему координат YOZ .

Определим моменты всех сил относительно точки O. По теореме Вариньона имеем (смотри рис. 5.2.1):

$$M_O(\vec{R}) = M_O(\vec{P}_1) + M_O(\vec{P}_2) + M_O(P_3) + M_O(\vec{P}_4).$$

Или,

$$R \cdot OC = P_1 \cdot OC_1 + P_2 \cdot OC_2 + P_3 \cdot OC_3 + P_4 \cdot OC_4.$$

Учитывая, что отрезки OC_1, OC_2, OC_3, OC_4 являются координатами точек C_1, C_2, C_3 и C_4, получаем формулу

$$Y_C = \frac{P_1 \cdot Y_{C1} + P_2 \cdot Y_{C2} + P_3 \cdot Y_{C3} + P_4 \cdot Y_{C4}}{P_1 + P_2 + P_3 + P_4},$$

которая определяет координату Y_C центра параллельных сил.

Используя знак суммирования, имеем

$$Y_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} P_k \cdot Y_{Ck}}{\sum_{k=1}^{n} P_k} .$$

В общем случае, если оси системы координат не параллельны заданным силам для пространственной системы сил можем записать:

$$X_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} P_k \cdot X_{Ck}}{\sum_{k=1}^{n} P_k}, \quad Y_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} P_k \cdot Y_{Ck}}{\sum_{k=1}^{n} P_k} \quad , Z_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} P_k \cdot Z_{Ck}}{\sum_{k=1}^{n} P_k}$$

В случае равномерно распределенной нагрузки (рис. 5.2.2) плоская фигура представлена прямоугольником, центр тяжести которого находится на пересечении диагоналей. Модуль вектора равнодействующей определяется как площадь прямоугольника

$$Q = q \cdot b$$

В случае линейно распределенной нагрузки (рис. 5.2.3) плоская фигура представлена треугольником, центр тяжести которого находится на пересечении медиан. Модуль вектора равнодействующей определяется как площадь треугольника

$$Q = \frac{1}{2} q \cdot b \quad .$$

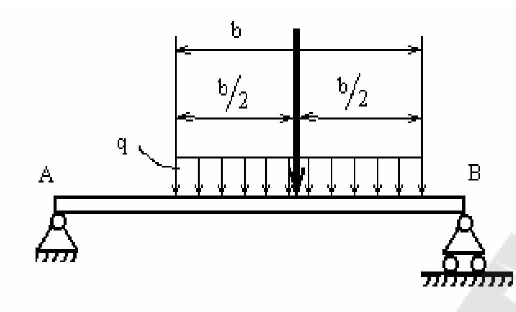


Рис.5.2.2

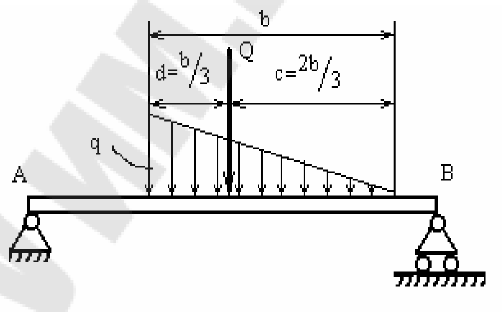


Рис.5.2.3

.

В этих формулах величина, обозначенная символом q, имеет размерность $Н/м$ в плоской задаче, и $Н/м^2$ - в пространственной задаче и называется интенсивностью распределенной нагрузки.

5.3 Условия равновесия системы параллельных сил

Рассмотрим равновесие платформы, изображенной на рис. 5.2.1. На платформу действуют активные силы $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \vec{P}_4$ и реакции связей $\vec{N}_A, \vec{N}_B$.

Геометрическая сумма всех активных сил и реакций связей записывается векторным уравнением

$$R^{*} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3 + \vec{P}_4 + \vec{N}_A + \vec{N}_B \quad .$$

Так как в условиях равновесия должно выполняться условие $\vec{R}^* = 0$, то получаем векторное уравнение

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3 + \vec{P}_4 + \vec{N}_A + \vec{N} = 0 \, .$$

Запишем это уравнение в проекции на ось OZ:

$$-P_{1Z} - P_{2Z} - P_{3Z} - P_{4Z} + N_{AZ} + N_{BZ} = 0 \ .$$

Учитывая, что все силы параллельны оси OZ, умножив все члены уравнения на *(-1)*, получаем аналитическую запись условий равновесия:

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + N_A + N_B = 0 \qquad (5.3.1).$$

Как известно из алгебры, задача с двумя неизвестными предполагает решение системы двух уравнений. Чтобы вычислить неизвестные величины N_A и N_B , к уравнению (5.3.1) добавим уравнение суммы моментов сил относительно любой точки , например ,точки O :

По теореме Вариньона имеем

$$M_O(\vec{R}^*) = M_O(\vec{P}_1) + M_O(\vec{P}_2) + M_O(\vec{P}_3) + M_O(\vec{P}_4) + M_O(\vec{N}_A) + M_O(\vec{N}_B)$$

Так как $\vec{R}^* = 0$, то и $M(\vec{R}^*) = 0$, следовательно

$$M_O(\vec{P}_1) + M_O(\vec{P}_2) + M_O(\vec{P}_3) + M_O(\vec{P}_4) + M_O(\vec{N}_A) + M_O(\vec{N}_B) = 0.$$

Следуя условиям, приведенным на рис.5.2.1, считаем заданными все геометрические параметры, указанные на рисунке. Вычисляем сумму моментов сил:

$$N_A \cdot Y_A + N_B \cdot Y_B - P_1 \cdot OC_1 - P_2 \cdot OC_2 - P_3 \cdot OC_3 - P_4 \cdot OC_4 = 0 \quad (5.3.2)$$

Решая систему уравнений (5.3.1) и (5.3.2), определяем численные значения реакций N_A и N_B.

Таким образом, условиями равновесия плоской системы параллельных сил является система двух алгебраических уравнений. Это сумма проекций сил на координатную ось, и сумма моментов сил относительно произвольно выбранной точки плоскости YOZ:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kZ} = 0 \ , \ \sum_{k=1}^{n} M_O(F_{kZ}) = 0 \ . \qquad (5.3.3)$$

Здесь F_{kZ} - проекции всех активных сил и всех реакций связей, действующих на твердое тело.

5.4 Пара сил. Момент пары сил.

