§1. Дифференциальные уравнения. Основные понятия.

Определение 1. **Дифференциальным уравнением называется уравнение вида** $\boldsymbol{F(x,y,y',\dots,y^{(n)})=0}$ **или** $\boldsymbol{F\left(x,y,\frac{dy}{dx},\dots,\frac{d^{(n)}y}{dx^{(n)}}\right)=0}$

Определение 2. **Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной, входящей в уравнение.**

Пример 1. $y''+xy'+4x=0$ – дифференциальное уравнение второго порядка.

Определение 3. **Решением или интегралом дифференциального уравнения называется функция $y(x)$, которая, будучи подставлена в дифференциальное уравнение, обращает его в тождество.**

Пример 2. Рассмотрим уравнение $y'x-x^2-y=0$.
Его решениями будут все функции вида $y=x^2+Cx$, где C – любое постоянное. Действительно, дифференцируя функцию $y=x^2+Cx$, находим:

$$y'=2x+C$$

Подставляя выражения y и y' в исходное уравнение, получаем тождество

$$(2x+C)x-x^2-x^2-Cx=0$$
$$2x^2+Cx-x^2-x^2-Cx=0$$
$$0=0$$

§2. Дифференциальные уравнения первого порядка.

Дифференциальные уравнения первого порядка имеют вид $\boldsymbol{F(x,y,y')=0}$.
Если это уравнение можно разрешить относительно y', то его можно записать в виде $\boldsymbol{y'=f(x,y)}$ – дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно первой производной.
Для таких уравнений справедлива теорема о единственности решения дифференциального уравнения.

Теорема 1. Если в дифференциальном уравнении $y'=f(x,y)$ функция $f(x,y)$ и её частная производная $\frac{df}{dy}$ непрерывны в некоторой области D на плоскости xOy, содержащей точку $M_0(x_0,y_0)$, то существует единственное решение этого дифференциального уравнения $y=\varphi(x)$, удовлетворяющее начальным условиям $\begin{cases}x=x_0\\ y=y_0\end{cases}$.

Определение 1. **Общим решением дифференциального уравнения $y'=f(x,y)$ называется функция $y=\varphi(x,C)$, для которой справедливо:**

1. **Она удовлетворяет дифференциальному уравнению $y'=f(x,y)$.**
2. **Каковы бы ни были начальные условия, всегда найдется такое $C=C_0$, что функция $y=\varphi(x,C_0)$ удовлетворяет начальным условиям.**

Замечание 1. Если константа C определена, то говорим, что имеем частное решение, соответствующее начальным условиям.

§3. Уравнение с разделенными и разделяющимися переменными.

Определение 1. **Дифференциальное уравнение вида $N(x)dx+M(y)dy=0$ называется дифференциальным уравнением с разделенными переменными.**

Преобразуем данное уравнение:

$$M(y)dy=-N(x)dx$$

Поделим обе части уравнения на dx:

$$\frac{M(y)dy}{dx}=-N(x)$$

Поделим обе части уравнения на $M(y)$:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{N(x)}{M(y)}$$

или

$$y'=f(x,y)$$

Дифференциальное уравнение с разделенными переменными решается интегрированием обеих частей уравнения:

$$\int M(y)dy=-\int N(x)dx$$

Пример 1. Решить дифференциальное уравнение $y'=-\frac{x}{y}$.
Решение. Приведем данное уравнение к виду:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$

Разделим переменные:

$$ydy=-xdx$$

Возьмем интеграл от обеих частей:

$$\int ydy=-\int xdx$$
$$\frac{y^2}{2}=-\frac{x^2}{2}+C$$

Умножим обе части уравнения на 2:

$$y^2=-x^2+C$$

Извлечем корень из обеих частей уравнения:

$$y=\sqrt{C-x^2}$$

Выполним проверку. Для этого найдем производную от полученного решения:

$$y'=-\frac{2x}{2\sqrt{C-x^2}}$$

Подставляя выражения y и y' в исходное уравнение, получаем тождество

$$-\frac{x}{\sqrt{C-x^2}}=-\frac{x}{\sqrt{C-x^2}}$$

т.е. решение было найдено верно.

Определение 2. **Дифференциальное уравнение вида $M_1(x)N_1(y)dx+M_2(x)N_2(y)dy=0$ называется дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными.**

Преобразуем данное уравнение, сведя его к уравнению с разделенными переменными:

$$M_2(x)N_2(y)dy=-M_1(x)N_1(y)dx$$
$$\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy=-\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx$$

Возьмем интеграл от обеих частей уравнения:

$$\int\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy=-\int\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx$$

Пример 2. Решить дифференциальное уравнение $\operatorname{tg}x\,\sin^2y\,dx+\operatorname{ctg}y\cos^2x\,dy=0$.
Решение. Приведем данное уравнение к виду:

$$\operatorname{ctg}y\cos^2x\,dy=-\operatorname{tg}x\,\sin^2y\,dx$$
$$-\frac{\operatorname{ctg}y}{\sin^2y}dy=\frac{\operatorname{tg}x}{\cos^2x}dx$$

Возьмем интеграл от обеих частей:

$$\int-\frac{\operatorname{ctg}y}{\sin^2y}dy=\int\frac{\operatorname{tg}x}{\cos^2x}dx$$

Поднесем $\cos^2x$ и $-\sin^2y$ под знаки дифференциалов:

$$\int\operatorname{ctg}y\,d\operatorname{ctg}y=\int\operatorname{tg}x\,d\operatorname{tg}x$$
$$\frac{\operatorname{ctg}^2y}{2}=\frac{\operatorname{tg}^2x}{2}+C$$

Умножим обе части уравнения на 2:

$$\operatorname{ctg}^2y=\operatorname{tg}^2x+C$$

§4. Однородные уравнения первого порядка.

Определение 1. **Функция $f(x,y)$ называется однородной функцией n–ого измерения относительно переменных x и y, если для любого λ справедливо тождество**

$$\boldsymbol{f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n f(x,y)}$$

Пример 1. Проверить функцию $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$ на однородность.
Решение. Данная функция является однородной функцией первого порядка, т.к.

$$f(\lambda x,\lambda y)=\sqrt[3]{(\lambda x)^3+(\lambda y)^3}=\sqrt[3]{\lambda^3x^3+\lambda^3y^3}=\lambda\sqrt[3]{x^3+y^3}=\lambda^1f(x,y)$$

Определение 2. **Дифференциальное уравнение первого порядка $y'=f(x,y)$ называется однородным, если функция $f(x,y)$ – однородная функция нулевого измерения.**

Решается данное дифференциальное уравнение сведением его к уравнению с разделяющимися переменными подстановкой $u=\frac{y}{x}$.
Выразим отсюда y:

$$y=ux$$

Найдем производную y':

$$y'=u'x+ux'=u'x+u$$

Подставим выражения y и y' в однородное дифференциальное уравнение:

$$u'x+u=f(x,ux)$$

По условию $f(\lambda x,\lambda y)=f(x,y)$, т.е. функция $f(x,y)=f(x,ux)$ – однородная функция нулевого измерения. Положив $\lambda=\frac{1}{x}$, дифференциальное уравнение примет вид:

$$u'x+u=f(1,u)$$
$$u'x=f(1,u)-u$$

Обозначим $G(u)=f(1,u)-u$, тогда:

$$\frac{du}{dx}x=G(u)$$
$$\boldsymbol{\frac{du}{G(u)}=\frac{dx}{x}}$$

Т.о. получили дифференциальное уравнение с разделенными переменными.

Пример 2. Решить дифференциальное уравнение $y'=\frac{xy}{x^2-y^2}$.
Решение.
Дана функция $y'=f(x,y)$, где $f(x,y)=\frac{xy}{x^2-y^2}$ есть однородная функция нулевого измерения, т.к.
$f(\lambda x,\lambda y)=\frac{\lambda x\lambda y}{(\lambda x)^2-(\lambda y)^2}=\frac{\lambda^2xy}{\lambda^2(x^2-y^2)}=\lambda^0\frac{xy}{x^2-y^2}=f(x,y)$
Выполним подстановку $u=\frac{y}{x}$, тогда:

$$y=ux$$

Найдем производную y':

$$y'=u'x+u$$

Подставим выражения y и y' в исходное дифференциальное уравнение:

$$u'x+u=\frac{x\,ux}{x^2-(ux)^2}$$
$$u'x+u=\frac{x^2\,u}{x^2(1-u^2)}$$
$$u'x=\frac{u}{1-u^2}-u$$
$$\frac{du}{dx}x=\frac{u-u+u^3}{1-u^2}$$
$$\frac{du}{dx}x=\frac{u^3}{1-u^2}$$

Разделяя переменные, будем иметь:

$$\frac{1-u^2}{u^3}du=\frac{dx}{x}$$

Возьмем интеграл от обеих частей:

$$\int\frac{1-u^2}{u^3}du=\int\frac{dx}{x}$$
$$\int\frac{1}{u^3}du-\int\frac{u^2}{u^3}du=\int\frac{dx}{x}$$
$$\int\frac{du}{u^3}-\int\frac{du}{u}=\int\frac{dx}{x}$$

Отсюда находим:

$$-\frac{1}{2u^2}-\ln|u|=\ln|x|+\ln|C|$$
$$\ln|x|+\ln|C|+\ln|u|+\frac{1}{2u^2}=0$$
$$\ln|uxC|+\frac{1}{2u^2}=0$$

Подставляя $u=\frac{y}{x}$, получим общее решение дифференциального уравнения:

$$\ln\left|\frac{y}{x}xC\right|+\frac{1}{2\left(\frac{y}{x}\right)^2}=0$$
$$\ln|yC|=-\frac{x^2}{2y^2}$$

§5. Уравнение, приводящееся к однородному.

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида $y' = \frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}$

Если $c_1 = c_2 = 0$, то данное уравнение является однородным.

Для зануления констант c_1 и c_2, произведем следующую замену переменных:

$$x = x_1 + \alpha$$
$$y = y_1 + \beta$$

Возьмем дифференциал от данных выражений:

$$dx = dx_1$$
$$dy = dy_1$$

Т.о. подставив выражения $x, y, \frac{dy}{dx}$ в исходное уравнение $\frac{dy}{dx} = \frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}$, получим:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{a_1x_1 + a_1\alpha + b_1y_1 + b_1\beta + c_1}{a_2x_1 + a_2\alpha + b_2y_1 + b_2\beta + c_2}$$
$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{a_1x_1 + b_1y_1 + a_1\alpha + b_1\beta + c_1}{a_2x_1 + b_2y_1 + a_2\alpha + b_2\beta + c_2}$$

Подберем такие α и β, чтобы выполнялись равенства:

$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0 \end{cases}$$

Решив систему, найдем такие α и β, при которых исходное уравнение станет однородным. Т.о. получим:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{a_1x_1 + b_1y_1}{a_2x_1 + b_2y_1}$$

Замечание 1. Если система не имеет решения, то применяют подстановку $a_1x_1 + b_1y_1 = z$

Пример 1. Решить дифференциальное уравнение $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y-3}{x-y-1}$

Решение.

Чтобы преобразовать данное уравнение в однородное, делаем замену:

$$x = x_1 + \alpha$$
$$y = y_1 + \beta$$

Возьмем дифференциал от данных выражений:

$$dx = dx_1$$
$$dy = dy_1$$

Подставим выражения $x, y, \frac{dy}{dx}$ в данное дифференциальное уравнение:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1 + y_1 + \alpha + \beta - 3}{x_1 - y_1 + \alpha - \beta - 1}$$

Решаем систему двух уравнений:

$$\begin{cases} \alpha + \beta - 3 = 0 \\ \alpha - \beta - 1 = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 2\alpha = 4 \\ \alpha - \beta - 1 = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

Тогда

$$x = x_1 + 2, \text{откуда } x_1 = x - 2$$
$$y = y_1 + 1, \text{откуда } y_1 = y - 1$$

В результате получаем однородное уравнение

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1 + y_1}{x_1 - y_1}$$

которое решаем подстановкой

$$u = \frac{y_1}{x_1}$$

тогда

$$y_1 = ux_1$$

Найдем производную y_1':

$$y_1' = u'x_1 + u$$

Подставим y_1 и y_1' в полученное однородное дифференциальное уравнение:

$$u'x_1 + u = \frac{x_1 + ux_1}{x_1 - ux_1}$$
$$\frac{du}{dx_1}x_1 = \frac{x_1(1+u)}{x_1(1-u)} - u$$

и получаем уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{du}{dx_1}x_1 = \frac{1 + u - u + u^2}{1 - u}$$

Разделяем переменные:

$$\frac{1-u}{1+u^2}du = \frac{dx_1}{x_1}$$

Возьмем интеграл от обеих частей:

$$\int \frac{1-u}{1+u^2}du = \int \frac{dx_1}{x_1}$$
$$\int \frac{du}{1+u^2} - \int \frac{u}{1+u^2}du = \int \frac{dx_1}{x_1}$$
$$\int \frac{du}{1+u^2} - \frac{1}{2}\int \frac{2u}{1+u^2}du = \int \frac{dx_1}{x_1}$$
$$\int \frac{du}{1+u^2} - \frac{1}{2}\int \frac{d(1+u^2)}{1+u^2} = \int \frac{dx_1}{x_1}$$
$$\operatorname{arctg} u - \frac{1}{2}\ln|1+u^2| = \ln|x_1| + \ln|C|$$
$$\operatorname{arctg} u = \ln\sqrt{1+u^2} + \ln|Cx_1|$$
$$\operatorname{arctg} u = \ln\left|Cx_1\sqrt{1+u^2}\right|$$

Подставляя сюда $\frac{y_1}{x_1}$ вместо u, получим:

$$\operatorname{arctg}\frac{y_1}{x_1} = \ln\left|Cx_1\sqrt{1+\left(\frac{y_1}{x_1}\right)^2}\right|$$
$$\operatorname{arctg}\frac{y_1}{x_1} = \ln\left|C\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\right|$$

Переходя к переменным x и y, окончательно получаем:

$$\operatorname{arctg}\frac{y-1}{x-2} = \ln\left|C\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2}\right|$$

Замечание 1. Аналогично решаются и дифференциальные уравнения вида $y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$

§6. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.

Определение 1. **Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида $y' + P(x)y = Q(x)$, где $P(x)$ и $Q(x)$ – непрерывные функции от переменной x.**

Решается данное уравнение подстановкой $y = uv$, где $u(x), v(x)$ – функции, зависящие от x. Одну из этих функций можно взять произвольной, другая определится на основании линейного дифференциального уравнения.

Дифференцируя обе части равенства, находим:

$$y' = u'v + uv'$$

Подставляя полученные выражения y и y' в линейное дифференциальное уравнение, будем иметь:

$$u'v + uv' + P(x)uv = Q(x)$$

или

$$u'v + u(v' + P(x)v) = Q(x)$$

Выберем функцию v такой, чтобы

$$v' + P(x)v = 0$$
$$\frac{dv}{dx} + P(x)v = 0$$
$$\frac{dv}{dx} = -P(x)v$$

Разделяя переменные в этом дифференциальном уравнении относительно функции v, находим:

$$\frac{dv}{v} = -P(x)dx$$

Интегрируя, получаем

$$\int \frac{dv}{v} = -\int P(x)dx$$

откуда находим $v(x)$. Полученную константу C положим равной нулю, т.к. нам достаточно какого-нибудь одного отличного от нуля решения последнего уравнения.

Подставляя найденное значение $v(x)$ в уравнение $u'v + u(v' + P(x)v) = Q(x)$ и учитывая, что $v' + P(x)v = 0$, получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$u'v(x) = Q(x)$$

или

$$\frac{du}{dx} = \frac{Q(x)}{v(x)}$$
$$du = \frac{Q(x)}{v(x)}dx$$

Возьмем интеграл от обеих частей:

$$\int du = \int \frac{Q(x)}{v(x)}dx$$

откуда находим значение функции $u(x)$.

Пример 1. Решить дифференциальное уравнение $y' - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3$

Решение.

В данном случае $P(x) = -\frac{2}{x+1}$; $Q(x) = (x+1)^3$.

Полагаем $y = uv$, тогда $y' = u'v + uv'$.

Подставляя выражения y и y' в исходное уравнение, будем иметь:

$u'v + uv' - \frac{2}{x+1}uv = (x+1)^3$

$u'v + u\left(v' - \frac{2v}{x+1}\right) = (x+1)^3$

Для определения v решим уравнение

$$v' - \frac{2v}{x+1} = 0$$
$$\frac{dv}{dx} = \frac{2v}{x+1}$$

Разделяем переменные

$$\frac{dv}{v} = \frac{2dx}{x+1}$$

Возьмем интеграл от обеих частей:

$$\int \frac{dv}{v} = 2\int \frac{d(x+1)}{x+1}$$

откуда

$$\ln|v| = 2\ln|x+1| + C$$

Т.к. при любом C выполняется $v' - \frac{2v}{x+1} = 0$, то положим $C = 0$ и получим:

$$\ln|v| = \ln(x+1)^2$$

откуда

$$v = (x+1)^2$$

Подставляя выражение функции v в уравнение $u'v + u\left(v' - \frac{2v}{x+1}\right) = (x+1)^3$ и учитывая, что $v' - \frac{2v}{x+1} = 0$, получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$u'(x+1)^2 = (x+1)^3$$

или

$$\frac{du}{dx} = x + 1$$

Разделяем переменные

$$du = (x+1)dx$$

Возьмем интеграл от обеих частей:

$$\int du = \int (x+1)d(x+1)$$

откуда

$$u = \frac{(x+1)^2}{2} + C$$

Следовательно, общее решение заданного уравнения будет иметь вид:

$y = uv = \left(\frac{(x+1)^2}{2} + C\right)(x+1)^2 = \frac{(x+1)^4}{2} + C(x+1)^2$

§7. Уравнение Бернули.

Определение 1. **Дифференциальное уравнение вида $y' + P(x)y = Q(x)y^n$, называется уравнением Бернулли, где $P(x)$ и $Q(x)$ – непрерывные функции от переменной x.**

Уравнение Бернулли сводится к линейному заменой $z = y^{1-n} = \frac{y}{y^n}$, откуда $y = zy^n$.

Дифференцируя обе части равенства, находим:

$$z' = (1-n)y^{-n}y'$$

Выразим отсюда y':

$$y' = \frac{z'y^n}{1-n}$$

Подставим выражения y и y' в исходное уравнение:

$$\frac{z'y^n}{1-n} + P(x)zy^n = Q(x)y^n$$

Разделим обе части уравнения на y^n:

$$\frac{z'}{1-n} + P(x)z = Q(x)$$

Умножим обе части уравнения на $(1-n)$:

$$z' + (1-n)P(x)z = Q(x)(1-n)$$

Сделав замену $(1-n)P(x) = P_1(x)$, $(1-n)Q(x) = Q_1(x)$, получим линейное дифференциальное уравнение относительно переменной z:

$$z' + P_1(x)z = Q_1(x)$$

Замечание 1. Уравнение Бернулли можно решать заменой $y = uv$.

Пример 1. Решить дифференциальное уравнение $y' + xy = x^3y^3$.

Решение.

Полагаем $y = uv$, тогда $y' = u'v + uv'$.

Подставляя выражения y и y' в исходное уравнение, будем иметь:

$$u'v + uv' + xuv = x^3(uv)^3$$
$$u'v + u(v' + xv) = x^3(uv)^3$$

Для определения v решим уравнение

$$v' + xv = 0$$
$$\frac{dv}{dx} = -xv$$

Разделяем переменные

$$\frac{dv}{v} = -xdx$$

Возьмем интеграл от обеих частей:

$$\int \frac{dv}{v} = -\int xdx$$

откуда

$$\ln|v| = -\frac{x^2}{2} + C$$

Т.к. при любом C выполняется $v' + xv = 0$, то положим $C = 0$ и получим:

$$v = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Подставляя выражение функции v в уравнение $u'v + u(v' + xv) = x^3(uv)^3$ и учитывая, что $v' + xv = 0$, получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$u'e^{-\frac{x^2}{2}} = x^3u^3\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)^3$$

Разделим обе части уравнения на $e^{-\frac{x^2}{2}}$:

$$\frac{du}{dx} = x^3u^3\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)^2$$

Разделяем переменные

$$\frac{du}{u^3} = x^3e^{-x^2}dx$$

Возьмем интеграл от обеих частей:

$$\int \frac{du}{u^3} = \int x^3e^{-x^2}dx$$

Поднесем $2x$ под знак дифференциала:

$$\int \frac{du}{u^3} = \frac{1}{2}\int x^2e^{-x^2}dx^2$$

Введя замену $t = x^2$, получим:

$$\int \frac{du}{u^3} = \frac{1}{2}\int te^{-t}dt$$

Поднесем $-e^{-t}$ под знак дифференциала:

$$-\frac{1}{2u^2} = -\frac{1}{2}\int tde^{-t}$$

Разделим обе части уравнения на $-\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{u^2} = \int tde^{-t}$$

Интегрируя по частям правую часть уравнения, получаем:

$$\frac{1}{u^2} = te^{-t} - \int e^{-t}dt$$
$$\frac{1}{u^2} = te^{-t} + e^{-t} + C$$

Перейдем от переменной t к переменной x^2:

$$\frac{1}{u^2} = x^2e^{-x^2} + e^{-x^2} + C$$
$$u = \frac{1}{\sqrt{x^2e^{-x^2} + e^{-x^2} + C}}$$

Следовательно, общее решение заданного уравнения будет иметь вид:

$$y = uv = \frac{1}{\sqrt{x^2e^{-x^2} + e^{-x^2} + C}}e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{x^2 + 1 + Ce^{x^2}}}e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1 + Ce^{x^2}}}$$

§8. Уравнение в полных дифференциалах.

Пусть дано уравнение, записанное в общей форме $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$. Найдем критерий, когда данное уравнение равно полному дифференциалу $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$.

Предположим, что левая часть уравнения есть полный дифференциал некоторой функции $u(x,y)$, т.е.

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = du$$

т.е. уравнение примет вид $du(x,y) = 0$, откуда $u(x,y) = C$.

Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y); \frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y)$$

Дифференцируя первое соотношение по y, а второе – по x, получим:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}; \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

Предполагая непрерывность вторых производных, т.к. $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, будем иметь:

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$$

Т.о. если уравнение $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ представляет собой полный дифференциал, то выполняется уравнение $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$ и функцию $u(x,y)$ всегда можно найти.

Укажем способ нахождения u. Из соотношения

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y)$$

следует выражение

$$\partial u = M(x,y)\partial x$$

интегрируя которое, получим:

$$u = \int M(x,y)dx = \int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + C(y)$$

Функция u определена с точностью до функции $C(y)$. Доопределим функцию $C(y)$, дифференцируя последнее выражение по y:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M(x,y)dx}{\partial y} + C'(y)$$

Но т.к. $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y)$, то можно записать

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial N dx}{\partial x} + C'(y) = N(x,y)$$
$$N(x,y) - N(x_0,y) + C'(y) = N(x,y)$$

Следовательно,

$$C'(y) = N(x_0,y)$$
$$\frac{dC}{dy} = N(x_0,y)$$
$$dC = N(x_0,y)dy$$

Возьмем интеграл от обеих частей уравнения:

$$C(y) = \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy + A$$

Т.о. функция $u(x,y)$ будет иметь вид

$$u = \int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy + A$$

Приравнивая это выражение произвольной постоянной B, получим выражение

$$\int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy + A = B$$

Следовательно, решение дифференциального уравнения в полных дифференциалах находится как:

$$\int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy + C = 0$$

Пример 1. Решить дифференциальное уравнение $\frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2-3x^2}{y^4}dy = 0$.

Решение.

Проверим, является ли это уравнение в полных дифференциалах $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$.

Обозначим

$$M(x,y) = \frac{2x}{y^3}; N(x,y) = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}$$

тогда

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{6x}{y^4}; \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{6x}{y^4}$$

Условие $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$ при $y \neq 0$ выполняется. Значит, левая часть данного уравнения есть полный дифференциал некоторой неизвестной функции $u(x,y)$. Найдем эту функцию.

Т.к.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{y^3}$$
$$\partial u = \frac{2x}{y^3}\partial x$$

Возьмем интеграл от обеих частей:

$$u = \int \frac{2x}{y^3}dx = \frac{x^2}{y^3} + C(y)$$

Дифференцируя это соотношение по y и учитывая, что

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y) = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}$$

находим

$$-\frac{3x^2}{y^4} + C'(y) = \frac{1}{y^2} - \frac{3x^2}{y^4}$$
$$C'(y) = \frac{1}{y^2}$$
$$\frac{dC}{dy} = \frac{1}{y^2}$$
$$dC = \frac{dy}{y^2}$$

Возьмем интеграл от обеих частей:

$$C = \int \frac{1}{y^2}dy = -\frac{1}{y} + A$$
$$u = \frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} + A$$

Т. о. общее решение исходного уравнения есть

$$\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} + C = 0$$

§9. Интегрирующий множитель.

Пусть дифференциальное уравнение $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ не является уравнением в полных дифференциалах, т.е. $\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$. Умножим обе части этого уравнения на некоторую функцию $\mu(x,y)$, после чего уравнение $\mu Mdx+\mu Ndy=0$ станет уравнением в полных дифференциалах, т.е. будет выполняться

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

Преобразуем это условие в удобную форму, раскрыв произведение:

$$\frac{\partial\mu}{\partial y}M(x,y)+\mu\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial\mu}{\partial x}N(x,y)+\mu\frac{\partial N}{\partial x}$$

Из этого уравнения можно определить функцию μ, но в общем виде данное уравнение решить нельзя. Если функция μ зависит только от одной переменной, то ее можно найти. Функция $\mu(x,y)$ называется **интегрирующим множителем**.

1. Допустим, что функция μ зависит только от x. Тогда

$$\mu(x)\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial\mu(x)}{\partial x}N(x,y)+\mu(x)\frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\mu(x)\left[\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right]=\frac{\partial\mu(x)}{\partial x}N(x,y)$$

$$\frac{\partial\mu(x)}{\partial x}\frac{1}{\mu(x)}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N(x,y)}$$

Возьмем интеграл от обеих частей:

$$\int\frac{d\mu}{\mu}=\int\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N(x,y)}dx$$

Выражение $\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N(x,y)}$ должно зависеть от x.

2. Допустим, что функция μ зависит только от y. Тогда выражение $\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M(x,y)}$ будет функцией, зависящей от y, и функция μ будет находиться из уравнения:

$$\int\frac{d\mu}{\mu}=\int\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M(x,y)}dy$$

Пример 1. Решить дифференциальное уравнение $(y-xy^2)dx-xdy=0$.

Решение.

Здесь $M(x,y)=y-xy^2,\ N(x,y)=-x, \frac{\partial M}{\partial y}=1-2xy, \frac{\partial N}{\partial x}=-1;\ \frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$.

Значит, данное уравнение не является уравнением в полных дифференциалах.

Посмотрим, не допускает ли это уравнение интегрирующего множителя μ, зависящего только от одной переменной.

1) При μ, зависящей от x:

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{1-2xy-(-1)}{-x}=\frac{2-2xy}{-x}$$

Следовательно, интегрирующий множитель зависит от двух переменных.

2) При μ, зависящей от y:

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}=\frac{-1-(1-2xy)}{y-xy^2}=\frac{-2(1-xy)}{y(1-xy)}=-\frac{2}{y}$$

Т.о. интегрирующий множитель μ зависит от y.

Следовательно, уравнение примет вид:

$$\mu(y)(y-xy^2)dx-\mu(y)xdy=0$$

Для этого уравнения выполняется условие:

$$\frac{\partial\left(\mu(y)(y-xy^2)\right)}{\partial y}=\frac{\partial(-\mu(y)x)}{\partial x}$$

$$\frac{d\mu}{dy}(y-xy^2)+\mu(y)(1-2xy)=-\mu(y)$$

$$\frac{d\mu}{dy}(y-xy^2)+2\mu(y)-2\mu(y)xy=0$$

$$\frac{d\mu}{dy}(y-xy^2)=2\mu(y)(xy-1)$$

$$\frac{d\mu}{\mu(y)}=\frac{2(xy-1)}{y-xy^2}dy$$

$$\frac{d\mu}{\mu(y)}=\frac{2(xy-1)}{-y(xy-1)}dy$$

$$\frac{d\mu}{\mu(y)}=-2\frac{dy}{y}$$

Возьмем интеграл от обеих частей:

$$\int\frac{d\mu}{\mu(y)}=-2\int\frac{dy}{y}$$

$$\ln|\mu|=-2\ln|y|+C$$

Константу С положим равной 0.

$$\ln|\mu|=\ln\left|\frac{1}{y^2}\right|$$

$$\mu=\frac{1}{y^2}$$

Получим уравнение

$$\frac{y-xy^2}{y^2}dx-\frac{x}{y^2}dy=0$$

Здесь $M(x,y)=\frac{y-xy^2}{y^2},\ N(x,y)=-\frac{x}{y^2}$.

Т.к. $M(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}$, то

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y-xy^2}{y^2}$$

$$du=\frac{1-xy}{y}dx$$

Возьмем интеграл от обеих частей:

$$u=\int\frac{1-xy}{y}dx=\frac{x}{y}-\frac{x^2}{2}+C(y)$$

Для нахождения функции $C(y)$, вычислим $\frac{\partial u}{\partial y}$:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}+C'(y)$$

Т.к. $\frac{\partial u}{\partial y}=N(x,y)=-\frac{x}{y^2}$, то

$$-\frac{x}{y^2}+\frac{dC(y)}{dy}=-\frac{x}{y^2}$$

$$\frac{dC(y)}{dy}=0$$

Следовательно, $C=const$.

Т.о. получили

$$u=\frac{x}{y}-\frac{x^2}{2}+C$$

Тогда общее решение исходного уравнения примет вид:

$$\frac{x}{y}-\frac{x^2}{2}+C=0$$

§10. Дифференциальное уравнение высших порядков.

Дифференциальные уравнения высших порядков имеют вид $F\left(x,y,y',\dots,y^{(n)}\right)$ или, если его можно разрешить относительно старшей производной, $y^{(n)}=f\left(x,y,y',\dots,y^{(n-1)}\right)$

Для этих уравнений справедлива теорема о существовании и единственности решения.

Теорема 1. Если в уравнении $y^{(n)}=f\left(x,y,y',\dots,y^{(n-1)}\right)$ функция $f\left(x,y,y',\dots,y^{(n-1)}\right)$ и ее частные производные по аргументам $x,y,y',\dots,y^{(n-1)}$, т.е. $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial y'},\dots,\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ непрерывны в некоторой области, содержащей значения $x=x_0, y=y_0, y'=y_0', y^{(n-1)}=y_0^{(n-1)}$, то существует и притом единственное решение $y=y(x)$ уравнения, удовлетворяющее начальным условиям

$$\begin{cases} y_{x=x_0}=y_0,\\ y'_{x=x_0}=y_0',\\ \dots\\ y^{(n-1)}_{x=x_0}=y_0^{(n-1)}\end{cases}$$

Пример 1. Уравнение $y''=f(x,y,y')$ является дифференциальным уравнением второго порядка с начальными условиями

$$\begin{cases} y_{x=x_0}=y_0,\\ y'_{x=x_0}=y'_{x=x_0}.\end{cases}$$

Определение 1. **Общим решением дифференциального уравнения n–го порядка называется функция $y=\varphi(x,C_1,C_2,\dots,C_n)$, зависящая от n произвольных постоянных $C_1,C_2,\dots,C_n$ и удовлетворяющая дифференциальному уравнению.**

Константы $C_1,C_2,\dots,C_n$ определяются из начальных условий.

Решить дифференциальное уравнение n–го порядка значит:

1. найти его общее решение
2. найти частное решение, удовлетворяющее начальным условиям, т.е. определить $C_1,C_2,\dots,C_n$.

§11. Дифференциальное уравнение вида $y^{(n)} = f(x)$.

Решаем дифференциальное уравнение $\boldsymbol{y^{(n)} = f(x)}$, сводя его к уравнению первого порядка заменой $\boldsymbol{z = y^{(n-1)}}$. Тогда дифференциальное уравнение запишем в виде:

$$z' = f(x)$$

или

$$\frac{dz}{dx} = f(x)$$

Выразим отсюда dz:

$$dz = f(x)dx$$

Возьмем интеграл от обеих частей дифференциального уравнения

$$\int dz = \int f(x)dx$$

или

$$z = \int f(x)dx = \int_{x_0}^{x} f(x)dx + C_1$$

Произведем обратную замену:

$$y^{(n-1)} = \int_{x_0}^{x} f(x)dx + C_1$$

Понижая еще раз порядок заменой $u = y^{(n-2)}$, получим

$$u' = \int_{x_0}^{x} f(x)dx + C_1$$

или

$$\frac{du}{dx} = \int_{x_0}^{x} f(x)dx + C_1$$

Выразим отсюда du:

$$du = \left(\int_{x_0}^{x} f(x)dx + C_1\right)dx$$

Возьмем интеграл от обеих частей дифференциального уравнения

$$\int du = \int\left(\left(\int_{x_0}^{x} f(x)dx + C_1\right)dx\right)$$

или

$$u = \int\left(\left(\int_{x_0}^{x} f(x)dx + C_1\right)dx\right) = \int_{x_0}^{x}\left(\int_{x_0}^{x} f(x)dx\right)dx + C_1\int_{x_0}^{x} dx + C_2$$

Произведем обратную замену:

$$\boldsymbol{y^{(n-2)}} = \int_{x_0}^{x}\left(\int_{x_0}^{x} f(x)dx\right)dx + C_1(x - x_0) + C_2$$

Продолжая далее, получим, наконец (после n интегрирований), выражение общего интеграла:

$$\boldsymbol{y = \int_{x_0}^{x} \dots \int_{x_0}^{x} f(x)dx \dots dx + C_1(x - x_0)^{n-1} + C_2(x - x_0)^{n-2} + \dots + C_n}$$

Пример 1. Решить дифференциальное уравнение второго порядка $y'' = \sin x$ с начальными условиями $\begin{cases} y_{x=0} = 0 \\ y'_{x=0} = 1 \end{cases}$

Решение

Введем замену $y' = p$, тогда $y'' = p'$ и получим

$$p' = \sin x$$

или

$$\frac{dp}{dx} = \sin x$$

Выразим отсюда dp:

$$dp = \sin x\, dx$$

Возьмем интеграл от обеих частей дифференциального уравнения:

$$\int dp = \int \sin x\, dx$$

или

$$p = \int \sin x\, dx = -\cos x + C_1$$

Произведем обратную замену:

$$y' = -\cos x + C_1$$

или

$$\frac{dy}{dx} = -\cos x + C_1$$

Выразим отсюда dy:

$$dy = (-\cos x + C_1)dx$$

Возьмем интеграл от обеих частей дифференциального уравнения:

$$\int dy = \int(-\cos x + C_1)dx$$

или

$$y = -\int \cos x\, dx + C_1\int dx$$

Тогда общее решение дифференциального уравнения примет вид:

$$y = -\sin x + C_1 x + C_2$$

Найдем частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее данным начальным условиям.

Из условия $y'_{x=0} = 1$ получаем

$$1 = -\cos 0 + C_1$$
$$1 = -1 + C_1$$
$$C_1 = 2$$

Из условия $y_{x=0} = 0$ получаем

$$0 = -\sin 0 + 2 \cdot 0 + C_2$$
$$C_2 = 0$$

Тогда частное решение дифференциального уравнения примет вид:

$$y = -\sin x + 2x$$

§12. Некоторые типы уравнений второго порядка, приводящиеся к уравнениям первого порядка.

В общем случае дифференциальное уравнение второго порядка, разрешенное относительно старшей производной, $y'' = f(x, y, y')$ не решается. И только некоторые виды таких уравнений допускают понижение порядка.

1. Правая часть уравнения $y'' = f(x, y, y')$ не содержит y, т.е. решаем уравнение вида $y'' = f(x, y')$.
Понижение порядка осуществляется заменой $y' = p$, тогда $y'' = p'$. Исходное дифференциальное уравнение преобразуется в дифференциальное уравнение первого порядка:

$$p' = f(x, p)$$

Пример 1. Решить дифференциальное уравнение $xy'' + y' = 0$.

Решение.

Выразим из данного дифференциального уравнения y'':

$$xy'' = -y'$$
$$y'' = -\frac{y'}{x}$$

Введем замену $y' = p$, тогда $y'' = p'$ и дифференциальное уравнение примет вид:

$$p' = -\frac{p}{x}$$

или

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{p}{x}$$
$$\frac{dp}{p} = -\frac{dx}{x}$$

Возьмем интеграл от обеих частей дифференциального уравнения:

$$\int \frac{dp}{p} = -\int \frac{dx}{x}$$
$$\ln|p| = -\ln|x| + \ln C_1$$

или

$$\ln|p| = \ln\left|\frac{C_1}{x}\right|$$

Отсюда находим

$$p = \frac{C_1}{x}$$

Произведем обратную замену:

$$y' = \frac{C_1}{x}$$

или

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{x}$$
$$dy = \frac{C_1}{x}dx$$

Возьмем интеграл от обеих частей дифференциального уравнения:

$$\int dy = \int \frac{C_1}{x}dx$$

Отсюда находим общее решение данного дифференциального уравнения:

$$y = C_1 \ln|x| + C_2$$

2. Правая часть уравнения $y'' = f(x, y, y')$ не содержит x, т.е. решаем уравнение вида $y'' = f(y, y')$.
Введем замену $y' = p(y)$, тогда

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dp(y)}{dx} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dp(y)}{dy} = p\frac{dp}{dy}$$

и исходное дифференциальное уравнение преобразуется в дифференциальное уравнение первого порядка:

$$p\frac{dp}{dy} = f(y, p)$$

Пример 2. Решить дифференциальное уравнение $yy'' = (y')^2$.

Решение.

Выразим из данного дифференциального уравнения y'':

$$y'' = \frac{(y')^2}{y}$$

Введем замену $y' = p$, тогда $y'' = p\frac{dp}{dy}$ и дифференциальное уравнение примет вид:

$$p\frac{dp}{dy} = \frac{p^2}{y}$$

или

$$\frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}$$

Возьмем интеграл от обеих частей дифференциального уравнения:

$$\int \frac{dp}{p} = \int \frac{dy}{y}$$
$$\ln|p| = \ln|y| + \ln C_1$$

или

$$\ln|p| = \ln|C_1 y|$$

Отсюда находим

$$p = C_1 y$$

Произведем обратную замену:

$$y' = C_1 y$$

или

$$\frac{dy}{dx} = C_1 y$$
$$\frac{dy}{y} = C_1 dx$$

Возьмем интеграл от обеих частей дифференциального уравнения:

$$\int \frac{dy}{y} = C_1 \int dx$$

или

$$\ln|y| = C_1 x + C_2$$

Отсюда находим общее решение дифференциального уравнения:

$$y = e^{C_1 x + C_2}$$

§13. Линейные однородные уравнения.