Парой сил называется система двух параллельных сил $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_2$, направленных в разные стороны, не лежащих на одной прямой и равных по модулю (рис. 5.4.1а). То есть должны выполняться условия сил $\vec{P}_1 = -\vec{P}_2$.

Расстояние между линиями действия этих сил называется *плечом пары сил* – это перпендикуляр к линиям действия сил. Так как сила является скользящим вектором, то пару сил можно изображать, как показано на рис.5.4.1б.

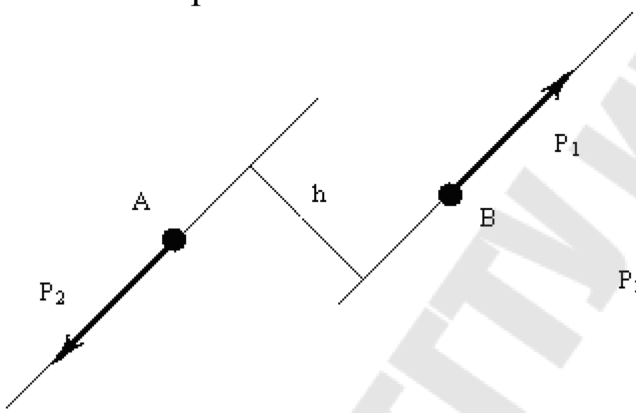


Рис.5.4.1а

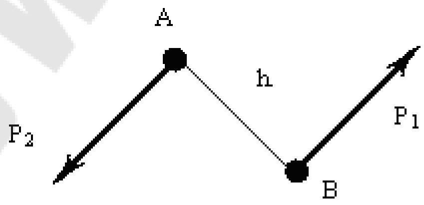


Рис.5.4.1б

Плоскость в которой лежат силы $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_2$, называются *плоскостью действия пары сил*.

Мера механического действия пары сил, равная сумме моментов этих сил относительно любого центра, называется моментом пары сил

Вычислим моменты сил $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_2$, относительно точки O и сложим их (рис. 5.4.2):

$$M_O(\vec{P}_1) = -P_1 \cdot b \ , M_O(P_2) = P_2 \cdot d \ , \ d = h + b \ , \ M_O(P_2) = P_2 \cdot (h+b) \ ,$$

$$M(\vec{P}_1, \vec{P}_2) = M_O(\vec{P}_1) + M_O(\vec{P}_2) \ , \ M(\vec{P}_1, \vec{P}_2) = -P_1 \cdot b + P_2 \cdot (h+b) \ .$$

Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

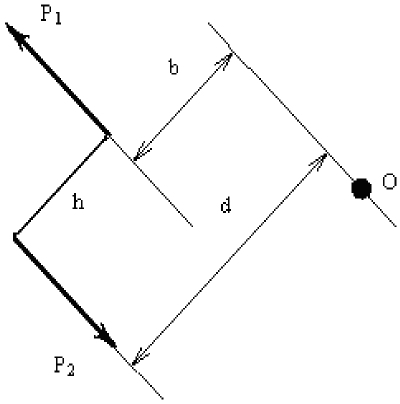


Рис.5.4.2

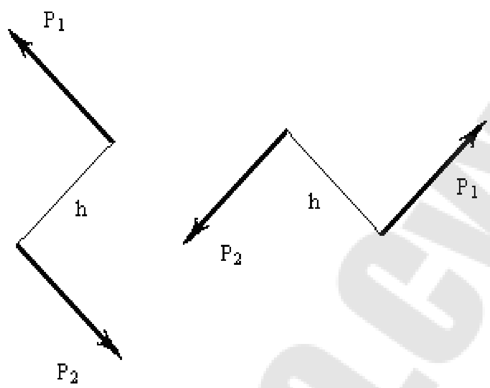


Рис.5.4.3

Так модули сил $P_1=P_2$, то:

$$M(\vec{P}_1,\vec{P}_2) = P_2 \cdot h \text{, или } M(\vec{P}_1,\vec{P}_2) = P_1 \cdot h .$$

Пару сил можно как угодно переносить в плоскости её действия (рис.5.4.3), так как момент пары сил не зависит от положения точки *O*.

Момент пары сил является векторной величиной. Вектор момента пары сил перпендикулярен её плоскости действия и направлен в ту сторону, откуда вращательный эффект наблюдается против часовой стрелки (рис. 5.4.4).

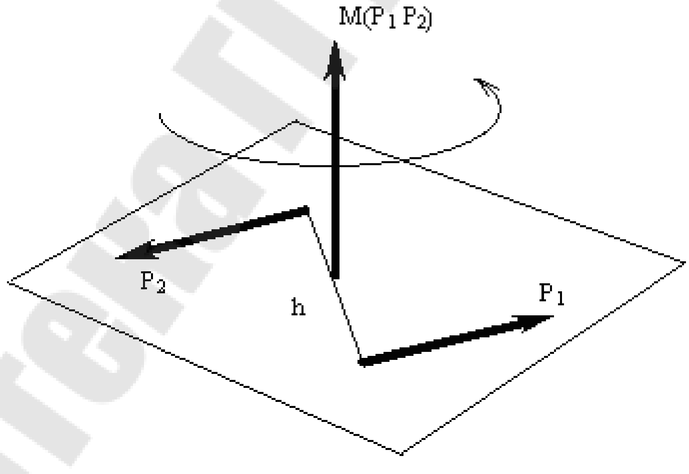


Рис.5.4.4

В этом случае момент пары является положительным. Момент пары сил — это свободный вектор, его можно перемещать в пространстве параллельно самому себе.

Пара сил полностью характеризуется своим моментом. Пару сил можно переносить элементарными операциями в любую плоскость,

Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

параллельную плоскости пары; изменять величины сил пары обратно пропорционально плечам пары.

Пары сил называют эквивалентными, если они имеют различную величину плеча пары различные значения сил, но оказывают одинаковое действие на твердое тело (рис.5.4.5).

Моменты эквивалентных пар равны, $M = P_1 \cdot h = Q \cdot d$, поэтому на рисунках, изображающих твердое тело под действием пар сил, возможны два типа обозначений (рис. 5.4.6).

Несколько пар, лежащих в одной плоскости, можно заменить одной результирующей парой, момент которой равен алгебраической сумме моментов составляющих пар.