Определение 1. **Дифференциальное уравнение называется линейным, если оно первой степени относительно функции y и ее производных $y, y', \dots, y^{(n)}$:**

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x)$$

где $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x)$ – некоторые функции, зависящие от x, причем $a_0(x) \neq 0$ при всех x, а функции a_i непрерывны.

Если функция $f(x)$ равна нулю, т.е. $f(x) = 0$, то уравнение называется **однородным**.

Установим свойства линейных однородных дифференциальных уравнений на примере дифференциальных уравнений второго порядка:

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$$

Если $a_0 \neq 1$, то для простоты вычислений разделим обе части уравнении на a_0:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$$

Теорема 1. Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – два частных решения линейного однородного уравнения второго порядка $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$, то их сумма $y_1(x) + y_2(x)$ также является решением данного дифференциального уравнения.

Доказательство.

По условию теоремы, y_1 – решение дифференциального уравнения, т.е.

$$y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1 = 0,$$

и y_2 – решение дифференциального уравнения, т.е.

$$y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2 = 0.$$

Сложим левые части полученных уравнений:

$$y_1'' + y_2'' + a_1(y_1' + y_2') + a_2(y_1 + y_2) = 0$$

Т.к. производная суммы равна сумме производных, то получаем

$$(y_1 + y_2)'' + a_1(y_1 + y_2)' + a_2(y_1 + y_2) = 0$$

Т.о. $y_1 + y_2$ также является решением данного дифференциального уравнения, что и требовалось доказать.

Теорема 2. Если $y_1(x)$ есть решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$, то $Cy_1(x)$ также является решением этого дифференциального уравнения.

Доказательство.

По условию теоремы, y_1 – решение дифференциального уравнения, т.е.

$$y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1 = 0.$$

Умножим обе части равенства на константу C:

$$Cy_1'' + Ca_1 y_1' + Ca_2 y_1 = 0.$$

Используя свойства производных, получим:

$$(Cy_1)'' + a_1(Cy_1)' + a_2 Cy_1 = 0.$$

Т.о. Cy_1 также является решением данного дифференциального уравнения, что и требовалось доказать.

Определение 2. **Два решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейного однородного дифференциального уравнения $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ называются линейно независимыми на отрезке $[a, b]$, если их отношение $\frac{y_1(x)}{y_2(x)}$ не является постоянным, т.е. если $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq const$.**

В противном случае, т.е. когда $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = const$, – **линейно зависимыми**.

Пример 1. Проверить на линейную зависимость решения дифференциальных уравнений: $y_1(x) = e^x$ и $y_2(x) = e^{2x}$; $y_1(x) = 2x$ и $y_2(x) = 4x$.

Решение.

Решения $y_1(x) = e^x$ и $y_2(x) = e^{2x}$ линейно независимы, т.к. $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \frac{e^x}{e^{2x}} = e^{-x} \neq const$.

Решения $y_1(x) = 2x$ и $y_2(x) = 4x$ линейно зависимы, т.к. $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \frac{2x}{4x} = \frac{1}{2} = const$.

Определение 3. **Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – две функции от x, то определителем Вронского $W(y_1, y_2)$ называется выражение вида**

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

Теорема 3. Если y_1 и y_2 линейно зависимы на отрезке $[a, b]$, то определитель Вронского равен нулю.

Доказательство.

По условию теоремы, y_1 и y_2 линейно зависимы на отрезке $[a, b]$, т.е. $y_1 = \lambda y_2$, тогда и $y_1' = \lambda y_2'$.

Вычислим определитель Вронского:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda y_2 & y_2 \\ \lambda y_2' & y_2' \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} y_2 & y_2 \\ y_2' & y_2' \end{vmatrix} = \lambda(y_2 y_2' - y_2 y_2') = 0,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 4. Если определитель Вронского, составленный из решений линейного однородного дифференциального уравнения $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$, не равен нулю при каком-нибудь значении $x = x_0$ на отрезке $[a, b]$, где функции $a_1(x)$ и $a_2(x)$ непрерывны, то он не равен нулю ни при каком x из отрезке $[a, b]$.

Доказательство.

По условию теоремы, y_1 и y_2 – решение дифференциального уравнения, т.е.

$$y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1 = 0 \,|\times y_2$$
$$y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2 = 0 \,|\times y_1$$

Тогда получим

$$y_1'' y_2 + a_1 y_1' y_2 + a_2 y_1 y_2 = 0$$
$$y_2'' y_1 + a_1 y_2' y_1 + a_2 y_2 y_1 = 0$$

Вычтем из второго уравнения первое:

$$(y_2'' y_1 - y_1'' y_2) + a_1(y_2' y_1 - y_1' y_2) + a_2(y_2 y_1 - y_1 y_2) = 0$$

Разность, стоящая в первой скобке, есть производная от определителя Вронского:

$$W'(y_1, y_2) = (y_1 y_2' - y_2 y_1')' = y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_1' y_2' - y_1'' y_2 = y_1 y_2'' - y_1'' y_2$$

Тогда полученное уравнение запишется в виде:

$$W'(y_1, y_2) + a_1 W(y_1, y_2) = 0$$

или

$$\frac{dW}{dx} = -a_1 W$$
$$\frac{dW}{W} = -a_1 dx$$

Возьмем интеграл от обеих частей уравнения:

$$\int \frac{dW}{W} = -\int a_1 dx$$

откуда

$$\ln|W| = -\int_{x_0}^{x} a_1 dx + \ln C$$
$$\ln\left|\frac{W}{C}\right| = -\int_{x_0}^{x} a_1 dx$$

Т.о. получили **формулу Лиувилля**:

$$W = Ce^{-\int_{x_0}^{x} a_1 dx}$$

Т.к. по условию теоремы, в точке $x = x_0$ определитель Вронского не равен нулю, то $C = W_0$, где $W_0 \neq 0$, тогда можно представить **формулу Лиувилля** как:

$$W(y_1, y_2) = W_0 e^{-\int_{x_0}^{x} a_1 dx}$$

Т.к. показательная функция в любой степени не обращается в нуль, то определитель Вронского во всех точках x не обращается в нуль, что и требовалось доказать.

Теорема 5. Если решения y_1 и y_2 линейного дифференциального уравнения $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ линейно независимы на отрезке $[a, b]$, то определитель Вронского не обращается в нуль ни в одной точке этого отрезка.

Доказательство.

Допустим, что определитель Вронского равен нулю, т.е.

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = 0$$

или

$$y_1 y_2' - y_2 y_1' = 0$$

Разделим обе части уравнения на y_1^2:

$$\frac{y_1 y_2' - y_2 y_1'}{y_1^2} = 0$$

Используя формулу производной частного, получим:

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = 0$$

откуда следует

$$\frac{y_2}{y_1} = const = \lambda$$

или

$$y_2 = \lambda y_1$$

Т.е. y_1 и y_2 линейно зависимы, а по условию теоремы они линейно независимы, следовательно, предположение, что $W(y_1, y_2) = 0$, неверно.

Т.о. определитель Вронского не равен нулю, т.е. $W(y_1, y_2) \neq 0$.

Что и требовалось доказать.

Теорема 6. Если y_1 и y_2 – два линейно независимых решения линейного однородного дифференциального уравнения $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$, то $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$– общее решение этого дифференциального уравнения, где C_1 и C_2 – произвольные константы.

Доказательство.

По условию теоремы, y_1 и y_2 – решения данного дифференциального уравнения.

Из теорем 1 и 2 следует, что функция $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$– общее решение этого дифференциального уравнения при любых значениях C_1 и C_2.

Докажем, что каковы бы ни были начальные условия $\begin{cases} y_{x=x_0} = y_0 \\ y'_{x=x_0} = y_0' \end{cases}$, всегда можно подобрать C_1 и C_2.

Найдем производную от общего решения данного дифференциального уравнения

$$y' = C_1 y_1' + C_2 y_2'$$

и составим систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = y_0 \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) = y_0' \end{cases}$$

Полученная система уравнений всего имеет решение, если определитель Вронского при $x = x_0$ отличен от нуля, т.е.

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

Т.к. функции линейно независимы, то он не обращается в нуль ни в одной точке, а, следовательно, и система уравнений всегда имеет единственное решение при любых начальных условиях, т.е. C_1 и C_2 можно найти.

Т.о. $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ является общим решением данного дифференциального уравнения, что и требовалось доказать.

Пример 2. Написать общее решение дифференциального уравнения $y'' + \frac{1}{x} y' - \frac{1}{x^2} y = 0$, если известны два частных решения $y_1 = x$ и $y_2 = \frac{1}{x}$.

Решение.

Проверим на линейную зависимость:

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{x}{\frac{1}{x}} = x^2 \neq const,$$

т.е. y_1 и y_2 линейно независимы, следовательно, на основании теоремы 6, получаем общее решение данного дифференциального уравнения:

$$y = C_1 x + C_2 \frac{1}{x}$$

Теорема 7. Если известно одно частное решение y_1 линейного однородного дифференциального уравнения $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$, то можно найти и второе решение y_2.

Доказательство.

Воспользуемся формулой Лиувилля:

$$W(y_1, y_2) = C_1 e^{-\int a_1 dx}$$

или

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = C_1 e^{-\int a_1 dx}$$

откуда

$$y_1 y_2' - y_2 y_1' = C_1 e^{-\int a_1 dx}$$

Разделим обе части уравнения на y_1^2:

$$\frac{y_1 y_2' - y_2 y_1'}{y_1^2} = \frac{C_1 e^{-\int a_1 dx}}{y_1^2}$$

Используя формулу производной частного, получим:

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{C_1}{y_1^2} e^{-\int a_1 dx}$$

откуда следует

$$\frac{y_2}{y_1} = C_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int a_1 dx} dx + C_2$$

Т.о. получили второе частное решение дифференциального уравнения:

$$y_2 = C_1 y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int a_1 dx} dx + C_2 y_1,$$

что и требовалось доказать.

Пример 3. Найти второе частное решение y_2 дифференциального уравнения $(1 - x^2)y'' + 2xy' + 2y = 0$, если известно, что первое частное решение $y_1 = x$.

Решение.

Разделив обе части данного уравнения на $(1 - x^2)$, приведем его к виду:

$$y'' + \frac{2x}{1 - x^2} y' + \frac{2}{1 - x^2} y = 0$$

Воспользуемся доказательством теоремы 7:

$$y_2 = C_1 x \int \frac{1}{x^2} e^{-\int \frac{2x}{1-x^2} dx} dx + C_2 x = C_1 x \int \frac{1}{x^2} e^{-\int \frac{d(1-x^2)}{1-x^2}} dx + C_2 x = C_1 x \int \frac{1}{x^2} e^{\ln|1-x^2|} dx + C_2 x$$
$$= x\left(C_1 \int \frac{1 - x^2}{x^2} dx + C_2\right) = x\left(C_1\left(\int \frac{dx}{x^2} - \int dx\right) + C_2\right)$$
$$= x\left(C_1\left(-\frac{1}{x} - x\right) + C_2\right)$$

Т.о. получили второе частное решение:

$$y_2 = C_1(-1 - x^2) + C_2 x$$

§14. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Определение 1. **Линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка является уравнение вида:**

$$y'' + py' + qy = 0$$

где p, q – действительные числа.

Частные решения дифференциального уравнения будем искать в виде $y = e^{kx}$, где $k = const$; тогда $y' = ke^{kx}, y'' = k^2e^{kx}$

Подставляя полученные выражения производных в линейное однородное дифференциальное уравнение, получим:

$$k^2e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0$$

или

$$e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0$$

Т.к. $e^{kx} \neq 0$, то, чтобы полученное уравнение обратилось в тождество, необходимо, чтобы выполнялось:

$$k^2 + pk + q = 0$$

Данное уравнение называется **характеристическим** по отношению к дифференциальному уравнению.

Характеристическое уравнение есть квадратное уравнение, имеющее два корня k_1 и k_2, равные:

$$k_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Возможны следующие варианты:

1. k_1 и k_2 – действительные различные числа, т.е. $k_1 \neq k_2$

В этом случае частными решениями будут функции:

$$y_1 = e^{k_1x}, y_2 = e^{k_2x}.$$

Чтобы эти решения были линейно независимы, необходимо, чтобы выполнялось:

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{e^{k_2x}}{e^{k_1x}} = e^{(k_2-k_1)x} \neq const$$

Следовательно, общее решение имеет вид:

$$y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$$

Пример 1. Решить дифференциальное уравнение $y'' + y' - 2y = 0$.

Решение.

Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 + k - 2 = 0$$

Находим корни характеристического уравнения:

$$k_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(-2)}}{2}$$

отсюда

$$k_1 = -2, k_2 = 1$$

Тогда общее решение данного дифференциального уравнения примет вид:

$$y = C_1e^{-2x} + C_2e^x$$

2. k_1 и k_2 – действительные равные числа, т.е. $k_1 = k_2$.

Частные решения дифференциальных уравнений имеют вид:

$$y_1 = e^{k_1x},$$
$$y_2 = u(x)e^{k_1x},$$

где $u(x)$ – неизвестная функция, подлежащая определению.

Дифференцируя y_2, находим:

$$y_2' = u'e^{k_1x} + uk_1e^{k_1x} = e^{k_1x}(u' + uk_1)$$
$$y_2'' = u''e^{k_1x} + u'k_1e^{k_1x} + u'k_1e^{k_1x} + uk_1^2e^{k_1x} = e^{k_1x}(u'' + 2u'k_1 + uk_1^2)$$

Подставляя y_2, y_2' и y_2'' в линейное однородное дифференциальное уравнение, получим:

$$e^{k_1x}(u'' + 2u'k_1 + uk_1^2) + pe^{k_1x}(u' + uk_1) + que^{k_1x} = 0$$

Разделим обе части уравнения на e^{k_1x}:

$$u'' + 2u'k_1 + uk_1^2 + pu' + puk_1 + qu = 0$$

или

$$u'' + u'(2k_1 + p) + u(k_1^2 + pk_1 + q) = 0$$

Т.к. k_1 – корень характеристического уравнения, то

$$k_1^2 + pk_1 + q = 0.$$

Кроме того, $k_1 = k_2 = -\frac{p}{2}$ или $2k_1 = -p, 2k_1 + p = 0$.

Т.е. для того, чтобы найти $u(x)$, надо решить уравнение $u'' = 0$.

Интегрируя, получаем $u' = const, u = x$

Т.о. второе частное решение примет вид:

$$y_2 = xe^{k_1x}$$

Следовательно, общее решение имеет вид:

$$y = C_1e^{k_1x} + C_2xe^{k_1x} = e^{k_1x}(C_1 + C_2x)$$

Пример 2. Решить дифференциальное уравнение $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Решение.

Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 - 4k + 4 = 0$$

Находим корни характеристического уравнения:

$$k_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4}}{2}$$

отсюда

$$k_1 = 2, k_2 = 2$$

Тогда общее решение данного дифференциального уравнения примет вид:

$$y = e^{2x}(C_1 + C_2x)$$

3. k_1 и k_2 – комплексные числа.

Т.к. p и q – действительные числа, то корни характеристического уравнения k_1 и k_2 являются комплексно сопряженными:

$$k_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = \alpha \pm \beta i$$

т.е. $k_1 = \alpha + \beta i, k_2 = \alpha - \beta i$.

Частные решения можно записать в форме

$$y_1 = xe^{(\alpha+\beta i)x}, y_2 = xe^{(\alpha-\beta i)x}$$

Тогда общее решение дифференциального уравнения будем искать в виде:

$$y = C_1e^{(\alpha+\beta i)x} + C_2e^{(\alpha-\beta i)x} = e^{\alpha x}C_1e^{\beta ix} + e^{\alpha x}C_2e^{-\beta ix} = e^{\alpha x}\left(C_1e^{\beta ix} + C_2e^{-\beta ix}\right)$$

Согласно формуле Эйлера ($e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$) получим:

$y = e^{\alpha x}\left(C_1(\cos\beta x + i\sin\beta x) + C_2(\cos\beta x - i\sin\beta x)\right) = e^{\alpha x}\big((C_1 + C2\cos\beta x + C1 - C2i\sin\beta x$

Обозначив $C_1 + C_2 = C_1^*$, $i(C_1 - C_2) = C_2^*$, окончательно получим общее решение:

$$y = e^{\alpha x}(C_1^*\cos\beta x + C_2^*\sin\beta x)$$

Пример 3. Решить дифференциальное уравнение $y'' + 2y' + 5y = 0$.

Решение.

Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 + 2k + 5 = 0$$

Находим корни характеристического уравнения:

$$k_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 5}}{2} = -1 \pm 2\sqrt{-1} = -1 \pm 2i$$

отсюда

$$\alpha = -1, \beta = 2$$

Тогда общее решение данного дифференциального уравнения примет вид:

$$y = e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$$

§15. Неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка.

Неоднородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка имеют вид $\boldsymbol{y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x)}$.

Теорема 1. Общий вид решения неоднородного уравнения есть сумма частного решения y^* этого уравнения и общего решения $\overline{y}$ однородного уравнения $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$, т.е.

$$y = \overline{y} + y^*$$

Доказательство.

По условию теоремы, y^* – частное решение неоднородного уравнения, т.е. выполняется

$$y^{*''} + a_1 y^{*'} + a_2 y^* = f(x);$$

$\overline{y}$ – общее решение однородного уравнения, т.е. выполняется

$$\overline{y}'' + a_1\overline{y}' + a_2\overline{y} = 0.$$

Убедимся, что $y = \overline{y} + y^*$ является решением неоднородного уравнения. Для этого найдем:

$$y' = y^{*'} + \overline{y}'$$
$$y'' = y^{*''} + \overline{y}''$$

Подставим полученные выражения в неоднородное уравнение:

$$(y^{*''} + \overline{y}'') + a_1(y^{*'} + \overline{y}') + a_2(y^* + \overline{y}) = f(x)$$

или

$$(\overline{y}'' + a_1\overline{y}' + a_2\overline{y}) + (y^{*''} + a_1 y^{*'} + a_2 y^*) = f(x).$$

Т.к. выражение, стоящее в первых скобках, равно нулю, а выражение, стоящее во вторых скобках равно $f(x)$, то полученное равенство выполняется.

Докажем теперь, что выражение $y = \overline{y} + y^*$ есть общее решение неоднородного уравнения, т.е. докажем, что входящие в него произвольные постоянные можно подобрать так, чтобы удовлетворялись начальные условия

$$\begin{cases} y_{x=x_0} = y_0 \\ y'_{x=x_0} = y'_0 \end{cases}$$

Заметив, что $\overline{y}$ можно представить в виде

$$\overline{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

где y_1 и y_2 – линейно независимые решения однородного уравнения, а C_1 и C_2 – произвольные постоянные, можно переписать равенство $y = \overline{y} + y^*$ в виде

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y^*$$

Найдем производную

$$y' = C_1 y_1{}' + C_2 y_2{}' + y^{*'}$$

Подставим начальные условия:

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + y^*(x_0) = y_0 \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + y^{*'}(x_0) = y_0' \end{cases}$$

Из этой системы уравнений можно определить C_1 и C_2:

$$\begin{cases} C_1 y_1 + C_2 y_2 = y_0 - y^* \\ C_1 y_1' + C_2 y_2' = y_0' - y^{*'} \end{cases}$$

Т.к. определитель Вронского этой системы при условии, что y_1 и y_2 – линейно независимые функции, не равен нулю, то она всегда разрешима, что и требовалось доказать.

Укажем общий метод нахождения частного решения y^* неоднородного уравнения $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x)$.

Метод вариации произвольных постоянных.

Пусть дано неоднородное дифференциальное уравнение $y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$.

Напишем общее решение однородного уравнения

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Будем искать частное решение неоднородного уравнения в форме $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$, рассматривая C_1 и C_2 как некоторые функции, зависящие от x. Т.о. $C_1(x)$ и $C_2(x)$ – вариации произвольных постоянных.

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2.$$

Продифференцируем полученное равенство:

$$y' = C_1'(x)y_1 + C_1(x)y_1' + C_2'(x)y_2 + C_2(x)y_2'.$$

Подберем искомые функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ так, чтобы выполнялось равенство

$$C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0$$

Если учесть это дополнительное условие, то первая производная $\overline{y}'$ примет вид:

$$y' = C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2'.$$

Дифференцируя теперь это выражение, найдем $\overline{y}''$:

$$y'' = C_1'(x)y_1' + C_1(x)y_1'' + C_2'(x)y_2' + C_2(x)y_2''.$$

Подставляя y, y' и y'' в неоднородное уравнение, получим:

$C_1'(x)y_1' + C_1(x)y_1'' + C_2'(x)y_2' + C_2(x)y_2'' + a_1(C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2') + a_2(C_1(x)y_1 +$ *C2xy2=fx*

$$C_1(x)(y_1'' + a_1y_1' + a_2y_1) + C_2(x)(y_2'' + a_1y_2' + a_2y_2) + C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x)$$

Т.к. y_1 и y_2 – частные решения однородного уравнения, то выполняется

$$y_1'' + a_1y_1' + a_2y_1 = 0$$
$$y_2'' + a_1y_2' + a_2y_2 = 0$$

Следовательно, выражения, стоящие в скобках, обращаются в нуль.

Т.о. функция $y = C_1y_1 + C_2y_2$ будет решением неоднородного уравнения в том случае, если функции C_1 и C_2 удовлетворяют системе

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x) \end{cases}$$

Пример 1. Решить дифференциальное уравнение $y'' - \frac{1}{x}y' = x$.

Решение.

Найдем общее решение однородного уравнения

$$y'' - \frac{1}{x}y' = 0$$

Введем замену $y' = p$, тогда $y'' = p'$. Т.о. однородное уравнение перепишется в виде:

$$p' - \frac{1}{x}p = 0$$
$$\frac{dp}{dx} = \frac{p}{x}$$

или

$$\frac{dp}{p} = \frac{dx}{x}$$

Интегрируя последнее выражение

$$\int\frac{dp}{p} = \int\frac{dx}{x}$$

получим

$$\ln|p| = \ln|x| + \ln|C_1|$$

или

$$\ln|p| = \ln|C_1 x|$$

откуда

$$p = C_1 x$$

или

$$\frac{dy}{dx} = C_1 x$$
$$dy = C_1 x dx$$

Интегрируя последнее выражение

$$\int dy = \int C_1 x dx$$

получим

$$y = \frac{C_1 x^2}{2} + C_2$$

где $y_1 = x^2$, $y_2 = 1$ – линейно независимые функции.

Используем метод вариации произвольных постоянных.

Чтобы последнее выражение было решением данного уравнения, надо определить C_1 и C_2 как функции от x из системы

$$\begin{cases} C_1' \cdot x^2 + C_2' \cdot 1 = 0 \\ C_1' \cdot 2x + C_2' \cdot 0 = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \cdot x^2 + C_2' = 0 \\ C_1' = \frac{1}{2} \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} C_2' = -\frac{x^2}{2} \\ C_1' = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Найдем из системы функцию C_1:

$$\frac{dC_1}{dx} = \frac{1}{2}$$
$$dC_1 = \frac{dx}{2}$$

Интегрируя последнее выражение

$$\int dC_1 = \int\frac{dx}{2}$$

получим

$$C_1 = \frac{1}{2}x + A$$

Найдем из системы функцию C_2:

$$\frac{dC_2}{dx} = -\frac{x^2}{2}$$
$$dC_2 = -\frac{x^2}{2}dx$$

Интегрируя последнее выражение

$$\int dC_2 = \frac{1}{2}\int x^2 dx$$

получим

$$C_2 = -\frac{x^3}{6} + B$$

Подставляя найденные функции **в формулу** $y = C_1x^2 + C_2$, получаем общее решение неоднородного уравнения:

$$y = \left(\frac{1}{2}x + A\right)x^2 + \left(-\frac{x^3}{6} + B\right) = Ax^2 + B + \left(-\frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{2}\right) = Ax^2 + B + \frac{x^3}{3}$$

где A и B – произвольные постоянные.

§16. Неоднородные линейные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами со специальной правой частью.

Пусть имеем уравнение

$$y''+py'+qy=f(x)$$

где p и q – действительные числа.
Общее решение неоднородного уравнения будем искать в виде:

$$y=\bar{y}+y^*$$

Сначала находим общее решение однородного уравнения:

$$\bar{y}=C_1y_1+C_2y_2$$

Укажем способы нахождения частного решения y^* неоднородного уравнения в зависимости от вида правой части неоднородного уравнения:

1. Пусть правая часть имеет вид $f(x)=e^{\alpha x}P_n(x)$, где $P_n(x)$ – многочлен n–го порядка. Тогда возможны следующие варианты:
   а) Число α не является корнем характеристического уравнения $k^2+pk+q=0$. Тогда частное решение y^* выбирается в виде $y^*=e^{\alpha x}Q_n(x)$, где $Q_n(x)$ – многочлен n–го порядка с неопределенными коэффициентами, которые определяются подстановкой в исходное дифференциальное уравнение. Т.е. частное решение будем искать в виде:

$$y^*=e^{\alpha x}Q_n(x)=e^{\alpha x}(A_0x^n+A_1x^{n-1}+\cdots+A_n)$$

Пример 1. Решить дифференциальное уравнение $y''+4y'+3y=x$.
Решение.
Общее решение неоднородного уравнения будем искать в виде:

$$y=\bar{y}+y^*$$

Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y''+4y'+3y=0$$

Для этого составим к нему характеристическое уравнение

$$k^2+4k+3=0$$

откуда

$$k_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot 3}}{2}=\frac{-4\pm 2}{2}=-3;\,-1.$$

Тогда получим

$$\bar{y}=C_1e^{-3x}+C_2e^{-x}$$

Т.к. правая часть данного неоднородного уравнения имеет вид xe^{0x}, причем 0 не является корнем характеристического уравнения, то частное решение будем искать в форме

$$y^*=e^{0x}(A_0x+A_1)=A_0x+A_1$$

откуда

$$y^{*\prime}=A_0$$

и

$$y^{*\prime\prime}=0$$

Подставляя y^*, $y^{*\prime}$ и $y^{*\prime\prime}$ в исходное дифференциальное уравнение, будем иметь:

$$4A_0+3(A_0x+A_1)=x$$

или

$$3A_0x+(4A_0+3A_1)=x$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему уравнений:

$$\begin{cases}3A_0=1\\4A_0+3A_1=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}A_0=\dfrac{1}{3}\\4\cdot\dfrac{1}{3}+3A_1=0\end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases}A_0=\dfrac{1}{3}\\A_1=-\dfrac{4}{9}\end{cases}$$

Т.о. частное решение y^* равно:

$$y^*=\frac{1}{3}x-\frac{4}{9}$$

Следовательно, общее решение y примет вид:

$$y=C_1e^{-3x}+C_2e^{-x}+\frac{1}{3}x-\frac{4}{9}$$

   б) Число α является корнем характеристического уравнения $k^2+pk+q=0$. Тогда частное решение y^* выбирается в виде $y^*=x^{\mu}e^{\alpha x}Q_n(x)$, где $Q_n(x)$ – многочлен n–го порядка с неопределенными коэффициентами.

Пример 2. Решить дифференциальное уравнение $y''-7y'+6y=e^x(x-2)$.
Решение.
Общее решение неоднородного уравнения будем искать в виде:

$$y=\bar{y}+y^*$$

Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y''-7y'+6y=0$$

Для этого составим к нему характеристическое уравнение

$$k^2-7k+6=0$$

откуда

$$k_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{7^2-4\cdot 6}}{2}=\frac{7\pm 5}{2}=1;6.$$

Тогда получим

$$\bar{y}=C_1e^{x}+C_2e^{6x}$$

Т.к. правая часть данного неоднородного уравнения имеет вид $(x-2)e^x$, причем 1 является корнем характеристического уравнения, то частное решение будем искать в форме

$$y^*=x^1e^x(Ax+B)=e^x(Ax^2+Bx)$$

откуда

$$y^{*\prime}=e^x(Ax^2+Bx)+e^x(2Ax+B)=e^x(Ax^2+(2A+B)x+B)$$

и

$$y^{*\prime\prime}=e^x(Ax^2+(2A+B)x+B)+e^x(2Ax+2A+B)=e^x(Ax^2+(2A+B)x+2A+2B)$$

Подставляя y^*, $y^{*\prime}$ и $y^{*\prime\prime}$ в исходное дифференциальное уравнение, будем иметь:

$$e^x(Ax^2+(2A+B)x+2A+2B)-7e^x(Ax^2+(2A+B)x+B)+6e^x(Ax^2+Bx)=(x-2)e^x$$

$$e^x(x^2(A-7A+6A)+x(4A+B-14A-7B+6B)+2A+2B-7B)=(x-2)e^x$$

или

$$e^x(x^2\cdot 0-10Ax+2A-5B)=(x-2)e^x$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему уравнений:

$$\begin{cases}-10A=1\\2A-5B=-2\end{cases}$$

$$\begin{cases}A=-\dfrac{1}{10}\\-2\cdot\dfrac{1}{10}-5B=-2\end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases}A=-\dfrac{1}{10}\\B=\dfrac{9}{25}\end{cases}$$

Т.о. частное решение y^* равно:

$$y^*=xe^x\left(-\frac{1}{10}x+\frac{9}{25}\right)$$

Следовательно, общее решение y примет вид:

$$y=C_1e^x+C_2e^{6x}+xe^x\left(-\frac{1}{10}x+\frac{9}{25}\right)$$

2. Пусть правая часть имеет вид $f(x)=e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x)$, где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ – многочлены n–го порядка с неопределенными коэффициентами. Тогда возможны следующие варианты:
   а) Число $\alpha+\beta i$ не является корнем характеристического уравнения $k^2+pk+q=0$. Тогда частное решение y^* выбирается в виде $y^*=e^{\alpha x}(U_l(x)\cos\beta x+V_l(x)\sin\beta x)$, где U_l и V_l – многочлены n–го порядка с неопределенными коэффициентами, которые определяются из дифференциального уравнения как

$$l=\max(n,m)$$

Пример 3. Решить дифференциальное уравнение $y''+2y'+5y=2\cos x$.
Решение.
Общее решение неоднородного уравнения будем искать в виде:

$$y=\bar{y}+y^*$$

Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y''+2y'+5y=0$$

Для этого составим к нему характеристическое уравнение

$$k^2+2k+5=0$$

откуда

$$k_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 5}}{2}=\frac{-2\pm 4i}{2}=-1\pm 2i.$$

Тогда получим

$$\bar{y}=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$$

Т.к. правая часть данного неоднородного уравнения имеет вид $2e^{0x}\cos x$, то частное решение будем искать в форме

$$y^*=e^{0x}(A\cos x+B\sin x)=A\cos x+B\sin x$$

откуда

$$y^{*\prime}=-A\sin x+B\cos x$$

и

$$y^{*\prime\prime}=-A\cos x-B\sin x$$

Подставляя y^*, $y^{*\prime}$ и $y^{*\prime\prime}$ в исходное дифференциальное уравнение, будем иметь:

$$-A\cos x-B\sin x+2(-A\sin x+B\cos x)+5(A\cos x+B\sin x)=2\cos x$$

$$\cos x(-A+2B+5A)+\sin x(-B-2A+5B)=2\cos x+0\sin x$$

или

$$\cos x(4A+2B)+\sin x(-2A+4B)=2\cos x+0\sin x$$

Приравнивая коэффициенты при $\cos x$ и $\sin x$, получим систему уравнений:

$$\begin{cases}4A+2B=2\\-2A+4B=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}2A+B=1\\-2A+4B=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}5B=1\\2A+B=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}B=\dfrac{1}{5}\\2A+\dfrac{1}{5}=1\end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases}A=\dfrac{2}{5}\\B=\dfrac{1}{5}\end{cases}$$

Т.о. частное решение y^* равно:

$$y^*=\frac{2}{5}\cos x+\frac{1}{5}\sin x$$

Следовательно, общее решение y примет вид:

$$y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)+\frac{2}{5}\cos x+\frac{1}{5}\sin x$$

   б) Число $\alpha+\beta i$ является корнем кратности μ характеристического уравнения $k^2+pk+q=0$. Тогда частное решение y^* выбирается в виде $y^*=x^{\mu}e^{\alpha x}(U_l(x)\cos\beta x+V_l(x)\sin\beta x)$, где U_l и V_l – многочлены n–го порядка с неопределенными коэффициентами, которые определяются из дифференциального уравнения как

$$l=\max(n,m)$$

Пример 4. Решить дифференциальное уравнение $y''+4y=\cos 2x$.
Решение.
Общее решение неоднородного уравнения будем искать в виде:

$$y=\bar{y}+y^*$$

Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y''+4y=0$$

Для этого составим к нему характеристическое уравнение

$$k^2+4=0$$

откуда

$$k_{1,2}=\pm\sqrt{-4}=\pm 2\sqrt{-1}=\pm 2i.$$

Тогда получим

$$\bar{y}=e^{0x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$$

Т.к. правая часть данного неоднородного уравнения имеет вид $e^{0x}\cos 2x$, то частное решение будем искать в форме

$$y^*=x^1e^{0x}(A\cos 2x+B\sin 2x)=x(A\cos 2x+B\sin 2x)$$

откуда

$$y^{*\prime}=(A\cos 2x+B\sin 2x)+x(-2A\sin 2x+2B\cos 2x)$$

и

$y^{*\prime\prime}=(-2A\sin 2x+2B\cos 2x)+(-2A\sin 2x+2B\cos 2x)+x(-4A\cos 2x-4B\sin 2x)=$
$-4A\sin 2x+4B\cos 2x+x(-4A\cos 2x-4B\sin 2x)$

Подставляя y^*, $y^{*\prime}$ и $y^{*\prime\prime}$ в исходное дифференциальное уравнение, будем иметь:

$-4A\sin 2x+4B\cos 2x+x(-4A\cos 2x-4B\sin 2x)+4x(A\cos 2x+B\sin 2x)=\cos 2x$

или

$-4A\sin 2x+4B\cos 2x=1\cdot\cos 2x+0\cdot\sin 2x$

Приравнивая коэффициенты при $\cos 2x$ и $\sin 2x$, получим систему уравнений:

$$\begin{cases}-4A=0\\4B=1\end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases}A=0\\B=\dfrac{1}{4}\end{cases}$$

Т.о. частное решение y^* равно:

$$y^*=x\frac{1}{4}\sin 2x$$

Следовательно, общее решение y примет вид: $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+x\frac{1}{4}\sin 2x$

§17. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Определение 1. **Системой дифференциальных уравнений первого порядка называется выражение вида**

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases}$$

где $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ – функции, зависящие от x.

Решить систему – это значит найти функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$, которые будучи подставлены в систему обратят ее в тождество и при этом будут удовлетворять начальным условиям:

$$\begin{cases} y_{1_{x=x_0}} = y_1^0, \\ y_{2_{x=x_0}} = y_2^0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ y_{n_{x=x_0}} = y_n^0 \end{cases}$$

Данная система решается сведением её к дифференциальному уравнению n–го порядка следующим способом.

Дифференцируем первое уравнение системы по x:

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx} + \frac{\partial f_1}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dx} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n}\frac{dy_n}{dx}$$

Подставив $\frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \dots, \frac{dy_n}{dx}$ в последнее уравнение, получим новую функцию:

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = F_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

Дифференцируя полученное уравнение и поступая аналогично предыдущему, найдём:

$$\frac{d^3y_1}{dx^3} = \frac{\partial F_2}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F_2}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx} + \frac{\partial F_2}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dx} + \dots + \frac{\partial F_2}{\partial y_n}\frac{dy_n}{dx}$$

Подставив $\frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \dots, \frac{dy_n}{dx}$ в последнее уравнение, получим новую функцию

$$\frac{d^3y_1}{dx^3} = F_3(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

Продолжая так n раз, получаем уравнение

$$\frac{d^ny_1}{dx^n} = F_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

Т.о. система примет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = F_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = F_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases}$$

Можем решить эту систему относительно неизвестных $y_1, y_2, \dots, y_n$:

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1\left(x, y_1', y_1'', \dots, y_1^{(n)}\right) \\ y_2 = \varphi_2\left(x, y_1', y_1'', \dots, y_1^{(n)}\right) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = \varphi_n\left(x, y_1', y_1'', \dots, y_1^{(n)}\right) \end{cases}$$

где каждое уравнение системы – дифференциальное уравнение n–го порядка, зависящее от $y_1(x)$.

Пример 1. Решить систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_1 + y_2 + x \\ \frac{dy_1}{dx} = -4y_1 - 3y_2 + 2x \end{cases}$ при начальных условиях $\begin{cases} y_{1_{x=x_0}} = 1, \\ y_{2_{x=x_0}} = 0. \end{cases}$

Решение.