Например, действующие на консольную балку моменты можно сложить (рис.5.4.6):

$$M^* = M_1 + M_2.$$

В общем случае равнодействующая пары сил вычисляется по формуле

$$M^* = \sum_{k=1}^{n} M_k$$

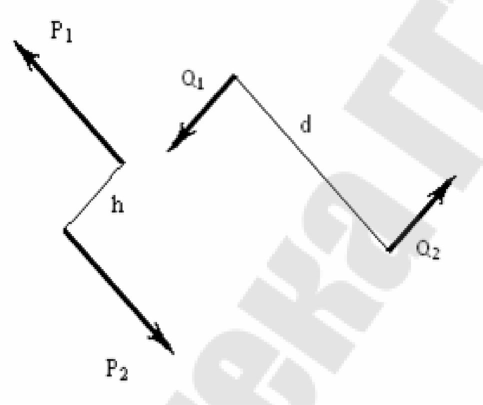


Рис.5.4.5

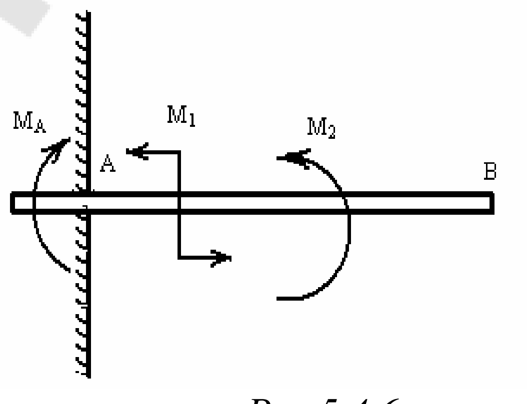


Рис.5.4.6

6. ПЛОСКАЯ СИСТЕМА ПРОИЗВОЛЬНО РАСПОЛОЖЕННЫХ СИЛ

Система сил, линии действия которых лежат в одной плоскости, не параллельны и не пересекаются в одной точке называется произвольной плоской системой сил.

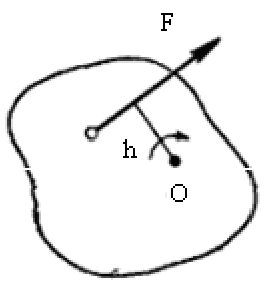
Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

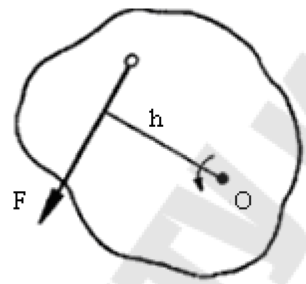
6.1. Понятие момента силы относительно точки

Моментом силы $\vec{F}$ относительно данной точки O называется произведение модуля силы на её плечо h , то есть на длину перпендикуляра , опущенного из точки O на линию действия этой силы (рис. 6.1.1а). Если сила $\vec{F}$ стремится вращать тело вокруг данной точки в направлении против часовой стрелки, то будем считать такой момент силы положительным, в противном случае - отрицательным (рис. 6.1.1б).

Следовательно, $M_O(\vec{F}) = F \cdot h.$ или $M_O(\vec{F}) = -F \cdot h..$

Если линия действия силы $\vec{F}$ проходит через точку О (рис. 6.1.1в), то момент силы $\vec{F}$ относительно этой точки равен нулю, так как $h = 0$





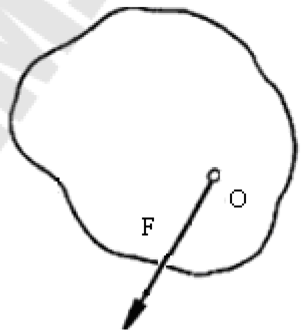


Рис.6.1.1а *Рис.6.1.1б* *Рис.6.1.1в*

Из школьной физики знаем, что понятие момента силы связано с понятием рычага. Рычагом в широком смысле называется твердое тело, вращающееся около неподвижной оса и находящееся под действием сил, лежащих в плоскости, перпендикулярной к этой оси. Точка пересечения оси рычага с плоскостью действия сил называется точкой опоры.

Для равновесия рычага необходимо и достаточно, чтобы равнялась нулю алгебраическая сумма моментов всех приложенных к рычагу сил относительно точки его опоры.

Для сил, изображенных на рис. 6.1.2 плечом силы $\vec{F}$ является расстояние h_2, а плечом силы $\vec{Q}$ - расстояние h_1.

Условия равновесия рычага OA записываются как равенство моментов $MM_O(\vec{F}) = M_O(\vec{Q})$.

Здесь:

$M\ M_O(\vec{F}) = F \cdot h_2$ - Опрокидывающий момент;

Библиотека ГГТУ им.П.О.Сухого

$M_O(\vec{Q}) = Q \cdot h_1$ - удерживающий момент.

Величина этих моментов зависит от угла поворота тачки, так как $h_1 = OB \cdot \cos\alpha$ и $h_2 = OA \cdot \cos\alpha$.

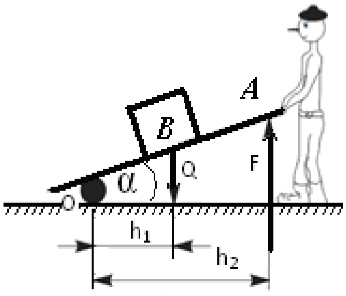


Рис.6.1.2

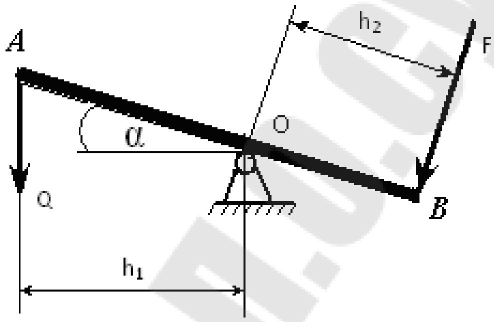


Рис.6.1.3

Приведем другой пример школьного курса физики. На рис 6.1.3 изображена модель рычажных весов, находящихся в равновесии под действием сил $\vec{F}$ и $\vec{Q}$ в положении, указанном на рисунке.

Здесь также $M_O(\vec{F}) = M_O(\vec{Q})$, однако $h_1 = OA \cdot \cos\alpha$, а $h_2 = OB$.