Дифференцируя по x первое уравнение, будем иметь:

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{dy_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx} + 1$$

Подставляя сюда выражения $\frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}$ из системы, получим:

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = y_1 + y_2 + x - 4y_1 - 3y_2 + 2x + 1$$

или

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = -3y_1 - 2y_2 + 3x + 1$$

Составляем новую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_1 + y_2 + x \\ \dfrac{d^2y_1}{dx^2} = -3y_1 - 2y_2 + 3x + 1 \end{cases}$$

Считаем y_1 и y_2 неизвестными:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = \dfrac{dy_1}{dx} - x \\ 3y_1 + 2y_2 = 3x + 1 - \dfrac{d^2y_1}{dx^2} \end{cases}$$

Умножим первое уравнение полученной системы на -2:

$$\begin{cases} -2y_1 - 2y_2 = \dfrac{dy_1}{dx} - x \\ 3y_1 + 2y_2 = 3x + 1 - \dfrac{d^2y_1}{dx^2} \end{cases}$$

Сложив первое и второе уравнение предыдущей системы, получим первое уравнение новой системы, а вместо второго перепишем первое уравнение предыдущей системы, выразив оттуда y_2:

$$\begin{cases} y_1 = -2y_1' + 2x - y_1'' + 3x + 1 \\ y_2 = y_1' - x - (-2y_1' + 2x - y_1'' + 3x + 1) \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} y_1 = -y_1'' - 2y_1' + 5x + 1 \\ y_2 = y_1'' + 3y_1' - 6x - 1 \end{cases}$$

Решаем первое уравнение полученной системы:

$$y_1'' + 2y_1' + y_1 = 5x + 1$$

Общее решение данного неоднородного уравнения будем искать в виде:

$$y_1 = \overline{y} + y^*$$

Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y_1'' + 2y_1' + y_1 = 0$$

Для этого составим к нему характеристическое уравнение

$$k^2 + 2k + 1 = 0$$
$$(k+1)^2 = 0$$

откуда

$$k_{1,2} = -1$$

Тогда получим

$$\overline{y} = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x}$$

Т.к. правая часть данного неоднородного уравнения имеет вид $e^{0x}(5x+1)$, причем 0 не является корнем характеристического уравнения, то частное решение будем искать в форме

$$y^* = Ax + B$$

откуда

$$y^{*\prime} = A$$

и

$$y^{*\prime\prime} = 0$$

Подставляя y^*, $y^{*\prime}$ и $y^{*\prime\prime}$ в исходное дифференциальное уравнение, будем иметь:

$$2A + Ax + B = 5x + 1$$

или

$$Ax + 2A + B = 5x + 1$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} A = 5 \\ 2A + B = 1 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} A = 5 \\ B = -9 \end{cases}$$

Т.о. частное решение y^* равно:

$$y^* = 5x - 9$$

Следовательно, общее решение y_1 примет вид:

$$y_1 = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + 5x - 9$$

Найдем производные y_1' и y_1'':

$$y_1' = -C_1e^{-x} - C_2xe^{-x} + C_2e^{-x} + 5$$
$$y_1'' = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} - C_2e^{-x} - C_2e^{-x}$$

Подставим полученные выражения во второе уравнение полученной системы дифференциальных уравнений:

$$y_2 = (C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} - 2C_2e^{-x}) + 3(-C_1e^{-x} - C_2xe^{-x} + C_2e^{-x} + 5) - 6x - 1$$
$$y_2 = e^{-x}(C_1 - 2C_2 - 3C_1 + 3C_2) + C_2xe^{-x} - 3C_2xe^{-x} + 15 - 6x - 1$$

откуда

$$y_2 = e^{-x}(C_2 - 2C_1) - 2C_2xe^{-x} - 6x + 14$$

Решением исходной системы дифференциальных уравнений является:

$$\begin{cases} y_1 = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + 5x - 9 \\ y_2 = e^{-x}(C_2 - 2C_1) - 2C_2xe^{-x} - 6x + 14 \end{cases}$$

Подставив начальные условия

$$\begin{cases} 1 = C_1 - 9 \\ 0 = C_2 - 2C_1 + 14 \end{cases}$$

Найдем постоянные C_1 и C_2:

$$\begin{cases} C_1 = 10 \\ C_2 = 6 \end{cases}$$

Т.о., решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям, имеет вид

$$\begin{cases} y_1 = 10e^{-x} + 6xe^{-x} + 5x - 9 \\ y_2 = -14e^{-x} - 12xe^{-x} - 6x + 14 \end{cases}$$

§18. Числовые ряды. Сумма ряда.

Определение 1. **Выражение вида**

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

называется числовым рядом, где $u_1, u_2, \dots, u_n$ – некоторые числа.

Пример 1. Числовыми рядами являются

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 + \cdots$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n = 2 + 3 + 4 + \cdots + (n+1) + \cdots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \cdots$$

Определение 2. **Сумма конечного число n первых членов ряда называется n частичной суммой ряда:**

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

Пример 2. Для ряда $\sum_{n=2}^{\infty} n = 2 + 3 + 4 + \cdots + (n+1) + \cdots$ n частичными суммами являются

$$S_1 = 2,\ S_2 = 2 + 3 = 5,\ S_3 = 2 + 3 + 4 = 9$$

Определение 3. **Если существует конечный предел n частичной суммы ряда при $n \to \infty$, то ряд сходится:**

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s$$

В противном случае – расходится.

Теорема 1. Отбрасывание или добавление конечного числа членов ряда не влияет на сходимость ряда.

Доказательство.

Пусть дан числовой ряд $u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$, сумма n первых членов которого $s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$. Данный ряд сходится, т.е. выполняется:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s$$

Отбросим k первых членов ряда:

$$s_n = s_k + \sigma_{n-k}$$

где s_k – сумма k отброшенных членов;

σ_{n-k} – сумма членов ряда, входящих в сумму s_n и не входящих в s_k.

$$\sigma_{n-k} = s_n - s_k$$

Заметим, что s_k – постоянное число, не зависящее от n.

Используя свойства пределов, докажем, что ряд σ_{n-k} будет сходиться:

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{n-k} = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_k) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_k = s - s_k = \sigma$$

Т.о. получили:

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{n-k} = \sigma$$

Следовательно, ряд σ_{n-k} также сходиться.

Что и требовалось доказать.

Теорема 2. Если ряд $u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$ сходится к сумме s, то ряд $Cu_1 + Cu_2 + \cdots + Cu_n + \cdots$ сходится к сумме Cs.

Доказательство.

По условию теоремы, числовой ряд $u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$, сумма n первых членов которого $s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$, сходится, т.е. выполняется:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s$$

Составим n частичную сумму σ_n ряда $Cu_1 + Cu_2 + \cdots + Cu_n + \cdots$:

$$\sigma_n = Cu_1 + Cu_2 + \cdots + Cu_n = C(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = Cs_n$$

Используя свойства пределов, исследуем ряд $Cu_1 + Cu_2 + \cdots + Cu_n + \cdots$ на сходимость:

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} Cs_n = C \lim_{n\to\infty} s_n = Cs$$

Т.о. получили:

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = Cs$$

Следовательно, ряд $Cu_1 + Cu_2 + \cdots + Cu_n + \cdots$ также сходиться.

Что и требовалось доказать.

Теорема 3. Если ряды $u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$ и $v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \cdots$ сходится и суммы этих рядов s_1 и s_2 соответственно, то ряд $(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \cdots + (u_n + v_n) + \cdots$ также сходится и сумма его равна $s_1 + s_2$.

Доказательство.

По условию теоремы, числовой ряд $u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$, сумма первых членов которого $s_{1_n} = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$, сходится, т.е. выполняется:

$$\lim_{n\to\infty} s_{1_n} = s_1$$

и числовой ряд $v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \cdots$, сумма первых членов которого $s_{2_n} = v_1 + u_2 + \cdots + u_n$, сходится, т.е. выполняется:

$$\lim_{n\to\infty} s_{2_n} = s_2$$

Составим n частичную сумму σ_n суммарного ряда $(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \cdots + (u_n + v_n) + \cdots$:

$$\sigma_n = (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \cdots + (u_n + v_n) = (u_1 + u_2 + \cdots + u_n) + (v_1 + u_2 + \cdots + u_n) = s_{1_n} + s_{2_n}$$

Используя свойства пределов, докажем, что суммарный ряд будет сходиться:

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} (s_{1_n} + s_{2_n}) = \lim_{n\to\infty} s_{1_n} + \lim_{n\to\infty} s_{2_n} = s_1 + s_2$$

Т.о. получили:

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = s_1 + s_2$$

Следовательно, ряд $(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \cdots + (u_n + v_n) + \cdots$ также сходиться, и его сумма равна $s_1 + s_2$.

Что и требовалось доказать.

§19. Необходимый признак сходимости ряда.

Теорема 1. Если ряд сходится, то его n–й член стремится к нулю при неограниченном возрастании n.

Доказательство.

Пусть ряд $u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$ сходится, т.е. выполняется

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s$$

Сумма первых членов ряда

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = s_{n-1} + u_n$$

откуда

$$u_n = s_n - s_{n-1}$$

Заметим, что также имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s$$

т.к. при $n \to \infty$ и $(n-1) \to \infty$.

Тогда предел n–го члена ряда равен

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0$$

Следовательно, предел n–го члена ряда равен нулю.

Что и требовалось доказать.

Следствие 1. Если $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд расходится. Если $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, то ряд может как сходиться, так и расходиться.

§20. Сравнение рядов с положительными членами.

Введем таблицу рядов, поведение которых необходимо знать:

1. гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

Ряд сходится.

2. ряд Дирихле

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$$

Если $\begin{cases} p>1, \text{то ряд сходится,} \\ p\le 1, \text{то ряд расходится.}\end{cases}$

3. геометрическая прогрессия

$$\sum_{n=0}^{\infty}q^n$$

Если $\begin{cases} |q|<1, \text{то ряд сходится,} \\ |q|\ge 1, \text{то ряд расходится.}\end{cases}$

Теорема 1. Если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$ не больше членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty}v_n=v+1+v_2+\cdots+v_n+\cdots$, т.е. $u_n\le v_n$, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ сходится, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$.

Доказательство.

По условию теоремы, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ сходится, а его частичная сумма равна $s_n=v_1+v_2+\cdots+v_n$.

Так как этот ряд сходится, то существует предел его частичной суммы:

$$\lim_{n\to\infty}s_n=s$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ имеет частичную сумму $\sigma_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$

Т.к. $u_n\le v_n$, то выполняется и $\sigma_n\le s_n<s$.

Заметим, что при увеличении n, частичная сумма σ_n будет также увеличиваться.

По теореме Вейерштрасса, последовательность частичных сумм, которая возрастает и ограничена, имеет предел:

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\sigma\le s.$$

Т.е. и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ также сходится.

Что и требовалось доказать.

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$.

Решение.

Сравним ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{n^n}+\cdots$$

с рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n+\cdots$$

который сходится, т.к. $q=\frac{1}{2}<1$.

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$ также сходится, т.к. его члены, начиная со второго меньше соответствующих членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Теорема 2. Если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$ не меньше соответствующих членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty}v_n=v+1+v_2+\cdots+v_n+\cdots$, т.е. $u_n\ge v_n$, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ расходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ также расходится.

Доказательство.

По условию теоремы, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ расходится, а его частичная сумма равна $s_n=v_1+v_2+\cdots+v_n$.

При увеличении n, частичная сумма $\sigma_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$ ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ будет также увеличиваться.

Так как этот ряд расходится, то:

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\infty$$

Т.к. $u_n\ge v_n$, то выполняется и $\sigma_n\ge s_n$ и

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\infty.$$

Т.е. и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ также расходится.

Что и требовалось доказать.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Решение.

Сравним ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\cdots$$

с рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots,$$

который расходится.

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ также расходится, т.к. его члены, начиная со второго меньше соответствующих членов гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

Теорема 3. Если предел отношения n–ых членов двух рядов $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ есть число A, не равное нулю или бесконечности, т.е. $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=A\ne 0,\infty$, то поведение рядов одинаково.

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+n-1}$.

Решение.

Сравним ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+n-1}=1+\frac{2}{5}+\cdots+\frac{n}{n^2+n-1}+\cdots$$

с гармоническим рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots,$$

который расходится.

n-ый член ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+n-1}$ равен $u_n=\frac{n}{n^2+n-1}$, а -ый член ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ равен $v_n=\frac{1}{n}$.

Найдем предел отношения этих n–ых членов:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n^2+n-1}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}=1\ne 0,\infty$$

т.е. поведение рядов одинаково, следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+n-1}$ также расходится.

§21. Признак Даламбера.

Теорема 1 (признак Даламбера). Если в ряде $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$ с положительными членами отношение членов u_{n+1} к u_n имеет предел l при $n \to \infty$, т.е. $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, то

$$\begin{cases} l < 1, \text{то ряд сходится}, \\ l > 1, \text{то ряд расходится}, \\ l = 1, \text{ то требуется дополнительное исследование}. \end{cases}$$

Доказательство.

1. Пусть $l < 1$.

По условию теоремы,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l < 1,$$

т.е. для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что для всех $n \geq N$ будет выполняться $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - l\right| < \varepsilon$.

Выберем такое число q, чтобы $q - l = \varepsilon$ и выполнялось соотношение $l < q < 1$.

Тогда неравенство $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - l\right| < \varepsilon$ перепишется в виде:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - l < q - l$$
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < q$$

Умножив обе части неравенства на u_n, получим:

$$u_{n+1} < q u_n$$

Запишем полученное неравенство для различных значений n, начиная с номера N:

$$\left.\begin{array}{c} u_{N+1} < q u_N, \\ u_{N+2} < q u_{N+1} < q^2 u_N, \\ u_{N+3} < q u_{N+2} < q^3 u_N, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\}$$

Рассмотрим теперь два ряда:

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_N + u_{N+1} + u_{N+2} + \cdots$$
$$u_1 + u_2 + \cdots + u_N + q u_N + q^2 u_N + q^3 u_N + \cdots$$

Преобразовав второй ряд, получим:

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_N (1 + q + q^2 + q^3 + \cdots)$$

Во втором ряде в скобках стоит геометрическая прогрессия, а т.к. $q < 1$, то он сходится. Члены первого ряда, начиная с u_{N+1}, меньше членов второго ряда. Следовательно, и первый ряд сходится.
Что и требовалось доказать.

2. Пусть $l > 1$.

Тогда из равенства $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l > 1$ следует, что начиная с некоторого номера N, т.е. для $n \geq N$, будет иметь место неравенство $\frac{u_{n+1}}{u_n} > q$, где $q > 1$, или $u_{n+1} > q u_n$ для всех $n \geq N$. Это означает, что члены ряда возрастают, начиная с номера $N+1$, следовательно, n–ый член не стремится к нулю, т.е. $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$. Т.о. согласно следствию из необходимого признака сходимости ряда, ряд расходится.
Что и требовалось доказать.

3. Пусть $l = 1$.

В этом случае требуется дополнительное исследование.

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$.

Решение.

Применим признак Даламбера к ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \cdots + \frac{2^n}{n!} + \cdots$, тогда

$$u_n = \frac{2^n}{n!}; u_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$$

Берем предел отношения членов u_{n+1} к u_n:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^n \cdot 2}{n!\,(n+1)}}{\frac{2^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0$$

Т.к. $0 < 1$, то ряд сходится.

§22. Признак Коши (радикальный).

Теорема 1 (признак Коши). Если в ряде $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$ с положительными членами отношение членов u_{n+1} к u_n имеет предел l при $n \to \infty$, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l, \text{ то } \begin{cases} l < 1, \text{то ряд сходится,} \\ l > 1, \text{то ряд расходится,} \\ l = 1, \text{ то требуется дополнительное исследование.} \end{cases}$$

Доказательство.

1. Пусть $l < 1$.

По условию теоремы,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l < 1,$$

т.е. для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что для всех $n \geq N$ будет выполняться $\left|\sqrt[n]{u_n} - l\right| < \varepsilon$.

Выберем такое число q, чтобы $q - l = \varepsilon$ и выполнялось соотношение $l < q < 1$.

Тогда неравенство $\left|\sqrt[n]{u_n} - l\right| < \varepsilon$ перепишетсяв виде:

$$\sqrt[n]{u_n} - l < q - l$$
$$\sqrt[n]{u_n} < q$$

Умножив обе части неравенства на n, получим:

$$u_n < q^n$$

Рассмотрим теперь два ряда:

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_N + u_{N+1} + u_{N+2} + \cdots$$
$$u_1 + u_2 + \cdots + q^n + q^{n+1} + q^{n+2} + \cdots$$

Второй ряд получили, учитывая, что $u_n = q^n$.

Преобразовав второй ряд, получим:

$$u_1 + u_2 + \cdots + q^n(1 + q + q^2 + \cdots)$$

Во втором ряде в скобках стоит геометрическая прогрессия, а т.к. $q < 1$, то он сходится. Члены первого ряда, начиная с u_N, меньше членов второго ряда. Следовательно, и первый ряд сходится.

Что и требовалось доказать.

2. Пусть $l > 1$.

Тогда из равенства $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l > 1$ следует, что начиная с некоторого номера N, т.е. для $n \geq N$, будет иметь место неравенство $\sqrt[n]{u_n} > q^n$, где $q > 1$, или $u_n > 1$. Это означает, что члены ряда возрастают, начиная с u_n, следовательно, n–ый член не стремится к нулю, т.е. $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$. Т.о. согласно следствию из необходимого признака сходимости ряда, ряд расходится.

Что и требовалось доказать.

3. Пусть $l = 1$.

В этом случае требуется дополнительное исследование.

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$.

Решение.

Применим признак Коши к ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n = \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n + \cdots$, тогда

$$u_n = \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$$

Берем предел u_n:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$$

Т.к. $\frac{1}{2} < 1$, то ряд сходится.

§23. Интегральный признак Коши.

Теорема 1. Пусть члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$ положительны и не возрастают, т.е. $u_1 \geq u_2 \geq \cdots \geq u_n \geq u_{n+1} \geq \cdots$, и пусть функция $f(x)$ – такая, что $f(1) = u_1, f(2) = u_2, \dots, f(n) = u_n$. Тогда, если несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ сходится, то сходится и ряд; а если расходится – то расходится и ряд.

Доказательство.

Изобразим члены ряда графически, откладывая по оси абсцисс номера $1, 2, 3, \dots, n, n+1, \dots$ членов ряда, а по оси ординат – соответствующие значения членов ряда $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ На этом же чертеже построим график непрерывной невозрастающей функции $y = f(x)$, удовлетворяющей условию $f(1) = u_1, f(2) = u_2, \dots, f(n) = u_n$.

На рис. 1 первый построенный прямоугольник имеет основание, равное 1, и высоту $f(1) = u_1$. Следовательно, площадь первого прямоугольника равна u_1, тогда площадь второго прямоугольника – u_2, n-ого прямоугольника – u_n. Тогда площадь ступенчатой фигуры находится как:

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

а площадь области, ограниченной кривой $y = f(x)$ и прямыми $x = 1, x = n+1, y = 0$:

$$\int_1^{n+1} f(x)dx$$

Очевидно, что

$$s_n > \int_1^{n+1} f(x)dx$$

На рис. 2 первый построенный прямоугольник имеет высоту $f(2) = u_2$. Следовательно, площадь первого прямоугольника равна u_2, тогда площадь второго прямоугольника – u_3, n-ого прямоугольника – u_{n+1}. Тогда площадь ступенчатой фигуры находится как:

$$s_{n+1} = u_2 + u_3 + \cdots + u_{n+1}$$

Очевидно, что

$$s_{n+1} - u_1 < \int_1^{n+1} f(x)dx$$

Т.к. $\int_1^{n+1} f(x)dx < \int_1^{\infty} f(x)dx$, то получим

$$s_{n+1} < \int_1^{\infty} f(x)dx + u_1$$

Рассмотрим теперь оба случая:

1. Пусть несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ сходится, тогда

$$s_n < s_{n+1} < \int_1^{\infty} f(x)dx + u_1,$$

т.е. частичная сумма s_n остается ограниченной при всех значениях n. Но при увеличении n она возрастает, т.к. все члены u_n положительны. Если же последовательность возрастает и ограничена, то она имеет конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s,$$

т.е. ряд расходится.

Что и требовалось доказать.

2. Пусть несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ расходится, т.е. $\int_1^{\infty} f(x)dx = \infty$. Это значит, что $\int_1^{n+1} f(x)dx$ неограниченно возрастает при возрастании n. Но тогда в силу неравенства $s_n > \int_1^{n+1} f(x)dx$ частичная сумма s_n также неограниченно возрастает при возрастании n, т.е. ряд расходится.