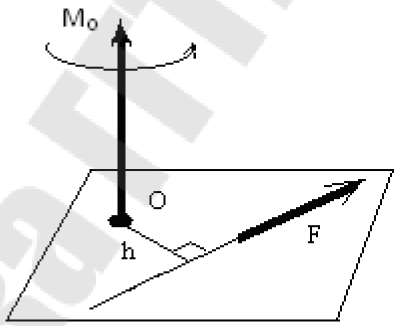


Рис.6.1.4

Момент силы, как и момент пары сил, является векторной величиной (рис. 6.1.4) и измеряется в ньютонометрах (*Нм*). В отличие от момента пары сил величина (модуль) и направление момента силы зависят от положения точки, относительно которой определяется момент.

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

6.2. Приведение силы к данной точке

Пусть линия действия силы $\vec{F}$, приложенной к телу в точке A, находится на расстоянии d от произвольной точки O, которую примем за центр приведения (рис. 6.2.1а).

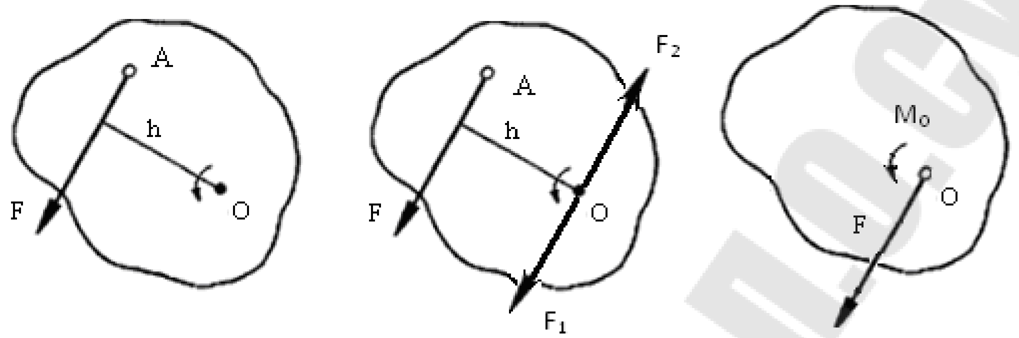


Рис.6.2.1а *Рис.6.2.1б* *Рис.6.2.1в*

Приложим в точке O две противоположно направленные силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, параллельные данной силе $\vec{F}$ и равные ей по модулю. Так как силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, взаимно уравновешиваются, то от их присоединения состояние абсолютно твёрдого тела ни изменится, то есть, полученная система трех сил $\vec{F}$,$\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, эквивалентна одной данной силе $\vec{F}$,(рис. 6.2.1б).

Силы $\vec{F}$ и $\vec{F}_2$ образуют пару. Момент этой пары равен $M(\vec{F},\vec{F}_2) = F \cdot d$. Так как $F \cdot d = M_o(\vec{F})$, то момент пары $(\vec{F},\vec{F}_2)$ равен моменту заданной силы $\vec{F}$ относительно точки приведения О. Сила $\vec{F}_1$ может быть рассматриваема при этом как сила $\vec{F}$, перенесенная параллельно самой себе в точку O (рис. 6.2.1в).

Следовательно, всякую силу можно переносить параллельно самой себе в любую точку тела, присоединяя при этом пару, момент которой равен моменту переносимой силы относительно той точки, в которую переносится сила (теорема Пуансо).

6.3 Приведение плоской системы сил к одному центру. Главный вектор и главный момент

Пусть на твердое тело действует система нескольких, например четырех, сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ и $\vec{F}_4$ расположенных как угодно на плоскости (рис. 6.3.1).

Библиотека БГТУ им. П.О. Сухого

В плоскости действия сил выберем произвольную точку *O*, которую назовем центром приведения. Пользуясь теоремой Пуансо, поочередно приведем к ней все данные силы. В результате приведения получается система сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2^*$, $\vec{F}_3^*$ и $\vec{F}_4^*$, приложенных в этой точке, и система пар сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_1^*)$, $(\vec{F}_2, \vec{F}_2^*)$, $(\vec{F}_3, \vec{F}_3^*)$ и $(\vec{F}_4, \vec{F}_4^*)$.

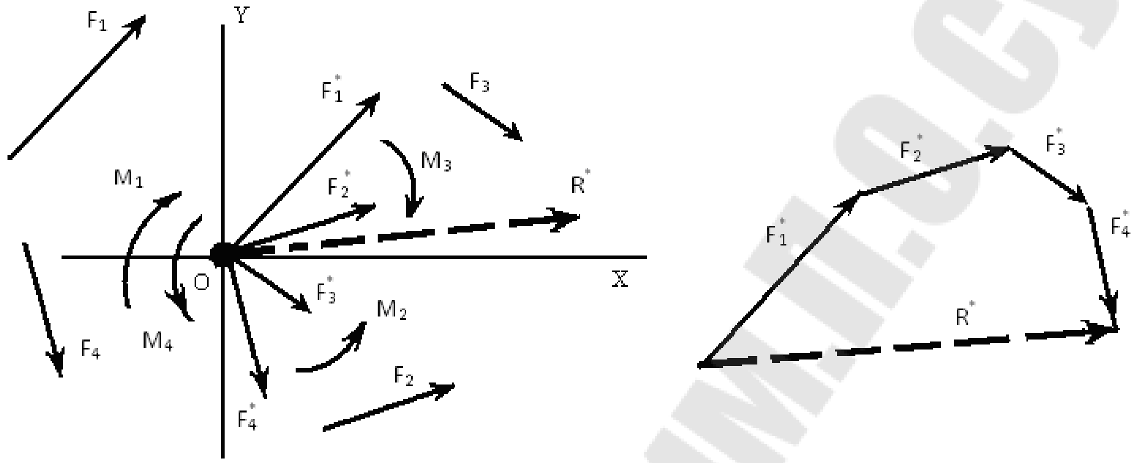


Рис.6.3.1

Силы $\vec{F}_1^*$, $\vec{F}_2^*$, $\vec{F}_3^*$, и $\vec{F}_4^*$ образуют систему сходящихся сил, равнодействующая которой определяется по правилу силового многоугольника $\vec{R}^* = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_к^*$. Так как силы $\vec{F}_1^*, \vec{F}_2^*, \vec{F}_3^*, \vec{F}_4^*$ геометрически равны данным силам $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$, то

$$\vec{R}^* = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k$$

Вектор $\vec{R}^*$, равный геометрической сумме всех сил системы, называется *главным вектором* этой системы.

Модуль и направление главного вектора можно найти по известным формулам для равнодействующей системы сходящихся сил.