Что и требовалось доказать.

Пример 1. Исследовать на сходимость гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Решение.

Применим интегральный признак Коши, положив $f(x) = \frac{1}{x}$, т.к. $u_n = \frac{1}{n}$.

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to\infty} \ln|x|\,\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty} (\ln|b| - \ln|1|) = \ln|\infty| = \infty$$

Т.о. несобственный интеграл расходиться, следовательно, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходиться.

§24. Знакочередующиеся ряды. Теорема Лейбница.

Определение 1. **Ряд вида $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + (-1)^{n-1}u_n + \cdots$ называется знакочередующимся, где u_i – знакоположительный член.**

Теорема 1. Если в знакочередующемся ряде члены таковы, что

1) $u_1 > u_2 > u_3 > u_4 > \cdots > u_n > u_{n+1} > \cdots$
2) $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

то ряд сходится, и его сумма не превосходит первого члена, т.е. $s < u_1$.

Доказательство.

Рассмотрим n частичную сумму ряда с четным числом членов:

$$s_{2n} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \cdots + (u_{2n-1} - u_{2n})$$

По условию теоремы, $u_1 > u_2,\ u_3 > u_4, \ldots,\ u_{2n-1} > u_{2n}$

или

$$u_1 - u_2 > 0, u_3 - u_4 > 0, \ldots, u_{2n-1} - u_{2n} > 0$$

Следовательно, сумма s_{2n} положительна и с увеличением n возрастает.

Запишем теперь эту же сумму так:

$$s_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \cdots - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n}$$

В силу условия теоремы каждая из скобок положительна. Поэтому в результате вычитания этих скобок из u_1 получаем число, меньшее u_1, т.е.

$$s_{2n} < u_1.$$

Т.о. сумма s_{2n} возрастает при возрастании n и ограничена сверху. Следовательно, по теореме Вейерштрасса, получаем:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s$$

т.е. четная n частичная сумма сходится.

Исследуем на сходимость нечетную n частичную сумму ряда:

$s_{2n+1} = s_{2n} + u_{2n+1}$

Вычислим предел от этой суммы:

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}(s_{2n} + u_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty} s_{2n} + \lim_{n\to\infty} u_{2n+1} = s + 0 = s$$

т.е. нечетная n частичная сумма сходится.

Что и требовалось доказать.

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$

Решение.

Распишем данный ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + \cdots$$

Проверим условия теоремы Лейбница:

1) $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \cdots > \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} > \cdots$ Условие выполняется.
2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$. Условие выполняется.

Следовательно, данный ряд сходится и сумма его не превзойдет $u_1 = 1$.

§25. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость.

Определение 1. **Ряд называется знакопеременным, если его члены могут быть как положительными, так и отрицательными.**

Замечание 1. Знакочередующийся ряд является частным случаем знакопеременного.

Теорема 1. Если знакопеременный ряд $u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$ такой, что ряд, составленный из абсолютных величин его членов $|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_n| + \cdots$, сходится, то и знакопеременный ряд также сходится.

Доказательство.

По условию теоремы, ряд $u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$ – знакопеременный. Составим ряд из модулей:

$$|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_n| + \cdots$$

Выпишем n частичные суммы этих рядов:

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = s_{1_n} - s_{2_n}$$
$$\sigma_n = |u_1| + |u_2| + \cdots + |u_n| = s_{1_n} + s_{2_n}$$

где s_{1_n} – сумма всех положительных,

s_{2_n} – сумма абсолютных величин всех отрицательных членов среди n первых членов данного ряда.

По условию теоремы, ряд из модулей сходится, т.е.

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n = \sigma$$

или

$$\lim_{n\to\infty}(s_{1_n} + s_{2_n}) = \sigma$$
$$\lim_{n\to\infty} s_{1_n} + \lim_{n\to\infty} s_{2_n} = \sigma$$

Обозначим $\lim_{n\to\infty} s_{1_n} = s_1$ и $\lim_{n\to\infty} s_{2_n} = s_2$, где s_1 и s_2 – некоторые числа.

Вычислим предел от s_n:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}(s_{1_n} - s_{2_n}) = \lim_{n\to\infty} s_{1_n} - \lim_{n\to\infty} s_{2_n} = s_1 - s_2 = s$$

Следовательно, знакопеременный ряд сходится.

Что и требовалось доказать.

Определение 2. **Знакопеременный ряд $u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$ называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов.**

Определение 3. **Знакопеременный ряд $u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$ называется условно сходящимся, если он сходится, а ряд, составленный из абсолютных величин его членов, расходится.**

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$.

Решение.

Распишем данный ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + \cdots$$

Проверим условия теоремы Лейбница:

1) $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \cdots > \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} > \cdots$ Условие выполняется.
2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$. Условие выполняется.

Следовательно, данный ряд сходится.

Составим ряд из модулей:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

Получили гармонический ряд, который расходится.

Следовательно, данный ряд условно сходится.

Теорема 2. Если ряд сходится абсолютно, то он сходится абсолютно при любой перестановке его членов.

Теорема 3. Если ряд сходится условно, то каким бы ни было число A, можно так переставить члены этого ряда, что его сумма будет равна A (включая и бесконечность).

Пример 2. Пусть дан ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + \cdots$$

Обозначим через s его сумму.

Сделаем перестановку членов данного ряда так, чтобы за одним положительным членом следовали два отрицательных:

$\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}\right) + \cdots = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + \cdots = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \cdots = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + \right.$ *…=12s*

§26. Функциональные ряды.

Определение 1. **Ряд вида**

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$

называется функциональным, где $u_i(x)$ – некоторые функции.

Пример 1. Рассмотрим функциональный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1} + \cdots$$

При $x = 1$ данный ряд примет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1^n = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \cdots + 1^{n-1} + \cdots$$

и будет расходиться.

При $x = \frac{1}{2}$ данный ряд примет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots$$

и будет сходиться.

Определение 2. **Совокупность тех значений, при которых функциональный ряд сходится, называется областью сходимости ряда.**

Для функциональных рядов можно ввести n частичную сумму:

$$s_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x)$$

Функциональный ряд будет сходиться при

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = s(x)$$

Величину $\boldsymbol{s(x) - s_n(x)}$ называют **остатком ряда** и обозначают $\boldsymbol{r_n(x)}$. Следовательно, сумму ряда можно представить в виде:

$$s(x) = s_n(x) + r_n(x)$$

Теорема 1. Если функциональный ряд сходится, то его остаток стремится к нулю.

Доказательство.

По условию теоремы, функциональный ряд сходится, т.е. выполняется

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = s(x)$$

Используя свойства пределов и предыдущие выражения, вычислим предел из остатка $r_n(x)$ ряда:

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left(s(x) - s_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty} s(x) - \lim_{n\to\infty} s_n(x) = s(x) - s(x) = 0$$

Что и требовалось доказать.

§27. Мажорируемые ряды.

Определение 1. **Функциональный ряд $u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$ называется мажорируемым в некоторой области изменения переменной x, если существует такой сходящийся числовой ряд $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n + \cdots$, что для всех значений x из данной области выполняется**

$$u_1(x) \le \alpha_1, u_2(x) \le \alpha_2, \dots, u_n(x) \le \alpha_n, \dots$$

Пример 1.

Ряд $\frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \cdots + \frac{\cos nx}{n^2} + \cdots$ мажорируем на всей оси Ox. Для всех значений x выполняется соотношение

$$\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

а ряд

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots$$

сходится.

Теорема 1. Пусть функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$ мажорируем на отрезке $[a, b]$ и $s(x)$ – сумма ряда, а $s_n(x)$ – это n частичная сумма ряда. Тогда для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon < 0$ найдется такой номер N, что для всех значений $n \ge N$ будет выполняться $|s(x) - s_n(x)| < \varepsilon$ для любого x из отрезка $[a, b]$.

Доказательство.

Обозначим через σ сумму числового ряда

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n + \cdots$$

Тогда

$$\sigma = \sigma_n + \varepsilon_n$$

где σ_n – сумма n первых членов числового ряда, а ε_n – сумма всех остальных членов ряда, т.е.

$$\varepsilon_n = \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \cdots$$

Так как этот ряд сходится, то

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$$

и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = \varepsilon.$$

Представим теперь сумму функционального ряда в виде

$$s(x) = s_n(x) + r_n(x),$$

где

$$s_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x),$$
$$r_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + u_{n+3}(x) + \cdots$$

Из определения мажорируемого ряда следует, что

$$|u_{n+1}(x)| \le \alpha_{n+1}, |u_{n+2}(x)| \le \alpha_{n+2}, \dots$$

и поэтому

$$|r_n(x)| \le \varepsilon_n$$

для всех x рассматриваемой области.

Т.к. $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$, то и $\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0$.

Т.к. $r_n(x) = s(x) - s_n(x)$ и $\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0$, т.е. всегда для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon < 0$ найдется такой номер N, что для всех значений $n \ge N$ будет выполняться $|r_n(x)| < \varepsilon$, то будет выполняться и $|s(x) - s_n(x)| < \varepsilon$ для любого x из отрезка $[a, b]$.

Что и требовалось доказать.

Замечание 1. Существуют и немажорируемые ряды, которые обладают указанным свойством: $|s(x) - s_n(x)| < \varepsilon$, где $n \ge N$.

Определение 2. **Функциональный ряд $u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$ называется равномерно сходящимся на отрезке $[a, b]$, если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что при всех $n \ge N$ будет выполняться $|s(x) - s_n(x)| < \varepsilon$ для любого x из отрезка $[a, b]$.**

§28. Непрерывность суммы ряда.

Пусть дан функциональный ряд, состоящий из непрерывных функций и сходящийся на отрезке $[a, b]$:

$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots = s(x)$$

где функция $s(x)$ может быть как непрерывной, так и разрывной.

Теорема 1. Сумма ряда непрерывных функций, мажорируемого на отрезке $[a, b]$, есть функция, непрерывная на этом отрезке.

§29. Интегрирования и дифференцирование рядов.

Теорема 1. Пусть функциональный ряд непрерывных функций мажорируем на отрезке $[a, b]$ и $s(x)$ – его сумма. Тогда выполняется

$$\int_{\alpha}^{x} s(x)dx = \int_{\alpha}^{x} u_1(x)dx + \int_{\alpha}^{x} u_2(x)dx + \cdots + \int_{\alpha}^{x} u_n(x)dx + \cdots$$

Теорема 2. Ряд непрерывных функции, мажорируемый на отрезке $[a, b]$, можно почленно дифференцировать:

$$s'(x) = u_1'(x) + u_2'(x) + \cdots + u_n'(x) + \cdots$$

§30. Степенные ряды. Интервал сходимости степенного ряда.

Определение 1. Степенным рядом называется функциональный ряд вида $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_2x^3 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots$, где a_i – некоторые числовые коэффициенты.

Теорема 1 (теорема Абеля). 1) Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится при некотором значении x_0, не равном нулю, т.е. в точке $x = x_0 \neq 0$, то он абсолютно сходится при всех значениях $|x| < |x_0|$.

2) Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ расходится в точке $x = x_0 \neq 0$, то он расходится при всех значениях $|x| > |x_0|$.

Доказательство.

1) По условию теоремы, степенной числовой ряд $a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_{n-1}x_0^{n-1} + \cdots$ сходится, следовательно, по необходимому признаку сходимости выполняется:

$$\lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$$

Это означает, что любой член $a_n x_0^n$ меньше некоторого числа M, т.е. $a_n x_0^n < M$.

Рассмотрим степенной ряд:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots$$

Представим этот ряд в виде:

$$a_0 + a_1x_0\frac{x}{x_0} + a_2x_0^2\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \dots + a_{n-1}x_0^{n-1}\left(\frac{x}{x_0}\right)^{n-1} + \cdots$$

Заменив $a_0, a_1x_0, a_2x_0^2, \dots, a_{n-1}x_0^{n-1}, \dots$ на M, получим новый ряд:

$$M + M\frac{x}{x_0} + M\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \dots + M\left(\frac{x}{x_0}\right)^{n-1} + \cdots,$$

члены которого больше соответствующих членов предыдущего ряда.

$$M\left(1 + \frac{x}{x_0} + \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \dots + \left(\frac{x}{x_0}\right)^{n-1} + \cdots\right)$$

Если выполняется $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$, т.е. $|x| < |x_0|$, то последний ряд представляет геометрическую прогрессию и, следовательно, сходится. Т.о. и предыдущие ряды также сходятся.

Что и требовалось доказать.

2) Предположим обратное, что при $|x| > |x_0|$ ряд сходится. Тогда в силу только что доказанной первой части теоремы, он должен был бы сходиться и в точке x_0, а он в ней расходится. Т.о. предположение ошибочно, следовательно, ряд расходится при всех значениях $|x| > |x_0|$

Что и требовалось доказать.

Замечание 1. Областью сходимости степенного ряда является интервал с центром в начале координат.

Пример 1. Найти интервал сходимости степенного ряда $\frac{2x}{1} + \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3} + \dots + \frac{(2x)^n}{n} + \cdots$

Решение.

Воспользуемся признаком Даламбера, исследуя ряд сразу на абсолютную сходимость:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = q < 1$$

$$u_n = \frac{(2x)^n}{n};\ u_{n+1} = \frac{(2x)^{n+1}}{n+1}$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(2x)^{n+1}}{n+1}}{\frac{(2x)^n}{n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(2x)^n\cdot 2x}{n+1}}{\frac{(2x)^n}{n}}\right| = |2x|\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = |2x|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = |2x| < 1$$

$$-1 < 2x < 1$$

Отсюда находим область абсолютной сходимости ряда $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$. Далее исследуем степенной ряд в конечных точках интервала ($q = 1$).

При $x = \frac{1}{2}$ получаем следующий степенной ряд:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \cdots$$

Это гармонический ряд, следовательно, он расходится.

При получаем следующий степенной ряд:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \cdots$$

Проверим условия теоремы Лейбница:

1) $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \dots > \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} > \cdots$ Условие выполняется.
2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$. Условие выполняется.

Следовательно, данный ряд сходится.

Составим ряд из модулей:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \cdots$$

Т.о. получили гармонический ряд, который расходится. Следовательно, ряд $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \cdots$ условно сходится.

Теорема 2. Степенной ряд $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots$ мажорируем на любом отрезке $[-\rho, \rho]$, целиком лежащем внутри интервала сходимости. Здесь $\rho < R$, а R – радиус сходимости степенного ряда.

Доказательство.

По условию теоремы, $\rho < R$, где R – радиус сходимости ряда. Следовательно, числовой ряд $a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + \dots + a_{n-1}\rho^{n-1} + \cdots$ сходится. Но при всех $x < \rho$ члены степенного ряда $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots$ не больше соответствующих членов ряда $a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + \dots + a_{n-1}\rho^{n-1} + \cdots$. Следовательно, степенной ряд сходится и мажорируем на отрезке $[-\rho, \rho]$.

Что и требовалось доказать.

Замечание 2. Т.к. степенные ряды мажорируемы внутри интервала сходимости, то их можно почленно интегрировать и дифференцировать.

Замечание 3. Степенной ряд в окрестности точки a – это ряд вида

$$C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + \dots + C_{n-1}(x-a)^{n-1} + \cdots$$

Его называют степенным рядом по степеням $(x - a)$ или обобщенным.

Пример 2. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(x-2)^n = (x-2) + (x-2)^2 + (x-2)^3 + \dots + (x-2)^n + \cdots$

Решение.

Воспользуемся признаком Даламбера, исследуя ряд сразу на абсолютную сходимость:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = q < 1$$

$$u_n = (x-2)^n;\ u_{n+1} = (x-2)^{n+1}$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-2)^{n+1}}{(x-2)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-2)^n(x-2)}{(x-2)^n}\right| = |x-2|\lim_{n\to\infty}1 = |x-2| < 1$$

$$-1 < x - 2 < 1$$

Отсюда находим область абсолютной сходимости ряда $1 < x < 3$. Далее исследуем степенной ряд в конечных точках интервала ($q = 1$).

При $x = 3$ получаем следующий степенной ряд:

$$1 + 1 + 1 + \dots + 1 + \cdots$$

По необходимому признаку сходимости данный ряд расходится.

При получаем следующий степенной ряд:

$$-1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^n + \cdots$$

По необходимому признаку сходимости данный ряд расходится.

§31. Ряды Тейлора и Маклорена.

Пусть дан обобщенный степенной ряд:

$$C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + C_3(x-a)^3 + \cdots + C_n(x-a)^n + \cdots$$

По теореме Абеля этот степенной ряд будет сходится в некотором интервала (a, b)

$$C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + C_3(x-a)^3 + \cdots + C_n(x-a)^n + \cdots = f(x)$$

Внутри интервала сходимости ряд будет мажорируем, т.е. в левой части уравнения стоят непрерывные функции, тогда и функция $f(x)$ непрерывна. Следовательно, внутри интервала сходимости этот ряд можно почленно интегрировать и дифференцировать.

Найдем связь коэффициентов $C_0, C_1, C_2, \dots, C_n$ с видом функции $f(x)$.

Положим $x = a$, тогда $f(a) = C_0$

Найдем производную от обеих частей уравнения:

$f'(x) = C_1 + 2C_2(x-a) + 3C_3(x-a)^2 + \cdots + (n-1)C_{n-1}(x-a)^{n-2} + nC_n(x-a)^{n-1} + \cdots$

Положим $x = a$, тогда $f'(a) = C_1$.

Найдем вторую производную от уравнения:

$f''(x) = 2C_2 + 2\cdot 3C_3(x-a) + 3\cdot 4C_4(x-a)^2 + \cdots + n(n+1)C_{n+1}(x-a)^{n-1} + \cdots$

Положим $x = a$, тогда $C_2 = \frac{f''(a)}{2}$.

Таким образом можно получить

$C_3 = \frac{f''''(a)}{1\cdot2\cdot3}$

……………

$C_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$

Окончательно, подставив коэффициенты $C_0, C_1, C_2, \dots, C_n$ в уравнение, получим **формулу Тейлора**:

$$\boldsymbol{f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \cdots}$$

Если a положить равным нулю, то получится **формула Маклорена**:

$$\boldsymbol{f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \cdots}$$

или

$$\boldsymbol{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)\cdot x^n}{n!}}$$

§32. Примеры разложения функций в ряды. Формула Эйлера.

1. Рассмотрим функцию $f(x) = e^x$.

Разложим ее по формуле Маклорена.

Для этого найдем последовательные производные от $f(x) = e^x$ в точке $x = 0$:

$f(x) = e^x, f(0) = e^0 = 1$

$f'(x) = e^x, f'(0) = e^0 = 1$

$f''(x) = e^x, f''(0) = e^0 = 1$ и т.д.

Подставляя полученные значения, получим

$$\boldsymbol{e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots}$$

Используя признак Даламбера, найдем область сходимости ряда. Тогда

$$u_n = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!};\ u_{n+1} = \frac{x^n}{n!}$$

Берем предел отношения членов u_{n+1} к u_n:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^n}{n!}}{\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^n}{(n-1)!\,n}}{\frac{x^n}{x(n-1)!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{n}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = |x|\cdot 0 = 0 < 1$$

Т.о. ряд $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots$ сходится, а его область сходимости – $(-\infty; \infty)$.

2. Рассмотрим функцию $f(x) = \sin x$.

Разложим ее по формуле Маклорена:

Для этого найдем последовательные производные от $f(x) = \sin x$ в точке $x = 0$:

$f(x) = \sin x, f(0) = \sin 0 = 0$

$f'(x) = \cos x, f'(0) = \cos 0 = 1$

$f''(x) = -\sin x, f''(0) = -\sin 0 = 0$

$f'''(x) = -\cos x, f'''(0) = -\cos 0 = -1$

$f''''(x) = \sin x, f''''(0) = \sin 0 = 0$ и т.д.

Подставляя полученные значения, получим

$$\boldsymbol{\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}\cdot x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots}$$

Используя признак Даламбера, нашли область применения функции $f(x) = \sin x$: $(-\infty; \infty)$

3. Аналогично выводится разложение функции $f(x) = \cos x$:

$$\boldsymbol{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}\cdot x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \cdots}$$

Используя признак Даламбера, нашли область применения функции $f(x) = \cos x$: $(-\infty; \infty)$

Пример 1. Вычислить значение функции $f(x) = \sin\frac{1}{2}$ с точностью 0,0001.

Решение.

$$\sin\frac{1}{2} = \frac{1}{2\cdot 1!} - \frac{1}{2^3\cdot 3!} + \frac{1}{2^5\cdot 5!} - \frac{1}{2^7\cdot 7!} + \frac{1}{2^9\cdot 9!} - \cdots \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{2^3\cdot1\cdot2\cdot3} + \frac{1}{2^5\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}$$
$$= \frac{2^7\cdot3\cdot5 - 2^4\cdot5 + 1}{2^8\cdot3\cdot5} = \frac{1920 - 80 + 1}{3840} = \frac{1841}{3840} = 0{,}47942 \approx 0{,}4794$$

4. Используя разложение функции $f(x) = e^x$ и положив вместо x выражение ix, найдем:

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \cdots$$

Принимая во внимание, что $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i, i^6 = -1$ и т.д., преобразуем полученную формулу к виду:

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - \cdots$$

Отделяя в этом ряде действительную и мнимую части, найдем:

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right)$$

В скобках стоят степенные ряды, суммы которых равны $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$ и $\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$. Т.о. получили **формулу Эйлера**:

$$\boldsymbol{e^{ix} = \cos x + i\sin x}$$

§33. Биноминальный ряд.

Разложим в ряд Маклорена функцию $f(x) = (1+x)^m$, где m – рациональное число. При этом будем использовать рекуррентное соотношение.
Заметим, что $f(0) = 1$.
Найдем производную от функции $f(x) = (1+x)^m$:

$$f'(x) = m(1+x)^{m-1}$$

Умножим обе части полученного уравнения на $(1+x)$:

$$f'(x)(1+x) = m(1+x)^m$$

Т.о. получили

$$(1+x)f'(x) = mf(x) \qquad (1)$$

Представим функцию $f(x) = (1+x)^m$ в виде степенного ряда:

$$(1+x)^m = C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + \cdots + C_{n-1}x^{n-1} + \cdots \qquad (2)$$

Тогда находим $C_0 = f(0) = 1$.
Возьмем производную от выражения 2:

$$f'(x) = C_1 + 2C_2x + 3C_3x^2 + 4C_4x^3 + \cdots + (n-1)C_{n-1}x^{n-2} + nC_nx^{n-1} + \cdots$$

Подставив $f'(x)$ в соотношение 1, получим:

$$(1+x)(C_1 + 2C_2x + 3C_3x^2 + 4C_4x^3 + \cdots) = m(C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + \cdots)$$

или

$$C_1 + x(C_1 + 2C_2) + x^2(2C_2 + 3C_3) + x^3(3C_3 + 4C_4) + \cdots = mC_0 + mC_1x + mC_2x^2 + \cdots$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в разных частях равенства, находим:

$C_1 = mC_0$
$C_1 + 2C_2 = mC_1$
$2C_2 + 3C_3 = mC_2$
… … … … … … …
$nC_n + (n+1)C_{n+1} = mC_n$

Выразив отсюда C_{n+1}, получаем **рекуррентное соотношение:**

$$\boldsymbol{C_{n+1} = \frac{(m-n)C_n}{n+1}}$$

Используя его, найдем коэффициенты $C_1, C_2, \dots, C_n$:

$C_0 = 1$

$$C_1 = \frac{mC_0}{1} = m$$

$$C_2 = \frac{(m-1)C_1}{2} = \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}$$

$$C_3 = \frac{(m-2)C_2}{3} = \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$$

… … … … … … … … … … … … … … … … …

$$C_n = \frac{m(m-1)(m-2)\dots\big(m-(n-1)\big)}{n!}$$

Подставив полученные коэффициенты в выражение 2, получим **биноминальный ряд:**

$$\boldsymbol{(1+x)^2 = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{m(m-1)(m-2)\dots\big(m-(n-1)\big)}{n!}x^n + \cdots,}$$

область сходимости которого $-1 < x < 1$

Пример 1. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = (1+x)^{-1}$.
Решение.

$$(1+x)^{-1} = \frac{1}{1+x} = 1 - x + \frac{(-1)(-2)}{2!}x^2 + \frac{(-1)(-2)(-3)}{3!}x^3 + \cdots = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}x^{n-1} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n$$

Пример 2. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \sqrt{1+x}$.
Решение.

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{\frac{1}{2}}{1!}x + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!}x^3 + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!}x^4 + \cdots = 1 + \frac{x}{2\cdot 1!} - \frac{1\cdot x^2}{2^2\cdot 2!} + \frac{1\cdot 3\cdot x^3}{2^3\cdot 3!} - \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot x^4}{2^4\cdot 4!} + \cdots$$

В числителе каждой дроби стоит $n!!$:

$$n!! = \begin{cases} 1\cdot 3\cdot 5\cdot \dots, \text{если } n - \text{нечётное}, \\ 2\cdot 4\cdot 6\cdot \dots, \text{если } n - \text{чётное}. \end{cases}$$

Пример 3. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$.
Решение.

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{-\frac{1}{2}}{1!}x + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}x^2 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!}x^3 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{7}{2}\right)}{3!}x^4 + \cdots = 1 - \frac{x}{2\cdot 1!} + \frac{1\cdot 3\cdot x^2}{2^2\cdot 2!} - \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot x^3}{2^3\cdot 3!} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot x^4}{2^4\cdot 4!} - \cdots$$

Пример 4. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \arcsin x$.
Решение.
Взяв производную от функции $f(x) = \arcsin x$, воспользуемся формулой разложения биноминального ряда, заменив x на $-x^2$:

$$f'(x) = (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left(1 + (-x^2)\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x^2}{2\cdot 1!} + \frac{1\cdot 3\cdot x^4}{2^2\cdot 2!} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot x^6}{2^3\cdot 3!} + \cdots$$

Воспользуемся формулой:

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = x + \frac{1\cdot x^3}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3\cdot x^5}{2^2\cdot 5\cdot 2!} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot x^7}{2^3\cdot 7\cdot 3!} + \cdots$$

§34. Разложение функции $\ln(1+x)$ в степенной ряд.

Воспользуемся формулой:

$$\ln(1+x)=\int_0^x \frac{dx}{1+x}$$

Разложив подынтегральную функцию в ряд:

$$\frac{1}{1+x}=\frac{1}{1-(-x)}=1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots,$$

представим интеграл в виде:

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x}=\int_0^x (1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots)dx$$

Т.к. подынтегральная функция является степенным рядом, то внутри интервала сходимости его можно почленно интегрировать:

$$\ln(1+x)=\int_0^x 1dx-\int_0^x xdx+\int_0^x x^2dx-\int_0^x x^3dx+\cdots$$

$$=x|_0^x-\frac{x^2}{2}\bigg|_0^x+\frac{x^3}{3}\bigg|_0^x-\frac{x^4}{4}\bigg|_0^x+\cdots$$

$$=(x-0)-\left(\frac{x^2}{2}-0\right)+\left(\frac{x^3}{3}-0\right)-\left(\frac{x^4}{4}-0\right)+\cdots$$

$$=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\cdots$$

Окончательно, получаем разложение функции $\ln(1+x)$ в ряд:

$$\boldsymbol{\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\cdots,}$$

область сходимости которого $-1<x<1$

Пример 1. Вычислить $\ln 2$ с точностью 0,1.

Решение.

Разложение функции $\ln(1+x)$ в ряд имеет вид:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\cdots,$$

Заменив в этой формуле x на $-x$, получим ряд:

$$\ln(1-x)=\ln(1+(-x))=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\cdots-\frac{x^n}{n}-\cdots=-\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\cdots+\frac{x^n}{n}+\cdots\right)$$

Т.к. при почленном вычитании двух сходящихся рядов получается ряд сходящийся, то, вычитая из первого ряда второй, находим:

$$\ln(1+x)-\ln(1-x)=\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\cdots\right)+\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\cdots+\frac{x^n}{n}+\cdots\right)$$

$$=2x+2\frac{x^3}{3}+2\frac{x^5}{5}+\cdots+2\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots$$

Т.о. получили формулу для вычисления натуральных логарифмов любых целых чисел:

$$\boldsymbol{\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots\right)}$$

В данном случае

$$2=\frac{1+x}{1-x}$$

откуда

$$1+x=2-2x$$
$$3x=1$$
$$x=\frac{1}{3}$$

Подставим $\frac{1}{3}$ вместо x в полученную формулу:

$$\ln 2=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^3\cdot 3}+\frac{1}{3^5\cdot 5}+\cdots\right)$$

Для упрощения вычислений заменим числа 5,7,9 и т.д. в знаменателе дробей на 3, тем самым увеличив сумму ряда:

$$\ln 2\approx 2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^3\cdot 3}+\frac{1}{3^5\cdot 3}+\frac{1}{3^7\cdot 3}+\cdots\right)=2\cdot\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^5}+\frac{1}{3^7}+\cdots\right)=2\cdot\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3^3}\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^4}+\cdots\right)\right)$$

$$\approx 2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^4}\right)=2\left(\frac{3^3+1}{3^4}\right)=2\cdot\frac{28}{81}=\frac{56}{81}\approx 0{,}6$$

§35. Вычисление определенных интегралов (не берущихся) с помощью рядов.

Не берущиеся интегралы

$$\int_0^a e^{-x^2}dx$$

$$\int_0^x \frac{\sin x}{x}dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin\varphi}\,d\varphi\text{, где } k<1$$

вычисляют, используя ряды, разлагая подынтегральную функцию в ряд Маклорена или в степенной ряд.

Пример 1. Вычислить определенный интеграл $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ с точностью 0,01.

Решение.

Для вычисления этого интеграла разложим подынтегральную функцию в ряд, в разложении e^x заменяя x на $-x^2$:

$$e^{-x^2}=1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^8}{4!}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}\cdot x^{2n-2}}{(n-1)!}+\cdots$$

Интегрируя обе части этого равенства в пределах от 0 до 1, получим:

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx=\int_0^1\left(1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^8}{4!}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}\cdot x^{2n-2}}{(n-1)!}+\cdots\right)dx$$

$$=x|_0^1-\left.\frac{x^3}{3\cdot 1!}\right|_0^1+\left.\frac{x^5}{5\cdot 2!}\right|_0^1-\left.\frac{x^7}{7\cdot 3!}\right|_0^1+\cdots+\left.\frac{(-1)^{n-1}\cdot x^{2n-1}}{(2n-1)\cdot(n-1)!}\right|_0^1$$

$$=(1-0)-\left(\frac{1}{3\cdot 1!}-0\right)+\left(\frac{1}{5\cdot 2!}-0\right)-\left(\frac{1}{7\cdot 3!}-0\right)+\cdots+\left(\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)\cdot(n-1)!}-0\right)$$

$$+\cdots=1-\frac{1}{3\cdot 1!}+\frac{1}{5\cdot 2!}-\frac{1}{7\cdot 3!}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)\cdot(n-1)!}+\cdots$$

Вычислим этот интеграл с точностью 0,01:

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx=1-\frac{1}{3\cdot 1!}+\frac{1}{5\cdot 2!}-\frac{1}{7\cdot 3!}+\frac{1}{9\cdot 4!}-\cdots\approx 1-\frac{1}{3\cdot 1!}+\frac{1}{5\cdot 2!}-\frac{1}{7\cdot 3!}$$

$$=\frac{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7-2\cdot 5\cdot 7+3\cdot 7-5}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7}=\frac{210-70+21-5}{210}=\frac{156}{210}\approx 0{,}74$$

§36. Интегрирование дифференциальных уравнений.

Пусть требуется найти решение дифференциального уравнения второго порядка $y''=F(x,y,y')$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y_0'$.

Тогда решение можно искать в виде степенного ряда:

$$y(x)=C_0+C_1x+C_2x^2+\cdots+C_{n-1}x^{n-1}+\cdots$$

Для простоты, положим $x_0=0$, тогда $C_0=y_0$.

Найдем первую производную от степенного ряда

$$y'(x)=C_1+2C_2x+3C_3x^2+\cdots+nC_nx^{n-1}+\cdots$$

При $x_0=0$ находим $C_1=y_0'$.

Возьмем вторую производную от степенного ряда

$$y''(x)=2C_2+2\cdot 3\cdot C_3x+3\cdot 4\cdot C_4x^2+\cdots+n(n-1)C_{n+1}x^{n-1}+\cdots$$

При $x_0=0$ коэффициент C_2 ищем в виде $C_2=\frac{F(0,y_0,y_0')}{2}$.

Дифференцируя обе части уравнения $y''=F(x,y,y')$ по x

$$y'''=\frac{\partial F}{\partial x}\cdot 1+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial F}{\partial y'}\cdot\frac{dy'}{dx}=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot y'+\frac{\partial F}{\partial y'}\cdot y''$$

находим $y'''(0)$.

Продолжая аналогично, находим коэффициенты $C_3, C_4, \dots, C_n, \dots$

Т.о. окончательно получаем решение дифференциального уравнения второго порядка в виде ряда.

Пример 1. Решить дифференциальное уравнение $y''=2xy'+4y$ с начальными условиями $y(0)=0, y'(0)=1$.

Решение.

Решение дифференциального уравнения $y''=2xy'+4y$ ищем в виде степенного ряда $y(x)=C_0+C_1x+C_2x^2+\cdots+C_{n-1}x^{n-1}+\cdots$.

На основании начального условия $y(0)=0$ находим $C_0=0$.

Т.к. степенной ряд мажорируем, то его можно почленно дифференцировать:

$$y'(x)=C_1+2C_2x+3C_3x^2+\cdots+nC_nx^{n-1}+\cdots$$

На основании начального условия $y'(0)=1$ находим $C_1=1$.

Еще раз дифференцируем степенной ряд:

$$y''(x)=2C_2+2\cdot 3\cdot C_3x+3\cdot 4\cdot C_4x^2+\cdots+n(n-1)C_{n+1}x^{n-1}+\cdots$$

Подставим начальные условия в исходное дифференциальное уравнение:

$$y''=2\cdot 0\cdot 1+4\cdot 0=0$$

При $y''(0)=0$ степенной ряд примет вид:

$$0=2C_2$$

откуда $C_2=0$.

Еще раз дифференцируем степенной ряд:

$$y'''(x)=2\cdot 3\cdot C_3+2\cdot 3\cdot 4\cdot C_4x+3\cdot 4\cdot 5\cdot C_5x^2+\cdots$$

Найдем производную от исходного дифференциального уравнения

$$y'''=2(y'+xy'')+4y'$$

Подставим начальные условия в полученное уравнение:

$$y'''=2\cdot(1+0\cdot 0)+4\cdot 1=2+4=6$$

При $y'''(0)=6$ степенной ряд примет вид:

$$6=2\cdot 3\cdot C_3$$

откуда $C_3=1$.

Далее так продолжая процесс, можем найти все остальные коэффициенты.

Часто, используя дифференциальное уравнение, можно найти рекуррентное соотношение.

Подставив найденные выражения $y(x), y'(x), y''(x)$ и в дифференциальное уравнение

$$2C_2+2\cdot 3\cdot C_3x+3\cdot 4\cdot C_4x^2+\cdots=2x(C_1+2C_2x+3C_3x^2+\cdots)+4(C_0+C_1x+C_2x^2+\cdots)$$

и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x

$$2C_2+2\cdot 3\cdot C_3x+3\cdot 4\cdot C_4x^2+\cdots=4C_0+(2C_1+4C_1)x+(2\cdot 2C_2+4C_2)x^2+\cdots$$

получаем

$$2C_2=4C_0\text{, откуда } C_2=2C_0=0$$

$$6C_3=6C_1\text{, откуда } C_3=C_1=1$$

$$12C_4=8C_0\text{, откуда } C_2=\frac{2C_0}{3}=0$$

… … … … … … … … … … … … … … …

$$n(n+1)C_{n+1}=2(n+1)C_{n-1}$$

или

$$nC_{n+1}=2C_{n-1}$$

Выразив отсюда C_{n+1}, получаем **рекуррентное соотношение**:

$$\boldsymbol{C_{n+1}=\frac{2}{n}C_{n-1}}$$

Подставляя найденные коэффициенты, находим решение дифференциального уравнения:

$$y(x)=x+\frac{x^3}{1!}+\frac{x^5}{2!}+\frac{x^7}{3!}+\frac{x^9}{4!}+\cdots=x\left(1+\frac{x^2}{1!}+\frac{(x^2)^2}{2!}+\frac{(x^2)^3}{3!}+\cdots\right)=xe^{x^2}$$

§37. Двойной интеграл.