Поскольку, в каждой паре сил линия действия сил $\vec{F}_к^*$ проходят через центр приведения, то очевидно, что для каждой пары сил

$$M(\vec{F}_k, \vec{F}_k^*) = M_O(\vec{F}_k).$$

Если сложить моменты всех пар, то получим

$$\sum_{\kappa=1}^{4} M(\vec{F}_k, \vec{F}_k^*) = \sum_{\kappa=1}^{4} M_O(\vec{F}_k), \qquad \text{или} \quad M_O^* = \sum_{\kappa=1}^{4} M_O(\vec{F}_k).$$

Полученная сумма моментов относительно точки O системы сил, расположенных произвольно на плоскости, называется *главным моментом* этой системы сил.

Вектор главного момента $\vec{M}_O^*$ перпендикулярен плоскости, в которой определен главный вектор системы (рис. 6.3.2).

Таким образом, плоскую систему сил можно заменить главным вектором $\vec{R}^*$, приложенным в центре приведения O, и главным моментом $\vec{M}_O^*$.

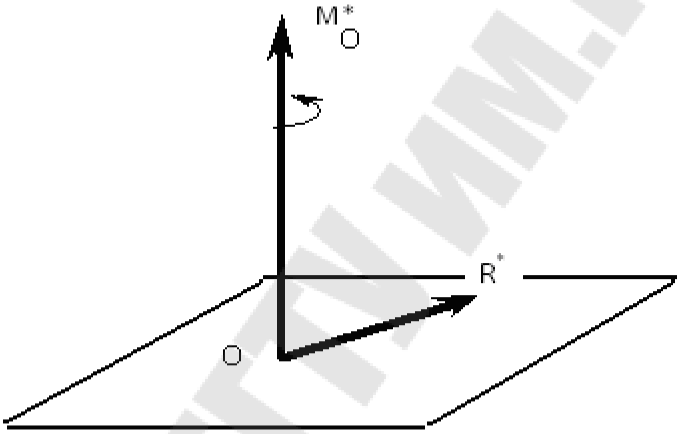


Рис.6.3.2

При изменении положения центра приведения, главный вектор сохраняет свою величину и направление, главный же момент изменяется, но таким образом, чтобы скалярное произведение $\vec{M}_O^* \cdot \vec{R}_O^*$ сохраняло постоянное численное значение для всех точек приведения. В случае плоской системы сил $\vec{M}_O^* \cdot \vec{R}_O^* = 0$, так как $\vec{M}_O^* \perp \vec{R}_O^*$.

6.4. Условия равновесия плоской системы сил

Предположим, что для заданной плоской системы сил главный вектор $\vec{R}^*$ и главный момент $\vec{M}_O^*$ равны нулю, то есть

$$\vec{R}_O^* = 0 \;\text{ и }\; \vec{M}_O^* = 0.$$

Библиотека ГГТУ им.П.О.Сухого

Следовательно, геометрическая сумма всех сил $\vec{F}_1^*, \vec{F}_2^*, \vec{F}_3^*, \vec{F}_4^*$, приложенных в центре приведения, равна нулю, поэтому согласно условию равновесия сходящихся сил силы эти взаимно уравновешиваются. Аналогично, алгебраическая сумма моментов пар сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_1^*)$, $(\vec{F}_2, \vec{F}_2^*)$, $(\vec{F}_3, \vec{F}_3^*)$ и $(\vec{F}_4, \vec{F}_4^*)$, также равна нулю, и потому эти пары также взаимно уравновешиваются. Отсюда ясно, что для равновесия плоской системы сил достаточно соблюдения двух уравнений, записанных в векторной форме:

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k = 0, \ \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_O(\vec{F}_k) = 0$$

Векторные уравнения заменим алгебраическими уравнениями проекций. Для плоской системы сил, заданной в плоскости *XOY*, получаем три уравнения равновесия:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kX} = 0, \ \sum_{k=1}^{n} F_{kY} = 0, \ \sum_{k=1}^{n} M_O(\vec{F}_k) = 0.$$

Для равновесия плоской системы произвольно расположенных сил необходимо и достаточно, чтобы порознь равнялись нулю сумма проекций всех сил на каждую из двух любым образом выбранных координатных осей, лежащих в плоскости действия сил, и сумма моментов всех сил относительно любой точки той же плоскости.

Нужно заметить, что вовсе не обязательно каждую задачу решать при помощи двух уравнений проекций и одного уравнения моментов. Уравнения равновесия плоской системы сил могут быть выражены и в иной форме, а именно:

-для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы порознь равнялись нулю суммы моментов всех сил относительно каждой из трех, произвольно выбранных, но не лежащих на одной прямой точек плоскости.

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{M}_A(\vec{F}_k) = 0, \ \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_B(\vec{F}_k) = 0, \ \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_C(\vec{F}_k) = 0;$$

-для равновесия системы сил, произвольно расположенных на плоскости, необходимо и достаточно, чтобы равна нулю сумма проекций всех сил на одну какую-либо ось, например ось *X*, и суммы

Библиотека БГУИР / ГГТУ им. П.О. Сухого

моментов всех сил относительно произвольных двух точек плоскости, не лежащих на прямой, перпендикулярной к взятой оси

$$\sum_{k=1}^{n}\vec{M}_A(\vec{F}_k)=0,\ \sum_{k=1}^{n}\vec{M}_B(\vec{F}_k)=0,\ \sum_{k=1}^{n}F_{kX}=0.$$

6.5. Статически определенные и статически неопределенные задачи

Установленные для произвольной плоской системы сил различные формы уравнений равновесия позволяют решать систему алгебраических уравнений, в которых число неизвестных не больше трех. Например, в уравнениях равновесия балки AB , изображенной на рис.6.5.1 содержатся неизвестные R_{AX} ,R_{AY} и R_B . Такие задачи называются статически определенными.