Пусть в замкнутой области D задана функция двух переменных $z = f(x, y)$.
Разобьём область $\overline{D}$ на n частей $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n$, которые будем называть площадками.
Внутри каждой площадки выберем точку. В каждой точке вычислим значение функции, например, для точки $P_i(x_i, y_i)$ функция примет вид $z_i = f(x_i, y_i)$ и т.д. для каждой точки.
Составим сумму произведений вида $\Delta s_i f(x_i, y_i)$:

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i f(x_i, y_i) = \Delta s_1 f(x_1, y_1) + \Delta s_2 f(x_2, y_2) + \cdots + \Delta s_n f(x_n, y_n)$$

Эта сумма называется **интегральной суммой**.
Устремим число разбиений области $\overline{D}$ к бесконечности, т.е. $n \to \infty$, чтобы максимальный Δs_i стремился к нулю, т.е. $\Delta s_i \to 0$.
Тогда, если существует предел интегральных сумм $\sum_{i=1}^{n} \Delta s_i f(x_i, y_i)$, то этот предел называется **двойным интегралом** и обозначается

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ (\Delta s_i \to 0)}} \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i f(x_i, y_i) = \iint_D f(x, y) ds = \iint_D f(x, y) dxdy$$

Геометрический смысл двойного интеграла – это объем криволинейного цилиндра, ограниченного поверхностью $f(x, y)$.
Теорема 1. Если функция двух переменных $z = f(x, y)$ непрерывна в заданной области $\overline{D}$, то существует двойной интеграл

$$\iint_D f(x, y) dxdy$$

Из определения двойного интеграла вытекают следующие свойства.
Свойство 1. Двойной интеграл от суммы двух функций и равен сумме двойных интегралов от этих функций:

$$\iint_D \big(\varphi(x, y) + \psi(x, y)\big) ds = \iint_D \varphi(x, y) ds + \iint_D \psi(x, y) ds$$

Доказательство.
Согласно определению двойного интеграла и свойствам пределов и сумм, находим:

$$\iint_D (\varphi(x,y) + \psi(x,y)) ds = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta s_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} (\varphi(x_i,y_i) + \psi(x_i,y_i)) \Delta s_i = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta s_i \to 0}} \left(\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i,y_i)\Delta s_i + \sum_{i=1}^{n} \psi(x_i,y_i)\Delta s_i \right)$$
$$= \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta s_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i,y_i)\Delta s_i + \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta s_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \psi(x_i,y_i)\Delta s_i$$
$$= \iint_D \varphi(x,y) ds + \iint_D \psi(x,y) ds$$

Что и требовалось доказать.
Свойство 2. Постоянный множитель можно выносить за знак двойного интеграла:

$$\iint_D C f(x, y) ds = C \iint_D f(x, y) ds$$

Доказательство.
Согласно определению двойного интеграла и свойствам пределов и сумм, находим:

$$\iint_D Cf(x,y) ds = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta s_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} Cf(x_i,y_i)\Delta s_i = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta s_i \to 0}} C \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta s_i = C \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta s_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta s_i = C \iint_D f(x,y) ds$$

Что и требовалось доказать.
Свойство 3. Если область разбить на две области и , т.е. , и если функция непрерывна в области , то

$$\iint_D f(x, y) ds = \iint_{D_1} f(x, y) ds + \iint_{D_2} f(x, y) ds$$

Доказательство.
Согласно определению двойного интеграла и свойствам пределов и сумм, находим:

$$\iint_D f(x,y) ds = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta s_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta s_i = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta s_i \to 0}} \left(\sum_{i=1}^{m} f(x_i,y_i)\Delta s_i + \sum_{j=1}^{k} f(x_i,y_i)\Delta s_i \right)$$
$$= \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta s_i \to 0}} \sum_{i=1}^{m} f(x_i,y_i)\Delta s_i + \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta s_i \to 0}} \sum_{j=1}^{k} f(x_i,y_i)\Delta s_i = \iint_{D_1} f(x,y) ds + \iint_{D_2} f(x,y) ds$$

Что и требовалось доказать.

§38. Вычисление двойного интеграла.

Пусть в области D задана непрерывная функция двух переменных $f(x, y)$. При этом будем считать, что область D ограничении линиями $y = \varphi_1(x), y = \varphi_2(x), x = a, x = b$. Функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$.
Рассмотрим выражение

$$I = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

которое называется **повторным интегралом**.
В этом выражении сначала вычисляется интеграл, стоящий в скобках, причем интегрирование производится по y, а x считается постоянным. В результате интегрирования получится непрерывная функция от x:

$$I(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$$

Эту функцию интегрируем по x в пределах от a до b:

$$\int_a^b I(x) dx = V$$

В результате получается некоторое постоянное число.
Пример 1. Вычислить повторный интеграл $\int_0^1 \left(\int_0^{x^2} (x^2 + y^2) dy \right) dx$
Решение.
Вычисляем сначала внутренний интеграл, а затем интегрируем полученную функцию в пределах от 0 до 1:

$$\int_0^1 \left(\int_0^{x^2} (x^2 + y^2) dy \right) dx = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} (x^2 + y^2) dy = \int_0^1 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right)\Bigg|_0^{x^2} dx$$
$$= \int_0^1 \left(x^2 x^2 + \frac{x^6}{3} - 0 \right) dx = \left(\frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{3 \cdot 7} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{5} + \frac{1}{21} = \frac{21 + 5}{105} = \frac{26}{105}$$

Теорема 1. Двойной интеграл от непрерывной функции двух переменных $f(x, y)$ по области $\overline{D}$ равен повторному интегралу от этой функции по области $\overline{D}$.
Пример 2. Вычислить объем тела, ограниченного плоскостями $z = 0, y = 0, x = 0, z = 1 - x - y$.
Решение.
Изобразив графически и расставляя пределы в двойном интеграле, вычислим объем:

$$V = \iint_D (1 - x - y) dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1 - x - y) dy = \int_0^1 \left(y - xy - \frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_0^{1-x} dx$$
$$= \int_0^1 \left(1 - x - x + x^2 - \frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{2} - 0 \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - x + \frac{x^2}{2} \right) dx$$
$$= \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3 \cdot 2} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

§39. Замена переменной в двойном интеграле. Полярная система координат.

Пусть требуется произвести замену переменных в двойном интеграле

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_D f(x,y)ds$$

Перейдем от переменных x и y к переменным u и v, т.е. положим

$$\begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \end{cases}$$

В плоскости Ovu выделим площадку $dudv = \Delta s'$ и соответствующую ей криволинейную площадку Δs в плоскости Oxy.

Вычислим Δs, т.е. площадь криволинейного четырехугольника $P_1P_2P_3P_4$ в плоскости Oxy. Определим координаты его вершин:

$P_1(x_1,y_1)$: $x_1 = \varphi(u,v)$, $y_1 = \psi(u,v)$;

$P_2(x_2,y_2)$: $x_2 = \varphi(u+du,v)$, $y_2 = \psi(u+du,v)$;

$P_3(x_3,y_3)$: $x_3 = \varphi(u+du,v+dv)$, $y_3 = \psi(u+du,v+dv)$;

$P_4(x_4,y_4)$: $x_4 = \varphi(u,v+dv)$, $y_4 = \psi(u,v+dv)$.

Из определения производной для функции двух переменных

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to\infty}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$$

и теоремы о бесконечно малых, следует, что

$$\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \alpha(x)$$

$$f(x+\Delta x,y)-f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \alpha(x)\Delta x$$

$$f(x+\Delta x,y) = f(x,y) + \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \alpha(x)\Delta x$$

Т.о., будем пренебрегать бесконечно малыми высшего порядка по сравнению с бесконечно малыми $\Delta u, \Delta v$.Тогда координаты вершин четырехугольника будут находиться как:

$x_1 = \varphi(u,v)$, $y_1 = \psi(u,v)$;

$x_2 = \varphi(u,v) + \frac{\partial\varphi}{\partial u}du$, $y_2 = \psi(u,v) + \frac{\partial\psi}{\partial u}du$;

$x_3 = \varphi(u,v) + \frac{\partial\varphi}{\partial u}du + \frac{\partial\varphi}{\partial v}dv$, $y_3 = \psi(u,v) + \frac{\partial\psi}{\partial u}du + \frac{\partial\psi}{\partial v}dv$;

$x_4 = \varphi(u,v) + \frac{\partial\varphi}{\partial v}dv$, $y_4 = \psi(u,v) + \frac{\partial\psi}{\partial v}dv$.

При сделанных допущениях криволинейный четырехугольник $P_1P_2P_3P_4$ можно рассматривать как параллелограмм.

Составим векторы $\overrightarrow{P_1P_2}$ и $\overrightarrow{P_1P_4}$ с координатами:

$$\overrightarrow{P_1P_2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}du, \frac{\partial\psi}{\partial u}du, 0\right)$$

$$\overrightarrow{P_1P_4}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}dv, \frac{\partial\psi}{\partial v}dv, 0\right)$$

Найдем векторное произведение этих векторов, равное площади параллелограмма $P_1P_2P_3P_4$:

$$\vec{c} = \overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_1P_4} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial u}du & \frac{\partial\psi}{\partial u}du & 0 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial v}dv & \frac{\partial\psi}{\partial v}dv & 0 \end{vmatrix} = \vec{\imath}\cdot 0 - \vec{\jmath}\cdot 0 + \vec{k}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}dudv - \frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}dudv\right)$$

Взяв полученное выражение по модулю, будем иметь

$$|\vec{c}| = \Delta s = \left|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right|dudv = \left\|\begin{matrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v} \end{matrix}\right\|dudv$$

Обозначив последнее выражение через I, получим **определить Якоби или якобиан**:

$$\boldsymbol{I = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix}}$$

Окончательно **замена переменных в двойном интеграле** будем выглядеть следующим образом:

$$\boldsymbol{\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_D f(\varphi(u,v),\psi(u,v))|I|dudv}$$

где $x = \varphi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$, $I = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix}$.

Пример 1. Используя замену переменных, вычислить двойной интеграл $\iint_D (y-x)dxdy$, где область D ограничена прямыми $y = x+1, y = x-3, y = \frac{1}{3}x+\frac{7}{3}, y = -\frac{1}{3}x+5$.

Решение.

Введем замену переменных:

$$u = y - x;\ v = y + \frac{1}{3}x.$$

Тогда прямые $y = x+1, y = x-3$ перейдут, соответственно, в прямые $u = 1, u = -3$ на плоскости Ouv; а прямые $y = \frac{1}{3}x+\frac{7}{3}, y = -\frac{1}{3}x+5$ перейдут в прямые $v = \frac{7}{3}, v = 5$.

Остается вычислить якобиан преобразования. Для этого выразим x и y через u и v. Согласно произведенной замене:

$$\begin{cases} u = y - x \\ v = y + \frac{1}{3}x \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения системы второе:

$$v - u = \frac{4}{3}x$$

откуда находим

$$x = \frac{3}{4}(v-u) = \frac{3}{4}v - \frac{3}{4}u$$

Умножив второе уравнение системы на 3

$$\begin{cases} u = y - x \\ 3v = 3y + x \end{cases}$$

сложим первое и второе уравнения системы

$$u + 3v = 4y$$

откуда находим

$$y = \frac{3}{4}v + \frac{1}{4}u$$

Т.о. получили:

$$\begin{cases} x = \frac{3}{4}v - \frac{3}{4}u \\ y = \frac{3}{4}v + \frac{1}{4}u \end{cases}$$

Для определения якобиана, находим:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} = -\frac{3}{4}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial v} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial u} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial v} = \frac{3}{4}$$

Подставляя в формулу якобиана полученные выражения, будем иметь:

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{vmatrix} = -\frac{9}{16} - \frac{3}{16} = -\frac{12}{16} = -\frac{3}{4}$$

Тогда данных двойной интеграл примет вид:

$$\iint\limits_D (y-x)dxdy = \int_{-3}^{1}du\int_{\frac{7}{3}}^{5}\left|-\frac{3}{4}\right|udv = \frac{3}{4}\int_{-3}^{1}uv\Big|_{\frac{7}{3}}^{5}du = \frac{3}{4}\cdot\frac{8}{3}\int_{-3}^{1}udu = 2\frac{u^2}{2}\Big|_{0}^{1} = 1^2 - (-3)^2 = -8$$

На практике часто применяется переход к полярной системе координат с помощью следующей замены переменных:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

Вычислим якобиан для полярной системы координат:

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial x}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial y} & \frac{\partial y}{\partial\varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = \cos\varphi\ \cdot r\cdot\sin\varphi - (-r\cdot\sin\varphi)\sin\varphi = r(\cos^2\varphi\ + \sin^2\varphi) = r$$

Пример 2. Вычислить площадь круга радиуса R.

Решение.

Уравнение окружности имеет вид: $x^2 + y^2 = R^2$, откуда $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$

Расставляя пределы интегрирования и переходя к полярной системе координат, находим площадь круга:

$$S = \iint\limits_D (y-x)dxdy = \int_{-R}^{R}dx\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}1dy = \int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R 1rdr = \int_0^{2\pi}\frac{r^2}{2}\Big|_0^R d\varphi = \int_0^{2\pi}\left(\frac{R^2}{2} - 0\right)d\varphi$$

$$= \frac{R^2}{2}\varphi\Big|_0^{2\pi} = \frac{R^2}{2}(2\pi - 0) = \pi R^2$$

§40. Вычисление площади поверхности.

Пусть поверхность задана функцией $z = f(x,y)$, которая непрерывна и имеет непрерывные частные производные.
Найдем площадь этой поверхности.
Для этого разобьем область D на n элементарных площадок $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n$. В каждой площадке Δs_i возьмем точку $P_i(x_i, y_i)$. Точке P_i будет соответствовать на поверхности точка $M_i\big(x_i, y_i, f(x_i, y_i)\big)$.
Через точку M_i проведем касательную плоскость к поверхности. Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$ и с нормальным вектором $\vec{N}(A, B, C)$, имеет вид

$$A(x - x_i) + B(y - y_i) + C(z - z_i) = 0$$

Из этой плоскости площадка Δs_i вырежет площадку $\Delta\sigma_i$. Рассмотрим сумму всех площадок $\Delta\sigma_i$: $\sum_{i=1}^{n} \Delta\sigma_i$.
Предел σ этой суммы, когда число элементарных площадок стремиться к бесконечности, мы будем называть площадью поверхности:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta\sigma_i = \iint_D d\sigma$$

т.е.

$$\sigma = \iint_D d\sigma$$

Найдем нормальный вектор $\vec{N}$ к поверхности, заданной уравнением $z = f(x,y)$.
Поверхность зададим неявно

$$z - f(x,y) = 0$$

или

$$F(x,y,z) = 0$$

Проведем на поверхности линию, заданную параметрически:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

Тогда уравнение поверхности примет вид:

$$F\big(x(t), y(t), z(t)\big) = 0$$

Возьмем производную от полученной функции:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0$$

Рассмотрим векторы :
для функции $F(x,y,z) = 0$:

$$\vec{N}\left(\frac{\partial F}{\partial x}; \frac{\partial F}{\partial y}; \frac{\partial F}{\partial z}\right)$$

для функции $z - f(x,y) = 0$:

$$\vec{N}\left(-\frac{\partial f}{\partial x}; -\frac{\partial f}{\partial y}; 1\right)$$

и

$$\vec{e}\left(\frac{dx}{dt}; \frac{dy}{dt}; \frac{dz}{dt}\right)$$

Составим их скалярное произведение $\vec{N} \cdot \vec{e} = 0$. Замечаем, что оно равно производной от функции $F\big(x(t), y(t), z(t)\big) = 0$.
Площадку $d\sigma$ спроектируем на три координатные плоскости

$$|\vec{N}| = \sqrt{\vec{N} \cdot \vec{N}} = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

Найдем единичный вектор $\vec{n}$:

$$\vec{n}(\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma) = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}$$

$$= \vec{n}\left(\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}; \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}; \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}\right)$$

$$= \vec{n}\left(\frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}; \frac{-\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}; \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}\right)$$

$$d\sigma\cos\alpha = dydz$$
$$d\sigma\cos\beta = dxdz$$
$$d\sigma\cos\gamma = dxdy$$

Следовательно, площадь поверхности находим по следующей формуле:

$$s = \iint_\sigma d\sigma = \iint_\sigma \frac{dxdy}{\cos\gamma} = \iint_\sigma \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dxdy$$

Пример 1. Вычислить площадь поверхности сферы.
Решение.
Уравнение сферы имеет вид: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, откуда $z = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.
Вычислим площадь верхней половины сферы, взяв только положительные значения $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$
В этом случае

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x}{2\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y}{2\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} = -\frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$

Следовательно, половина площади поверхности сферы s находится как:

$$s = \iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{R^2 - x^2 - y^2}}\, dxdy = \iint_D \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2 - y^2}}\, dxdy = R\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$

Перейдем к полярной системе координат:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$
$$I = r$$

Т.о. половина площади поверхности сферы s в полярных координатах:

$$s = R\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{rdr}{\sqrt{R^2 - (r\cos\varphi)^2 - (r\sin\varphi)^2}} = R\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{rdr}{\sqrt{R^2 - r^2}} = -\frac{R}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{d(R^2 - r^2)}{\sqrt{R^2 - r^2}}$$
$$= -2 \cdot \frac{R}{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 - r^2}\,\Big|_0^R d\varphi = -R\int_0^{2\pi} \left(\sqrt{R^2 - R^2} - \sqrt{R^2 - 0^2}\right) d\varphi$$
$$= R^2\varphi\big|_0^{2\pi} = R^2(2\pi - 0) = 2\pi R^2$$

Тогда площадь поверхности всей сферы равна:

$$S = 2s = 2 \cdot 2\pi R^2 = 4\pi R^2$$

§41. Тройной интеграл.

Пусть в пространстве задана область V, ограниченная поверхностью S. В каждой точке области V задана функция трех переменных $u = f(x, y, z)$.
Разобьём область V на n частей $\Delta V_1, \Delta V_2, \dots, \Delta V_n$. Внутри каждой части выберем точку. В каждой точке вычислим значение функции, например, для точки $P_i(x_i, y_i, z_i)$ функция примет вид $f(P_i) = f(x_i, y_i, z_i)$ и т.д. для каждой точки.
Составим сумму произведений вида $\Delta V_i f(x_i, y_i, z_i)$:

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta V_i f(x_i, y_i, z_i) = \Delta V_1 f(x_1, y_1, z_1) + \Delta V_2 f(x_2, y_2, z_2) + \dots + \Delta V_n f(x_n, y_n, z_n)$$

Эта сумма называется **интегральной суммой**.
Устремим число разбиений области V к бесконечности, т.е. $n \to \infty$, чтобы максимальный ΔV_i стремился к нулю, т.е. $\Delta V_i \to 0$.
Тогда, если существует предел интегральных сумм $\sum_{i=1}^{n} \Delta V_i f(x_i, y_i, z_i)$, то этот предел называется **тройным интегралом** и обозначается

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ (\Delta V_i \to 0)}} \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i f(x_i, y_i, z_i) = \iiint\limits_V f(x, y, z) dV = \iiint\limits_V f(x, y, z) dx dy dz$$

Для существования тройного интеграла необходима непрерывность функции $f(x, y, z)$ в области V.
Для тройных интегралов справедливы все теоремы, которые доказывались для двойных интегралов.
Замена переменной в тройном интеграле осуществляется точно так же, как и в двойном интеграле:

$$x = x(u, v, w)$$
$$y = y(u, v, w)$$
$$z = z(u, v, w)$$

откуда якобиан для тройного интеграла

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Пример 1. Вычислить тройной интеграл $\iiint_V xy dx dy dz$, где V – тело, ограниченное поверхностями $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$.
Решение.
Сведем тройной интеграл к повторному и вычислим его:

$$\iiint\limits_V xy dx dy dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} xy dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} xyz|_0^{1-x-y} dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} xy(1 - x - y - 0) dy$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (xy - x^2 y - xy^2) dy = \int_0^1 \left(\frac{xy^2}{2} - \frac{x^2 y^2}{2} - \frac{xy^3}{3} \right) \Bigg|_0^{1-x} dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x(1-x)^2}{2} - \frac{x^2(1-x)^2}{2} - \frac{x(1-x)^3}{3} \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x(1-x)^2}{2}(1-x) - \frac{x(1-x)^3}{3} \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{x(1-x)^3}{2} - \frac{x(1-x)^3}{3} \right) dx$$

$$= \frac{1}{6} \int_0^1 x(1-x)^3 dx = \frac{1}{6} \int_0^1 (x - 3x^2 + 3x^3 - x^4) dx = \frac{1}{6} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{3x^3}{3} + \frac{3x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right) \Bigg|_0^1$$

$$= \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2} - 1 + \frac{3}{4} - \frac{1}{5} \right) = \frac{1}{6} \cdot \frac{10 - 20 + 15 - 4}{20} = \frac{1}{120}$$