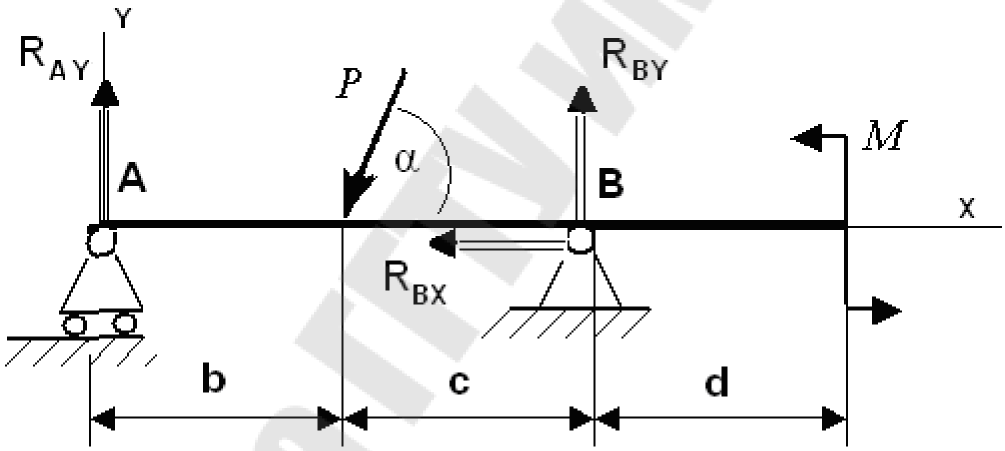


Рис.6.5.1

Если число неизвестных величин превышает возможное число уравнений равновесия – задачи статически неопределимые.

На рис 6.5.2 показана балка, закрепленная в двух неподвижных шарнирах с неизвестными четырьмя реакциями R_{AX} , R_{AY} и R_{BX} , R_{BY}.

Балки называются статически определимыми, если связи (опоры, шарниры) дают число неизвестных реакций, не превышающее числа уравнений равновесия. Балки, для определения реакций которых, уравнений равновесия статики недостаточно, называются статически неопределимыми балками.

В статике твердого тела часто приходится рассматривать равновесие системы материальных тел, то есть тел взаимодействующих друг с другом. Такие системы тел называются составными конструкциями.

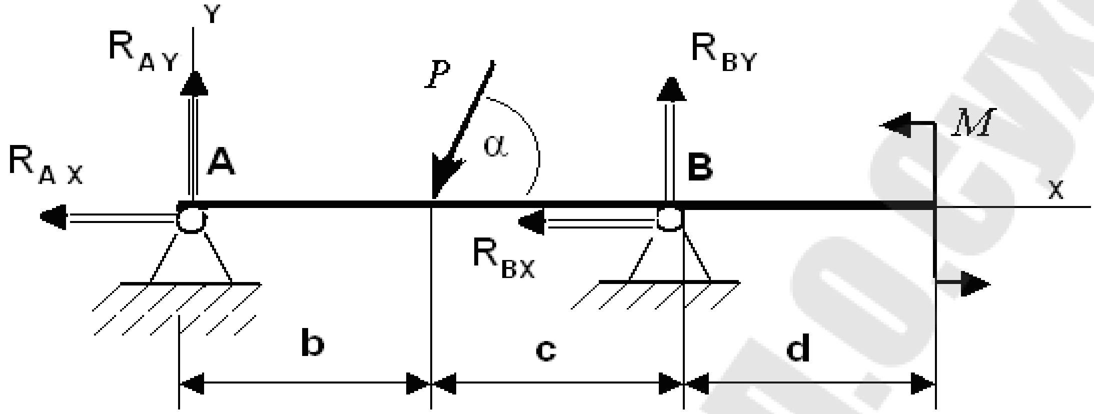


Рис.6.5.2

Силы взаимодействия звеньев такой конструкции являются внутренними реакциями системы и их сумма по третьему закону Ньютона равна нулю, то есть эти реакции не включаются в уравнения равновесия всей конструкции. Обычно этих уравнений не хватает для определения неизвестных величин, то есть задача статически неопределима и для решения необходимы дополнительные уравнения. Эти уравнения можно получить, рассматривая равновесие каждого звена в отдельности. В этом случае, неучтенные внутренние реакции становятся внешними и их включают в уравнения равновесия звеньев (рис. 6.5.3а - рис.6.5.3в).

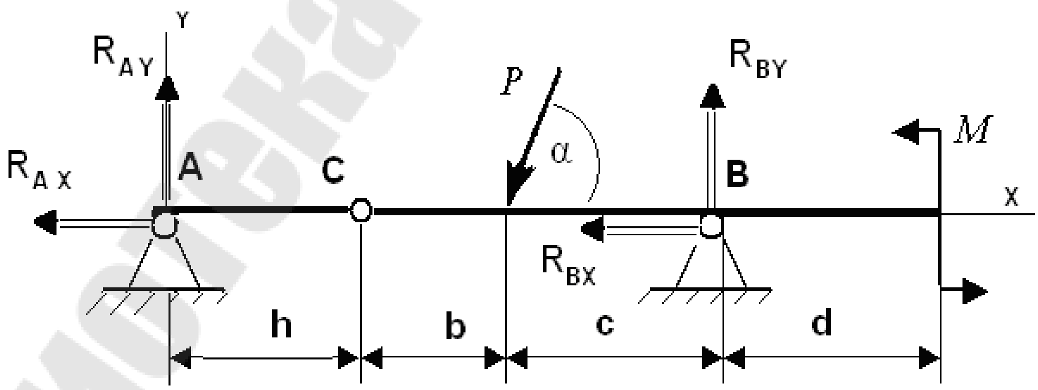


Рис.6.5.3а

Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

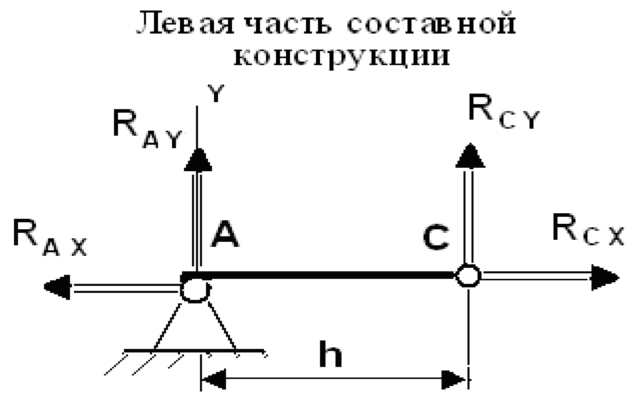


Рис.6.5.3б

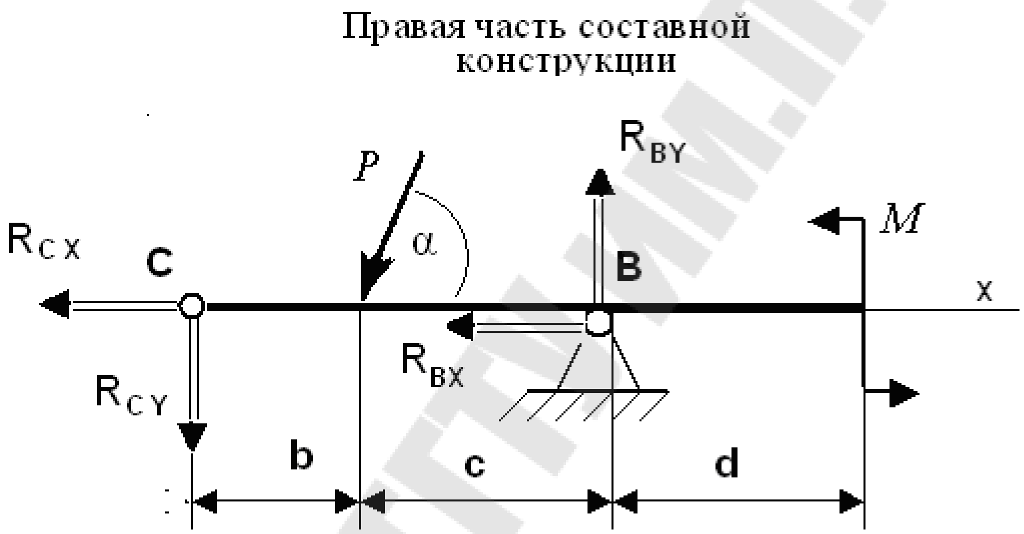


Рис.6.5.3в

6.6 Методика решения задач о равновесии плоской системы сил

1. В решениях использовать одну из форм условий равновесия:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kX} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kY} = 0, \quad \text{- 1-я форма}$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_{kO} = 0.$$

Библиотека ГГТУ им.П.О.Сухого

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kX} = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} M_{kA} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_{kA} = 0, \text{ - 2-я форма} \qquad \sum_{k=1}^{n} M_{kB} = 0, \text{ - 3-я форма}$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_{kB} = 0. \qquad \sum_{k=1}^{n} M_{kC} = 0.$$

2. В дополнение к сказанному можно лишь рекомендовать за центр моментов выбирать точку, лежащую на линии действия одной из неизвестных сил (еще лучше точку пересечения линий действия двух неизвестных сил, если только положение этой точки легко определяется). Момент этой силы относительно выбранного центра будет равен нулю (вследствие равенства нулю ее плеча), и эта неизвестная сила не будет входить в уравнение моментов.

3. Желательно применять теорему Вариньона о моменте равнодействующей - это упрощает вычисления, поскольку все составляющие сил принимаются параллельными координатным осям.

7. ДВА ОСНОВНЫХ ВИДА ТРЕНИЯ

Трением называется сопротивление, возникающее при перемещении одного тела по поверхности другого.

В зависимости от характера этого перемещения (от того, скользит ли тело или катится) различают два рода трения: трение скольжения - трение первого рода, и трение качения - трение второго рода.

Трение является одним из самых распространенных явлений природы, однако вследствие трудности оценки многочисленных факторов, на него влияющих, точных общих законов трения до сих пор не существует. На практике в тех случаях, когда не требуется большой точности, все еще продолжают пользоваться эмпирическими законами, установленными в конце XVIII века французским ученым Кулоном, хотя они и представляют собой лишь грубое приближение к действительности.

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

7.1. Трение скольжения

Трением скольжения называется сопротивление скольжению одного тела по поверхности другого.

Сила трения, проявляющаяся при относительном покое тела, называется трением покоя; сила трения, действующая при скольжении тела, называется трением скольжения.

На основании многочисленных опытов Кулон установил следующее (приближенные) законы.

1. Сила трения при прочих равных условиях не зависит от размеров трущихся поверхностей.

2. Как и всякая реакция, величина силы трения покоя зависит от приложенных сил и до некоторого предела всегда такова, что предотвращает скольжение дел друг по другу (сила трения покоя).

3. Максимальная величина силы трения прямо пропорциональна нормальной реакции одного тела на другое (рис. 7.1.1).

$$F_{mp} = f_{mp} \cdot N$$

4. Коэффициент пропорциональности f_{mp} (коэффициент трения) зависит от материала и состояния трущихся поверхностей.

5. Сила трения при движении меньше силы трения покоя.

Наибольший угол φ, на который вследствие трения отклоняется от нормали реакция R шероховатой поверхности, называется углом трения.

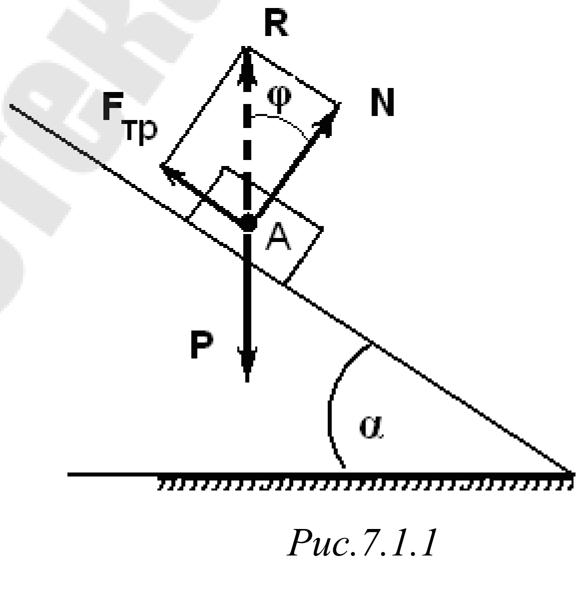


Рис.7.1.1

Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

Из рис. 7.1.1 имеем: $tg\varphi = \dfrac{F_{тр}}{N}$, следовательно, коэффициент трения скольжения равен тангенсу угла трения $f_{тр} = tg\varphi$.

7.2. Трение качения

Трением качения называется сопротивление перекатыванию одного тела по поверхности другого.

Сопротивление это возникает главным образом оттого, что как само катящееся тело, так и тело, по которому оно катится, не являются абсолютно твердыми и потому всегда деформируются в зоне их соприкосновения (рис.7.2.1).

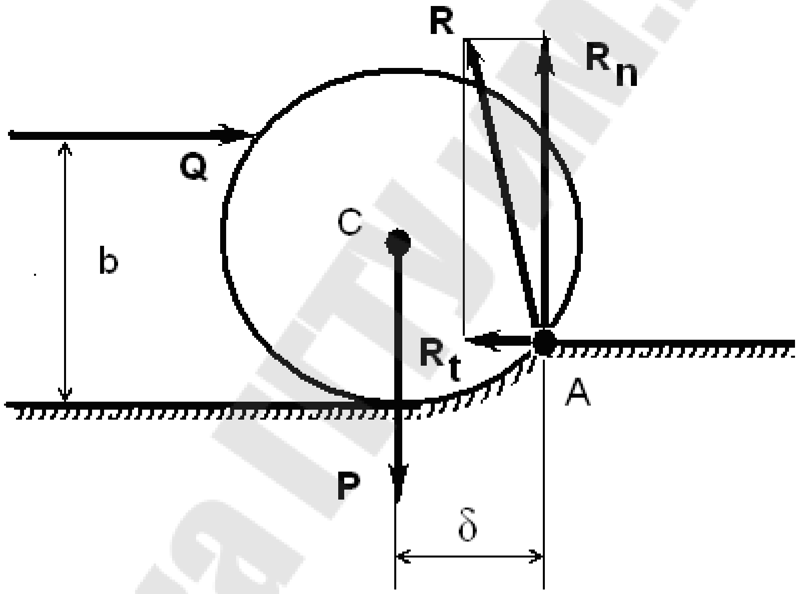


Рис.7.2.1

Решается задача на опрокидывание.

Каток опрокидывается относительно точки A моментом пары сил $(\vec{Q}, \vec{R}_t)$, который приближенно вычисляется как

$$M_{опр} = Q \cdot b\,.$$

Удерживающий момент или **момент трения качения** создается парой сил $(\vec{P}, \vec{R}_n)$, который вычисляется как

$$M_{тр} = R_n \cdot \delta\,.$$

Библиотека БГТУ им. П.О. Сухого

Здесь δ- коэффициент трения качения, имеет размерность длины, то есть, $[\delta]=м$.

Момент трения качения, как показывают опыты, не может превзойти некоторого значения, определенного для данной пары соприкасающихся поверхностей и величины нормального давления R_n катка на плоскость.

8. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Рекомендуемый список учебников, имеющихся в фонде библиотеки ГГТУ:

1. Аркуша А. И. Руководство к решению задач по теоретической механике: Учеб. пособие для средних проф. учеб. заведений. -4-е изд., испр. -М.: Высш. шк., 2000. -336с.

2. Бать М. И. и др. Теоретическая механика в примерах и задачах: [Учеб. пособие для вузов]. Т. 1: Статика и кинематика / Бать М. И., Джанелидзе Г. Ю., Кельзон А. С. -9-е изд., перераб. -М.: Наука, 1990. -670с.

3. Бутенин Н. В. и др. Курс теоретической механики: Учебник для студ. втузов. Т. 1: Статика и кинематика / Бутенин Н. В., Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. -4-е изд., испр. -М.: Наука, 1985. -239с.: ил.*

4. Воронков И. М. Курс теоретической механики: [Учебник для студ. втузов]. -12-е изд., стер. -М.: Наука, 1965. -596с.

5. Гернет М. М. Курс теоретической механики: Учебник для вузов. -5-е изд., испр. -М.: Высш. шк., 1987. -344с.: ил.*

6. Голубев Ю. Ф. Основы теоретической механики: Учебник для ст-ов втузов. -М.: Изд-во МГУ, 1992. -526с. -Библиогр.: с. 524-525.

7. Никитин Н. Н. Курс теоретической механики: Учебник для ст-ов машиностроит. и приборостроит. спец. вузов. -5-е изд., перераб. и доп. -М.: Высшая школа, 1990. -607 с.: ил.

8. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: Учеб. пособие для втузов / Под ред. А. А. Яблонского. -4-е изд., перераб. и доп. -М.: Высш. шк., 1985. 367с.: ил. -Библиогр.: с. 363.*

9. Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики: Учеб. для втузов / С. М. Тарг. -10-е изд., перераб. и доп.. -М.: Высш. шк., 1986. -415с.:

10. Яблонский А. А., Никифорова В. М. Курс теоретической механики. Часть 1. Статика. Кинематика: Учебник для техн. вузов.

Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

Изд. 6-е, испр. -М.: Высш. шк., 1984. -343 с.

11. Теоретическая механика. Программа, методические указания и контрольные задания для студентов заочных специальностей. Иванов-Франковск.; ИФИИГ, 1990.

Рекомендуемый список методических пособий по статике, имеющихся в фонде библиотеки ГГТУ:

1. Методические указания и РГР по теме “Определение реакций опор составных конструкций с применением ЭВМ“ курса “Теоретическая механика” для студентов машиностроительных специальностей. / Старовойтова Т. А., -Гомель, ГПИ, 1981. -18 с

2. Методические указания к практическим занятиям и лекциям по разделу "Статика" курса "Теоретическая механика" для студентов специальностей 0501, 0502, 0503, 0540, 0566. / Мацур М. А., -Гомель, ГПИ, 1982.

3. Методические указания к решению задач на практических занятиях по курсу "Теоретическая механика" для студентов специальностей 0501, 0502, 0503, 0566. / Мацур М. А., -Гомель, ГПИ, 1983. -41 с.

4. Методические указания к самостоятельной работе по теме "Статика" курса "Теоретическая механика" для студентов машиностроительных специальностей. / Русан С. И., -Гомель, ГПИ, 1991. -43 с.

5. Практикум по курсу "Теоретическая механика" для студентов машиностроительных специальностей высших технических учебных заведений. Ч. 1: Преобразование пространственной системы сил / Шабловский О. Н., Кроль Д. Г., Каф. "Техническая механика". -Гомель: ГГТУ, 1998. -22 с.

6. Теоретическая механика: пособие по одноимённому курсу для студентов инж.-техн. Специальностей заочной формы обучения/Андреев С.Ф, Каф. "Техническая механика". -Гомель: ГГТУ,, 2006.-44 с.

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

СОДЕРЖАНИЕ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Курс лекций
по одноименной дисциплине
для студентов инженерно-технических специальностей
заочной формы обучения
В трех частях
Часть 1
Статика

Составитель: **Андреев** Сергей Филиппович

Подписано к размещению в электронную библиотеку
ГГТУ им. П. О. Сухого в качестве электронного
учебно-методического документа 23.06.09.
Рег. № 43Е.
E-mail: ic@gstu.gomel.by
http://www.gstu.gomel.by

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого