Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Высшая математика»

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ПОСОБИЕ
по курсу «Математика» для студентов
технических специальностей
дневной и заочной форм обучения

Гомель 2016

УДК 512.743+514.12(075.8)
ББК 22.14я73
Л59

Рекомендовано научно-методическим советом
факультета автоматизированных и информационных систем
ГГТУ им. П. О. Сухого
(*протокол № 10 от 25.05.2015 г.*)

Составители: *Е. З. Авакян*, *М. В. Задорожнюк*

Рецензент: зав. каф. «Физика» ГГТУ им. П. О. Сухого д-р физ.-мат. наук *П. А. Хило*

Л59 **Линейная** алгебра. Аналитическая геометрия : пособие по курсу «Математика» для студентов техн. специальностей днев. и заоч. форм обучения / сост.: Е. З. Авакян, М. В. Задорожнюк. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2016. – 206 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: https://elib.gstu.by. – Загл. с титул. экрана.

Приведены основные теоретические сведения, примеры решения задач по линейной алгебре и аналитической геометрии, а также задания для самостоятельного решения и вопросы для самоконтроля. Включает девять разделов.

Для студентов технических специальностей дневной и заочной форм обучения.

УДК 512.743+514.12(075.8)
ББК 22.14я73

Содержание

1. МАТРИЦЫ. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

1.1. Матрицы. Действия над матрицами

Определение 1.1. *Матрицей* $A_{m\times n}$ размерности $m\times n$ называется прямоугольная таблица, состоящая из m строк и n столбцов:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Элемент a_{ij} таблицы имеет два индекса, где i – номер строки, в которой находится элемент, j – номер столбца.

Если $n=m$, то матрица называется *квадратной* порядка n.

Элементы a_{11}, a_{22}, …, a_{nn} образуют *главную диагональ* квадратной матрицы A, вторая диагональ называется *побочной*. Матрица называется *диагональной*, если все элементы, стоящие вне главной диагонали, есть нули.

Единичной называется диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны единице. Единичную матрицу обозначают буквой E.

Матрица называется *нулевой*, если все ее элементы – нули.

Треугольной называется квадратная матрица, у которой все элементы, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю.

Матрица $A^T_{n\times m}$ называется *транспонированной* к матрице $A_{m\times n}$, если она получена из $A_{m\times n}$ заменой всех строк столбцами.

Для матриц определены следующие *операции*:

1. Сложение матриц

Пусть матрицы $A_{m\times n}$ и $B_{m\times n}$ имеют одинаковые размерности,

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица $C = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$ называется *суммой* матриц A и B.

Например, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4 & 2+5 \\ 3-2 & -1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

<u>Свойства сложения матриц</u>:

1) сложение матриц коммутативно, т.е.

$$A + B = B + A;$$

2) сложение матриц ассоциативно, т.е.

$$(A + B) + C = B + (A + C);$$

3) сложение матриц обратимо, т.е. для любых матриц A и B одинаковой размерности найдется матрица X, такая что $A + X = B$.

2. Умножение матрицы на число

Произведением матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ *на число* α называется матрица $\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$.

Матрица $(-1)A = -A$ называется *противоположной* к матрице A
.

<u>Свойства умножения матриц на число</u>:

1) Коммутативность, т.е.

$$\alpha A = A\alpha;$$

2) Дистрибутивность относительно суммы чисел, т.е.

$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A;$$

3) Дистрибутивность относительно суммы матриц, т.е.

$$(A + B)\alpha = \alpha A + \beta B;$$

4) Ассоциативность, т.е.

$$(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A).$$

3. Умножение матриц

Пусть число столбцов матрицы $A_{m\times k}$ равно числу строк матрицы $B_{k\times n}$. *Произведением* $A_{m\times k}\cdot B_{k\times n}$ называется матрица $C_{m\times n}$, такая, что каждый её элемент определяется формулой:

$$C_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\dots+a_{ik}b_{kj}.$$

Например,

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 4 & -3\\ -2 & 5 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 3+2\cdot(-2) & 1\cdot 4+2\cdot 5 & 1\cdot(-3)+2\cdot 6\\ 0\cdot 3+(-1)(-2) & 0\cdot 4+(-1)\cdot 5 & 0\cdot(-3)+(-1)\cdot 6\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & 14 & 9\\ 2 & -5 & -6\end{pmatrix}.$$

<u>Свойства умножения матриц</u>:

1) Умножение матриц некоммутативно;

Если для некоторых матриц A и B выполняется равенство $AB=BA$, то такие матрицы называют *перестановочными*. Единичная матрица перестановочна с любой.

2) Умножение матриц ассоциативно, т.е.

$$(AB)C=B(AC);$$

3) Умножение матриц дистрибутивно относительно сложения, т.е.

$$(A+B)C=AC+BC;$$

4) Для умножения матриц справедливо свойство:

$$\alpha(AB)=A(\alpha B);$$

5) произведение матриц может быть нулевой матрицей, хотя оба сомножителя ненулевые;

6) для транспонирования произведения матриц справедлива формула:

$$(AB)^T=B^T A^T.$$

Возведение матрицы в степень определено только для квадратной матрицы. Целой положительной степенью A^k квадратной матрицы A называется произведение k матриц, каждая из которых равна A. *Нулевой степенью* квадратной матрицы A $(A\neq 0)$ называется единичная матрица того же порядка, что и A, т. е. $A^0=E$.

Пример 1.1. Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 1 & 4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & -2\\ 5 & 0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}5 & 0 & 2\\ 4 & -1 & 3\end{pmatrix}.$$

вычислить $B\cdot A-3C^T$.

Решение

$$B\cdot A-3C^T=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & -2\\ 5 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -2\\ 1 & 4\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}5 & 4\\ 0 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & -14\\ 2 & -12\\ 10 & -10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}15 & 12\\ 0 & -3\\ 6 & 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-16 & -26\\ 2 & -9\\ 4 & -19\end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix}-16 & -26\\ 2 & -9\\ 4 & -19\end{pmatrix}$.

Пример 1.2. Найти значение многочлена $f(A)$ для $A=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$, если $f(x)=x^2-3x+4$.

Решение

$$f(A)=A^2-3A+4E=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -2\\ 1 & 4\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}2 & -2\\ 1 & 4\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2 & -12\\ 6 & 14\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6 & -6\\ 3 & 12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 8\\ 3 & 6\end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix}0 & 8\\ 3 & 6\end{pmatrix}$.

1.2. Определители

Рассмотрим квадратную матрицу A n-го порядка. Каждой квадратной матрице можно сопоставить определенное число, называемое *определителем*. Это число равно сумме всех возможных произведений элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца, умноженных на $(-1)^l$, где l – число перестановок второго индекса в случае, если первые упорядочить. Обозначается определитель одним из следующих символов: $\det A$, $|A|$, Δ_A.

Определитель первого порядка: $|a_{11}| = a_{11}$.

Определитель второго порядка:

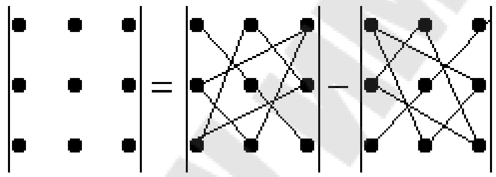
$$\Delta_A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}(-1)^0 + a_{12}a_{21}(-1)^1 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Определитель 3-го порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32}(-1)^1 + a_{12}a_{21}a_{33}(-1)^1 + a_{12}a_{23}a_{31}(-1)^2 + a_{13}a_{21}a_{32}(-1)^2 + a_{13}a_{22}a_{31}(-1)^3 =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31}).$$

При вычислении определителя третьего порядка удобно пользоваться правилом Саррюса (правилом треугольника):



<u>Свойства определителя</u>:

1) Определитель матрицы не меняется при ее транспонировании;

2) При перестановке двух соседних строк (столбцов) определитель меняет знак на противоположный;

3) Определитель с двумя одинаковыми строками (столбцами) равен нулю;

4) Если все элементы какого-либо столбца умножить на одно и то же число m, то значение определителя изменится в m раз;

Следствие 1. Если все элементы строки (столбца) пропорциональны какому-либо числу, то его можно выносить за знак определителя.

Следствие 2. Определитель с нулевой строкой (столбцом) равен нулю.

5) Определитель, у которого две строки (столбца) пропорциональны, равен нулю.

6) Определитель остается неизменным, если к любой его строке добавить другую строку, умноженную на произвольное число;

7) Если каждый элемент какой-либо строки (столбца) есть сумма двух слагаемых, тогда определитель может быть разложен на сумму двух соответствующих определителей. Например,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+b \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+c \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b \\ a_{21} & a_{22} & c \\ a_{31} & a_{32} & d \end{vmatrix}.$$

Дальнейшие свойства определителя связаны с понятиями минора и алгебраического дополнения.

Определение 1.2. *Минором* M_{ij} элемента a_{ij} называется определитель, полученный из исходного путем вычеркивания i-ой строки и j-го столбца.

Определение 1.3. *Алгебраическим дополнением* A_{ij} элемента a_{ij} называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$, т.е.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

8) Определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки (или столбца) на соответствующие алгебраические дополнения (***правило Лапласа***).

Докажем справедливость этого свойства для определителя третьего порядка. Действительно,

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} =$$
$$= a_{11}(a_{22}a_{33} + a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$$
$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

9) Сумма произведений элементов строки на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки равна нулю.

Свойство 8 содержит в себе правило вычисления определителей высоких порядков.

Пример 1.3. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 7 & 4 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 7 & 8 \end{vmatrix}.$$

Решение

Для вычисления этого определителя воспользуемся сначала свойством 6: прибавим к третьей строке первую, а к четвертой строке – первую, умноженную на (-3).

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 7 & 4 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 7 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 7 & 4 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 7 & 5 \\ 0 & 8 & 14 & -4 \end{vmatrix}.$$

Теперь воспользуемся правилом Лапласа. Разложим определитель по элементам, первого столбца (целесообразно выбирать столбец или строку с наибольшим количеством нулей).

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 7 & 4 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 7 & 5 \\ 0 & 8 & -14 & -4 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 6 & 7 & 5 \\ 8 & -14 & -4 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 6 & 7 & 5 \\ 8 & -14 & -4 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 6 & 7 & 5 \\ 4 & -7 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (-70 + 60 - 84 - 56 + 175 + 36) = 2 \cdot 61 = 122.$$

Ответ: 122.

1.3. Обратная матрица

Определение 1.4. Матрицей, *обратной* квадратной матрице A, называется квадратная матрица A^{-1}, удовлетворяющая равенствам

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Квадратная матрица называется *невырожденной*, если ее определитель отличен от нуля. В противном случае матрица называется *вырожденной*.

Теорема 1.1. Всякая невырожденная квадратная матрица A имеет единственную обратную матрицу A^{-1}, определяемую по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (1.1)$$

где A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы A (алгебраическое дополнение A_{ij} записывается в строку с номером j и в столбец с номером i, т. е. в так называемом транспонированном порядке).

Доказательство

Приведем доказательство для матриц третьего порядка.

Пусть $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Найдем произведение $A\cdot A^{-1}$:

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13} & \dots & a_{11}A_{31}+a_{12}A_{32}+a_{13}A_{33} \\ a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12}+a_{23}A_{13} & \dots & a_{21}A_{31}+a_{22}A_{32}+a_{23}A_{33} \\ a_{31}A_{11}+a_{32}A_{12}+a_{33}A_{13} & \dots & a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33} \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=E.$$

Здесь мы воспользовались свойствами 8 и 9 определителя.

Аналогично убеждаемся, что $A^{-1}\cdot A=E$, а значит, матрица $\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$ является обратной к матрице A по определению.

Пример 1.4. Для матрицы $A=\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 5 \end{pmatrix}$ найти ей обратную.

Решение

Найдем определитель матицы A, пользуясь правилом треугольника.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 6 \neq 0,$$ следовательно, матрица A имеет обратную матрицу A^{-1}.

Найдем алгебраические дополнения элементов матрицы A по формуле $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = 0, \; A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1, \; A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = -30, \; A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 15, \; A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 12, \; A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -6, \; A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

По формуле (1.1) получим:

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & -30 & 12 \\ 1 & 15 & -6 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 2 \\ 1/6 & 5/2 & -1 \\ -1/6 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 2 \\ 1/6 & 5/2 & -1 \\ -1/6 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.

1.4. Ранг матрицы

Рассмотрим матрицу A размерности $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Выделим в ней k строк и k столбцов $(k \leq \min(m, n))$. Из элементов, стоящих на пересечении выделенных строк и столбцов, составим определители. Все такие определители называются *минорами* k*-го порядка*.

Определение 1.5. *Рангом* матрицы называется порядок старшего отличного от нуля минора.

Обозначается r, $r(A)$, $\text{rang } A$.

Очевидно, что $0 \le r(A) \le \min(m,n)$.

Минор, порядок которого определяет ранг матрицы, называется *базисным*. У матрицы может быть несколько базисных миноров.

Пример 1.5. Определить ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Решение

Т.к. матрица содержит 3 строки, то $r(A) \le 3$.

Вычислим миноры третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Среди миноров третьего порядка не оказалось ни одного ненулевого, значит, $r(A) < 3$.

Вычислим миноры второго порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \ne 0.$$

Т.к. среди миноров второго порядка нашелся по крайней мере один, отличный от нуля, то ранг матрицы A равен 2.

Ответ: $r(A) = 2$.

<u>Свойства ранга матрицы</u>

1) Ранг матрицы не меняется при транспонировании, т.е.

$$r(A) = r(A^T);$$

2) Если вычеркнуть из матрицы нулевой ряд, то ранг матрицы не изменится;

3) Ранг не меняется при элементарных преобразованиях матрицы.

К элементарным преобразованиям матриц относятся:

– перестановка строк или столбцов матрицы;

– умножение строки или столбца на отличное от нуля число;

– прибавление ко всем элементам строки (столбца), соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на одно и то же число.

Из свойства 3 следует, что ранг матрицы $A_{m\times n}$ $(m \le n)$ равен числу ненулевых строк в трапециевидном виде матрицы. (если $m > n$, слово «строк» следует заменить словом «столбцов»).

Пример 1.6. Определить ранг матрицы из примера 1.5, пользуясь свойствами ранга.

Решение

Умножим первую строку на (–2) и (–3) и прибавим, соответственно, ко второй и третьей строкам:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 6 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -3 & 6 \\ 0 & -3 & -3 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Т.к. полученная матрица содержит две ненулевых строки, то $r(A) = 2$.

Ответ: $r(A) = 2$.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется матрицей? Как определяется размерность матрицы?
2. Какая матрица называется квадратной? диагональной? треугольной? единичной? Приведите примеры.
3. Какую матрицу называют транспонированной?
4. Сформулируйте правило сложения двух матриц.
5. Как составляется произведение двух матриц?
6. Какими свойствами обладает умножение матриц?
7. Что такое определитель?
8. Сформулируйте правила вычисления определителей второго и третьего порядков.
9. Как изменится определитель матрицы, если поменять местами два соседних столбца?
10. Чему равен определитель, у которого две строки пропорциональны?
11. Чему равен определитель произведения двух матриц?
12. Как изменится определитель, если какую-либо строку матрицы умножить на произвольное число?

13. Как меняется определитель при транспонировании?

14. Что называется минором элемента a_{ij}?

15. Что называется алгебраическим дополнением элемента a_{ij}?

16. Сформулируйте правило Лапласа для вычисления определителей.

17. Как вычислить определитель четвертого порядка?

18. Какая матрица называется невырожденной?

19. Дайте определение обратной матрицы?

20. Как найти матрицу, обратную к заданной невырожденной квадратной матрице?

21. Что называется рангом матрицы?

22. Какие преобразования матрицы не меняют ее ранга?

23. Как можно вычислить ранг матрицы?

<u>Задания для самостоятельного решения</u>

1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$. Найти $A + B$, $3A - 2B$, A^T.

2. Найти X из уравнения $3X + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Даны матрицы $A_{1\times 3}$, $B_{5\times 1}$ и $C_{3\times 5}$. Существует ли произведение: а) AB; б) AC; в) BA; г) CA; д) ABC; е) CBA?

4. Найти AB и BA, если: а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

5. Вычислить $A^T B + 3C$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

6. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 2 & 3 & 0\\ 1 & -4 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 3 & 2 & 0\end{pmatrix}$. Найти: а) $AB-2C^T$; б) ABC; в) CBA; г); CAB; д) B^T+2CA.

7. Найти значение многочлена $f(A)$, если $f(x)=-x^2+4x-6$, а) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -4\end{pmatrix}$.

8. Вычислить определители: а) $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & -5\end{vmatrix}$; б) $A=\begin{vmatrix}0 & 1 & -1\\ 2 & 3 & 0\\ 1 & -4 & 2\end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix}121 & 283\\ 221 & 183\end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix}1 & 4 & -2 & 3\\ 0 & 2 & 1 & 5\\ -2 & -8 & 4 & -6\\ 1 & 2 & 1 & 7\end{vmatrix}$.

9. При каком значении a равен нулю определитель а) $\begin{vmatrix}1 & a\\ 4 & 5\end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix}3-a & 0 & 0\\ 2 & a & 0\\ 10 & -5 & 1\end{vmatrix}$?

10. Найти матрицу, обратную к данной, если она существует. Сделать проверку. а) $\begin{pmatrix}2 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 15 & -5\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}3 & 0 & 2\\ 1 & 4 & 0\\ 5 & 1 & 7\end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1/3\end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix}d_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & d_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & d_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & d_4\end{pmatrix}$.

11. Вычислить определитель, пользуясь правилом Лапласа: а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \end{vmatrix}$.

12. Решить уравнение: а) $X\begin{pmatrix} 10 & 26 \\ -10 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & -5 & 0 \end{pmatrix}$.

13. Найти ранг матрицы: а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -6 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 4 & -6 & 1 \\ -4 & -8 & 12 & 1 \\ -1 & -2 & 3 & 6 \\ 3 & 6 & -9 & 12 \end{pmatrix}$.

2. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

2.1. Основные понятия и определения

Определение 2.1. Системой m линейных уравнений с n неизвестными называют систему вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{2.1}$$

Решением системы (1.2) называется n значений неизвестных $x_1 = C_1,\ x_2 = C_2,\ \ldots,\ x_n = C_n$, при подстановке которых все уравнения системы обращаются в верные равенства.

Система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной*, если она не имеет решений.

Систему (1.2) можно представить в матричном виде:

$$AX = B, \qquad (2.2)$$

где A – *матрица коэффициентов* (или *матрица системы*), X – столбец неизвестных, B – столбец свободных членов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}. \qquad (2.3)$$

Матрица коэффициентов системы, дополненная столбцом свободных членов, называется *расширенной матрицей* системы и обозначается $\tilde{A}$ или $\bar{A}$:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

2.2. Решение невырожденных линейных систем

Рассмотрим сначала решение систем n линейных уравнений с n неизвестными, т.е.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \; \ldots \; \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \qquad (2.4)$$

В этом случае матрица системы A является квадратной. Предположим, что она невырожденна (ее определитель отличен от нуля). Перепишем систему (2.4) в матричном виде и домножим левую и правую часть на обратную матрицу A^{-1} слева:

$$AX = B,$$

$$A^{-1}AX = A^{-1}B,$$

$$\boxed{X = A^{-1}B.} \qquad (2.5)$$

Отыскание решений системы по формуле (2.5) называется ***матричным способом*** решения системы (или ***методом обратной матрицы***).

Таким образом, чтобы найти столбец неизвестных нужно найти матрицу, обратную матрице коэффициентов, и умножить ее на столбец свободных членов.

Пример 2.1. Решить систему уравнений методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 6, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 10. \end{cases}$$

Решение

Запишем систему в матричном виде $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Вычислим определитель матрицы системы: $|A| = 24$. Т.к. он отличен от нуля, то существует обратная матрица A^{-1}, которую найдем по формуле (1.1):

$$A^{-1} = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 9 & -8 & 5 \\ 0 & -8 & 8 \\ 3 & -8 & -1 \end{pmatrix}.$$

Пользуясь формулой (2.5), получим решение системы:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 9 & -8 & 5 \\ 0 & -8 & 8 \\ 3 & -8 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 72 \\ 48 \\ -24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

откуда $x_1 = 3,\ x_2 = 2,\ x_3 = -1.$

Ответ: $x_1 = 3,\ x_2 = 2,\ x_3 = -1.$

Формулы Крамера

Запишем формулу (2.5) с учетом равенства (1.1):

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{1n} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11}b_1+A_{21}b_2+\cdots+A_{n1}b_n \\ A_{12}b_1+A_{22}b_2+\cdots+A_{n2}b_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{1n}b_1+A_{2n}b_2+\cdots+A_{nn}b_n \end{pmatrix}.$$

Обозначим $A_{11}b_1+A_{21}b_2+\cdots+A_{n1}b_n=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix}=\Delta_1,$

$$A_{12}b_1+A_{22}b_2+\cdots+A_{n2}b_n=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\Delta_2,\ldots,$$

$$A_{1n}b_1+A_{2n}b_2+\cdots+A_{nn}b_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}=\Delta_n.$$

Тогда полученное выше равенство перепишется в виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{pmatrix},$$

Откуда получаем ***формулы Крамера***:

$$\boxed{x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta},\ldots,\ x_n=\frac{\Delta_n}{\Delta},} \qquad (2.6)$$

где $\Delta=|A|$ – определитель матрицы A, Δ_i – определитель, полученный из Δ заменой i-го столбца столбцом свободных членов.

Пример 2.2. Решить систему уравнений из примера 2.1 по формулам Крамера.

Решение

Запишем матрицу системы, столбец свободных членов и столбец неизвестных:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Найдем определитель матрицы системы: $\Delta = 24$.

Вычислим $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, заменяя, соответственно, первый, второй и третий столбец, столбцом свободных членов:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & -2 & -1 \\ 4 & -1 & -3 \\ 10 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 72; \; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 6 & -1 \\ 1 & 4 & -3 \\ 1 & 10 & -3 \end{vmatrix} = 48; \; \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 10 \end{vmatrix} = -24.$$

Далее по формулам (2.6) получим:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{72}{24} = 3, \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{48}{24} = 2, \; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-24}{24} = -1.$$

Ответ: $x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = -1.$

2.3. Исследование на совместность произвольных систем линейных алгебраических уравнений. Теорема Кронекера-Капелли

Рассмотрим произвольную систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \; \ldots \; \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{2.7}$$

Теорема 2.1 (Кронекера-Капелли). Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы A равен рангу расширенной матрицы $\widetilde{A}$. Если при этом ранг равен числу неизвестных, то система имеет единственно решение, если ранг меньше числа неизвестных, то система имеет бесконечное множество решений.

Доказательство

Необходимость. Пусть система (2.7) совместна. Покажем, что $r(A) = r(\tilde{A})$. В силу совместности системы существуют такие числовые значения $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \ldots, x_n = \alpha_n$, что

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n = b_1, \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n = b_2, \\ \ldots \ \ldots \ \ldots \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \ldots + a_{mn}\alpha_n = b_m. \end{cases} \tag{2.8}$$

Найдем ранг расширенной матрицы

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

Для этого прибавим к элементам последнего столбца матрицы $\tilde{A}$ элементы первого, умноженные на $-\alpha_1$, элементы второго, умноженные на $-\alpha_2$, и т.д., наконец, элементы n-го столбца, умноженные на $-\alpha_n$. Тогда в силу равенства (2.8), матрица $\tilde{A}$ превратится в матрицу $\tilde{A}' = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 0 \end{array} \right)$. Т.к. ранг не меняется при элементарных преобразованиях, то $r(\tilde{A}') = r(\tilde{A})$. Кроме того, $r(\tilde{A}') = r(A)$, т.к. последний столбец матрицы $\tilde{A}'$ состоит из нулей. Таким образом, ранг расширенной матрицы совпадает с рангом матрицы системы.

Достаточность. Предположим, что $r(A) = r(\tilde{A}) = r$ и покажем, что система (2.7) совместна. Не ограничивая общности будем считать, что отличный от нуля минор r-го порядка (назовем его *базисным минором*) находится в левом верхнем углу матрицы A. Исключим из системы все уравнения, которые не образуют выбранный базисный минор. Полученная таким образом система будет эквивалентна исходной, так как отброшенные уравнения все равно излишни (они являются линейной комбинацией оставшихся уравнений). В итоге, после отбрасывания излишних уравнений системы, возможны два случая.

1) $r = n$, т.е.число уравнений в полученной системе будет равно числу неизвестных переменных. Такая система имеет единственное решение можно, которое можно найти по формулам Крамера или матричным методом.

2) $r < n$, т.е. число уравнений r в полученной системе меньше числа неизвестных переменных n, то в левых частях уравнений оставим слагаемые, образующие базисный минор, остальные слагаемые перенесем в правые части уравнений системы с противоположным знаком.

Неизвестные переменные (их r штук), оставшиеся в левых частях уравнений, называются *основными*.

Неизвестные переменные (их $n-r$ штук), которые оказались в правых частях, называются *свободными*.

Теперь считаем, что свободные неизвестные переменные могут принимать произвольные значения. Обозначим их как

$x_{r+1} = C_1, x_{r+2} = C_2, \ldots, x_n = C_{n-r}$,

Перенесем их в правую часть уравнений. Получим систему из r линейных уравнений с r неизвестными, свободные члены в которой зависят от $n-r+1$ произвольных постоянных.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1^*(b_1, C_1, C_2, \ldots C_{n-r}), \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r = b_2^*(b_2, C_1, C_2, \ldots C_{n-r}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_r + \ldots + a_{rr}x_r = b_r^*(b_r, C_1, C_2, \ldots C_{n-r}), \end{cases}$$

В которой r основных неизвестных переменных будут выражаться через свободные неизвестные переменные единственным образом.

Их выражение можно найти решая полученную систему методом Крамера. Таким образом, система (2.7) совместна.

Описанный метод решения систем линейных уравнений, называется *методом базисных миноров*.

Пример 2.3. Исследовать систему на совместность и в случае совместности решить ее.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 4, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

Решение

Запишем расширенную матрицу системы $\widetilde{A}$ и найдем ранги матриц A и $\widetilde{A}$.

$$\widetilde{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \end{array}\right).$$

Т.к. первая строка является суммой второй и третьей, то все миноры третьего порядка равны нулю. Т.к. существуют ненулевые миноры второго порядка, то $r(A)=r(\widetilde{A})=r=2$, а значит, система совместна и имеет бесконечно много решений. Найдем их методом базисных миноров.

Выберем в качестве базисного минор $\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-1\neq 0$. Тогда основными неизвестными будут x_1. и x_2, а свободной неизвестной – x_3. Исключим из рассмотрения первое уравнение и перепишем систему, оставив основные переменные в левой части, а свободную переменную перенеся в правую часть.

$$\begin{cases} 2x_1-x_2=4+3x_3, \\ x_1-2x_2=2-2x_3. \end{cases}$$

Воспользуемся формулами Крамера.

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 4+3x_3 & -1 \\ 2-2x_3 & -2 \end{vmatrix}=-6-8x_3,\ \Delta_1=\begin{vmatrix} 2 & 4+3x_3 \\ 1 & 2-2x_3 \end{vmatrix}=-7x_3.$$

Тогда $x_1=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}=6+8x_3$, $x_1=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}=7x_3$.

Следовательно, множество решений имеет вид:

$$\{6+8C;\ 7C;\ C\},$$

где C – любое действительное число.

Ответ: $\{6+8C;\ 7C;\ C\}$, где C – любое действительное число.

2.4. Метод Гаусса

Одним из наиболее эффективных и универсальных методов решения систем линейных уравнений является метод Гаусса.

Рассмотрим произвольную систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \ \ldots \ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Метод основан на последовательном исключении неизвестных и состоит из двух этапов. На первом этапе (*прямой ход)* посредством эквивалентных преобразований система приводится к ступенчатому (в частном случае, к треугольному) виду. К *эквивалентными преобразованиями* системы относятся:

– умножение любого уравнения системы на произвольное отличное от нуля число;

– замена местами строк системы;

– прибавление к какому-либо уравнению системы любого другого уравнения системы, умноженного на некоторое число.

Сначала исключаем из всех уравнений, кроме первого, переменную x_1, в результате чего исходная система принимает вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \qquad \ldots \ \ldots \ \ldots \\ \qquad a'_{m2}x_2 + \ldots + a'_{mn}x_n = b'_m. \end{cases}$$

Далее исключаем из всех уравнений, кроме первого и второго, переменную x_2, и т.д. Продолжаем процесс, пока это возможно. Если в процессе преобразований появляются нулевые уравнения (т.е. уравнения вида $0 = 0$), то их отбрасывают.

В результате преобразований получается эквивалентная система, которая в общем случае имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a^*_{22}x_2 + \ldots + a^*_{2k}x_k + \ldots + a^*_{2n}x_n = b^*_2, \\ \qquad \qquad \ldots \ \ldots \ \ldots \\ \qquad \qquad a^*_{kk}x_k + \ldots + a^*_{kn}x_n = b^*_k, \end{cases} \tag{2.9}$$

где $k \le n$, $a_{ii} \ne 0$.

Обратный ход заключается в решении полученной системы, начиная с последнего уравнения. При этом могут возникнуть три случая:

1) последнее уравнение системы имеет вид $ax_n = b\ (a \neq 0)$. Тогда система имеет единственное решение $x_n,\ x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_1$, которые мы находим, двигаясь вверх по системе (2.9).

2) последнее уравнение системы содержит две или более неизвестных: $a^*_{kk}x_k + a^*_{kk+1}x_{k+1} + \ldots + a^*_{kn}x_n = b^*_k$. Тогда система имеет бесконечно много решений. Полагая $x_n = C_1$, $x_{n-1} = C_2$ и т.д. (здесь C_i – произвольные постоянные), выражаем x_k через $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$. Затем находим $x_{k-1}, x_{k-2}, \ldots, x_1$, двигаясь вверх по системе (2.9). Придавая постоянным C_i различные значения, получим бесконечное множество решений.

3) последнее уравнение системы (2.9) имеет вид $0 \cdot x_n = b\ (b \neq 0)$. В этом случае система несовместна.

Замечание. На практике удобнее работать не с самой системой, а с расширенной матрицей системы $\tilde{A}$.

Пример 2.4. Решить систему уравнений из примера 2.1 методом Гаусса.

Решение

Прямой ход:

Приведем расширенную матрицу системы к треугольному виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & -1 & 6 \\ 1 & -1 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 10 \end{array}\right) \underset{\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{III}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 10 \\ 1 & -1 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & -1 & 6 \end{array}\right) \underset{\substack{\mathrm{I}\cdot(-1)+\mathrm{II} \\ \mathrm{I}\cdot(-3)+\mathrm{III}}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 10 \\ 0 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & -8 & 8 & -24 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \underset{\substack{\mathrm{II}\cdot(-1/3) \\ \mathrm{III}\cdot 1/8}}{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{array}\right) \underset{\mathrm{II}+\mathrm{III}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Обратный ход:

Запишем систему по приведенной матрице:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 10, \\ x_2 = 2, \\ x_3 = -1, \end{cases}$$

решая которую, получим

$x_3 = -1,\ x_2 = 2,\ x_1 = 10 - 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) = 3.$

Окончательно имеем: $x_1 = 3,\ x_2 = 2,\ x_3 = -1$.

Ответ: $x_1 = 3,\ x_2 = 2,\ x_3 = -1$.

Пример 2.5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - 5x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 3, \\ 7x_1 - 5x_2 - 9x_3 - 10x_4 = 8. \end{cases}$$

Решение

Преобразуем расширенную матрицу системы.

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & -2 & -5 & 3 \\ 7 & -5 & -9 & -10 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 5 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -5 & 1 \\ 3 & -2 & -2 & -5 & 3 \\ 7 & -5 & -9 & -10 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 2 & 26 & -10 & -6 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Здесь мы сначала поменяли местами первую и вторую строки, затем умножили первую строку последовательно на (-2), (-3) и (-7) и прибавили, соответственно, ко второй, третьей и четвертой строкам. Учитывая, что в получившейся матрице вторая третья и четвертая строки пропорциональны, получили матрицу с двумя нулевыми строками.

Т.к. $r(A) = r(\widetilde{A}) = 2 < 4$, то система совместна и имеет бесконечно много решений.

Запишем систему, соответствующую преобразованной матрице:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 5x_3 \qquad = 2, \\ \qquad x_2 + 13x_3 - 5x_4 = -3. \end{cases}$$

В последнем уравнении положим $x_4 = C_1, x_3 = C_2$, тогда $x_2 = -3 - 13C_2 + 5C_1$, $\quad x_1 = 2 + 5C_2 + (-3 - 13C_2 + 5C_1) = -1 - 8C_2 + 5C_1$, где C_1, C_2 – произвольные действительные числа.

Полагая C_1, C_2 равными различным числам, получим бесконечное множество решений системы.

Ответ: $(-1 - 8C_2 + 5C_1, -3 - 13C_2 + 5C_1, C_2, C_1)$, где C_1, C_2 – произвольные действительные числа.

Пример 2.6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 5, \\ 3x_1 + x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 9, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 7. \end{cases}$$

Решение

Преобразуем расширенную матрицу системы.

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 7 & 2 & 9 \\ 2 & 3 & 4 & 3 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 7 & -2 & 5 & -6 \\ 0 & 7 & -2 & 5 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 7 & -2 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Т.к. $r(A) = 2 \neq 3 = r(\tilde{A})$, то система совместна.

Ответ: система несовместна.

2.5. Метод жордановых исключений

Рассмотрим систему из m линейных функций, зависящих от n переменных:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1j}x_j + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2j}x_j + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots \\ y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots a_{ij}x_j + \cdots + a_{in}x_n \\ \cdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mj}x_j + \cdots + a_{mn}x_n \end{cases}$$

Жордановой таблицей будем называть таблицу

	x_1	x_2	$\cdots$	x_j	$\cdots$	x_n
y_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1j}	$\cdots$	a_{1n}
y_2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2j}	$\cdots$	a_{2n}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
y_i	a_{i1}	a_{i2}	$\cdots$	a_{ij}	$\cdots$	a_{in}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
y_m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mj}	$\cdots$	a_{mn}

Из i-го уравнения выразим переменную x_j:

$$x_j = -\frac{a_{i1}}{a_{ij}}x_1 - \frac{a_{i2}}{a_{ij}}x_2 - \cdots + \frac{1}{a_{ij}}y_i - \cdots - \frac{a_{in}}{a_{ij}}x_n.$$

Подставим полученное выражение для x_j во все остальные уравнения системы. После приведения подобных получим:

$$y_1 = a_{11}^* x_1 + a_{12}^* x_2 + \cdots + \frac{a_{1j}}{a_{ij}} y_i + \cdots + a_{1n}^* x_n$$

$$y_2 \ = a_{21}^* x_1 + a_{22}^* x_2 + \cdots + \frac{a_{2j}}{a_{ij}} y_i + \cdots + a_{2n}^* x_n$$

$$\cdots$$

$$x_j = -\frac{a_{i1}}{a_{ij}} x_1 - \frac{a_{i2}}{a_{ij}} x_2 - \cdots + \frac{1}{a_{ij}} y_i - \cdots - \frac{a_{in}}{a_{ij}} x_n$$

$$\cdots$$

$$y_m \ = a_{m1}^* x_1 + a_{m2}^* x_2 + \cdots + \frac{a_{mj}}{a_{ij}} y_i + \cdots + a_{mn}^* x_n$$

Построим жорданову таблицу, соответствующую полученной системе:

	x_1	x_2	$\cdots$	y_i	$\cdots$	x_n
y_1	a_{11}^*	a_{12}^*	$\cdots$	$\frac{a_{1j}}{a_{ij}}$	$\cdots$	a_{1n}^*
y_2	a_{21}^*	a_{22}^*	$\cdots$	$\frac{a_{2j}}{a_{ij}}$	$\cdots$	a_{2n}^*
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
x_j	$-\frac{a_{i1}}{a_{ij}}$	$-\frac{a_{i2}}{a_{ij}}$	$\cdots$	$\frac{1}{a_{ij}}$	$\cdots$	$-\frac{a_{in}}{a_{ij}}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
y_m	a_{m1}^*	a_{m2}^*	$\cdots$	$\frac{a_{mj}}{a_{ij}}$	$\cdots$	a_{mn}^*

Переход от первой таблицы ко второй, соответствующий замене $y_i \leftrightarrow x_j$, называется одним *шагом* жордановых исключений.

Алгоритм одного шага жордановых исключений:

1.Выбираем *опорный элемент* $a_{ij} \neq 0$. Строку и столбец, на пересечении которых находится опорный элемент будем называть опорными.

2.В новой таблице на месте опорного элемента записываем $\frac{1}{a_{ij}}$.

3.Все элементы опорного столбца делим на a_{ij}.

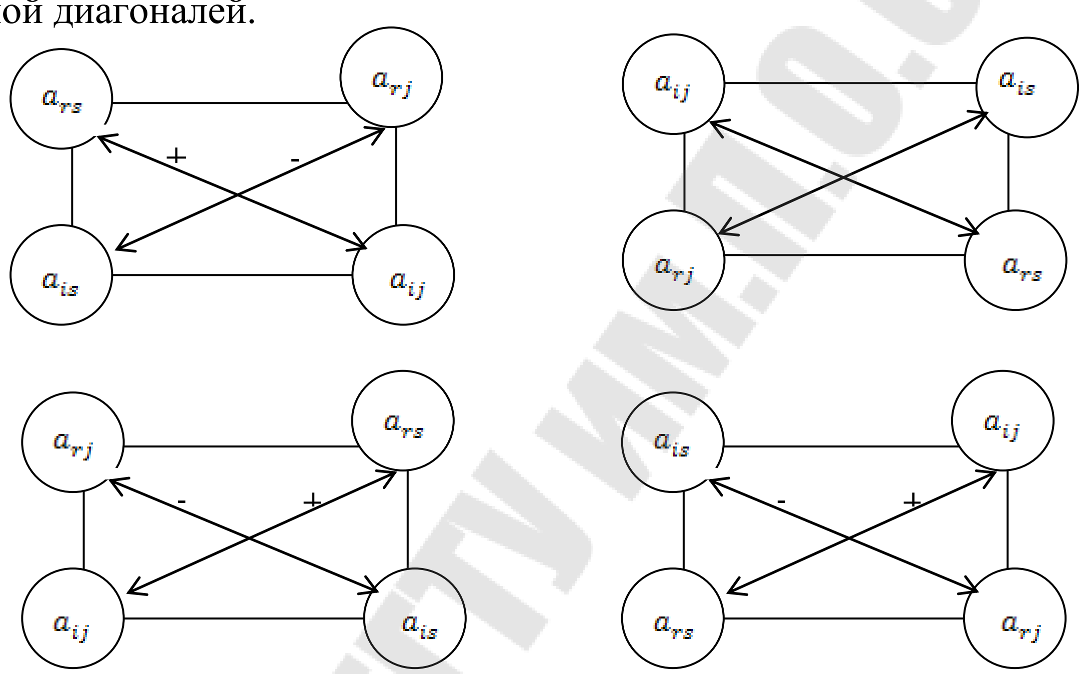
4. Все элементы опорной строки делим на $-a_{ij}$.

5.Для вычисления элемента a_{rs}^* пользуемся формулой:

$$a_{rs}^* = \frac{a_{ij} \cdot a_{rs} - a_{rj} \cdot a_{is}}{a_{ij}}.$$

Вычисление числителя можно графически представить в виде правила прямоугольника следующим образом:

Строим прямоугольник, в вершинах которого стоят опорный элемент a_{ij} и элемент a_{rs}. Тогда в двух других вершинах будут стоять элементы a_{rj} и a_{is}. Диагональ, содержащую a_{ij} и a_{rs} назовем главной. Вторую диагональ – побочной. Числитель дроби, определяющей a^*_{rs}, равен разности произведений элементов главной и побочной диагоналей.



Пример 2.7. Исследовать систему на совместность. В случае совместности решить методом жордановых исключений.

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -3 \end{cases}$$

{

Решение

Запишем матрицу системы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

И расширенную матрицу системы

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 3 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

Найдем ранги матриц A и $\tilde{A}$ методом окаймляющих миноров.

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 6 = 7 \neq 0$$

Построим M_3, содержащий внутри себя M_2:

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

$M_3 \neq 0$, следовательно, ранг матрицы A равен 3.

Миноры M_2 и M_3 являются минорами и матрицы $\tilde{A}$, поэтому ранг матрицы $\tilde{A}$ также равен 3.

Ранг матрицы A равен рангу матрицы $\tilde{\mathrm{A}}$ и меньше числа переменных. Следовательно, система имеет бесконечное число решений.

Составим жорданову таблицу:

	x_1	x_2	x_3	x_4
2	1	-3	5	-2
1	2	-1	1	1
-3	3	-2	3	-4

В качестве опорного выберем элемент a_{11}.Совершим один шаг жордановых исключений, т.е. поменяем местами x_1 и 2. Все элементы опорной строки поделим на -1, все элементы опорного столбца поделим на 1. Остальные элементы найдем по правилу прямоугольника:

$$a_{ij}^* = \frac{1 \cdot a_{ij} - a_{i1} \cdot a_{1j}}{1}$$

Получим новую таблицу:

	2	x_2	x_3	x_4
x_1	1	3	-5	2
1	2	5	-9	5
-3	3	7	-12	2

В качестве опорного, выберем элемент a_{22}.

Совершим еще один шаг жордановых исключений, т.е. поменяем местами x_2 и 1. Вместо опорного элемента запишем 1/5. Все элементы опорной строки поделим на -5, все элементы опорного столбца поделим на 5. Остальные элементы найдем по правилу прямоугольника:

$$\mathrm{a}_{\mathrm{ij}}^* = \frac{5 \cdot \mathrm{a}_{\mathrm{ij}} - \mathrm{a}_{\mathrm{i1}} \cdot \mathrm{a}_{1\mathrm{j}}}{5}.$$

Получим новую таблицу:

	2	1	x_3	x_4
x_1	-1/5	3/5	2/5	-1
x_2	-2/5	1/5	9/5	-1
-3	1/5	7/5	3/5	-5

В качестве опорного выберем элемент a_{33}.

Совершим последний один шаг жордановых исключений, т.е. поменяем местами x_3 и -3. Вместо опорного элемента запишем 5/3. Все элементы опорной строки поделим на -3/5, все элементы опорного столбца поделим на 3/5. Остальные элементы найдем по правилу прямоугольника:

$$a_{ij}^* = \frac{\frac{5}{3} \cdot a_{ij} - a_{i1} \cdot a_{1j}}{\frac{5}{3}}$$

Получим новую таблицу:

	2	1	-3	x_4
x_1	-1/3	-1/3	2/3	7/3
x_2	-1	-4	3	14
x_3	-1/3	-7/3	5/3	25/3

Больше шагов, меняющих переменную с числом, мы совершить не можем. Поэтому переменную x_2 объявим свободной и придадим ей произвольное значение C. Выпишем систему, соответствующую полученной таблице:

$$\begin{cases} x_4 = C \\ x_1 = -\frac{1}{3} \cdot 2 + \left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{2}{3} \cdot (-3) + \frac{7}{3} \cdot \mathrm{C} \\ x_2 = -1 \cdot 2 + (-4) + 3 \cdot (-3) + 14 \cdot \mathrm{C} \\ x_3 = -\frac{1}{3} \cdot 2 + \left(-\frac{7}{3}\right) + \frac{5}{3} \cdot (-3) + \frac{25}{3} \cdot \mathrm{C} \end{cases}$$

Таким образом, получим

$$\begin{cases} x_4 = C, \\ x_1 = -3 + \frac{7}{3} C, \\ x_2 = -15 + 14C, \\ x_3 = -8 + \frac{25}{3} C, \end{cases}$$

где C –произвольное действительное число.

Ответ: $\left\{\left(-3 + \frac{7}{3} C, -15 + 14C, -8 + \frac{25}{3} C, C\right)\right\}$, где С – любое действительное число.

2.6. Системы линейных однородных уравнений

Определение 2.2. *Однородной* системой линейных алгебраических уравнений называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots \ \ldots \ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Очевидно, что однородная система совместна всегда, т.к. $r(A) = r(\widetilde{A})$. Она имеет по крайней мере нулевое (*тривиальное*) решение $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

Теорема 2.2. Система однородных уравнений имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда ранг ее матрицы меньше числа неизвестных.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется системой линейных алгебраических уравнений?
2. Что называется решением системы уравнений?
3. Какая система называется совместной? несовместной?
4. Что называется матрицей системы линейных уравнений? расширенной матрицей системы?
5. В чем заключается матричный метод решения невырожденных систем линейных уравнений?
6. Запишите формулы Крамера для решения невырожденных систем линейных уравнений?
7. Сформулируйте теорему Кронекера-Капелли.
8. Что называется одним шагом жордановых исключений?
9. Сформулируйте правила перехода от исходной таблицы к новой после одного шага жордановых исключений.
10. Каков порядок решения систем линейных уравнений с помощью метода базисных миноров?
11. В чем состоит суть метода Гаусса для решения произвольных систем линейных уравнений? Опишите прямой и обратный ход метода Гаусса.
12. Какая система называется однородной?
13. Сколько решений может иметь однородная система линейных уравнений?

Задания для самостоятельного решения

1. Решить систему линейных уравнений методом обратной матрицы, по формулам Крамера и методом Гаусса: а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 8, \\ 3x_1 + 4x_2 = 18. \end{cases}$

б) $\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -4, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -5. \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 12, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = -3. \end{cases}$ г) $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1, \\ 7x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 2. \end{cases}$

2. Исследовать систему на совместность и в случае совместности решить ее:

а) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 3, \\ 3x_1 + 5x_3 + 4x_4 = 6. \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - 10x_2 + 3x_4 = 0, \\ 4x_1 - 20x_2 + 6x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$

3. Решить систему методом Гаусса и методом жордановых исключений:

а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = -4, \\ x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = -3. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + 5x_2 = 3, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 1. \end{cases}$

4. Решить системы однородных уравнений:

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 5x_4 = 0, \\ 5x_1 + 9x_2 + x_3 - 14x_4 = 0, \\ 4x_1 + 7x_2 + 2x_3 - 9x_4 = 0. \end{cases}$

3. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Величины, которые полностью определяются своими числовыми значениями, например, длина, площадь, масса, работа, называются *скалярными*. Другие величины, например, сила, скорость, ускорение, определяются не только числовым значением, но и направлением. Такие величины называют *векторными*.

3.1. Основные понятия и определения

Определение 3.1. *Вектором* называется направленный отрезок прямой. Если начало вектора находится в точке A, а конец – в точке B, то вектор обозначается символом $\overline{AB}$ или просто $\overline{a}$.

Определение 3.2. *Длиной*, или *модулем*, вектора называется длина отрезка, изображающего вектор. Обозначается $|\overline{a}|$, $|\overline{AB}|$. Вектор, длина которого равна нулю, называется *нулевым*. Считается, что нулевой вектор направления не имеет. Вектор, длина которого равна единице, называется *единичным*. Единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора $\overline{a}$, называется *ортом* вектора $\overline{a}$ и обозначается $\overline{a}^0$.

Определение 3.3. Векторы, параллельные одной и той же прямой, называются *коллинеарными*. Нулевой вектор коллинеарен каждому вектору.

Определение 3.4. Векторы, расположенные в одной плоскости или параллельные одной и той же плоскости, называются *компланарными*.

Определение 3.5. Два вектора называются *равными*, если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют одинаковые длины.

Из определения 3.5. следует, что вектор можно переносить параллельно самому себе, а его начало помещать в любую точку пространства.

3.2. Линейные операции над векторами

1. Умножение вектора на число

Определение 3.6. *Произведением* вектора $\overline{a}$ на число m называется вектор $\overline{b}$, коллинеарный вектору $\overline{a}$ и имеющий длину $m|\overline{a}|$. Вектор $\overline{b}$ сонаправлен вектору $\overline{a}$, если $m > 0$ и противоположно направлен, если $m < 0$.

<u>Свойства произведения вектора на число</u>

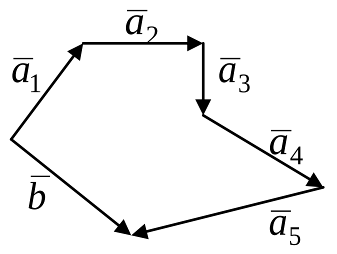
1) Для любых m, n и $\overline{a}$ справедливо равенство:

$$m(n\overline{a}) = (mn)\overline{a};$$

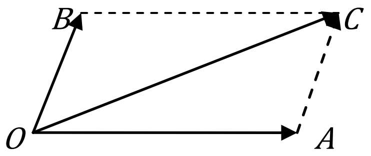
2) Если $\overline{a} \neq 0$, то для любого вектора $\overline{b}$, коллинеарного $\overline{a}$, существует единственное число λ, такое что $\overline{b} = \lambda\overline{a}$;

2. Сложение векторов

Определение 3.6. *Суммой* векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$ называется вектор $\overline{b}$, замыкающий ломаную линию, составленную из исходных векторов таким образом, что начало каждого последующего из слагаемых совпадает с концом предыдущего. Результирующий вектор $\bar{b}$ направлен из начала первого вектора к концу последнего. Это правило сложения векторов называется *правилом многоугольника*.

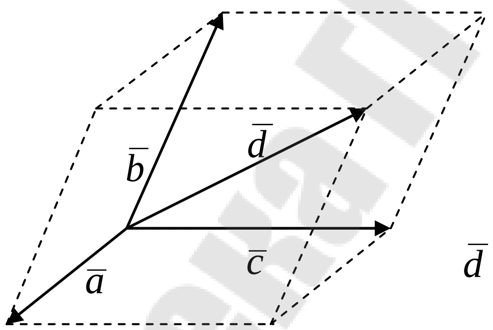


Предложение 3.1. (*правило параллелограмма*). Сумма векторов, приведенных к общему началу, есть вектор – диагональ параллелограмма, построенного на этих векторах.



Действительно, т.к. в параллелограмме противолежащие стороны параллельны и равны, то $\overline{OB} = \overline{AC}$. Следовательно, $\bar{a} + \bar{b} = \overline{OA} + \overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AC} = \overline{OC}$.

Предложение 3.2. (*правило параллелепипеда*). Сумма трех некомпланарных векторов, приведенных к общему началу, есть вектор – диагональ параллелепипеда, построенного на этих векторах.



$$\bar{d} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$$

Свойства сложения векторов

1) Сложение векторов коммутативно, т.е.

$$\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a};$$

2) Сложение векторов ассоциативно, т.е.

$$(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c});$$

3) Сложение векторов дистрибутивно относительно умножения на число, т.е.

$$m(\bar{a} + \bar{b}) = m\bar{a} + m\bar{b};$$

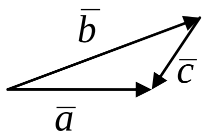
4) Для любых чисел m и n и вектора $\bar{a}$ справедливо равенство:

$$(m+n)\overline{a} = m\overline{a} + n\overline{a}\,.$$

3. Вычитание векторов

Определение 3.7. Разностью векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор $\overline{c} = \overline{a} - \overline{b}$, такой что $\overline{b} + \overline{c} = \overline{a}$.

Предложение 3.3. Разность двух векторов, приведенных к одному началу, есть вектор, начинающийся в конце вычитаемого и заканчивающийся в конце уменьшаемого.



$$\overline{c} = \overline{a} - \overline{b}$$

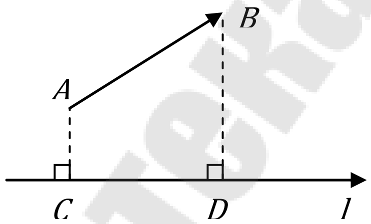
Отметим, что в параллелограмме, построенном на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$, она из диагоналей является суммой, а вторая – разностью указанных векторов.

3.3. Проекция вектора на ось

Определение 3.8. *Осью* называется всякая прямая, на которой указано направление.

Определение 3.9. *Проекцией вектора* $\overline{AB}$ *на ось* $\bar{l}$ называется длина отрезка CD этой оси, заключенного между основаниями перпендикуляров, опущенных из начала и конца вектора $\overline{AB}$, взятая со знаком «+», если направление отрезка CD совпадает с направлением оси, и со знаком «–», если эти направления противоположны.

Обозначается $\text{пр}_{\bar{l}}\,\overline{AB}$.



<u>Свойства проекции</u>

1) Проекция вектора на ось равна длине вектора, умноженной на косинус угла между вектором и осью, т.е.

$$\text{пр}_{\bar{l}}\,\overline{a} = |\overline{a}|\cos\alpha\,.$$

Из свойства 1 следует, что $\text{пр}_{\bar{l}}\,\overline{a} > 0$, если угол α – острый, $\text{пр}_{\bar{l}}\,\overline{a} < 0$, если угол тупой, и $\text{пр}_{\bar{l}}\,\overline{a} = 0$, если $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$

2) Проекция суммы векторов равна сумме проекций слагаемых на эту ось, т.е.

$$\text{пр}_{\bar{l}}(\bar{a}+\bar{b}) = \text{пр}_{\bar{l}}\bar{a} + \text{пр}_{\bar{l}}\bar{b}\ ;$$

3.4. Линейная зависимость векторов. Базис

Определение 3.10. Система векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ называется *линейно зависимой*, если существуют такие постоянные $C_1, C_2, \ldots, C_n$, не все одновременно равные нулю, что выполняется условие

$$C_1\bar{a}_1 + C_2\bar{a}_2 + \cdots + C_n\bar{a}_n = 0.$$

В противном случае система векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ называется *линейно независимой*.

Если система зависима, то хотя бы один вектор является линейной комбинацией остальных.

Теорема 3.1. Любые два коллинеарных вектора линейно зависимы. Любые два неколлинеарных вектора линейно независимы.

Доказательство

Пусть $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны. Тогда $\bar{a} = \lambda\bar{b}$, следовательно, $1\cdot\bar{a} - \lambda\bar{b} = 0$. Очевидно, $C_1 = 1 \neq 0, C_2 = \lambda \neq 0$, следовательно, условие линейной зависимости выполняется.

Пусть теперь $\bar{a}$ и $\bar{b}$ неколлинеарны. Предположим, что вектора линейно зависимы, и пусть существует C_1 такое, что $C_1\bar{a} + C_2\bar{b} = 0$. Тогда $C_1\bar{a} = -\dfrac{C_2}{C_1}\bar{b} = \lambda\bar{b}$, следовательно, вектор $\bar{a}$ коллинеарен вектору $\bar{b}$, что противоречит условию. Следовательно, предположение неверно и вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ линейно независимы.

Теорема 3.2. Три компланарных вектора линейно зависимы, и наоборот, три некомпланарных вектора линейно независимы.

Теорема 3.3. Каждые четыре вектора линейно зависимы.

Определение 3.11. *Базисом на плоскости* называются два неколлинеарных вектора, взятых в определенном порядке.

Теорема 3.4. Если на плоскости вектора $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ выбраны в качестве базиса, то любой компланарный с ними вектор $\bar{a}$ можно представить, причем единственным образом, как линейную комбинацию векторов базиса.

Доказательство

Т.к. вектора $\bar{a}$, $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ компланарны, то данная система векторов линейно зависима, а значит, вектор $\bar{a}$ можно выразить через векторы $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$. Предположим, что вектор $\bar{a}$ представим в виде линейной комбинации векторов $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ не единственным образом, т.е. $\bar{a} = \alpha_1\bar{e}_1 + \alpha_2\bar{e}_2$ и $\bar{a} = \beta_1\bar{e}_1 + \beta_2\bar{e}_2$.

Тогда $0 = \bar{a} - \bar{a} = (\alpha_1 - \alpha_2)\bar{e}_1 + (\beta_1 - \beta_2)\bar{e}_2$. Т.к. вектора $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ линейно независимы, то $\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 = 0, \\ \beta_1 - \beta_2 - 0, \end{cases}$ а значит, $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$.

Определение 3.12. *Базисом в пространстве* называются любые три некомпланарных вектора, взятых в определенном порядке.

Теорема 3.5. Если вектора $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ и $\bar{e}_3$ выбраны в качестве базиса в пространстве, то любой вектор $\bar{a}$ можно представить, причем единственным образом, как линейную комбинацию векторов базиса.

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 3.4.

Каждому вектору $\bar{a}$ в пространстве можно сопоставить тройку чисел (α, β, γ), которые являются коэффициентами разложения вектора $\bar{a}$ по базису $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$. Каждой упорядоченной тройке (α, β, γ) с помощью базиса $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$. Можно сопоставить единственный вектор $\bar{a} = \alpha\bar{e}_1 + \beta\bar{e}_2 + \gamma\bar{e}_3$.

Определение 3.13. Если $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$. – базис и $\bar{a} = \alpha\bar{e}_1 + \beta\bar{e}_2 + \gamma\bar{e}_3$, то числа α, β, γ называются *координатами* вектора $\bar{a}$ в базисе $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$.

Два вектора равны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые координаты в одном и том же базисе. При умножении вектора на число его координаты умножаются на это число. При сложении двух векторов их координаты складываются. При переходе к новому базису координаты вектора изменяются.

Пример 3.2. Найти координаты вектора $\bar{d}(-13;2;18)$ в базисе $\bar{a}(1;1;4)$, $\bar{b}(-3;0;2)$, $\bar{c}(1;2;-1)$.

Решение

Запишем разложение вектора $\bar{d}$ по векторам $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$:

$\bar{d} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{b} + \gamma\bar{c}$, или, в координатах,

$$\begin{cases} -13 = \alpha \cdot 1 \cdot + \beta \cdot (-3) + \gamma \cdot 1, \\ 2 = \alpha \cdot 1 \cdot + \beta \cdot 0 + \gamma \cdot 2, \\ 18 = \alpha \cdot 4 \cdot + \beta \cdot 2 + \gamma \cdot (-1). \end{cases}$$

Решим эту систему относительно α, β, γ по формулам Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -29,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -13 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 18 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -58, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -13 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 18 & -1 \end{vmatrix} = -145,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -13 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 18 \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда $\alpha = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{-58}{-29} = 2$, $\beta = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{-145}{-29} = 5$, $\gamma = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = \dfrac{0}{-29} = 0$.

Таким образом, в базисе $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ вектор $\bar{d}$ имеет координаты $(2;5;0)$, или $\bar{d} = 2\bar{a} + 5\bar{b}$.

Ответ: $\bar{d} = 2\bar{a} + 5\bar{b}$.

3.5. Декартова система координат в пространстве

Выберем в пространстве точку O. Рассмотрим произвольную точку M. Вектор $\overline{OM}$ называется *радиус-вектором* точки M по отношению к точке O.

Выберем в пространстве базис $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$. Тогда точке M можно сопоставить упорядоченную тройку чисел (α, β, γ), являющуюся координатами вектора $\overline{OM}$ в базисе $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$.

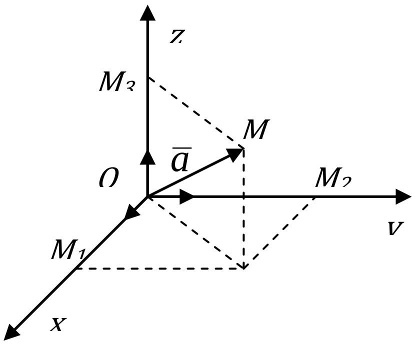
Определение 3.14. *Декартовой системой координат* в пространстве называется совокупность точки O и базиса $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$.

Точка O называется *началом координат*, прямые, проходящие через начало координат в направлении базисных векторов, называются *координатными осями*. Ось, направленная вдоль $\bar{e}_1$, называется *осью абсцисс*, вдоль $\bar{e}_2$, – *осью ординат*, вдоль $\bar{e}_3$, – *осью аппликат*.

Плоскости, проходящие через координатные оси, называются *координатными плоскостями*.

Определение 3.15. *Координатами точки* M в рассматриваемой системе координат называются координаты радиус-вектора точки M относительно начала координат. Первая координата называется *абсциссой*, вторая – *ординатой*, третья – *аппликатой*.

Определение 3.16. Базис, в котором все вектора попарно перпендикулярны (ортогональны) и имеют единичную длину, называется *ортонормированным*. Декартова система координат с ортонормированным базисом называется *прямоугольной системой координат.* Базисные вектора в ней обозначают $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$.



Рассмотрим произвольный вектор $\bar{a}$ в пространстве и совместим его начало с началом координат. Таким образом, $\bar{a} = \overline{OM}$. Найдем проекции вектора $\bar{a}$ на координатные оси:

$a_x = \text{пр}_{\bar{x}}\bar{a} = |OM_1|,\qquad a_y = \text{пр}_{\bar{y}}\bar{a} = |OM_2|,$

$a_z = \text{пр}_z\bar{a} = |OM_3|.$

Согласно правилу параллелепипеда,

$$\bar{a} = \overline{OM} = \overline{OM_1} + \overline{OM_2} + \overline{OM_3}.$$

Т.к. $\overline{OM_1} = \left|\overline{OM_1}\right| \cdot \bar{i} = \text{пр}_{\bar{x}}\bar{a} \cdot \bar{i}$, $\overline{OM_2} = \left|\overline{OM_2}\right| \cdot \bar{j} = \text{пр}_{\bar{y}}\bar{a} \cdot \bar{j}$, $\overline{OM_3} = \left|\overline{OM_3}\right| \cdot \bar{k} = \text{пр}_{\bar{z}}\bar{a} \cdot \bar{k}$, то

$$\boxed{\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}} \qquad (3.1)$$

Формула (3.1) называется *разложением вектора по ортам координатных осей*. Числа a_x, a_y, a_z называются координатами вектора. Таким образом, координаты вектора равны его проекциям на соответствующие оси.

Зная проекции вектора $\bar{a}$, можно, дважды применив теорему Пифагора, найти модуль вектора:

$$\boxed{|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\ ,} \qquad (3.2)$$

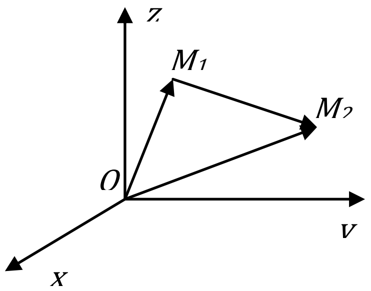
т.е. модуль вектора равен квадратному корню из суммы квадратов его координат.

Пусть вектор $\bar{a}$ образует с координатными осями углы α, β, γ. Тогда по свойству проекции (см.п. 3.3.)

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\bar{a}|},\ \cos\beta = \frac{a_y}{|\bar{a}|},\ \cos\gamma = \frac{a_z}{|\bar{a}|}. \qquad (3.3)$$

Числа $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ называют *направляющими косинусами* вектора $\bar{a}$.

Очевидно, вектор $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ имеет то же направление, что и вектор $\bar{a}$. Кроме того, ввиду формул (3.2) и (3.3), его модуль равен единице. Таким образом, вектор $\bar{a}^0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ является ортом вектора $\bar{a}$.



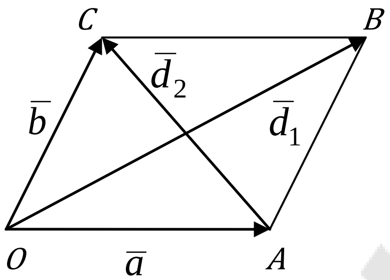
Рассмотрим теперь точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ в прямоугольной системе координат и найдем координаты вектора $\overline{M_1M}_2$. Т.к. согласно правилу треугольника $\overline{M_1M}_2 = \overline{OM}_2 - \overline{OM}_1$, а $\overline{OM}_1(x_1, y_1, z_1)$, $\overline{OM}_2(x_2, y_2, z_2)$, то

$$\overline{M_1M}_2 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1). \qquad (3.4)$$

Таким образом, ***чтобы найти координаты вектора, нужно от координат его конца отнять координаты начала***.

Пример 3.3. Найти длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a} = (3;-5;8)$ и $\bar{b} = (-1;1;-4)$.

Решение



Построим параллелограмм $OABC$, обозначим $\bar{a} = \overline{OA}$, $\bar{b} = \overline{OC}$, диагонали $\bar{d}_1 = \overline{OB}$, $\bar{d}_2 = \overline{AC}$. Согласно правилу параллелограмма сложения векторов имеем:

$$\bar{d}_1 = \bar{a} + \bar{b} = (2;-4;4),$$

$$\bar{d}_2 = \bar{b} - \bar{a} = (-4;6;-12).$$

Теперь найдем их длины по формуле (3.2):

$$|\bar{d}_1| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 4^2} = 6, \; |\bar{d}_2| = \sqrt{(-4)^2 + 6^2 + (-12)^2} = 14.$$

Ответ: 6 и 14.

3.6. Расстояние между двумя точками

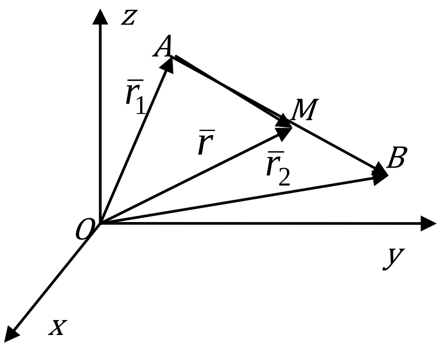
Пусть в пространстве заданы точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Тогда отыскание расстояния d между точками сводится к нахождению длины вектора $\overline{M_1M}_2$. Используя формулы (3.4) и (3.2), получаем:

$$\boxed{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.} \qquad (3.5)$$

Таким образом, расстояние между точками равно корню квадратному из суммы квадратов разностей одноименных координат.

3.7. Деление отрезка в данном отношении

Пусть даны точки $A(x_A, y_A, z_A)$ и $B(x_B, y_B, z_B)$. На прямой AB необходимо найти точку $M(x_M, y_M, z_M)$, делящую отрезок AB в отношении λ, т.е. $AM = \lambda MB$.



Обозначим $\overline{OA} = \bar r_1$, $\overline{OB} = \bar r_2$, $\overline{OM} = \bar r$. Тогда $\overline{AM} = \bar r - \bar r_1$, $\overline{MB} = \bar r_2 - \bar r$. Т.к. $\overline{AM} = \lambda \overline{MB}$, то

$$\bar r - \bar r_1 = \lambda(\bar r_2 - \bar r).$$

Тогда $\bar r(1+\lambda) = \bar r_1 + \lambda \bar r_2$, откуда

$$\bar r = \frac{\bar r_1 + \lambda \bar r_2}{1+\lambda}.$$

Последнее равенство в координатах примет вид:

$$x_M = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda},\ y_M = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda},\ z_M = \frac{z_A + \lambda z_B}{1+\lambda}. \qquad (3.6)$$

При делении отрезка пополам $AM = MB$, т.е. $\lambda = 1$. В этом случае формулы (3.6) примут вид:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2},\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2},\ z_M = \frac{z_A + z_B}{2}. \qquad (3.7)$$

Пример 3.4. Найти длину медианы AM в треугольнике ABC, если $A(1;3;-4)$, $B(0;-3;2)$, $C(-2;5;4)$.

Решение

Т.к. медиана в треугольнике делит противолежащую сторону пополам, то координаты середины BC – точки M – найдем по формуле (3.7):

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{0-2}{2} = -1,$$

$$y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{-3+5}{2} = 1,$$

$$z_M = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{2+4}{2} = 3.$$

Следовательно, $M(-1;1;3)$ – середина BC. Теперь найдем длину медианы по формуле расстояния между двумя точками (3.5).Получим

$$AM=\sqrt{(-1-1)^2+(1-3)^2+(3+4)^2}=\sqrt{57}.$$

Ответ: $\sqrt{57}$.

3.8. Скалярное произведение векторов

Определение 3.17. *Углом* между двумя векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется наименьший угол между этими векторами, приведенными к общему началу.

Определение 3.18. *Скалярным произведением* двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется число, равное произведению модулей векторов-сомножителей на косинус угла между ними, т.е.

$$\boxed{\bar{a}\cdot\bar{b}=(\bar{a},\bar{b})=|\bar{a}||\bar{b}|\cos\alpha.} \tag{3.8}$$

Свойства скалярного произведения:

1) Скалярное произведение коммутативно, т.е. $\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{b}\cdot\bar{a}$.

2) Скалярное произведение ассоциативно относительно умножения на число, т.е. $(\lambda\bar{a})\cdot\bar{b}=\bar{a}\cdot\lambda\bar{b}=\lambda(\bar{a}\cdot\bar{b})$.

3) Скалярное произведение дистрибутивно относительно сложения векторов, т.е. $\bar{a}\cdot(\bar{b}+\bar{c})=\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot\bar{c}$.

4) Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины, т.е.

$$\bar{a}\cdot\bar{a}=|\bar{a}||\bar{a}|\cos 0=|\bar{a}|^2.$$

5) Скалярное произведение векторов равно произведению модуля одного из них на проекцию другого на ось, сонаправленную с первым вектором. Действительно, т.к. $\text{пр}_{\bar{a}}\bar{b}=|\bar{b}|\cos\alpha$, то

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}||\bar{b}|\cos\alpha=|\bar{a}|\text{пр}_{\bar{a}}\bar{b}=|\bar{b}|\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a}.$$

6) Скалярное произведение равно нулю тогда и только тогда, когда один из сомножителей – нулевой вектор, либо сомножители ортогональны.

7) Скалярное произведение двух векторов в ортонормированном базисе равно сумме произведений одноименных координат.

Действительно, пусть $\bar{a}=x_1\bar{i}+y_1\bar{j}+z_1\bar{k}$, $\bar{b}=x_2\bar{i}+y_2\bar{j}+z_2\bar{k}$. Тогда $\bar{a}\cdot\bar{b}=(x_1\bar{i}+y_1\bar{j}+z_1\bar{k})(x_2\bar{i}+y_2\bar{j}+z_2\bar{k})=x_1x_2\bar{i}\bar{i}+x_1y_2\bar{i}\bar{j}+x_1z_2\bar{i}\bar{k}+y_1x_2\bar{j}\bar{i}+$
$+y_1y_2\bar{j}\bar{j}+y_1z_2\bar{j}\bar{k}+z_1x_2\bar{k}\bar{i}+z_1y_2\bar{k}\bar{j}+z_1z_2\bar{k}\bar{k}$.

Т.к. ввиду свойств 4 и 5 $\bar{i}\cdot\bar{j}=\bar{i}\cdot\bar{k}=\bar{j}\cdot\bar{k}=\bar{k}\cdot\bar{j}=\bar{j}\cdot\bar{i}=\bar{k}\cdot\bar{i}=0$, $\bar{i}\cdot\bar{i}=\bar{j}\cdot\bar{j}=\bar{k}\cdot\bar{k}=1$, то

$$\boxed{\bar{a}\cdot\bar{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.} \qquad (3.9)$$

Некоторые приложения скалярного произведения

1) Нахождение угла между векторами

Из определения скалярного произведения следует, что

$$\boxed{\cos\alpha=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.} \qquad (3.10)$$

2) Необходимое и достаточное условие ортогональности двух ненулевых векторов:

$$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0.$$

3) Вычисление проекции вектора на вектор

$$\text{пр}_{\bar{a}}\bar{b}=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}.$$

4) Вычисление работы постоянной силы

Работа постоянной силы при прямолинейном перемещении ее точки приложения равна скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения.

Действительно, из школьного курса физики известно, что работа силы, направленной под углом α к перемещению, вычисляется по формуле $A=F\cdot S\cos\alpha$, т.е.

$$A=\bar{F}\cdot\bar{S}.$$

Пример 3.5. Найти длину вектора $\bar{a}=2\bar{m}-3\bar{n}$, если $|\bar{m}|=3$, $|\bar{n}|=4$, $\angle(\bar{m},\bar{n})=\dfrac{\pi}{3}$.

Решение

По свойству 4

$$\bar{a}\cdot\bar{a}=|\bar{a}|^2=(2\bar{m}-3\bar{n})(2\bar{m}-3\bar{n})=4\bar{m}^2-12\bar{m}\cdot\bar{n}+9\bar{n}^2=$$

$$=4|\bar{m}|^2-12|\bar{m}||\bar{n}|\cos\frac{\pi}{3}+9|\bar{n}|^2=4\cdot9-12\cdot3\cdot4\cdot\frac{1}{2}+9\cdot16=108.$$

Следовательно, $|\bar{a}|=\sqrt{108}=6\sqrt{3}$.

Ответ: $|\bar{a}| = 6\sqrt{3}$.

Пример 3.6. Даны точки $A(1;0;-1)$, $B(-1;2;3)$, $C(0;1;2)$. Найти угол $\angle BAC$.

Решение

Найдем координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$:

$\overline{AB} = (-1-1;\ 2-0;\ 3-(-1)) = (-2;\ 2;\ 4)$, $\overline{AC} = (-1;\ 1;\ 3)$.

По формуле (3.10) получаем

$$\cos\angle BAC = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{|\overline{AB}|\cdot|\overline{AC}|} = \frac{-2\cdot(-1)+2\cdot(1)+4\cdot 3}{\sqrt{(-2)^2+2^2+4^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+1^2+3^2}} =$$

$$= \frac{16}{\sqrt{24}\sqrt{11}} = \frac{8}{\sqrt{66}}, \text{ откуда } \angle BAC = \arccos\frac{8}{\sqrt{66}} \approx 10^\circ.$$

Ответ: $\angle BAC \approx 10^\circ$.

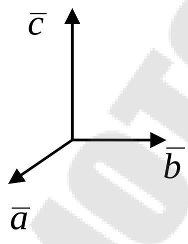
Пример 3.7. Доказать, что векторы $\bar{a} = (2;-4;6)$, $\bar{b} = (3;3;1)$ ортогональны.

Решение

Воспользуемся критерием ортогональности. Найдем скалярное произведение $\bar{a}\cdot\bar{b} = 2\cdot 3 + (-4)\cdot 3 + 6\cdot 1 = 0$. Т.к. скалярное произведение равно нулю, то векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ ортогональны.

3.9. Векторное произведение векторов

Определение 3.19. Упорядоченная тройка векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ с общим началом в точке O называется *правой*, если кратчайший поворот от вектора $\bar{a}$ к вектору $\bar{b}$ наблюдается с конца вектора $\bar{c}$ происходящим против хода часовой стрелки (см. рис). В противном случае тройка называется левой.



Определение 3.20. *Векторным произведением* вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ называется вектор $\bar{c}$, обозначаемый $\bar{c} = \bar{a}\times\bar{b} = [\bar{a},\bar{b}]$, который:

1) имеет модуль, равный произведению модулей сомножителей на синус угла между ними, т.е.

$$|\bar{c}| = |\bar{a}||\bar{b}|\sin\alpha;$$

2) перпендикулярен к плоскости векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, т.е. $\bar{c} \perp \bar{a}$ и $\bar{c} \perp \bar{b}$;

3) направлен так, что тройка векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ является правой.

<u>Свойства векторного произведения</u>

1) Векторное произведение антикоммутативно, т.е. $\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$.

2) Векторное произведение ассоциативно относительно умножения на число, т.е. $(\lambda\bar{a}) \times \bar{b} = \bar{a} \times \lambda\bar{b} = \lambda(\bar{a} \times \bar{b})$.

3) Векторное произведение дистрибутивно относительно сложения векторов, т.е. $(\bar{a} + \bar{b}) \times \bar{c} = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c}$.

4) Два ненулевых вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно нулевому вектору. В частности, $\bar{i} \times \bar{i} = \bar{j} \times \bar{j} = \bar{k} \times \bar{k} = 0$.

Найдем векторное произведение векторов, заданных своими координатами. Для этого составим таблицу векторного произведения векторов $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$.

$\times$	$\bar{i}$	$\bar{j}$	$\bar{k}$
$\bar{i}$	0	$\bar{k}$	$-\bar{j}$
$\bar{j}$	$-\bar{k}$	0	$\bar{i}$
$\bar{k}$	$\bar{j}$	$-\bar{i}$	0

Пусть теперь $\bar{a} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}$, $\bar{b} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}$. Тогда, с учетом свойств 2 и 3,

$$\bar{a} \times \bar{b} = (x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}) \times (x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}) =$$

$$= x_1x_2\bar{i} \times \bar{i} + x_1y_2\bar{i} \times \bar{j} + x_1z_2\bar{i} \times \bar{k} + y_1x_2\bar{j} \times \bar{i} + y_1y_2\bar{j} \times \bar{j} + y_1z_2\bar{j} \times \bar{k} +$$

$$+ z_1x_2\bar{k} \times \bar{i} + z_1y_2\bar{k} \times \bar{j} + z_1z_2\bar{k} \times \bar{k} =$$

$$= x_1y_2\bar{k} - x_1z_2\bar{j} - y_1x_2\bar{k} + y_1z_2\bar{i} + z_1x_2\bar{j} - z_1y_2\bar{i} =$$

$$= (y_1z_2 - z_1y_2)\bar{i} + (z_1y_2 - x_1z_2)\bar{j} + (x_1y_2 - y_1x_2)\bar{k}.$$

Заметим, что $y_1z_2 - z_1y_2 = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}$, $z_1y_2 - x_1z_2 = \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}$,

$x_1y_2 - y_1x_2 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$. Тогда

$$\boxed{\overline{a}\times\overline{b} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\overline{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\overline{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\overline{k} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}} \qquad (3.11)$$

Некоторые приложения векторного произведения

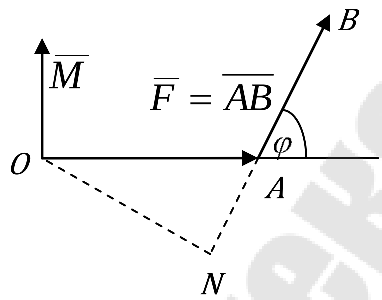
1) Нахождение площади параллелограмма и треугольника

$S_{OABC} = OA \cdot OB \cdot \sin\alpha = |\overline{a}||\overline{b}|\sin\alpha = |\overline{a}\times\overline{b}|$.

Таким образом, площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$ равна модулю векторного произведения этих векторов.

$$\boxed{\begin{aligned} &S_{\text{пар.}} = |\overline{a}\times\overline{b}|\ , \\ &S_{\Delta.} = \frac{1}{2}|\overline{a}\times\overline{b}| \end{aligned}} \qquad (3.12)$$

2) Определение момента силы относительно точки



Пусть в точке A приложена сила $\overline{F}$ и пусть O – некоторая точка пространства. *Моментом силы* $\overline{F}$ относительно точки O называется вектор $\overline{M}$, который проходит через точку O, перпендикулярен плоскости OAB, численно равен произведению силы на плечо и образует правую тройку с векторами $\overline{OA}$ и $\overline{AB}$.

$|\overline{M}| = |\overline{F}| \cdot ON = |\overline{F}| \cdot |\overline{OA}| \cdot \sin\alpha = |\overline{F}| \cdot |\overline{OA}| \cdot \sin(\overline{F}, \overline{OA})$, т.е.

$$\overline{M} = \overline{OA}\times\overline{F}.$$

Пример 3.8. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a} = 2\overline{m} - 3\overline{n}$ и $\overline{b} = \overline{m} + 2\overline{n}$, если $|\overline{m}| = 3$, $|\overline{n}| = 2$, $\angle(\overline{m}, \overline{n}) = \dfrac{\pi}{4}$.

Решение

Найдем модуль векторного произведения $\overline{a}\times\overline{b}$, воспользовавшись свойствами 1-4.

$$\left|\bar a\times\bar b\right| = \left|(2\bar m - 3\bar n)\times(\bar m + 2\bar n)\right| = \left|2\bar m\times\bar m - 3\bar n\times\bar m + 4\bar m\times\bar n - 6\bar n\times\bar n\right| =$$

$$= \left|\bar 0 + 3\bar m\times\bar n + 4\bar m\times\bar n - \bar 0\right| = 7\left|\bar m\times\bar n\right| = 7\left|\bar m\right|\left|\bar n\right|\sin\frac{\pi}{4} = 7\cdot 3\cdot 2\cdot\frac{\sqrt2}{2} = 21\sqrt2 .$$

Ответ: $21\sqrt2$.

Пример 3.9. Даны два вектора $\bar a = (5;3;-4)$, $\bar b = (6;7;-8)$. Найти векторное произведение $\bar a\times\bar b$.

Решение

По формуле (3.11) получаем

$$\bar a\times\bar b = \begin{vmatrix} \bar i & \bar j & \bar k \\ 5 & 3 & -4 \\ 6 & 7 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 7 & -8 \end{vmatrix}\bar i - \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 6 & -8 \end{vmatrix}\bar j + \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}\bar k = 4\bar i + 16\bar j + 17\bar k .$$

Ответ: $\bar a\times\bar b = (4;16;17)$.

Пример 3.10. Вершины треугольника находятся в точках $A(1;1;3)$, $B(3;-1;6)$, $C(5;1;-3)$. Вычислить площадь треугольника.

Решение

Используя формулу (3.4), найдем координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$:

$\overline{AB} = (2;-2;3)$, $\overline{AC} = (4;0;-6)$. Тогда

$$\overline{AB}\times\overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar i & \bar j & \bar k \\ 2 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & -6 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -6 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}\right) = (12;24;8)$$

.

Тогда в силу (3.12)

$$S = \frac12\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right| = \frac12\sqrt{12^2 + 24^2 + 8^2} = \frac12\sqrt{784} = \frac12\cdot 28 = 14.$$

Ответ: 14.

3.10. Смешанное произведение векторов

Определение 3.21. *Смешанным произведением* векторов $\bar a$, $\bar b$, $\bar c$ называется число, полученное от скалярного умножения векторного произведения $\bar a\times\bar b$ на вектор $\bar c$:

$$\bar a\bar b\bar c = (\bar a,\bar b,\bar c) = (\bar a\times\bar b)\cdot\bar c .$$

<u>Свойства смешанного произведения</u>

1) Операции скалярного и векторного произведений в смешанном произведении можно менять местами, т.е. $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}=\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})$.

2) Смешанное произведение не меняется при циклической перестановке сомножителей, т.е.

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c}=\bar{b}\bar{c}\bar{a}=\bar{c}\bar{a}\bar{b}=-\bar{b}\bar{a}\bar{c}=-\bar{c}\bar{b}\bar{a}=-\bar{a}\bar{c}\bar{b}.$$

3) Смешанное произведение меняет знак при перемене мест любых двух соседних векторов-сомножителей, т.е. $\bar{a}\bar{b}\bar{c}=-\bar{b}\bar{a}\bar{c}$, $\bar{a}\bar{b}\bar{c}=-\bar{c}\bar{b}\bar{a}$, $\bar{a}\bar{b}\bar{c}=-\bar{a}\bar{c}\bar{b}$.

4) Смешанное произведение ненулевых векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ равно нулю тогда и только тогда, когда они компланарны.

Найдем смешанное произведение векторов, заданных своими координатами.

Пусть $\bar{a}=x_1\bar{i}+y_1\bar{j}+z_1\bar{k}$, $\bar{b}=x_2\bar{i}+y_2\bar{j}+z_2\bar{k}$, $\bar{c}=x_3\bar{i}+y_3\bar{j}+z_3\bar{k}$.

Тогда $\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\bar{i}-\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\bar{j}+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\bar{k}$.

$$(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}x_3-\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}y_3+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}z_3=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Окончательно имеем:

$$\boxed{\bar{a}\bar{b}\bar{c}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}} \qquad (3.13)$$

Некоторые приложения смешанного произведения

1) Определение взаимной ориентации векторов в пространстве.

Если $\bar{a}\bar{b}\bar{c}>0$, то тройка векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ – правая, если $\bar{a}\bar{b}\bar{c}<0$ – левая.

2) Определение объемов параллелепипеда и треугольной пирамиды.

Объем параллелепипеда вычисляется по формуле $V=S_{\text{осн}}\cdot H$. Но $S_{\text{осн}}=S_{\text{параллелограмма}}=|\bar{a}\times\bar{b}|$, а $H=|OE|=\text{пр}_{\bar{d}}\bar{c}$, где $\bar{d}=\bar{a}\times\bar{b}$. Следовательно, $V=|\bar{d}|\cdot\text{пр}_{\bar{d}}\bar{c}=\bar{d}\cdot\bar{c}=(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}=\bar{a}\bar{b}\bar{c}$.

Таким образом, объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, равен смешанному произведению этих векторов, взятому со знаком «плюс», если вектора образуют правую тройку, и со знаком «минус», если они образуют левую тройку, т.е.

$$\boxed{V = \left|\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right|} \tag{3.14}$$

Нетрудно показать, что объем пирамиды, построенной на этих же векторах, равен

$$V_{пирамиды} = \frac{1}{6} V_{параллелепипеда} = \frac{1}{6}\left|\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right|. \tag{3.15}$$

Пример 3.11. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a} = (2;1;3)$, $\bar{b} = (1;3;1)$, $\bar{c} = (3;1;2)$.

Решение

По формуле (3.14) $V = \left|\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = |-13| = 13.$

Ответ: 13.

Пример 3.12. Доказать, что векторы $\bar{a} = (1;-2;3)$, $\bar{b} = (4;-5;6)$, $\bar{c} = (5;-7;9)$ компланарны.

Решение

Проверим выполнение условия компланарности. Так как $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -5 & 6 \\ 5 & -7 & 9 \end{vmatrix} = 0$, то можно утверждать, что данные векторы компланарны.

Пример 3.13. Вычислить объем треугольной пирамиды, вершины которой находятся в точках $A(6;1;4)$, $B(1;-3;7)$, $C(2;-2;-5)$, $D(7;1;3)$.

Решение

Используя формулу (3.4) найдем координаты векторов, на которых построена пирамида:

$\overline{AB} = (-5;-4;3)$, $\overline{AC} = (-4;-3;-9)$, $\overline{AD} = (1;0;-1)$. Тогда по формуле (3.15)

$$V_{пирамиды} = \frac{1}{6} V_{параллелепипеда} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} -5 & -4 & 3 \\ -4 & -3 & -9 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \frac{23}{3} = 7\frac{2}{3}.$$

Ответ: $7\dfrac{2}{3}$.

Пример 3.14. Выяснить, лежат ли точки $A(1;2;-1)$, $B(4;1;5)$, $C(-1;2;1)$, $D(6;1;3)$ в одной плоскости.

Решение

По формуле (3.4) найдем координаты векторов: $\overline{AB}=(3;-1;6)$, $\overline{AC}=(-2;0;2)$, $\overline{AD}=(5;-1;4)$. Теперь проверим выполнение критерия компланарности. Так как $(\overline{AB}\times\overline{AC})\cdot\overline{AD}=\begin{vmatrix}3 & -1 & 6\\ -2 & 0 & 2\\ 5 & -1 & 4\end{vmatrix}=0$, то векторы компланарны, а значит, точки A, B, C, D лежат в одной плоскости.

Пример 3.15. Выяснить, правой или левой будет тройка векторов $\overline{a}=(3;4;0)$, $\overline{b}=(0;-4;1)$, $\overline{c}=(0;2;5)$.

Решение

Воспользуемся формулой (3.12): $\overline{a}\overline{b}\overline{c}=\begin{vmatrix}3 & 4 & 0\\ 0 & -4 & 1\\ 0 & 2 & 5\end{vmatrix}=-66$.

Т.к. $\overline{a}\overline{b}\overline{c}<0$, то вектора $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ образуют левую тройку.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие величины называются скалярными?
2. Какие величины называются векторными?
3. Что называется вектором? модулем вектора? ортом вектора?
4. Какие векторы называются коллинеарными? компланарными?
5. Как определяется произведение вектора на число? Какими свойствами оно обладает?
6. Сформулируйте правило многоугольника для сложения векторов.
7. В чем состоит правило параллелограмма?
8. Как определятся разность двух векторов?
9. Дайте определение проекции вектора на ось?
10. Сформулируйте свойства проекции.
11. Какие вектора называются линейно зависимыми?

12. Какова связь между линейной зависимостью и компланарностью векторов в пространстве.

13. Дайте определение базиса на плоскости; в пространстве.

14. Что называется координатами вектора в заданном базисе?

15. Дайте определение прямоугольной системы координат в пространстве.

16. Как определить координаты вектора в прямоугольной системе координат? Как вычислить координаты вектора, если известны его координаты его начала и конца?

17. Как найти модуль вектора, заданного своими координатами?

18. Запишите формулы деления отрезка в данном отношении?

19. Дайте определение скалярного произведения векторов. Перечислите его свойства.

20. Как выражается скалярное произведение через координаты перемножаемых векторов?

21. Как найти угол между векторами, заданными своими координатами?

22. Дайте определение векторного произведения векторов. Перечислите его свойства.

23. Как выражается векторное произведение через координаты перемножаемых векторов?

24. Какие приложения имеет векторное произведение в геометрии и механике?

25. Дайте определение смещанного произведения векторов. Перечислите его свойства. Каков его геометрический смысл?

26. Как выражается смешанное произведение через координаты перемножаемых векторов?

27. Сформулируйте критерии ортогональности, коллинеарности и компланарности векторов.

Задания для самостоятельного решения

1. По заданным векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$ построить

а) $\bar{a}+\bar{b}$; б) $\bar{a}-\bar{b}$; в) $\bar{b}-\bar{a}$; г) $2\bar{a}+\bar{b}$; д) $\dfrac{1}{2}\bar{a}+\dfrac{1}{3}\bar{b}$; е) $-2\bar{a}+\bar{b}$.

2. Для каких векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ выполняются условия:

а) $\left|\bar{a}+\bar{b}\right|=\left|\bar{a}\right|+\left|\bar{b}\right|$; г) $\left|\bar{a}+\bar{b}\right|=\left|\bar{a}-\bar{b}\right|$;

б) $\left|\bar{a}+\bar{b}\right|=\left|\bar{a}\right|-\left|\bar{b}\right|$; д) $\left|\bar{a}+\bar{b}\right|=0$;

в) $\left|\bar{a}-\bar{b}\right|=\left|\bar{a}\right|+\left|\bar{b}\right|$; е) $\bar{a}=\left|\bar{a}\right|\cdot\bar{b}$.

3. Векторы $\overline{AB}=(0;2;-4)$ и $\overline{AC}=(4;-2;-2)$ определяют стороны треугольника ABC. Найти длину вектора $\overline{CD}$, совпадающего с медианой, проведенной из вершины С.

4. Найти координаты вектора $\bar{c}$, направленного по биссектрисе угла между векторами $\bar{a}=(-3;0;4)$ и $\bar{b}(5;2;14)$.

5. Найти направляющие косинусы вектора $\overline{AB}$, если $A(2;2;-5),\ B(-1;-2;0)$.

6. Даны две вершины параллелограмма $A(1;2;3)$, $B(-2;3;2)$ параллелограмма $ABCD$ и точка пересечения его диагоналей $E(3;-1;5)$. Найти координаты остальных вершин параллелограмма.

7. Точка $C(2;-3;-5)$ делит отрезок AB в отношении $2:3$. Найти координаты точки B, если $A(-2;1;-3)$.

8. Отрезок, ограниченный точками $A(2;-3;-5)$ и $B(7;-8;-5)$ разделен точками M_1, M_2, M_3, M_4 на пять равных частей. Найти координаты точек M_1 и M_3.

9. Векторы $\bar{a},\bar{b},\bar{c},\bar{d}$ заданы координатами в некотором базисе. Выяснить, является ли вектор $\bar{d}$ линейной комбинацией векторов $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$:

а) $\bar{a}=(2;1;4),\bar{b}=(-1;1;1),\bar{c}=(2;2;4),\bar{d}=(3;-4;-3)$;

б) $\bar{a}(2;3;-5),\bar{b}(1;-2;3),\bar{c}(3;1;-2),\bar{d}(3;3;3)$.

10. Даны векторы $\bar{a}=(2;3;1)$, $\bar{b}=(-1;4;5)$, $\bar{c}=(-3;2;1)$, $\bar{d}=(0;1;-3)$. Докажите, что векторы $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ образуют базис и найдите координаты вектора $\bar{d}$ в этом базисе.

11. Разложить вектор $\bar{a}=8\bar{i}+10\bar{j}$ по базису $\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3$, если $\bar{e}_1=2\bar{i}-\bar{j}+\bar{k}$, $\bar{e}_2=3\bar{i}+2\bar{j}-\bar{k}$, $\bar{e}_3=\bar{i}+3\bar{j}+\bar{k}$.

12. Коллинеарны ли векторы $\bar{c}_1=2\bar{a}+4\bar{b}$ и $\bar{c}_2=3\bar{b}-\bar{a}$, построенные по векторам $\bar{a}=(1;-2;3)$ и $\bar{b}=(3;0;-1)$?

13. При каких значениях m и l векторы $\bar{a}=(m;-2;3)$ и $\bar{b}=(1;l;4)$ коллинеарны?

14. Зная, что $|\bar{a}|=1, |\bar{b}|=2, \angle(\bar{a},\bar{b})=\dfrac{\pi}{3}$, вычислите: а) $\bar{a}\bar{b}$; б) $\bar{a}^2$; в) $(\bar{a}+\bar{b})^2$; г) $(2\bar{a}-\bar{b})(\bar{a}+3\bar{b})$.

15. Вычислить длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a} = 2\bar{n} - \bar{m}$ и $\bar{b} = \bar{n} + 3\bar{m}$, где $\bar{n}, \bar{m}$ – единичные векторы, образующие угол 60°.

16. Найти косинусы углов BAC и ABC, если $A(2;-3;-5)$, $B(-1;3;2)$, $C(1;0;-3)$.

17. Даны векторы $\bar{c} = (-2;0;1)$ и $\bar{d} = (1;2;-3)$. Найти $\text{пр}_{\bar{c}}\bar{d}$ и $\text{пр}_{\bar{d}}\bar{c}$.

18. При каком значении α векторы $\bar{a} = 3\bar{i} + 4\bar{j} + \alpha\bar{k}$ и $\bar{b} = 2\bar{i} + \alpha\bar{j} - 2\bar{k}$ взаимно перпендикулярны?

19. Найти угол между векторами m и n, если $|\bar{m}| = 1, |\bar{n}| = 1|$ и векторы $\bar{a} = 5\bar{n} - 4\bar{m}$ и $\bar{b} = \bar{n} + 2\bar{m}$ взаимно перпендикулярны.

20. Найти угол между диагональю куба и его ребром.

21. Даны силы $\bar{F}_1 = 3\bar{i} + 4\bar{j} + 2\bar{k}$, $\bar{F}_2 = \bar{i} - 3\bar{j} + 5\bar{k}$, $\bar{F}_3 = -\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$. Вычислить работу, произведенную равнодействующей этих сил, если точка их приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из точки $A(1;2;0)$ в точку $B(-1;3;2)$.

22. Даны два вектора: $\bar{a} = (3;-1;5)$ и $\bar{b} = (1;2;-3)$. Найти вектор $\bar{x}$ при условии, что он перпендикулярен к оси Oz и удовлетворяет условиям: $\bar{x}\bar{a} = 9, \bar{x}\bar{b} = -4$.

23. Даны три вектора $\bar{a} = 2\bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k}$, $\bar{b} = \bar{i} - 3\bar{j} + 2\bar{k}$ и $\bar{c} = 3\bar{i} + 2\bar{j} - 4\bar{k}$. Найти вектор $\bar{x}$, удовлетворяющий условиям: $\bar{x}\bar{a} = -5,\ \bar{x}\bar{b} = -11, \bar{x}\bar{c} = 20$.

24. Найти проекцию вектора $\bar{s} = (\sqrt{2};-3;-5)$ на ось, составляющую с координатными осями Ox, Oz углы $\alpha = 45°, \gamma = 60°$, а с осью Oy – острый угол β.

25. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ взаимно перпендикулярны, $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 4$. Вычислить: а) $|\bar{a} \times \bar{b}|$; б) $|(\bar{a} + \bar{b}) \times (\bar{a} - \bar{b})|$; в) $|(2\bar{a} - \bar{b}) \times (\bar{a} + 3\bar{b})|$.

26. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{p} = 2\bar{a} + 4\bar{b}$ и $\bar{q} = 3\bar{b} - \bar{a}$, если $|\bar{a}| = 1, |\bar{b}| = 2, \angle(\bar{a}, \bar{b}) = \dfrac{\pi}{6}$.

27. Найти модуль векторного произведения векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если $|\bar{a}| = 5, |\bar{b}| = 4, (\bar{a}, \bar{b}) = 8$.

28. Даны векторы $\bar{a} = (1;-2;3)$ и $\bar{b} = (3;0;-1)$. Найти координаты векторов $\bar{a} \times \bar{b}$ и $(2\bar{a} + \bar{b}) \times \bar{b}$.

29. Вершины треугольника находятся в точках $A(1;2;0)$, $B(3;0;3)$, $C(5;2;6)$. Найти площадь треугольника ABC и длину высоты h_{AB}.

30. Сила $F=(1;4;2)$ приложена к точке $A(1;2;0)$. Вычислить величину и направляющие косинусы момента этой силы относительно точки $B(3;-1;-1)$.

31. Убедившись, что векторы $\bar{a}=7\bar{i}+6\bar{j}-6\bar{k}$ и $\bar{b}=6\bar{i}+2\bar{j}+9\bar{k}$ можно рассматривать как ребра куба, найти его третье ребро.

32. Найти вектор $\bar{x}$ из системы уравнений: $\begin{cases} \bar{x}\cdot\bar{i}=3, \\ \bar{x}\times\bar{i}=-2\bar{k}. \end{cases}$

33. Компланарны ли векторы $\bar{a}=\bar{i}+\bar{j}-\bar{k}$, $\bar{b}=-\bar{i}+2\bar{j}+3\bar{k}$ и $\bar{c}=2\bar{i}-\bar{j}-4\bar{k}$?

34. Лежат ли точки $A(1;2;1)$, $B(4;1;5)$, $C(-1;2;1)$, $D(2;1;3)$ в одной плоскости?

35. Правой или левой будет тройка векторов $\bar{a}=(2;3;1)$, $\bar{b}=(-1;4;5)$, $\bar{c}=(3;2;1)$?

36. Найти длину высоты параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}=2\bar{i}+\bar{j}-6\bar{k}$, $\bar{b}=-\bar{i}+2\bar{j}+3\bar{k}$ и $\bar{c}=3\bar{i}-\bar{j}+5\bar{k}$, если за основание взят параллелограмм, построенный на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

37. Даны вершины пирамиды $A(1;2;0)$, $B(-1;3;2)$, $C(1;0;-3)$, $S(0;1;2)$. Вычислить ее объем и высоту H_{ACS}.

38. Даны векторы $\bar{a}=\bar{n}+\bar{m}$, $\bar{b}=\bar{m}-\bar{p}$, $\bar{c}=\bar{n}+\bar{p}$. Известно, $\bar{m},\bar{n},\bar{p}$ – некомпланарны. Будут ли компланарны векторы $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$?

39. Даны два вектора $\bar{a}=(11;10;2)$ и $\bar{b}=(4;0;3)$. Найти единичный вектор $\bar{c}$, ортогональный векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$ и направленный так, что бы упорядоченная тройка векторов $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ была правой.

40. Вектор $\bar{x}$, перпендикулярный к оси Oz и вектору $\bar{a}=(8;-15;3)$, образует острый угол с осью Ox. Зная, что $|\bar{x}|=51$, найти координаты вектора $\bar{x}$.

41. Найти вектор $\bar{x}$, зная, что он перпендикулярен к векторам $\bar{a}=(2;-3;1)$ и $\bar{b}=(1:,-2;3)$ и удовлетворяет условию $\bar{x}(\bar{i}+2\bar{j}-7\bar{k})=10$.

42. Объем тетраэдра равен 5, а три его вершины находятся в точках $A(2;1;-1)$, $B(3;0;1)$, $C(2;-1;3)$. Найти координаты четвертой вершины D, если известно, что она лежит на оси Oy.

43. Два трактора, идущие с постоянной скоростью по берегам прямого канала, тянут барку при помощи двух канатов. Силы натяжения канатов $|\overline{F}_1| = 800\text{Н}$ и $|\overline{F}_2| = 960\text{Н}$, угол между канатами равен 60°. Определить сопротивление воды, испытываемое баркой, если она движется параллельно берегам, и углы α и β между канатами и направлением движения.

44. Даны два вектора $\overline{a} = (8;4;1)$ и $\overline{b} = (2;-2;1)$. Найти вектор $\overline{c}$, компланарный векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$, перпендикулярный к вектору $\overline{a}$, равный ему по длине и образующий с вектором $\overline{b}$ тупой угол.

4. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

4.1. Геометрический смысл уравнений и неравенств с двумя переменными

Как известно, при помощи системы координат устанавливается взаимно-однозначное соответствие между геометрическими образами – точками и алгебраическими объектами – числами. Это соответствие позволяет изучение геометрических соотношений в расположении точек свети к изучению алгебраических соотношений между их координатам.

Следующим этапом является установление взаимно-однозначного соответствия между линиями на плоскости и уравнениями с двумя переменными x и y, что позволит изучение геометрических свойств линий свети к изучению аналитических свойств соответствующих им уравнений.

Определение 4.1. *Уравнением линии* называется уравнение вида $F(x, y) = 0$, связывающее переменные x и y, которому удовлетворяют координаты любой точки, лежащей на этой линии, и не удовлетворяют координаты ни одной точки, не лежащей на ней. Входящие в него переменные x и y называют *текущими координатами*.

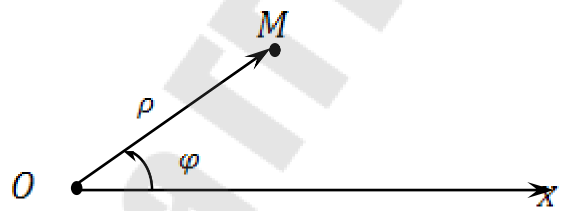
Выясним *геометрический смысл* неравенства с двумя переменными. Если обозначить через x и y координаты произвольной точки в прямоугольной системе координат, то неравенство $\mathrm{F}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) > 0$

или $\mathrm{F}(x, y) < 0$ определяет множество точек плоскости (оно может быть и пустым), представляющих собой некоторую область (часть плоскости). Линия, уравнение которой определяется равенством $\mathrm{F}(x, y) = 0$, является границей этой области.

Геометрическим смыслом системы неравенств с двумя переменными (если система совместна) является область плоскости. Очевидно, что увеличение числа неравенств в системе уменьшает область, ограниченную этими неравенствами.

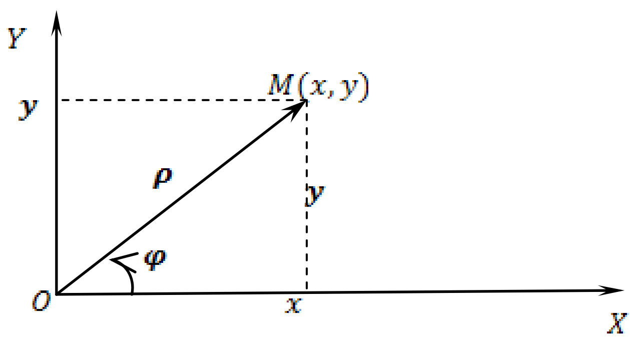
4.2. Полярные координаты

Кроме прямоугольной системы координат для определения положения точки на плоскости часто применяется *полярная система координат*. В полярной системе координат некоторая точка O на плоскости выбирается в качестве *полюса*. Через полюс O проводится луч Ox, называемый *полярной осью*. Положение точки M на плоскости, не совпадающей с O, единственным образом определяется двумя числами – полярным радиусом, т.е. расстоянием $\rho = |\overline{OM}|$ от точки M до полюса O, и полярным углом φ- углом между полярной осью и вектором $\overrightarrow{OM}$. Верно и обратное: числа ρ и φ определяют положение единственной точки на плоскости.



Определение 4.2. Полярный радиус r и полярный угол φ точки M называют ее полярными координатами и записывают $M(\rho,\varphi)$.

Установим связь полярных и декартовых координат. Выберем на плоскости декартову систему координат и поместим полюс O в ее начало, а за полярную ось возьмем ось абсцисс.



Формулы, выражающие полярные координаты через декартовы, следуют из теоремы Пифагора и соотношений сторон и углов в прямоугольном треугольнике:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} \qquad (4.1)$$

Для выбора одного из двух значений угла φ, определяемого формулой (4.1), надо учитывать, в какой четверти находится заданная точка.

Декартовы координаты выражаются через полярные как

$$x = r\cos\varphi\,; y = r\sin\varphi \qquad (4.2)$$

Пример 4.1. Найти декартовы координаты точек $M_1(3; \pi/2), M_2(2; 5\pi/6)$.

Решение

По формулам (4.2) имеем:

Для точки M_1: $x_1 = 3\cos\pi/2 = 0\,; y_1 = 3\sin\pi/2 = 3$, значит, $M_1(0;3)$.

Для точки M_2: $x_2 = 2\cos 5\pi/6 = -\sqrt{3}\,; y_1 = 2\sin 5\pi/6 = 1$, значит, $M_2\left(-\sqrt{3};1\right)$.

Ответ: $M_1(0;3)$, $M_2\left(-\sqrt{3};1\right)$.

Пример 4.2. Найти полярные координаты точек $M_3(2; -2)$, $M_4(-4; 0)$.

Решение

По формулам (4.1) имеем:

Для точки M_3: $\rho = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}, \operatorname{tg}\varphi = \frac{-2}{2} = -1$. Т.к. точка $M_3(2; -2)$ находится в четвертой четверти, то $\varphi = 7\pi/4$. Следовательно, $M_3\left(2\sqrt{2};7\pi/4\right)$.

Для точки M_4: $\rho = \sqrt{(-4)^2 + 0^2} = 4$. Т.к точка M_4 лежит на отрицательном направлении оси Ox, то $\varphi = \pi$. Значит, $M_4(4;\pi)$.

Ответ: $M_3\left(2\sqrt{2};7\pi/4\right)$, $M_4(4;\pi)$.

Пример 4.3. Построить кривую, заданную уравнением

$$(x^2 + y^2)^4 = 9(6x^2 + 7y^2)$$

Решение

Перейдем к полярным координатам

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$$

Тогда

$$x^2 + y^2 = (\rho\cos\varphi)^2 + (\rho\sin\varphi)^2 = \rho^2$$

$$6x^2 + 7y^2 = 6(\rho\cos\varphi)^2 + 7(\rho\sin\varphi)^2 =$$

$$= \rho^2(6\cos^2\varphi + 7\sin^2\varphi) = \rho^2(6 + \sin^2\varphi)$$

Уравнение линии в полярных координатах примет вид

$$(\rho^2)^4 = 9\rho^2(6 + \sin^2\varphi)$$

или

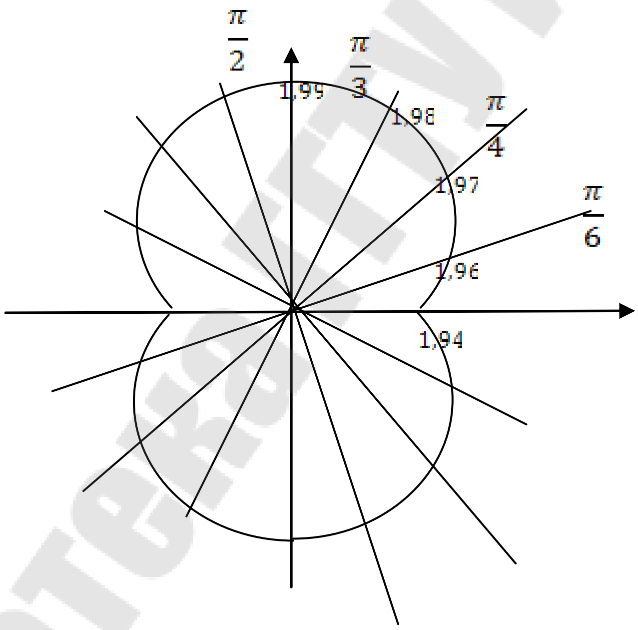
$$\rho^6 = 9(6 + \sin^2\varphi).$$

Уравнение не меняется при замене x на $-x$ и y на $-y$. Это означает, что кривая симметрична оносительно обеих координатных осей. Поэтому, достаточно построить кривую в первой четверти,а затем зеркально отразить полученный чертеж относительно Ox и Oy.

Составим таблицу

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
ρ	1,94	1,96	1,97	1,98	1,99

Строим заданную кривую



Некоторые наиболее часто используемые кривые, заданные своими полярными уравнениями, можно найти в Приложении 1.

4.3. Параметрические уравнения линии на плоскости

Часто линию удобно задавать не одним уравнением, связывающим текущие координаты x и y, а системой уравнений, в которой каждая текущая координата является функцией от одного и того же аргумента (*параметра*), например, t.

Получают уравнения вида:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \qquad (4.3)$$

Уравнения (4.3) называются *параметрическими уравнениями линии на плоскости.* При одном и том же значении параметра t уравнения (4.3) определяют координаты x и y некоторой точки линии. При изменении параметра меняются и координаты x и y, а соответствующая им точка перемещается по заданной линии.

Параметрическое задание линий удобно для записи уравнений движений в механике.

Некоторые наиболее часто используемые кривые, заданные своими параметрическими уравнениями, можно найти в Приложении 2.

4.4. Геометрический смысл уравнений и неравенств с тремя переменными

Прямоугольная система координат в пространстве позволяет установить взаимно однозначное соответствие между точками пространства и тройками чисел (x, y, z) – их координатами. Свойства, общие для всех точек поверхности, можно записать в виде уравнения, связывающего координаты поверхности.

Определение 4.3. *Уравнением поверхности* называется уравнение вида $F(x, y, z) = 0$, которому удовлетворяют координаты любой точки, лежащей на поверхности, и не удовлетворяют координаты точек, не лежащих на этой поверхности.

Заметим, что в пространстве, как и на плоскости, не всякое уравнение $F(x, y, z) = 0$ определяет поверхность в том смысле, который мы придаем этому слову. Например, уравнению $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ не удовлетворяют координаты ни одной точки, а уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ задает только одну точку пространства (начало координат).

Как и на плоскости, неравенство с тремя переменными $F(x, y, z) > 0$ или $F(x, y, z) < 0$ определяет множество точек пространства, которые образуют некоторую область (часть пространства). Существуют и такие неравенства, которым удовлетворяют координаты любой точки пространства, а также такие, которым не удовлетворяют координаты ни одной точки пространства.

Геометрическим смыслом системы неравенств с тремя переменными (если система совместна) является область пространства.

4.5. Цилиндрические и сферические координаты

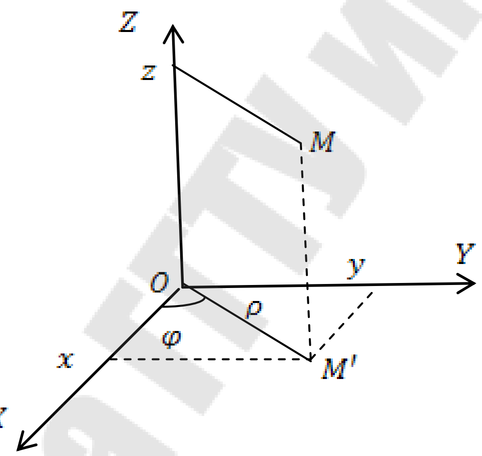
Определение 4.4. *Цилиндрическими координатами* точки M в пространстве называют три числа (ρ, φ, z), где

ρ – длина радиуса-вектора точки M;

φ – угол, образованный проекцией радиуса-вектора $\overline{OM}$ на плоскость xOy и осью Ox;

z – координата точки M по оси Oz.

Таким образом, цилиндрические координаты точки M – это ее полярные координаты в плоскости xOy и координата z.



Связь между декартовыми и цилиндрическими координатами:

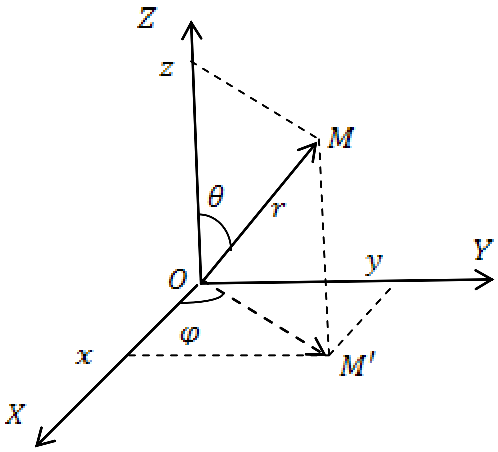
$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \qquad (4.4)$$

Определение 4.5. *Сферическими координатами* точки M в пространстве называют три числа (ρ, φ, θ), где

ρ – длина радиуса-вектора точки M;

φ – угол, образованный проекцией радиуса-вектора $\overline{OM}$ на плоскость xOy и осью Ox;

θ – угол отклонения радиуса-вектора $\overline{OM}$ от положительного направления оси Oz.



Связь между декартовыми и сферическими координатами:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ z = \rho \sin \theta \end{cases} \tag{4.5}$$

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется уравнением линии на плоскости?
2. Каков геометрический смысл уравнений и неравенств с двумя переменными?
3. Каким образом определяется положение точки в полярной системе координат?
4. Как связаны прямоугольные координаты точки с ее полярными координатами?
5. Какие уравнения называются параметрическими уравнениями линии на плоскости?
6. Что называется уравнением поверхности в пространстве? Каков геометрический смысл уравнений и неравенств с тремя переменными?
7. Что называется цилиндрическими и сферическими координатами точки в пространстве? Запишите формулы, связывающие их с декартовыми координатами.

Задания для самостоятельного решения

1. Построить линии, заданные уравнениями в полярных координатах. Записать их в декартовых координатах:

а) $\rho = 5$; б) $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$; в) $\rho = a\varphi$ (спираль Архимеда); г) $\rho = 6\cos\varphi$; д) $\rho = a\sin 3\varphi$ (трехлепестковая роза); е) $\rho\sin\varphi = 1$; ж) $\rho = 2^{\varphi}$, $\rho = (1/2)^{\varphi}$ (логарифмические спирали); з) $\rho^2 = a^2\sin 2\varphi$

2. Построить линии, записав их уравнения в полярных координатах:

а) $x^4 - y^4 = (x^2 + y^2)^3$; б) $x^2 + y^2 = 5(\sqrt{x^2 + y^2} - x^2)$;

в) $(x^2 + y^2)^2 = y^2$; г) $(x^2 + y^2)^2 = 4a^2 xy$.

3. Составить в полярных координатах уравнения следующих линий:

а) прямой, перпендикулярной к полярной оси и отсекающей на ней отрезок, равный 3;

б) прямых, параллельных полярной оси и отстоящих от нее на расстоянии 5;

в) окружности радиуса $R = 4$ с центром на полярной оси и проходящей через полюс.

4. Построить линии, заданные параметрическими уравнениями:

а) $x = 3t - 1$, $y = -2t + 5$; б) $x = 3\cos t + 3$, $y = 3\sin t - 2$.

5. *Из начала координат проведен луч, пересекающий окружность $x^2 + y^2 = ay$ и прямую $y = a$ $(a > 0)$ соответственно в точках *A* и *B*. Из точки *A* проведена прямая параллельно оси *Ox*, а из точки *B* – параллельно оси *Oy*. Точка *M* пересечения этих прямых при вращении луча описывает линию (*локон Аньези*). Составить ее уравнение.

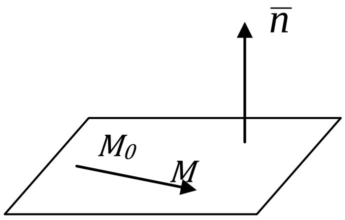
6. *Окружность радиуса a катится без скольжения по оси Ox. Некоторая точка M окружности описывает линию (*циклоиду*). Составить параметрическое уравнение этой линии, приняв за параметр t угол, на который поворачивается катящаяся окружность вокруг своего центра.

5. ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ

5.1. Уравнения плоскости в пространстве

Плоскость в пространстве *Oxyz* можно задать разными способами, каждому из которых соответствует определенный тип уравнения.

1. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору



Определение 5.1. Вектор $\overline{n} = (A; B; C)$, перпендикулярный плоскости, называется ее *нормальным вектором* и определяет ориентацию плоскости в пространстве относительно системы координат.

Пусть в пространстве $Oxyz$ плоскость задана точкой $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и вектором нормали $\overline{n} = (A; B; C)$. Запишем уравнение этой плоскости. Для этого возьмем произвольную точку $M(x; y; z)$ и составим вектор $\overline{M_0M}(x - x_0; y - y_0; z - z_0)$. Т.к. вектор $\overline{M_0M}$ лежит в плоскости, то он перпендикулярен вектору $\overline{n}$, а значит, их скалярное произведения равно нулю, т.е. $\overline{n} \cdot \overline{M_0M} = 0$. Следовательно,

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.} \qquad (5.1)$$

2. Общее уравнение плоскости

Раскроем скобки в уравнении (5.1) и перепишем его в виде:

$$Ax + By + Cz - (Ax_0 + By_0 + Cz_0) = 0.$$

Обозначив $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$, получим *общее уравнение плоскости*:

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0.} \qquad (5.2)$$

Частные случаи общего уравнения плоскости:

1) Если $D = 0$, то уравнение (5.2) примет вид $Ax + By + Cz = 0$. Точка $O(0;0;0)$ удовлетворяет этому уравнению, а значит, в этом случае плоскость *проходит через начало координат*.

2) Если $C = 0$, то уравнение (5.2) примет вид $Ax + By + D = 0$. В этом случае вектор нормали $\overline{n} = (A; B; 0)$ перпендикулярен оси Oz, а значит, плоскость *параллельна оси* Oz. При $B = 0$ плоскость параллельна оси Oy, при $A = 0$ – оси Ox.

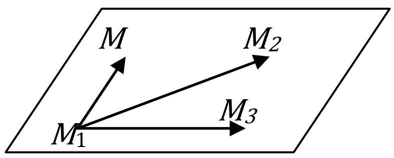
3) Если $C = D = 0$, то плоскость проходит через начало координат и параллельна оси Oz, следовательно, плоскость $Ax + By = 0$ *содержит ось* Oz. Аналогично, плоскости $Ax + Cz = 0$ и $By + Cz = 0$ содержат оси Oy и Ox соответственно.

4) Если $A = B = 0$, то уравнение (5.2) примет вид $Cz + D = 0$, т.е. $z = -\dfrac{D}{C}$. Эта плоскость *параллельна плоскости* xOy. Аналогично, уравнения $Ax + D = 0$ и $By + D = 0$ определяют плоскости, параллельные плоскостям, соответственно, yOz и xOz.

5) Уравнения $z = 0$, $y = 0$ и $x = 0$ задают координатные плоскости xOy, xOz и yOz.

3. Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки

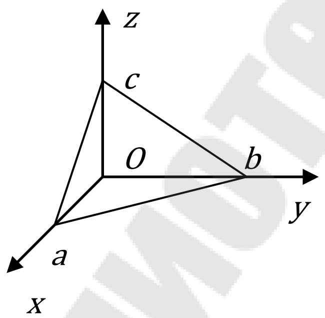
Три точки в пространстве, не лежащие на одной прямой, определяют единственную плоскость. Найдем ее уравнение.



Пусть $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$ – заданные точки, не лежащие на одной прямой. Возьмем произвольную точку искомой плоскости $M(x; y; z)$ и составим векторы $\overline{M_1M}(x - x_1; y - y_1; z - z_1)$, $\overline{M_1M_2}(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$ и $\overline{M_1M_3}(x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1)$. Т.к. эти векторы лежат в одной плоскости, то они компланарны, а значит, их смешанное произведение равно нулю, т.е.

$$\boxed{\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.} \qquad (5.3)$$

4. Уравнение плоскости «*в отрезках по осям*»



Пусть плоскость отсекает на координатных осях отрезки, соответственно, a, b, c, т.е. проходит через точки $(a;0;0)$, $(0;b;0)$ и $(0;0;c)$. Подставим координаты этих точек в уравнение (5.3) . Получим определитель $\begin{vmatrix} x - a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0$, вычислив который имеем $bcx + acy + abz - abc = 0$, или

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.} \tag{5.4}$$

5. Нормальное уравнение плоскости

Разделим обе части общего уравнения (5.2) на модуль вектора нормали, т.е. на $\sqrt{A^2+B^2+C^2}$. Получим уравнение:

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}x+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}y+\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}z+\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0$$

Согласно формуле (3.3) коэффициенты при переменных есть направляющие косинусы вектора нормали $\bar{n}=(A;B;C)$. Свободный член $\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ задает расстояние от начала координат до плоскости. Обозначив $p=-\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, окончательно имеем:

$$\boxed{x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-\mathrm{p}=0} \tag{5.5}$$

Уравнение (5.5) называется *нормальным уравнением* плоскости. Это уравнение применяют для исследования взаимного расположения точек и плоскости: две точки лежат по одну сторону от плоскости, если при подстановке их координат в нормальное уравнение плоскости получаются значения одного знака.

Пример 5.1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2;-3;2)$ перпендикулярно к вектору $\bar{n}(5;4;2)$.

Решение

Запишем уравнение плоскости, воспользовавшись формулой (5.1):

$$5(x-2)+4(y+3)+2(z-2)=0.$$

Раскрыв скобки, получим: $5x+4y+2z-2=0$.

Ответ: $5x+4y+2z-2=0$.

Пример 5.2. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат и точки с координатами $(-2;1;4)$ и $(3;2;5)$.

Решение

По условию плоскость проходит через три точки $M_1(0;0;0)$, $M_2(-2;1;4)$, $M_3(3;2;5)$. Воспользуемся формулой (5.3):

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ -2-0 & 1-0 & 4-0 \\ 3-0 & 2-0 & 5-0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ -2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -3x+22y-7z.$$

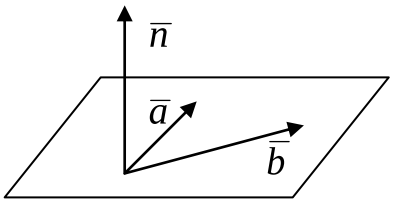
Следовательно, уравнение искомой плоскости имеет вид $-3x+22y-7z=0$.

Ответ: $-3x+22y-7z=0$.

Пример 5.3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(5;3;2)$ и параллельной двум векторам $\bar{a}(4;1;2)$ и $\bar{b}(5;3;1)$.

Решение

Координаты вектора нормали найдем как векторное произведение $\bar{a}$ и $\bar{b}$ по формуле (3.11):



$$\bar{a}\times\bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 4 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -5\bar{i}+6\bar{j}+7\bar{k}$$

Теперь по формуле (5.1) составим уравнение плоскости:

$$-5(x-5)+6(y-3)+7(z-2)=0.$$

Окончательно имеем $-5x+6y+7z-7=0$.

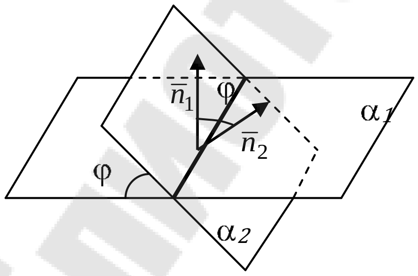
Ответ: $-5x+6y+7z-7=0$.

Основные задачи

1. Нахождение угла между двумя плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.

Пусть заданы две плоскости

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \text{ и}$$
$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$



Под *углом между двумя плоскостями* понимают двугранный угол, образованный этими плоскостями. Косинус угла φ между плоскостями определяется как косинус угла между нормальными векторами этих плоскостей $\bar{n}_1(A_1;B_1;C_1)$ и $\bar{n}_2(A_2;B_2;C_2)$:

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2}{|\bar{n}_1| \cdot |\bar{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}} \qquad (5.6)$$

Условие перпендикулярности плоскостей: две плоскости перпендикулярны тогда и только тогда, когда ортогональны их вектора нормалей (а значит, их скалярное произведение равно нулю), т.е.

$$\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2 = A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Условие параллельности плоскостей: две плоскости параллельны тогда и только тогда, когда коллинеарны их вектора нормалей (а значит, их координаты пропорциональны), т.е.

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Пример 5.4. Найти угол между плоскостями $x - 2y + 3z + 3 = 0$ и $x + z - 5 = 0$.

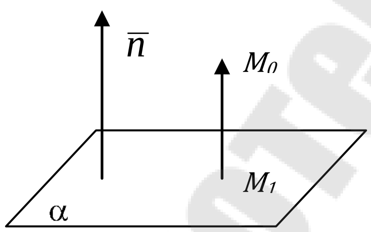
Решение

Нормальные вектора исходных плоскостей $\bar{n}_1(1; -2; 3)$ и $\bar{n}_2(1; 0; 1)$. Воспользуемся формулой (5.6):

$$\cos\varphi = \frac{1\cdot 1 + (-2)\cdot 0 + 3\cdot 1}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{28}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}.$$

Тогда $\varphi = \arccos\frac{2\sqrt{7}}{7} \approx 41°$.

Ответ: $\arccos\frac{2\sqrt{7}}{7}$.



2. Определение расстояния от точки до плоскости

Пусть заданы точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и плоскость α своим общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$. Тогда расстояние d от точки M_0 до плоскости α равно длине вектора $\overline{M_1M_0}$, где M_1 – проекция точки M_0 на плоскость α. Т.к. вектор $\overline{M_1M_0}$ перпендикулярен к плоскости α, то он коллинеарен ее вектору нормали $\bar{n}(A, B, C)$, а значит,

$$d=\left|\overline{M_1M_0}\right|=\left|\text{пр}_{\overline{n}}\,\overline{M_1M_0}\right|=\left|\frac{\overline{n}\cdot\overline{M_1M_0}}{|\overline{n}|}\right|=$$

$$=\left|\frac{A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|=\left|\frac{Ax_0+By_0+Cz_0-(Ax_1+By_1+Cz_1)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|$$

Т.к. точка M_1 принадлежит плоскости α, то $Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$, а значит, $-(Ax_1+By_1+Cz_1)=D$.

Окончательно получаем:

$$\boxed{d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}} \qquad (5.7)$$

Пример 5.5. Найти расстояние от точки $A(-3;1;2)$ до плоскости $6x-3y-6z+7=0$.

Решение

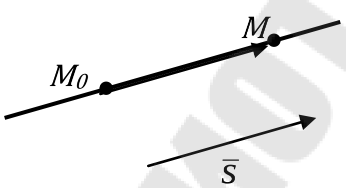
По формуле (5.5) имеем: $d=\dfrac{|6\cdot(-3)-3\cdot1-6\cdot2+7|}{\sqrt{36+9+36}}=\dfrac{26}{9}\approx2{,}89$.

Ответ: $2{,}89$.

5.2. Прямая в пространстве

Рассмотрим различные виды уравнений прямой в пространстве. Заметим, что положение прямой определено, если задана какая-либо ее точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$ и вектор $\overline{s}(m;n;p)$, параллельный этой прямой. Такой вектор называется *направляющим вектором прямой*.

1. Канонические уравнения прямой (по точке и направляющему вектору)



Пусть задана точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$ и направляющий вектор $\overline{s}(m;n;p)$. Возьмем произвольную точку $M(x;y;z)$, запишем вектор $\overline{M_0M}(x-x_0;y-y_0;z-z_0)$. Т.к. вектор $\overline{M_0M}$ лежит на прямой, то он параллелен вектору $\overline{s}(m;n;p)$, а значит, их координаты пропорциональны, т.е.

$$\boxed{\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}} \qquad (5.8)$$

Это и есть *канонические уравнения прямой*.

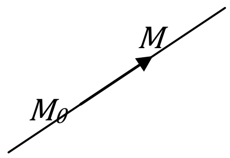
2. Параметрические уравнения прямой (по точке и направляющему вектору)

Приравняем каждое отношение в равенстве (5.8) к параметру t и выразим переменные x, y, z.

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt\,. \\ z = z_0 + pt \end{cases}} \qquad (5.9)$$

Полученные уравнения называются *параметрическими уравнениями прямой*, параллельной вектору $\bar{s}(m;n;p)$ и проходящей через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$.

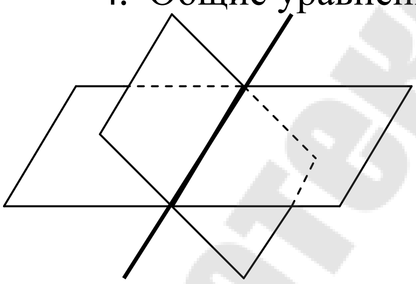
3. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки



Пусть прямая проходит через точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ и $M_2(x_2;y_2;z_2)$. Тогда вектор $\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$ можно взять в качестве направляющего вектора искомой прямой. Т.к. прямая проходит через точку $M_1(x_1;y_1;z_1)$, то, с учетом уравнения (5.8) имеем:

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}} \qquad (5.10)$$

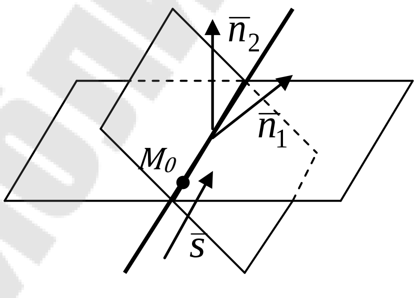
4. Общие уравнения прямой



Прямую в пространстве можно задать как линию пересечения двух непараллельных плоскостей:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \qquad (5.11)$$

Для того чтобы от общих уравнений (5.11) перейти к каноническим уравнениям (5.8), необходимо:



1) Найти координаты точки, лежащей на прямой. Так как прямая является пересечением плоскостей, то координаты точки должны удовлетворять системе

уравнений (5.11), которая имеет бесконечное число решений. Выбираем любое из них $(x_0; y_0; z_0)$.

2) Найти координаты направляющего вектора $\bar{s}$. Вектор $\bar{s}$ перпендикулярен нормальным векторам $\bar{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ и $\bar{n}_2(A_2, B_2, C_2)$ заданных плоскостей, поэтому может быть найден как их векторное произведение:

$$\bar{s} = \bar{n}_1 \times \bar{n}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

Замечание: канонические уравнения прямой легко также получить, взяв какие-либо две точки на прямой и использовав уравнение (5.10).

Пример 5.6. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(3; -2; 5)$ и $M_2(6; 1; 7)$.

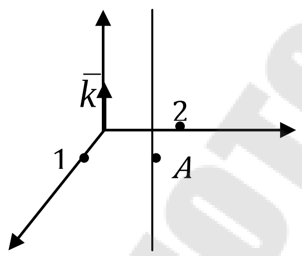
Решение

Направляющим вектором прямой выберем вектор $\overline{M_1M_2} = (3; 3; 2)$. Следовательно, по формуле (5.9):

$$\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = -2 + 3t \\ z = 5 + 2t \end{cases}.$$

Пример 5.7. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(1; 2; 0)$ параллельно оси Oz.

Решение



Т.к. прямая параллельна оси Oz, то в качестве направляющего вектора можно взять любой вектор, лежащий на этой оси, в частности, вектор $\bar{k}(0;0;1)$. Запишем канонические уравнения прямой:

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y-2}{0} = \frac{z}{1}.$$

Замечание. Нули в знаменателях полученных выражений не означают необходимость делить на нуль. Они означают лишь то, что все точки прямой имеют одну и ту же координату по соответствующей оси. Можно переписать уравнение этой же прямой в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = 2, \\ z = t. \end{cases}$$

Ответ: $\dfrac{x-1}{0} = \dfrac{y-2}{0} = \dfrac{z}{1}$.

Пример 5.8. Записать канонические уравнения прямой

$$\begin{cases} 3x + y - z + 5 = 0, \\ 2x + y + 2z + 3 = 0. \end{cases}$$

Решение

Прямая задана своими общими уравнениями. Чтобы записать ее в каноническом виде, воспользуемся приведенным выше алгоритмом.

1) Выберем какую-либо точку на прямой, координаты которой удовлетворяют заданной системе уравнений. Для этого положим одну из переменных, например, переменную z, равной нулю, и найдем x и y:

$$\begin{cases} 3x + y = -5, \\ 2x + y = -3. \end{cases}$$

Решив систему, имеем: $x = -2,\ \ y = 1$, т.е. прямая проходит через точку $M_0(-2; 1; 0)$.

2) Выпишем координаты векторов нормалей пересекающихся плоскостей $\bar{n}_1(3; 1; -1)$ и $\bar{n}_2(2; 1; 2)$, и найдем их векторное произведение:

$$\bar{s} = \bar{n}_1 \times \bar{n}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3\bar{i} - 8\bar{j} + \bar{k}\ .$$

Запишем канонические уравнения прямой:

$$\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}.$$

Ответ: $\dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{1}$.

Основные задачи

1. Нахождение угла между прямыми в пространстве. Условия параллельности и перпендикулярности прямых.

Пусть заданы две прямые, l_1 и l_2 своими каноническими уравнениями:

$$(l_1):\ \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1} \text{ и } (l_2):\ \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.$$

Т.к. под углом между двумя прямыми понимают угол между их направляющими векторами, то косинус его определяется по формуле:

$$\cos\varphi=\frac{\bar{s}_1\cdot\bar{s}_2}{|\bar{s}_1|\cdot|\bar{s}_2|}=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}} \qquad (5.12)$$

Для нахождения острого угла нужно взять модуль этого выражения.

Из условий ортогональности и коллинеарности векторов следуют соответствующие условия для прямых:

Условие перпендикулярности прямых: две прямые перпендикулярны тогда и только тогда, когда ортогональны их направляющие вектора (а значит, их скалярное произведение равно нулю), т.е.

$$\bar{s}_1\cdot\bar{s}_2=m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0.$$

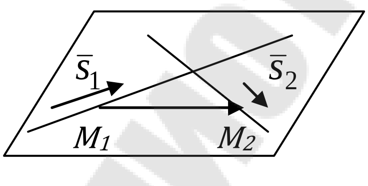
Условие параллельности прямых: две прямые параллельны тогда и только тогда, когда коллинеарны их направляющие вектора (а значит, их координаты пропорциональны), т.е.

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}.$$

2. Условие, при котором две прямые лежат в одной плоскости.

Пусть прямые l_1 и l_2 заданы своими каноническими уравнениями:

$$(l_1):\ \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1} \text{ и } (l_2):\ \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.$$



Если l_1 и l_2 лежат в одной плоскости, то векторы $\bar{s}_1(m_1;n_1;p_1)$, $\bar{s}_2(m_2;n_2;p_2)$ и $\overline{M_1M_2}=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$ также лежат в одной плоскости (или в параллельных плоскостях), т. е. являются компланарными. В силу критерия компланарности трех векторов их смешанное произведение равно нулю, т.е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0.$$

При выполнении этого условия прямые лежат в одной плоскости и либо пересекаются, либо, если выполняется условие $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{p_1}{p_2}$, параллельны.

Пример 5.9. Определить угол между прямыми $\dfrac{x-5}{2} = \dfrac{y+3}{1} = \dfrac{z-4}{-2}$ и $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z-3}{4}$.

Решение

Направляющие вектора исходных прямых $\bar{s}_1(2;1;-2)$ и $\bar{s}_2(1;-1;4)$. Следовательно, по формуле (2.5)

$$\cos\varphi = \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 4}{\sqrt{4+1+4} \cdot \sqrt{1+1+16}} = -\frac{7}{3\sqrt{18}} = -\frac{7}{9\sqrt{3}}.$$

Тогда $\varphi = \arccos\left(-\dfrac{7}{9\sqrt{3}}\right) \approx 116{,}7^\circ$ (или $63{,}3^\circ$, если требуется острый угол).

Ответ: $63{,}3^\circ$.

Пример 5.10. При каких значениях a и b прямые $\dfrac{x-1}{a} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z+1}{2}$ и $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{b} = \dfrac{z}{3}$ параллельны?

Решение

Запишем условие параллельности прямых:

$$\frac{a}{2} = \frac{1}{b} = \frac{2}{3}.$$

Отсюда $b = \dfrac{3}{2}$, $a = \dfrac{4}{3}$.

Ответ: $b = 3/2$, $a = 4/3$.

2. Нахождение расстояния от точки до прямой в пространстве.

Пусть в пространстве задана прямая l своими каноническими уравнениями $\dfrac{x-x_0}{m} = \dfrac{y-y_0}{n} = \dfrac{z-z_0}{p}$ и точка $M_1(x_1; y_1; z_1)$, не лежащая на прямой. Поместим начало направляющего вектора $\bar{s}(m; n; p)$ в точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и построим параллелограмм на векторах $\bar{s}(m;n;p)$ и $\overline{M_0M_1}$. Тогда расстояние d от точки M_1 до прямой l будет равно высоте этого параллелограмма, опущенной из вершины M_1. Т.к. согласно геометрическому смыслу векторного произведения $S_{параллелограмма} = \left|\overline{M_0M_1} \times \bar{s}\right|$, то

$$d = \frac{S_{параллелограмма}}{|\bar{s}|} = \frac{\left|\overline{M_0M_1} \times \bar{s}\right|}{|\bar{s}|}.$$

Итак, расстояние от точки до прямой в пространстве вычисляется по формуле:

$$\boxed{d = \frac{\left|\overline{M_0M_1} \times \bar{s}\right|}{|\bar{s}|}} \tag{5.13}$$

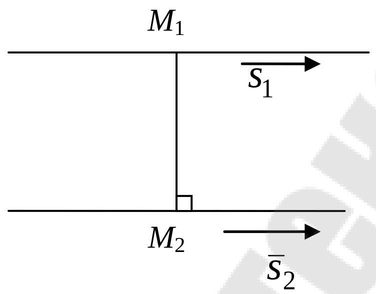
3. Нахождение расстояния между прямыми в пространстве.

Пусть в пространстве заданы две прямые, l_1 и l_2 своими каноническими уравнениями:

$$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1} \text{ и } \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}.$$

Возможны следующие случаи:

1) прямые параллельны (выполняется условие $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$);



В этом случае расстояние между прямыми равно расстоянию от любой точки прямой l_1, в частности, от точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, до прямой l_2. Используя формулу (5.13) имеем:

$$d = \frac{\left|\overline{M_1M_2} \times \bar{s}_2\right|}{|\bar{s}_2|} \tag{5.14}$$

.

2) прямые пересекаются;

В этом случае расстояние между прямыми равно нулю. Напомним, что это возможно тогда и только тогда, когда

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0$$

и при этом не выполняется условие $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{p_1}{p_2}$.

3) прямые скрещиваются;

В силу доказанного выше, это возможно только в том случае, когда $\Delta \neq 0$ и при этом координаты направляющих векторов $\bar{s}_1(m_1; n_1; p_1)$ и $\bar{s}_2(m_2; n_2; p_2)$ непропорциональны. В этом случае расстояние между прямыми определяется как высота параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{s}_1$, $\bar{s}_2$ и $\overline{M_1M}_2$, в основании которого лежит параллелограмм, образованный векторами $\bar{s}_1$ и $\bar{s}_2$, и находится по формуле:

$$d = \frac{\left|\overline{M_1M}_2 \bar{s}_1 \bar{s}_2\right|}{\left|\bar{s}_1 \times \bar{s}_2\right|} \tag{5.15}$$

Пример 5.11. Найти расстояние между прямыми $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+1}{4} = \dfrac{z}{2}$ и $\dfrac{x-7}{6} = \dfrac{y-1}{8} = \dfrac{z-3}{4}$.

Решение

Запишем направляющие векторы прямых: $\bar{s}_1(3; 4; 2)$, $\bar{s}_2(6; 8; 4)$. Т.к. их координаты пропорциональны, то прямые параллельны, а значит, расстояние между прямыми найдем по формуле (5.14).

Запишем координаты точек M_1 и M_2, лежащих на прямых, и найдем координаты вектора $\overline{M_1M}_2$:

$M_1(2; -1; 0)$, $M_2(7; 1; 3)$, $\overline{M_1M}_2 = (5; 2\ 3)$.

Тогда $\overline{M_1M}_2 \times \bar{s}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 5 & 2 & 3 \\ 6 & 8 & 4 \end{vmatrix} = -16\bar{i} - 2\bar{j} + 28\bar{k}$.

Подставив в формулу (5.14), получим:

$$d = \frac{\sqrt{(-16)^2 + (-2)^2 + 28^2}}{\sqrt{6^2 + 8^2 + 4^2}} = \frac{2\sqrt{64+1+196}}{2\sqrt{9+14+4}} = \sqrt{\frac{261}{27}} = \sqrt{\frac{29}{3}} \approx 3{,}1.$$

Ответ: $3{,}1$.

Пример 5.12. Установить взаимное расположение прямых $\frac{x+2}{-1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-4}{3}$ и $\frac{x}{3}=\frac{y+4}{2}=\frac{z-3}{5}$.

Решение

Запишем направляющие векторы прямых: $\bar{s}_1(-1;\,2;\,3)$, $\bar{s}_2(3;\,2;\,5)$. Т.к. $\frac{-1}{3}\neq\frac{2}{2}\neq\frac{3}{5}$, то прямые не параллельны. Следовательно, они пересекаются или скрещиваются. Вычислим определитель:

$$\Delta=\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0+2 & -4-3 & 3-4 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}=-82\neq 0,$$

а значит, прямые не пересекаются.

Ответ: прямые скрещиваются.

6.3. Прямая и плоскость в пространстве

1. Нахождение угла между прямой и плоскостью. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости.

Определение 5.2. *Углом между прямой и плоскостью* называется любой из двух смежных углов, образованных прямой и ее проекцией на плоскость.

Пусть плоскость α задана своим общим уравнением $Ax+By+Cz+D=0$, а прямая l – каноническими уравнениями $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$.

Обозначим через φ угол между прямой и плоскостью. Тогда угол между нормальным вектором плоскости $\bar{n}(A;B;C)$ и направляющим вектором прямой $\bar{s}(m;n;p)$ будет равен $\frac{\pi}{2}-\varphi$. Тогда синус угла между прямой и плоскостью можно определить по формуле:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\sin\varphi=\frac{\bar{n}\cdot\bar{s}}{|\bar{n}|\cdot|\bar{s}|}=\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}} \qquad (5.16)$$

Условие параллельности прямой и плоскости: прямая и плоскость параллельны тогда и только тогда, когда векторы $\bar{n}(A;B;C)$ и $\bar{s}(m;n;p)$ перпендикулярны, т.е.

$$\bar{n}\cdot\bar{s}=Am+Bn+Cp=0.$$

Условие перпендикулярности прямой и плоскости: прямая и плоскость перпендикулярны тогда и только тогда, когда векторы $\bar{n}(A;B;C)$ и $\bar{s}(m;n;p)$ коллинеарны, т.е. их координаты пропорциональны:

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}.$$

2. Определение точки пересечения прямой и плоскости. Условие принадлежности прямой данной плоскости.

Найдем *точку пересечения* прямой $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ и плоскости $Ax+By+Cz+D=0$.

Для этого запишем уравнения прямой в параметрическом виде и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}$$

Подставив выражения для x, y, z в уравнение плоскости и перегруппировав слагаемые, получим уравнение

$$t(Am+Bn+Cp)+(Ax_0+By_0+Cz_0+D)=0. \qquad (5.17)$$

Если прямая не параллельна плоскости (т.е. $Am+Bn+Cp\neq 0$), то можно найти значение t:

$$t=-\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Am+Bn+Cp},$$

подставив которое в параметрические уравнения прямой, найдем координаты точки пересечения.

Если же $Am+Bn+Cp=0$, то возможны два случая:

1) Если $Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0$, то уравнение (5.17) не имеет решений, а значит, прямая и плоскость параллельны и не имеют общих точек.

2) Если $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$, то уравнение (5.17) имеет бесконечно много решений, т.е. прямая целиком лежит в плоскости. Следовательно, ***условием принадлежности прямой плоскости*** является одновременное выполнение равенств

$$\begin{cases} Am + Bn + Cp = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \end{cases}. \qquad (5.18)$$

Пример 5.13. Найти проекцию точки $C(2,1,-2)$ на плоскость $x + 3y - 3z + 8 = 0$.

Решение

Требуется найти координаты точки D пересечения перпендикуляра, опущенного из точки C на заданную плоскость, с этой плоскостью.

Запишем уравнение прямой CD. Т.к. прямая CD перпендикулярна плоскости, то она параллельна нормальному вектору этой плоскости $\bar{n}(1;3;-3)$, а значит, этот вектор может быть выбран в качестве направляющего. Используя (5.9), получим параметрические уравнения прямой CD:

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 3t \\ z = -2 - 3t \end{cases}$$

Теперь найдем точку пересечения прямой CD и плоскости, решив систему:

$$\begin{cases} x + 3y - 3z + 8 = 0 \\ x = 2 + t \\ y = 1 + 3t \\ z = -2 - 3t \end{cases}$$

Отсюда

$$19t = 19,\ t = 1.$$

Вычислим координаты точки D:

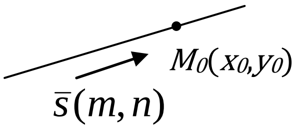
$$\begin{cases} x = 2 + 1 = 3 \\ y = 1 + 3 = 4 \\ z = -2 - 3 = -5 \end{cases}$$

Ответ: $D(3;\ 4;-5)$.

6.4. Прямая на плоскости

Т.к. прямая на плоскости xOy представляет собой частный случай прямой в пространстве, то ее можно задать практически теми же уравнениями.

1) каноническое уравнение прямой



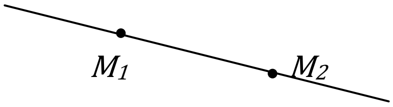
$$\boxed{\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}} \qquad (5.19)$$

где $\bar{s}(m;n)$ – направляющий вектор прямой, $M_0(x_0;y_0)$ – точка, лежащая на прямой;

2) параметрические уравнения прямой

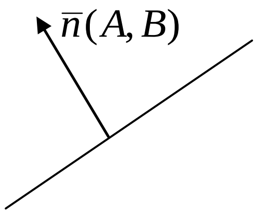
$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \end{cases}} \qquad (5.20)$$

3) уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$:



$$\boxed{\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}} \qquad (5.21)$$

4) общее уравнение прямой



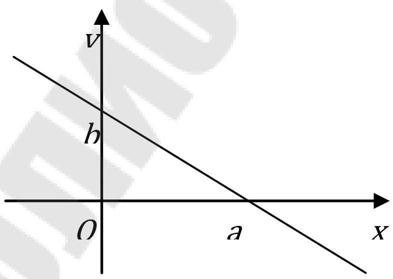
Т.к. прямая на плоскости xOy есть линия пересечения плоскостей $Ax+By+Dz+C=0$ и $z=0$, то общее уравнение имеет вид:

$$Ax+By+C=0 \qquad (5.22)$$

Здесь вектор $\bar{n}(A;B)$ – любой вектор, перпендикулярный данной прямой (*вектор нормали*).

5) уравнение прямой по точке $M_0(x_0;y_0)$ и вектору нормали $\bar{n}(A;B)$:

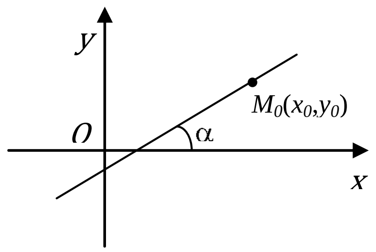
$$\boxed{A(x-x_0)+B(y-y_0)=0} \qquad (5.23)$$



6) уравнение прямой в «*отрезках по осям*»

Если в общем уравнении прямой перенести C в противоположную сторону и разделить правую и левую части на $-C$, то получим уравнение прямой в «отрезках по осям»:

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1} \qquad (5.24)$$



7) уравнение по точке $M_0(x_0; y_0)$ и угловому коэффициенту k, где $k = tg\alpha$ (α – угол наклона прямой к положительному направлению оси Ox)

$$\boxed{y - y_0 = k(x - x_0)} \qquad (5.25)$$

8) уравнение прямой с угловым коэффициентом:

$$y = kx + b \qquad (5.26)$$

Если две прямые заданы своими каноническими или общими уравнениями, то *угол* между ними можно определить как угол между соответствующими направляющими векторами или векторами нормалей. Кроме того, *угол между прямыми* $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ можно определить по формуле:

$$\boxed{tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}} \qquad (5.27)$$

Условие перпендикулярности двух прямых:

$$k_1 \cdot k_2 = -1.$$

Условие параллельности двух прямых:

$$k_1 = k_2.$$

Расстояние d от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ вычисляется по формуле:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad (5.28)$$

Вывод этой формулы аналогичен выводу формулы для нахождения расстояния от точки до плоскости.

Пример 5.14. Для прямой $3x - 4y - 12 = 0$ записать ее уравнение в «отрезках по осям».

Решение

Преобразуем исходное уравнение прямой: $3x-4y=12$. Теперь правую и левую части равенства разделим на 12: $\frac{x}{4}+\frac{y}{-3}=1$. Получили уравнение прямой, которое соответствует уравнению (5.24).

Ответ: $\frac{x}{4}+\frac{y}{-3}=1$.

Пример 5.15. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2;5)$:

а) параллельно прямой $y=3x+2$;

б) перпендикулярно прямой $y=3x+2$.

Решение

а) Угловой коэффициент k_1 прямой $y=3x+2$ равен 3, следовательно, в силу условия параллельности прямых, угловой коэффициент искомой прямой также равен 3. Запишем уравнение прямой по угловому коэффициенту и точке согласно (5.25):

$$y-5=3(x+2),$$

откуда $y=3x+11$ – искомое уравнение прямой.

б) В силу условия перпендикулярности прямых, угловой коэффициент искомой прямой $k_2=-\frac{1}{k_1}=-\frac{1}{3}$. Тогда уравнение прямой примет вид

$$y-5=-\frac{1}{3}(x+2),$$

или, после преобразований, $x+3y-13=0$.

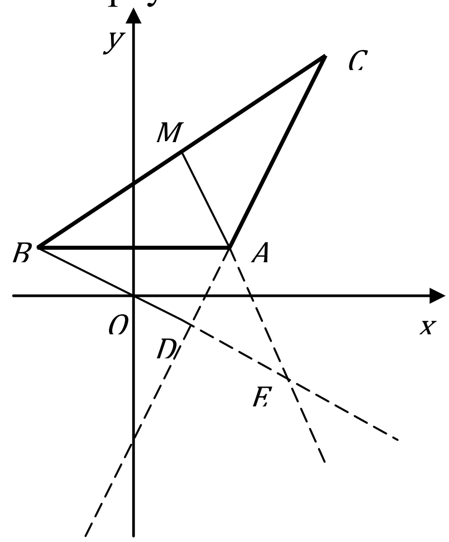
Ответ: $y=3x+11$; $x+3y-13=0$.

Пример 5.16. Доказать, что прямые $2x+3y+1=0$ и $6x-4y+3=0$ взаимно перпендикулярны.

Решение

Приведем уравнения исходных прямых к виду (5.26): $y=-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$ и $y=\frac{3}{2}x+\frac{3}{4}$. Запишем угловые коэффициенты: $k_1=-\frac{2}{3}$ и $k_2=\frac{3}{2}$. Так как $k_1k_2=-\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}=-1$, то данные прямые перпендикулярны.

Пример 5.17. Даны вершины $A(2;1)$, $B(-2;1)$ и $C(4;5)$ треугольника ABC. Записать уравнения медианы AM и высоты BD этого треугольника. Найти их длины и точку пересечения.



Решение

Т.к. AM – медиана в треугольнике ABC, то точка M делит противолежащую сторону BC пополам, а значит, ее координаты вычисляются по формулам:

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{-2+4}{2} = 1,$$

$$y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{1+5}{2} = 3.$$

Запишем уравнение прямой, проходящей через точки $A(2;1)$ и $M(1;3)$:

$$\frac{x-2}{1-2} = \frac{y-1}{3-1},$$

откуда после упрощения получаем $2x + y - 5 = 0$ – уравнение медианы AM .

Запишем уравнение высоты BD. Т.к. высота перпендикулярна стороне AC, то вектор $\overline{AC} = (2;\,4)$ можно рассматривать как вектор нормали прямой BD. Составим уравнение прямой по точке $B(-2;1)$ и вектору нормали согласно (5.23):

$$2(x+2) + 4(y-1) = 0,$$

или $x + 2y = 0$.

Это и есть уравнение высоты BD.

Найдем точку пересечения прямых AM и BD. Для этого составим систему:

$$\begin{cases} 2x + y - 5 = 0, \\ x + 2y = 0. \end{cases}$$

Решив ее, получим $x = 10/3$, $y = -5/3$, т.е. медиана AM и высота BD пересекаются в точке $E(10/3; -5/3)$.

Т.к. нам известны координаты точек A и M, то длину медианы AM можно найти, воспользовавшись формулой для нахождения расстояния между двумя точками (3.5):

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{5} \approx 2{,}2\,.$$

Т.к. координаты точки D нам неизвестны, то нельзя применить эту же формулу для нахождения высоты BD. Заметим, что длина BD равна расстоянию от точки B до прямой AC, а значит, ее можно найти по формуле (5.28). Запишем каноническое уравнение прямой AC по точке $A(2;1)$ и направляющему вектору $\overline{AC} = (2;\,4)$:

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{4},$$

откуда $2x - y - 3 = 0$ – уравнение прямой AC.

В виду формулы (5.28)

$$BD = \frac{|2\cdot(-2) - 1\cdot 1 - 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{8}{\sqrt{5}} \approx 3{,}6.$$

Ответ: $AM: 2x + y - 5 = 0$, $BD: x + 2y = 0$, $E(10/3; -5/3)$, $AM \approx 2{,}2$, $BD \approx 3{,}6$.

Вопросы для самоконтроля

1. Составьте уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно заданному вектору.
2. Каков геометрический смысл коэффициентов в общем уравнении плоскости?
3. Запишите уравнение плоскости по трем точкам; в отрезках по осям; нормальное уравнение
4. Каково положение плоскости относительно осей координат, если в общем уравнении плоскости отсутствует свободный член; один из коэффициентов; два коэффициента; все три коэффициента?
5. Сформулируйте условия параллельности (перпендикулярности) двух плоскостей.
6. Как найти угол между двумя плоскостями?
7. Как найти расстояние от точки до плоскости?
8. Запишите уравнение прямой в пространстве, проходящей через две точки.
9. Запишите уравнение прямой, проходящей через заданную точку параллельно данному вектору.
10. Как перейти от общего уравнения прямой в пространстве к каноническим?
11. Как найти угол между прямыми в пространстве?
12. Сформулируйте условия параллельности двух прямых в пространстве.

13. При каком условии две прямые в пространстве пересекаются?

14. Сформулируйте условие, при котором прямые скрещиваются.

15. Как найти расстояние от точки до прямой в пространстве? на плоскости?

16. Как найти расстояние между параллельными прямыми?

17. Как найти расстояние между скрещивающимися прямыми в пространстве?

18. Сформулируйте условия параллельности (перпендикулярности) двух прямых в пространстве; на плоскости.

19. Как найти точку пересечения прямой и плоскости?

20. При каком условии прямая лежит в плоскости?

21. Какие виды уравнений прямой на плоскости вы знаете?

22. Запишите уравнение прямой на плоскости по угловому коэффициенту и точке. Каков геометрический смысл коэффициента k в уравнении?

23. Как найти угол между прямыми на плоскости, если известны их угловые коэффициенты?

Задания для самостоятельного решения

1. Записать уравнение и построить плоскость:

а) проходящую через точку C перпендикулярно вектору $\overline{DC}$, если $C(3;-5;0)$, $D(2;3;4)$;

б) проходящую через ось Oz и точку $A(-3;1;-5)$;

в) проходящую через точку $M_0(7;-3;5)$ и отсекающей на осях координат равные положительные отрезки;

г) параллельную оси Ox и проходящую через точки $M_1(7;-3;5)$ и $M_2(-3;1;-5)$;

д) проходящую через точку $N(-2;0;4)$ параллельно плоскости $3x-7y+5z+9=0$; найти расстояние от точки N до плоскости $3x-7y+5z+9=0$;

е) проходящую через точки $B(1;1;1)$ и $D(2;3;4)$ перпендикулярно к плоскости $2x-5z+3=0$;

ж) проходящую через точку $A(-3;1;-5)$ перпендикулярно к двум плоскостям $2x-y+3z+3=0$ и $3x+6y+3z-4=0$;

2. Составить уравнение плоскости, проходящей через середину отрезка M_1M_2 перпендикулярно этому отрезку, если $M_1(1;\,5;\,6)$, $M_2(-1;\,7;\,10)$.

3. Вычислить угол между плоскостями $3x-7y+5z+9=0$ и $2x-y+3z+3=0$.

4. Найти расстояние между плоскостями $2x-3y+5z+3=0$ и $4x-6y+10z-5=0$.

5. При каких значениях a, b, c

а) плоскости $ax-y+3z+3=0$ и $2x-y+az+3=0$ перпендикулярны?

б) плоскости $bx-y+3z+2=0$ и $2x-cy-6z+3=0$ параллельны?

6. Составить уравнение прямой:

а) проходящей через точку $A(3;-2;0)$ параллельно вектору $\bar{b}(3;-7;5)$;

б) проходящей через точку $A(3;-2;0)$ параллельно оси Ox;

в) проходящей через точку $N(-2;0;4)$ перпендикулярно к плоскости xOy;

г) проходящей через точку $B(-4;2;1)$ перпендикулярно векторам $\bar{a}(3;1;-1)$ и $\bar{b}(1;-2;1)$;

д) проходящей через точку $M_0(7;-3;5)$ параллельно прямой

$$\begin{cases} x=2t+1 \\ y=t-3 \\ z=3t-5 \end{cases}$$

е) проходящей через точку $D(2;3;4)$ перпендикулярно к плоскости $3x-7y+5z+9=0$;

ж) проходящей через точки $C(2;1;-2)$ и $D(2;3;4)$.

7. Записать в каноническом виде уравнения прямых:

а) $\begin{cases} x=2t+1 \\ y=t-3 \\ z=3t-5 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x+y+z-1=0 \\ 3x+2y+z-2=0 \end{cases}$; в) $\begin{cases} 3x-2y+5z-10=0 \\ 2x+y-z=0 \end{cases}$

8. Составить уравнение медианы AD в треугольнике ABC, если $A(0;-2;5)$, $B(3;4;1)$, $C(1;0;-5)$.

9. Найти расстояние от точки $M_0(8;5;4)$ до прямой $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-3}{1}$.

10. Найти расстояние между прямыми:

а) $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-3}{1}$ и $\dfrac{x+2}{-2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{3}$;

б) $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z}{2}$ и $\dfrac{x-7}{3}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-3}{2}$.

11. Установить взаимное расположение прямых:

а) $\dfrac{x+2}{-1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-4}{3}$ и $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y+4}{2}=\dfrac{z-3}{5}$;

б) $\begin{cases} x-y+3z-6=0 \\ 2x+y-z+3=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x=1-t \\ y=-5+2t \\ z=3t \end{cases}$

12. Определить, лежат ли точки $A(1;-2;3), B(2;1;-1), C(3;4;-5)$ на одной прямой.

13. Найти угол между прямой $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+1}{2}$ и плоскостью $2x-3y+5z+3=0$.

14. Составить уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{2}$ и $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{2}$.

15. Записать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\dfrac{x-2}{5}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+1}{2}$ перпендикулярно к плоскости $x+4y-3z+7=0$.

16. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(8;5;4)$ перпендикулярно к прямым $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z}{3}$ и $\dfrac{x-13}{8}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-4}{3}$.

17. Найти точку пересечения прямой $\dfrac{x-7}{5}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{z-5}{4}$ и плоскости $3x-y+2z-5=0$. Найти угол межу прямой и плоскостью.

18. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(3;\ 4;\ 0)$ и прямую $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+1}{2}$.

19. Показать, что прямая $\frac{x}{6}=\frac{y-2}{-8}=\frac{z-1}{-9}$ параллельна плоскости $x+3y-2z+1=0$, а прямая $\begin{cases} x=t+7 \\ y=t-2 \\ z=2t+1 \end{cases}$ лежит в этой плоскости.

20. Найти проекцию точки $C(2,1,-4)$ на плоскость $x+4y-3z+8=0$.

21. Найти координаты точки Q, симметричной точке $P(1;-2;3)$ относительно плоскости $3x-y+2z+3=0$.

22. Найти точку, симметричную точке $A(4;5;5)$ относительно прямой $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{2}$.

23. Найти координаты точки Q, симметричной точке $P(2;-5;7)$ относительно прямой, проходящей через точки $M_1(5;4;6)$ и $M_2(-2;-17;-8)$.

24. При каких значениях p и q прямая $\frac{x}{p}=\frac{y-2}{-8}=\frac{z-1}{-1}$ перпендикулярна плоскости $3x-y+qz+3=0$?

25. При каком значении q прямая $\begin{cases} 2x+y+z-1=0 \\ 3x+2y+z-q=0 \end{cases}$ пересекает ось Ox?

26. Даны вершины треугольника $A(4;1;-2)$, $B(2;0;0)$, $C(-2;3;-5)$ Составить уравнение его высоты, опущенной из вершины B.

27. Доказать, что прямые $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-5}{4}$ и $\frac{x-7}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{-2}$ лежат в одной плоскости и составить уравнение этой плоскости.

28. Даны точки $A(1;-5;7), B(2;1;-1), C(4;1;6), D(-2;5;3)$.

а) определить, лежат ли точки A, B, C, D в одной плоскости;

б) найти расстояние от точки D до плоскости, проходящей через точки A, B, C;

в) найти расстояние от точки C до прямой AB;

г) найти точку пересечения прямой CD и плоскости $2x-3y+5z+5=0$.

д) уравнение высоты, опущенной из вершины D на грань ABC;

е) найти значения p и q, при которых плоскость $px+qy-5z+3=0$ параллельна плоскости ABC;

ж) найти значения m и l, при которых прямая AB параллельна прямой

$$\begin{cases} x=3-t \\ y=-2+mt \\ z=4+lt \end{cases}$$

з) найти значение a, при котором прямая AB параллельна плоскости $ax-3y+1=0$.

29. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $A(3;-2)$:

а) параллельно оси Ox; Oy;

б) параллельно вектору $\vec{a}(-3;6)$;

в) перпендикулярно вектору $\vec{a}(-3;6)$;

г) и точку пересечения прямых $3x-2y-4=0$ и $2x-y-3=0$;

д) и образующей с осью абсцисс угол, равный $3\pi/4$;

е) и отсекающей на оси Ox отрезок, равный $a=-2$;

ж) параллельно прямой $3x-2y-4=0$;

з) перпендикулярно прямой $3x-2y-4=0$.

30. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $B(-6;3)$ перпендикулярно к прямой $y=2-3x$. Найти длину перпендикуляра, опущенного из точки В на прямую $y=2-3x$.

31. Дана прямая $4x+3y+1=0$. Найти уравнение прямой, параллельной данной и удаленной от нее на расстояние, равное трем.

32. Найти угол между прямыми $4x+10y-3=0$ и $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+5}{5}$.

33. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $M(1;-2\sqrt{3})$ и составляющей угол $\pi/3$ с прямой $x+5\sqrt{3}y-15=0$.

34. Записать уравнения катетов прямоугольного равнобедренного треугольника, если известно, что $y=3x+7$ – уравнение его гипотенузы, а $C(4;1)$ – вершина прямого угла.

35. На плоскости xOy через точку $M(4;-3)$ провести прямую так, чтобы площадь треугольника, образованного ею и осями координат, была равна 3.

36. Прямые $3x+4y-30=0$ и $3x-4y+12=0$ касаются окружности, радиус которой равен $R=5$. Вычислить площадь четырехугольника, образованного этими касательными и радиусами круга, проведенными в точки касания.

37. Составить уравнения сторон треугольника, зная одну из его вершин $A(2;-4)$ и уравнения биссектрис двух его углов: $x+y-2=0$ и $x-3y-6=0$.

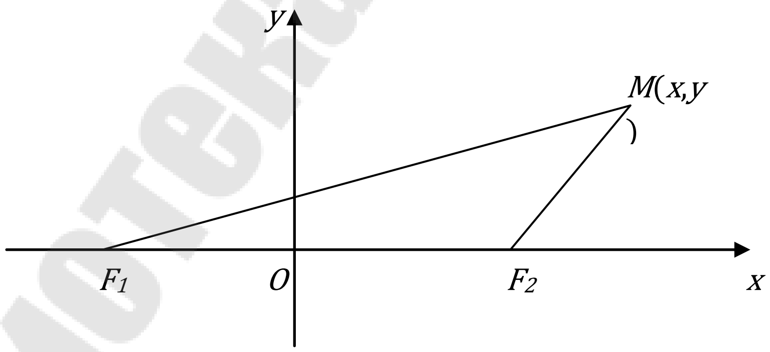
38. Составить уравнения сторон треугольника, зная одну из его вершин $A(-4;2)$ и уравнения двух медиан: $3x-2y+2=0$ и $3x+5y-12=0$.

6. КРИВЫЕ И ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

6.1. Эллипс

Определение 6.1. *Эллипсом* называется множество точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух данных точек F_1 и F_2, называемых фокусами, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.

Выберем систему координат таким образом, чтобы ось Ox проходила через точки F_1 и F_2. За начало координат возьмем середину отрезка F_1F_2.



Обозначим расстояние между фокусами $|F_1F_2|=2c$. Тогда фокусы будут иметь координаты $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$.

Пусть $M(x;y)$ – произвольная точка эллипса, тогда

$$MF_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2}\,,\ MF_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2}\,.$$

По определению эллипса $MF_1+MF_2=2a>2c$, следовательно,

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a \tag{6.1}$$

Это и есть уравнение эллипса в выбранной системе координат. Преобразуем его к более простому виду. Домножим обе части равенства (6.1) на сопряженный множитель.

$$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)=$$
$$=2a\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right).$$

Тогда

$$\frac{(x+c)^2+y^2-(x-c)^2-y^2}{2a}=\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\,,$$

Откуда

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\frac{2xc}{a}.$$

Сложим полученное уравнение с уравнением (6.1). Получим

$$2\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\frac{2xc}{a}+2a.$$

Разделим обе части выражения на 2 и возведем в квадрат. Имеем:

$$(x+c)^2+y^2=a^2+2cx+\frac{x^2c^2}{a^2},$$

$$x^2+2cx+c^2+y^2=a^2+2cx+\frac{x^2c^2}{a^2},$$

$$x^2\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)+y^2=a^2-c^2,$$

откуда

$$\frac{x^2\left(a^2-c^2\right)}{a^2}+y^2=a^2-c^2 \tag{6.2}$$

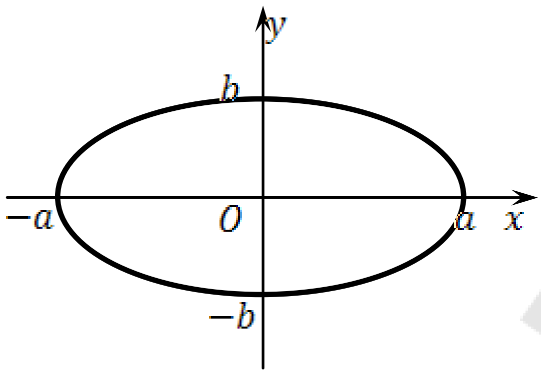
По определению $2a>2c$, следовательно, $a^2-c^2>0$. Обозначим

$$a^2-c^2=b^2.$$

Разделив обе части уравнения (6.2) на b^2, получим *каноническое уравнение эллипса*:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1} \qquad (6.3)$$

Можно показать, что каждая точка, удовлетворяющая уравнению (6.3), удовлетворяет и уравнению эллипса (6.1).



<u>Исследование формы эллипса по его каноническому уравнению</u>

Установим форму эллипса, пользуясь его каноническим уравнением (6.3).

1. Уравнение содержит только квадраты переменных, следовательно, эллипс симметричен относительно осей Ox и Oy. Ось симметрии, на которой расположены фокусы, называется *фокальной осью*, точка $O(0;0)$ – *центром* эллипса. Т.к. $\frac{x^2}{a^2}\le 1$, $\frac{y^2}{b^2}\le 1$, то $|x|\le a$, $|y|\le b$.

2. Найдем точки пересечения эллипса с осями координат. При $y=0$ имеем $x=\pm a$, при $x=0$, $y=\pm b$. Точки пересечения эллипса с осями координат называются *вершинами эллипса*. Отрезок, соединяющий вершины $(-a;0)$ и $(a;0)$, называется *большой осью*, а отрезок, соединяющий точки $(0;-b)$ и $(0;b)$ – *малой осью*. Числа a и b называют, соответственно, *большой полуосью* и *малой полуосью*. Длину отрезка F_1F_2, равную $2c$, называют *фокусным расстоянием*, величину c – *полуфокусным расстоянием*. Т.к. $b^2=a^2-c^2$, то $c=\sqrt{a^2-b^2}$.

3. Параметрические уравнения эллипса имеют вид:

$$\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t. \end{cases}$$

Определение 6.2. Отношение фокусного расстояния к длине большой оси называется *эксцентриситетом* эллипса и обозначается

ε. Таким образом, если эллипс задан каноническим уравнением (6.3), то эксцентриситет

$$\varepsilon = \frac{c}{a}.$$

Т.к. $c < a$, то эксцентриситет эллипса меньше единицы.

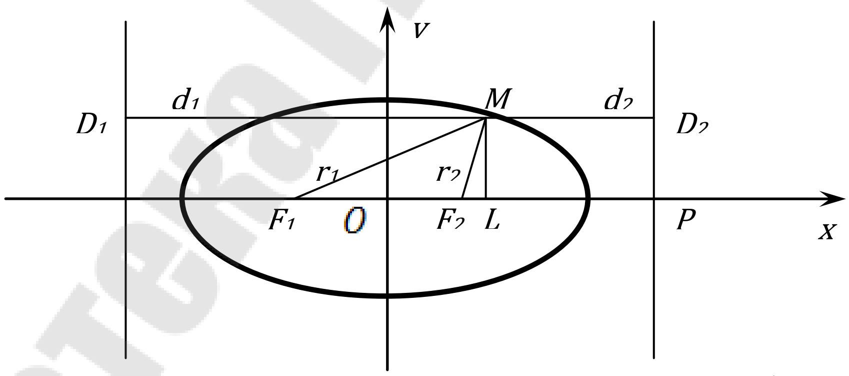
Если $a = b = R$, то эллипс превращается в *окружность* $x^2 + y^2 = R^2$. В этом случае $c = 0$, эксцентриситет окружности ε также равен нулю. Чем ближе отношение $\frac{b}{a}$ к единице, тем ближе эллипс к окружности.

Определение 6.3. Прямые, перпендикулярные к большей оси эллипса и расположенные симметрично относительно его центра на расстоянии $\frac{a}{\varepsilon}$ от него, называются *директрисами* эллипса.

Таким образом, уравнения директрис имеют вид: $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$. Т.к. эксцентриситет эллипса $\varepsilon < 1$, то директрисы расположены левая – левее, а правая – правее вершин эллипса.

Теорема 6.1. Отношение расстояний от любой точки эллипса до фокуса к расстоянию до соответствующей директрисы есть величина постоянная, равная эксцентриситету эллипса.

Доказательство



Пусть $M(x; y)$ – произвольная точка эллипса. Обозначим через r_1 и r_2 расстояния от точки до фокусов F_1 и F_2, а через d_1 и d_2 – расстояния до соответствующих директрис. Покажем, что

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon.$$

Действительно, $d_2 = \frac{a}{\varepsilon} - x = \frac{a - \varepsilon x}{\varepsilon}$, $r_2 = a - \varepsilon x$.

Тогда $\dfrac{r_2}{d_2} = \dfrac{a - \varepsilon x}{(a - \varepsilon x)/\varepsilon} = \varepsilon$.

Аналогично получаем: $d_1 = x + \dfrac{a}{\varepsilon} = \dfrac{\varepsilon x + a}{\varepsilon}$, $r_1 = a + \varepsilon x$, следовательно, $\dfrac{r_1}{d_1} = \varepsilon$.

6.2. Гипербола

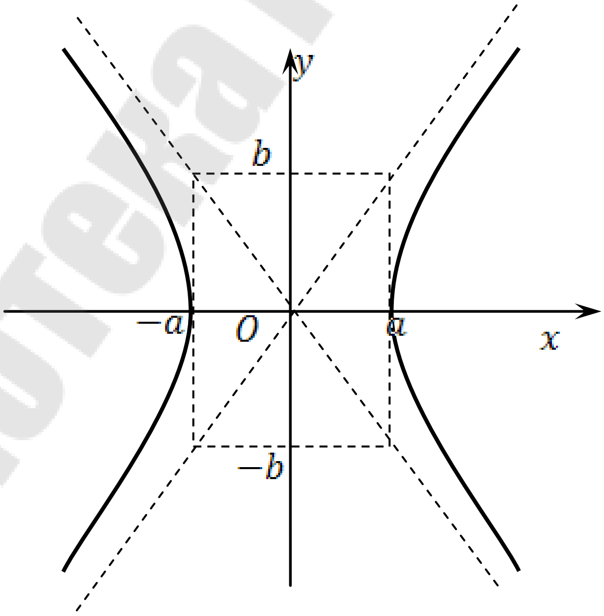
Определение 6.4. *Гиперболой* называется множество точек плоскости, модуль разность расстояний от которых до двух данных точек F_1 и F_2, называемых фокусами гиперболы, есть величина постоянная (не равная нулю и меньшая, чем расстояние между фокусами).

Если точка M принадлежит гиперболе, то уравнение гиперболы имеет вид:

$$|F_1M| - |F_2M| = \pm 2a,\ 2a < |F_1F_2| = 2c \tag{6.4}$$

Если ось абсцисс проходит через точки F_1 и F_2, начало координат является серединой отрезка F_1F_2, то уравнение гиперболы в выбранной системе координат имеет вид:

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = \pm 2a \tag{6.5}$$



Рассуждая так же, как при выводе канонического уравнения эллипса, можно получить каноническое уравнение гиперболы:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1} \qquad (6.6)$$

<u>Исследование формы гиперболы по ее каноническому уравнению</u>

1. Гипербола симметрична относительно осей координат. Ось, содержащая фокусы, называется *фокальной осью*. Начало координат $O(0;0)$ является *центром* гиперболы. Точки $(-a;0)$ и $(a;0)$ пересечения с осью Ox называются *вершинами* гиперболы. Точек пересечения с осью Oy нет, т.к. при $x=0$ уравнение $-\frac{y^2}{b^2}=1$ не имеет решений.

Ось симметрии, пересекающая гиперболу, называется *действительной* осью, а ось, не пересекающая гиперболу, – *мнимой осью*. Для уравнения (6.6) действительная ось равна $2a$, мнимая – $2b$.

2. Т.к. $\frac{x^2}{a^2}=1-\frac{y^2}{b^2}$, то $|x|\geq a$. Следовательно, точки гиперболы расположены вне полосы $-a\leq x\leq a$.

3. График гиперболы имеет *асимптоты*, задаваемые уравнениями

$$y=\pm\frac{b}{a}x.$$

4. Параметрические уравнения гиперболы имеют вид:

$$\begin{cases} x=a\operatorname{ch}t, \\ y=b\operatorname{sh}t. \end{cases}$$

Определение 6.5. Отношение фокусного расстояния к длине действительной оси называется *эксцентриситетом* гиперболы. Если гипербола задана каноническим уравнением (6.6), то эксцентриситет

$$\varepsilon=\frac{c}{a}.$$

Т.к. $c>a$, то эксцентриситет гиперболы больше единицы.

Аналогично определению директрис эллипса определяются директрисы гиперболы. Уравнения директрис имеют вид: $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$.

Т.к. эксцентриситет гиперболы больше единицы, то директрисы расположены внутри полосы $|x| < a$. Теорема об эксцентриситете, доказанная нами для эллипса, справедлива и для гиперболы.

Замечание. Очевидно, что уравнение $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ будет определять гиперболу, фокусы которой находятся на оси Oy, вершины – в точках $(0;-b)$ и $(0;b)$. Эксцентриситет такой гиперболы равен $\varepsilon = \frac{c}{b}$, а уравнения директрис будут иметь вид $y = \pm\frac{b}{\varepsilon}$.

6.3. Парабола

Определение 6.6. *Параболой* называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки F, называемой фокусом параболы, и данной прямой DD_1, называемой ее директрисой.

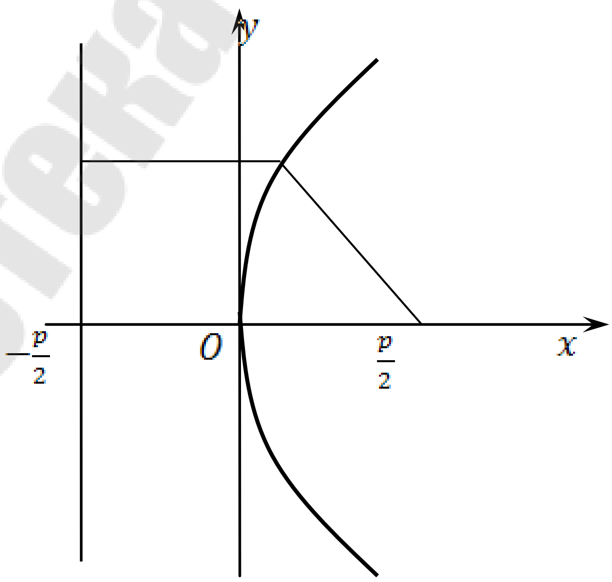
Выберем систему координат таким образом, чтобы ось абсцисс проходила через фокус, перпендикулярно директрисе, а ось ординат проходила посредине между фокусом и директрисой.

В выбранной системе координат уравнение параболы имеет вид:

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right| \qquad (6.7)$$

Каноническое уравнение параболы:

$$\boxed{y^2 = 2px} \qquad (6.8)$$



Исследование формы параболы по ее каноническому уравнению

1. График симметричен относительно оси Ox. Точка $O(0;0)$ пересечения параболы с осью симметрии называется *вершиной* параболы.

2. При $p > 0$ переменная x может принимать только неотрицательные значения, при $p < 0$ – только неположительные.

Как известно, для эллипса и гиперболы отношение расстояния r от любой точки до фокуса к расстоянию d до соответствующей директрисы есть величина постоянная, равная эксцентриситету. Если определить *эксцентриситет параболы* как отношение $\frac{r}{d}$, то по определению параболы ее эксцентриситет равен единице:

$$\frac{r}{d} = \varepsilon = 1.$$

Парабола, гипербола, эллипс – кривые второго порядка, обладают *общим геометрическим свойством*: для любой их точки отношение расстояния r до фокуса к расстоянию d до соответствующей директрисы есть величина постоянная, равная эксцентриситету.

6.4. Полярное уравнение эллипса, гиперболы, параболы

Если за полюс полярной системы координат взять один из фокусов эллипса, а полярную ось направить ко второму фокусу, уравнение эллипса можно представить *полярным уравнением*:

$$\boxed{r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}.} \tag{6.9}$$

Здесь r и φ – полярные координаты, а параметр p называется *фокальным параметром кривой* и равен половине длины хорды, проходящей через фокус и перпендиклярной к фокальной оси, т.е $p = \frac{b^2}{a}$.

Этим же уравнением можно задать и одну ветвь гиперболы. Если считать, что для параболы $\varepsilon = 1$, то уравнение (6.9) задает и параболу. Заметим, что для эллипса $\varepsilon < 1$, а для гиперболы $\varepsilon > 1$.

6.5. Исследование общего уравнения второго порядка

Запишем общее уравнение второго порядка:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \qquad (6.10)$$

где a_{11}, a_{12} и a_{22} одновременно не равны нулю.

Определитель

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$$

называется *определителем* (или дискриминантом) *старших членов* уравнения.

Определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

называется *определителем* (или дискриминантом) *левой части* уравнения.

Линию, имеющую один центр симметрии, называют *центральной*.

Линия является центральной, если $\delta \neq 0$.

Приведение центральной кривой к каноническому виду

1) Избавимся от линейных членов, сделав замену переменной:

$$\begin{cases} x = x_0 + x_1, \\ y = y_0 + y_1 \end{cases}$$

Точку $(x_0; y_0)$ найдем из требования обращения в ноль линейных слагаемых в заданном уравнении (6.10):

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 = -a_{13}, \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 = -a_{23}. \end{cases}$$

Решая эту систему по формулам Крамера, находим:

$$x_0 = \frac{\delta_1}{\delta},\ y_0 = \frac{\delta_2}{\delta}, \text{ где } \delta_1 = -\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{23} & a_{22} \end{vmatrix},\ \delta_2 = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Сделанная замена означает перенос начала координат в точку $O_1(x_0; y_0)$.

Заданное уравнение примет вид

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1y_1 + a_{22}y_1^2 = -\frac{\Delta}{\delta} \qquad (6.11)$$

2) Приведем левую часть уравнения к каноническому виду.

Составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda(a_{11}+a_{22}) + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = 0,$$

или

$$\lambda^2 - \lambda(a_{11}+a_{22}) + \delta = 0.$$

Это уравнение имеет корни λ_1, и λ_2, причем т.к. $\delta \neq 0$, то ни один из корней не равен нулю.

Переходя в равенстве (6.11) к новым переменным x_1' и y_1', получим:

$$\lambda_1 (x_1')^2 + \lambda_2 (y_1')^2 = -\frac{\Delta}{\delta} \tag{6.12}$$

Возможны следующие случаи:

- числа λ_1 и λ_2 одного знака (для определенности положим $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$).

Тогда $\delta = \lambda_1 \lambda_2 > 0$.

Если $\Delta < 0$, то, разделив обе части (6.12) на $-\dfrac{\Delta}{\delta}$, получим:

$$\frac{(x_1')^2}{-\Delta/\lambda_1\delta} + \frac{(y_1')^2}{-\Delta/\lambda_2\delta} = 1 \tag{6.13}$$

Т.к. $-\Delta/\lambda_1\delta > 0$, $-\Delta/\lambda_2\delta > 0$, то, введя обозначения $a^2 = -\Delta/\lambda_1\delta$, $b^2 = -\Delta/\lambda_2\delta$, получим каноническое уравнение *эллипса*:

$$\frac{(x_1')^2}{a^2} + \frac{(y_1')^2}{b^2} = 1$$

Если $\Delta = 0$, то уравнение (6.12) примет вид:

$$\lambda_1 (x_1')^2 + \lambda_2 (y_1')^2 = 0.$$

Существует единственное решение этого уравнения – *точка* $(x_1; y_1)$.

Если $\Delta > 0$, то уравнение (6.12) решений не имеет. В этом случае говорят, что оно задает *мнимый эллипс*.

- числа λ_1 и λ_2 разных знаков. Тогда $\delta = \lambda_1 \lambda_2 < 0$.

Если $\Delta \neq 0$, то, разделив обе части (6.12) на $-\dfrac{\Delta}{\delta}$, получим уравнение вида (6.13), в котором выражения $-\Delta/\lambda_1\delta$ и $-\Delta/\lambda_2\delta$ имеют разные знаки (для определенности положим $-\Delta/\lambda_1\delta > 0$, $-\Delta/\lambda_2\delta < 0$).

Тогда, обозначив $a^2 = -\Delta/\lambda_1\delta$, $b^2 = \Delta/\lambda_2\delta$, получим уравнение гиперболы:

$$\frac{(x_1')^2}{a^2} - \frac{(y_1')^2}{b^2} = 1.$$

Если $\Delta = 0$, то уравнение (6.12) примет вид:

$$\lambda_1 (x_1')^2 + \lambda_2 (y_1')^2 = 0,$$

где $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$.

Левую часть этого уравнения можно разложить по формуле разности квадратов:

$$\left(\sqrt{\lambda_1}x_1' + \sqrt{-\lambda_2}y'\right)\left(\sqrt{\lambda_1}x_1' - \sqrt{-\lambda_2}y'\right) = 0,$$

откуда

$$\sqrt{\lambda_1}x_1' + \sqrt{-\lambda_2}y' = 0 \text{ или } \sqrt{\lambda_1}x_1' - \sqrt{-\lambda_2}y' = 0.$$

Эти уравнения задают *пару прямых*

$$y_1' = -\frac{\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{-\lambda_2}}x_1',\ y_1' = -\frac{\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{-\lambda_2}}x_1',$$

проходящих через начало координат.

Для нахождения связи между $(x_1; y_1)$ и $(x_1'; y_1')$ решим для каждого значения λ систему уравнений

$$\begin{cases}(a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}y_1 = 0,\\ a_{12}x_1 + (a_{22} - \lambda)y_1 = 0.\end{cases}$$

Полученные в результате решения два вектора будут определять поворот осей *Ox* и *Oy* соответственно.

Результаты рассуждений можно свести в таблицу:

λ_1	λ_2	Δ	$-\Delta/\lambda_1\delta$	$-\Delta/\lambda_2\delta$	линия
$\pm$	$\pm$	$\neq 0$	+	+	эллипс
$\pm$	$\pm$	$\neq 0$	–	–	мнимый эллипс
$\pm$	$\pm$	0	0	0	точка
$\pm$	$\mp$	$\neq 0$	+	–	гипербола, действительная ось лежит на оси *Ox*
$\pm$	$\mp$	$\neq 0$	–	+	гипербола, действительная ось лежит на оси *Oy*
$\pm$	$\mp$	0	0	0	пара пересекающихся прямых

Приведение нецентральной кривой к каноническому виду

1) Кривая не является центральной, следовательно, $\delta = 0$. Значит, один из корней характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

равен нулю.

Пусть для определенности $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$.

Приведем левую часть (6.11) к каноническому виду.

Выполним поворот системы координат так, чтобы направление новой оси координат Ox_1 совпадало направлением вектора $\bar{u} = (x_\lambda; y_\lambda)$, координаты которого являются одним из решений системы

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_1)x + a_{12}y = 0, \\ a_{12}x + (a_{22} - \lambda_1)y = 0. \end{cases}$$

Угол поворота α *найдем из условий:*

$$\cos\alpha = \frac{x_\lambda}{|\bar{u}|},\ \sin\alpha = \frac{y_\lambda}{|\bar{u}|}.$$

Поворот означает переход к новым координатам по формулам:

$$\begin{cases} x = x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha \\ x = x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha \end{cases}$$

В результате проведенной замены уравнение примет вид:

$$\lambda_1 x_1^2 + 2a'_{13}x_1 + 2a'_{23}y_1 + a_{33} = 0 \tag{6.14}$$

где

$$\begin{cases} a'_{13} = a_{13}\cos\alpha - a_{23}\sin\alpha \\ a'_{23} = a_{13}\sin\alpha + a_{23}\cos\alpha \end{cases}$$

Уравнение (6.14) перепишем в виде:

$$\lambda_1\left(x_1 + \frac{a'_{13}}{\lambda_1}\right)^2 + 2a'_{23}y_1 + H = 0,$$

где $H = a_{33} - \dfrac{a'_{13}}{\lambda_1}$.

- Если $a'_{23} \neq 0$, то перенесем начало координат в точку $O_1\left(-\dfrac{a'_{13}}{\lambda_1}; -\dfrac{H}{2a'_{23}}\right)$, т.е. перейдем к новым переменным

$$x_1 + \frac{a'_{13}}{\lambda_1} = x',\ \ y_1 + \frac{H}{2a'_{23}} = y'.$$

В результате получим уравнение $\lambda_1 x_1'^2 + 2a_{23}' y_1' = 0$,
которое является каноническим уравнением параболы.

- *Если* $a_{23}' = 0$, перенесем начало координат в точку $O_1\left(-\frac{a_{13}'}{\lambda_1};0\right)$, *т.е.*

Перейдем к новой переменной: $x_1 + \frac{a_{13}'}{\lambda_1} = x'$.

В результате получим уравнение

$$\lambda_1 x_1'^2 + H = 0.$$

Тогда, если λ_1 и H имеют разные знаки, полученное уравнение определяет пару параллельных прямых, если λ_1 и H имеют один знак, то уравнение не имеет действительных решений.

Пример 6.1. Привести к каноническому виду уравнение $5x^2 - 4xy + 2y^2 - 4x - 8y + 16 = 0$ и установить, какую линию оно определяет.

Решение

1) Вычислим δ и Δ.

$$\delta = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 10 - 4 = 6,\ \Delta = \begin{vmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 16 \end{vmatrix} = -24.$$

Т.к. $\delta > 0$ и $\Delta < 0$, то уравнение задает центральную фигуру (действительный или мнимый эллипс).

2) Решим характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$.

$$(5-\lambda)(2-\lambda) - 4 = 0,$$
$$\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0,$$

откуда

$$\lambda_1 = 6,\ \lambda_2 = 1.$$

3) Запишем уравнение (6.12):

$$6(x_1')^2 + (y_1')^2 = \frac{24}{6},\ \text{или}\ \frac{(x_1')^2}{4/6} + \frac{(y_1')^2}{4} = 1 \text{ – эллипс.}$$

Ответ: эллипс.

6.6. Поверхности второго порядка

<u>Цилиндрическая поверхность</u>

Определение 6.7. *Цилиндрической поверхностью* называется всякая поверхность, которая может быть получена движением прямой, перемещающейся параллельно некоторому вектору и все время пересекающей данную линию, называемую *направляющей*. Движущаяся прямая называется *образующей*.

Если уравнение цилиндрической поверхности не содержит одну из координат, то оно определяет цилиндрическую поверхность, образованную движением направляющей, параллельно координатной оси, соответствующей отсутствующей координате, и имеет вид:

$F(x, y) = 0$ – цилиндрическую поверхность параллельна Oz;

$F(x, z) = 0$ – цилиндрическую поверхность параллельна Oy;

$F(y, z) = 0$ – цилиндрическую поверхность параллельна Ox.

<u>Коническая поверхность</u>

Определение 6.8. *Конической поверхностью* называется поверхность, образованная движением прямой , проходящей через данную точку, называемую вершиной конуса, и скользящей по данной кривой. Движущаяся прямая называется *образующей* конуса, а кривая, по которой скользит образующая – *направляющей*. В общем виде уравнение конической поверхности опеределяется уравнениями направляющей

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

и образующей

$$\frac{X - x_0}{x - x_0} = \frac{Y - y_0}{y - y_0} = \frac{Z - z_0}{z - z_0},$$

где (x_0, y_0, z_0) – координаты вершины конуса.

<u>Поверхности вращения</u>

Определение 6.9. Поверхность, образованная вращением линии вокруг оси, называется *поверхностью вращения*.

Из определения следует, что в сечении поверхности вращения плоскостями, перпендикулярными к оси вращения, будут получаться окружности с центрами на оси вращения.

Для того чтобы получить уравнение поверхности, образованной вращением линии L, лежащей в плоскости yOz , вокруг оси Oz, нужно в уравнении этой линии заменить y на $\pm\sqrt{x^2+y^2}$. Знак перед корнем должен совпадать в соответствующих точках со знаком координаты y на исходной кривой. Таким образом, если кривая задана как

$$L: F(y,z)=0,$$

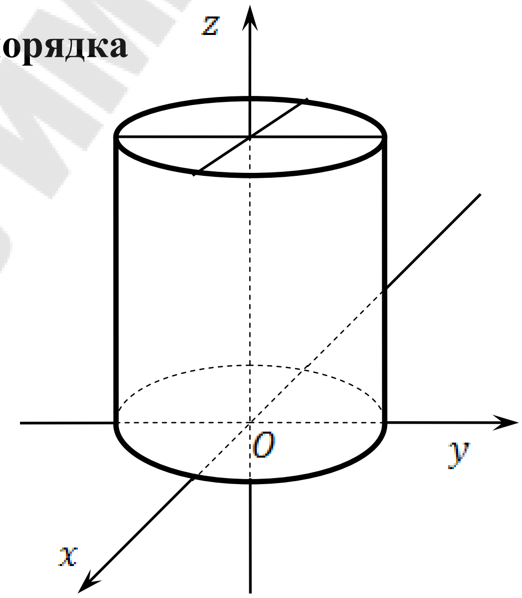
то уравнение поверхности вращения имеет вид:

$$F\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z\right)=0.$$

Основные поверхности второго порядка

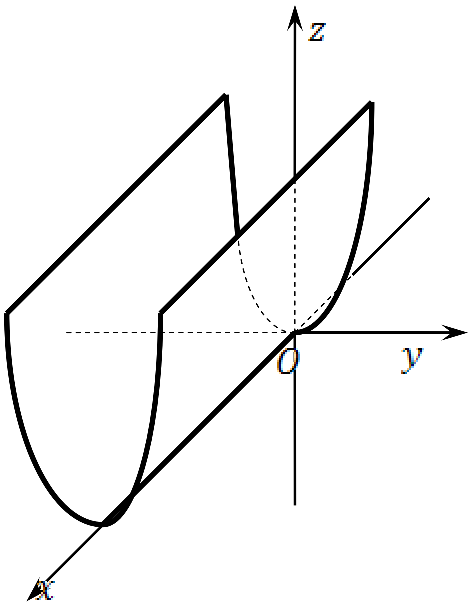
Эллиптический цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



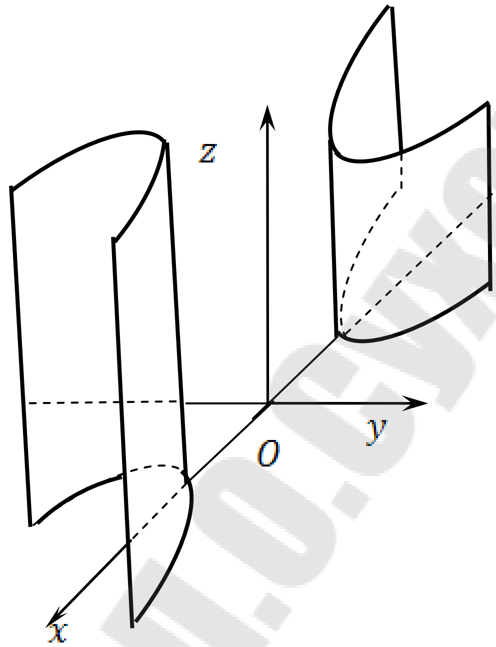
Параболический цилиндр

$$z=ay^2$$



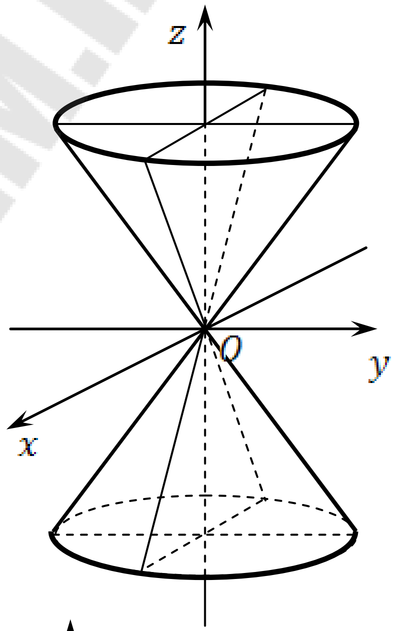
Гиперболический цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$



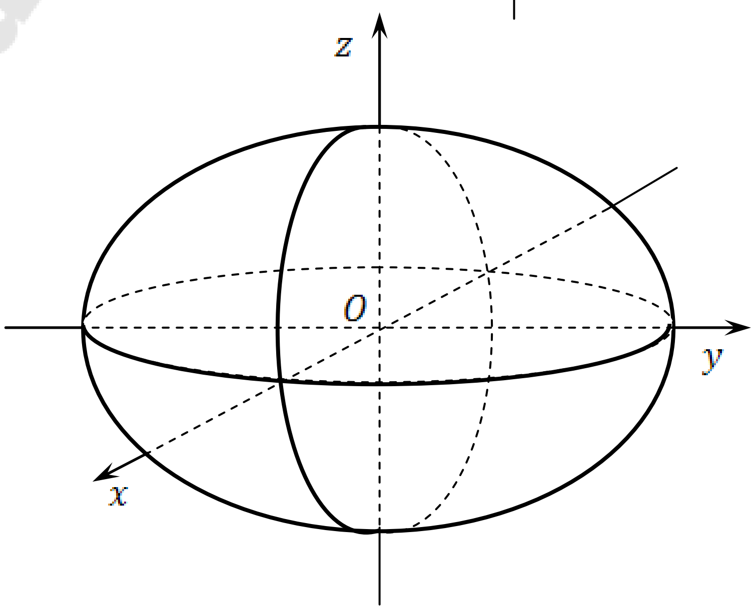
Конус второго порядка

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$



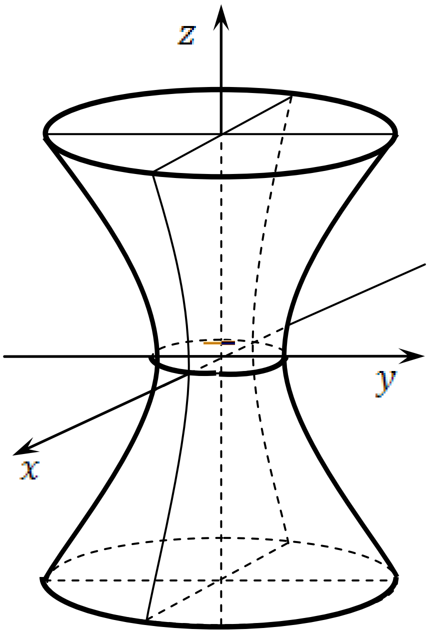
Трехосный эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



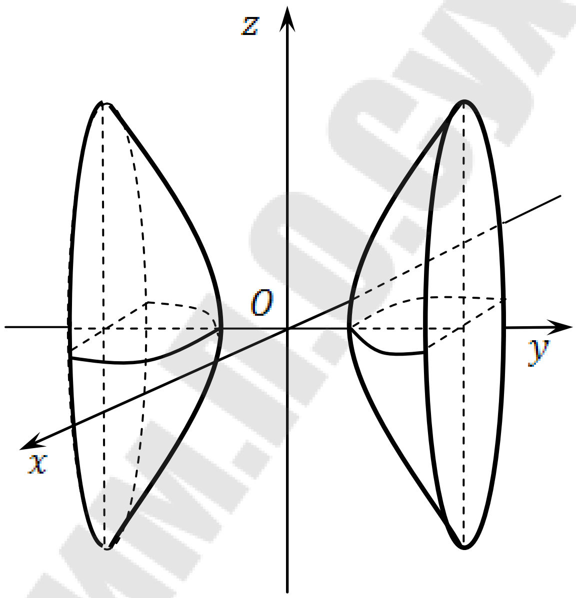
Однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



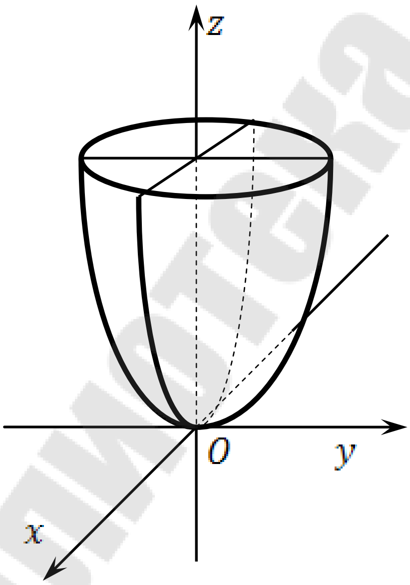
Двуполостный гиперболоид

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



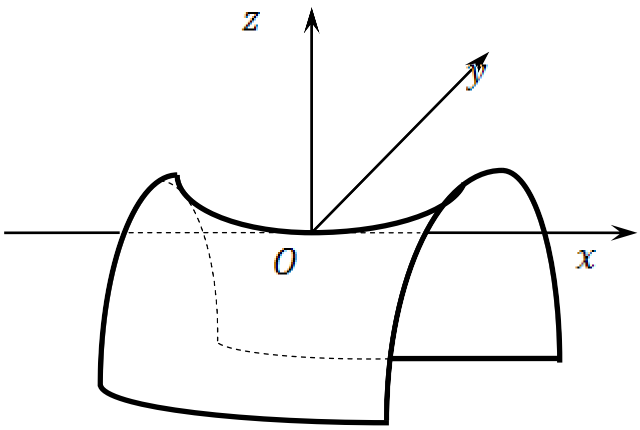
Эллиптический параболоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$$



Гиперболический параболоид

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$$



Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте определение эллипса.

2. Запишите каноническое уравнение эллипса; параметрические уравнения эллипса. Что означают параметры a и b в этих уравнениях? Изобразите эллипс, заданный своим каноническим уравнением.

3. Как найти координаты фокусов эллипса, заданного своим каноническим уравнением, его эксцентриситет, уравнения директрис? Что называется директрисой эллипса?

4. Дайте определение гиперболы.

5. Запишите каноническое уравнение гиперболы с фокусами на оси Ox. Изобразите гиперболу, заданную своим каноническим уравнением.

6. Запишите каноническое уравнение гиперболы с фокусами на оси Oy. Изобразите гиперболу, заданную своим каноническим уравнением.

7. Запишите параметрические уравнения гиперболы.

8. Как определить действительную и мнимую полуоси гиперболы, заданной каноническим уравнением?

9. Как найти координаты фокусов гиперболы, заданного своим каноническим уравнением, его эксцентриситет, уравнения директрис? Что называется директрисой гиперболы?

10. Запишите уравнения асимптот гиперболы.

11. Дайте определение параболы.

12. Запишите каноническое уравнение параболы с осью симметрии Ox; с осью симметрии Oy. Изобразите эти параболы.

13. Каким общим геометрическим свойством обладают кривые эллипс, гипербола и парабола?

14. Как запишется полярное уравнение эллипса, гиперболы и параболы?

15. Какая линия называется линией второго порядка? Каков общий вид уравнения линии второго порядка?

16. Какие линии называются центральными? нецентральными? Приведите примеры.

17. С помощью какого преобразования координат в общем уравнении второй степени можно освободиться от членов, содержащих переменную в первой степени?

18. С помощью какого преобразования координат в общем уравнении второй степени можно освободиться от произведения xy?

19. Опишите алгоритм приведения к каноническому виду центральной линии; нецентральной линии. Какие линии может изображать уравнение второй степени с двумя переменными?

20. Какая поверхность называется конической? Запишите каноническое уравнение конуса.

21. Какую поверхность изображает уравнение, содержащее только две переменные?

22. Какая поверхность образуется при вращении эллипса вокруг большой или малой оси? Запишите соответствующие уравнения.

23. Какая поверхность образуется при вращении гиперболы вокруг действительной оси? мнимой оси? Запишите соответствующие уравнения.

24. Какая поверхность образуется при вращении параболы вокруг оси симметрии? Запишите ее уравнение.

25. Какие поверхности может изображать уравнение второй степени с тремя переменными?

26. Каким образом можно установить, что общее уравнение второй степени с тремя переменными определяет центральную поверхность? нецентральную поверхность?

<u>Задания для самостоятельного решения</u>

1. Дан эллипс $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. Найти координаты его фокусов, эксцентриситет, уравнения директрис. Сделать рисунок. Записать параметрические и полярное уравнения.

2. Составить уравнение эллипса, если его оси совпадают с осями координат и эллипс проходит через точки $M(4;0)$ и $M(2;3)$.

3. Составить каноническое уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси Ox, если известно, что:

а) расстояние между фокусами равно 8, а малая полуось равна 3;

б) большая ось равна 26, эксцентриситет равен 5/13;

в) расстояние между фокусами равно 4, расстояние между директрисами равно 5.

4. Составить каноническое уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси Oy, если полуоси его равны соответственно трем и пяти.

5. Земля движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце. Наименьшее расстояние от Земли до Солнца равно приблизительно 147,5 млн.км, а наибольшее – 152,5 млн.км. Найти большую полуось и эксцентриситет орбиты Земли.

6. Определить траекторию точки $M(x;y)$, которая при своем движении остается в полтора раза ближе к точке $F(4;0)$, чем к прямой $x=9$.

7. Составить уравнение окружности, если концы одного из ее диаметров находятся в точках $A(3;9)$ и $B(7;3)$.

8. Записать уравнение окружности, проходящей через фокусы эллипса $9x^2+25y^2=1$ и имеющей центр в точке $A(0;6)$.

9. Составить уравнение линии, каждая точка M которой удовлетворяет условию:

а) сумма квадратов расстояний от точки M до точек $A(4;0)$ и $B(-2;2)$ равна 28;

б) отстоит от точки $A(1;5)$ на расстоянии, в четыре раза меньшем, чем от прямой $x=-1$.

10. Вычислите длину полуосей и расстояние между фокусами эллипса $r=\dfrac{25}{13-12\cos\varphi}$.

11. Как расположены на плоскости точки, координаты которых удовлетворяют условиям:

1) $x^2+y^2-4x+6y+1=0$ 2) $4x^2+y^2-40x+2y+101=0$

3) $4x^2+25y^2+4x-10y-8=0$ 4) $5x^2+9y^2+30x-18y+60=0$

5) $\begin{cases}\dfrac{(x-1)^2}{4}+\dfrac{(y-1)^2}{9}<1,\\ 0<x<2\end{cases}$ 6) $\begin{cases}\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}\le 1,\\ |y|>4\end{cases}$

12. . Дана гипербола $4x^2-y^2=16$. Найти координаты фокусов, эксцентриситет, уравнения асимптот и директрис. Сделать рисунок. Записать параметрические и полярное уравнения гиперболы.

13. Составить каноническое уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси Ox, если известно, что:

а) расстояние между фокусами равно 30, расстояние между вершинами равно 24;

б) действительная ось равна 12, эксцентриситет равен 5/3;

в) мнимая ось равна 2 гипербола проходит через точку $M(-3;\sqrt{5}/2)$.

14. Составить каноническое уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси Oy, если известно, что:

а) мнимая полуось равна 5, эксцентриситет равен 13/12;

б) действительная полуось равна 4 и гипербола проходит через точку $M(2;4\sqrt{2})$;

в) точка $M_1(4,5;\sqrt{13})$ принадлежит гиперболе и уравнения асимптот $y = \pm\frac{2}{3}x$.

15. Записать уравнение гиперболы, вершины которой находятся в фокусах, а фокусы – в вершинах эллипса $6x^2 + 5y^2 = 30$.

16. Составить уравнение эллипса, если известно, что он проходит через точку $A(6;4)$, а фокусы его совпадают с фокусами гиперболы $y^2 - x^2 = 8$.

17. Построить параболу, найти ее директрису и фокус, зная каноническое уравнение параболы $x^2 = 6y$. Записать полярное уравнение.

18. Составьте каноническое уравнение параболы, если известно, что:

а) парабола симметрична относительно оси Ox и проходит через точку $M(4;-2)$;

б) парабола симметрична относительно оси Oy и проходит через точку $M(1;-2)$;

в) парабола симметрична относительно оси Ox и фокус находится в точке $M(-3;0)$.

19. Составить уравнение параболы, если:

а) ее фокус находится в точке $F(7;2)$ и директриса имеет уравнение $x - 5 = 0$;

б) ее фокус находится в точке $F(4;3)$ и директриса имеет уравнение $y + 1 = 0$.

20. Найти длину хорды, образованной пересечением параболы $y^2 = 2x$ с прямой $6x - y - 4 = 0$.

21. Определить, при каком значении k прямая $y = kx + 2$

а) пересекает параболу $y^2 = 4x$;

б) касается ее;

в) проходит вне параболы.

22. Найти длину хорды, образованной пересечением параболы $x^2 = 4y$ с прямой, проходящей через фокус данной параболы под углом $\pi/6$ к оси Ox.

23. Составить уравнение прямой, которая касается параболы $x^2 = 16y$ и перпендикулярна к прямой $2x + 4y + 7 = 0$.

24. Из точки $P(-3;12)$ проведена касательная к параболе $y^2 = 10x$. Вычислить расстояние от точки P до хорды параболы, соединяющей точки касания.

25. Выяснить, какая фигура соответствует каждому из данных уравнений, и (в случае непустого множества) изобразить в системе координат xOy:

а) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 1 = 0$;

б) $4x^2 + 25y^2 + 4x - 10y - 8 = 0$;

в) $4x^2 + y^2 - 40x + 2y - 101 = 0$;

г) $x^2 - 4y^2 + 4x + 24y - 36 = 0$;

д) $x^2 - y^2 + 2x - 2y = 0$;

е) $x^2 + y^2 - x = 0$;

ж) $x^2 - 6x + 2y + 11 = 0$;

з) $3x^2 - 4y^2 - 12x - 8y + 20 = 0$;

и) $y^2 - 3x - 4y + 10 = 0$;

к) $x^2 - 2x - 3 = 0$;

л) $y^2 + 4y + 4 = 0$;

м) $9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y + 26 = 0$.

26. Как расположены на плоскости точки, координаты которых удовлетворяют условиям:

1) $\begin{cases} x^2+y^2 \geq 49, \\ 49x^2+9y^2 + 392x - 72y + 487 \leq 0, \\ x - y + 4 \geq 0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 4x^2-y^2 + 6y - 13 \leq 0, \\ 9x^2+y^2 - 14y - 32 \leq 0, \\ 2x - y + 2 \leq 0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2-4y^2 - 6x + 24y - 23 \leq 0, \\ 4x^2+9y^2 - 54y + 45 \leq 0, \\ x - y \geq 3 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 9y^2-x^2 \geq 9, \\ x^2+y^2 - 8x - 4y - 11 \leq 0, \\ 3x - 2y - 6 \geq 0 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 36x^2 + y^2 - 216x - 4y + 292 \leq 0, \\ x^2+36y^2 - 6x - 144y + 117 \leq 0, \\ y^2 - 3x \leq 0 \end{cases}$

6) $\begin{cases} y^2 - 4x \leq 4, \\ x^2+y^2 + 6x - 8y - 16 \leq 0, \\ 3y + 2x \geq 0 \end{cases}$

27. Упростите уравнения плоских фигур второй степени и сделайте рисунки этих фигур:

а) $5x^2 + 5y^2 + 8xy - 18x - 18y + 9 = 0$;

б) $5x^2+8y^2+4xy-32x-56y+80=0$;

в) $8y^2+6xy-12x-26y+29=0$;

г) $8y^2+6xy-12x-26y+20=0$;

д) $3x^2+3y^2+10xy-2x-14y-13=0$;

е) $x^2+y^2-2xy+2\sqrt{2}x+\sqrt{2}y=0$;

ж) $9x^2+16y^2-24xy-20x+110y-50=0$;

з) $x^2+y^2-2xy+2x-2y+4=0$.

28. Выяснить, какие фигуры заданы в прямоугольной системе координат в пространстве следующими уравнениями:

а) $x^2+y^2-z^2-2x-4y+2z+4=0$;

б) $x^2+y^2+z^2-12x-6y-37=0$;

в) $3x^2-9y^2+4z^2+36=0$;

г) $x^2+2y^2+6x-18y-12z+47=0$;

д) $4x^2+2y^2-z^2-16x-4y-8z-6=0$;

е) $3x^2-y^2-2z^2+42x-8y-20z+81=0$;

ж) $x^2+y^2+x+y=0$;

з) $5x^2-2z^2-30x-10y-4z+13=0$;

и) $2x^2+3y^2+4z^2-8x-18y+8z+39=0$;

к) $2x^2+3y^2+12x-48y+4z+278=0$;

л) $y^2-4y-8z-6=0$.

29. Составить уравнение поверхности, образованной вращением эллипса $\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\ x=0$ вокруг оси Oy.

30. Составить уравнение поверхности, образованной вращением гиперболы $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1,\ y=0$ вокруг оси Oz.

31. Установить, что плоскость $x-2=0$ пересекает эллипсоид $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}+\dfrac{z^2}{4}=1$ по эллипсу; найти его полуоси и вершины.

32. Установить, что плоскость $z+1=0$ пересекает однополостный гиперболоид $\frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{18}+\frac{z^2}{2}=1$ по гиперболе; найти ее полуоси и вершины.

33. Найти уравнения проекций сечения эллиптического параболоида $y^2+z^2=x$ плоскостью $x+2y-z=0$ на координатные плоскости.

34. Установить, при каких значениях m плоскость $x+my-2=0$ пересекает эллиптический параболоид $\frac{x^2}{2}+\frac{z^2}{3}=y$: а) по эллипсу; б) по параболе.

35. Доказать, что эллипсоид $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{9}=1$ имеет одну общую точку с плоскостью $4x-3y+12z-54=0$, и найти ее координаты.

36. Коэффициент равномерного сжатия пространства к плоскости Oyz равен 3/5. Составить уравнение поверхности, в которую при таком сжатии преобразуется сфера $x^2+y^2+z^2=25$.

37. Составить уравнение поверхности, в которую преобразуется эллипсоид $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{16}=1$ при трех последовательных равномерных сжатиях пространства с координатными плоскостями, если коэффициент сжатия к плоскости Oxy равен 3/4, к плоскости Oxz равен 4/5 и к плоскости Oyz равен 3/4.

38. Доказать, что плоскость $2x-12y-z+16=0$ пересекает гиперболический параболоид $x^2-4y^2=2z$ по прямолинейным образующим. Составить уравнения этих прямолинейных образующих.

39. Убедившись, что точка $A(-2;0;1)$ лежит на гиперболическом параболоиде $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=z$, определить острый угол, образованный его прямолинейными образующими, проходящими через A.

7.ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

7.1. Линейное пространство: определение и примеры

Определение 7.1. Закон, согласно которому любой паре элементов $x \in R, y \in R$ однозначно ставится в соответствие элемент того же множества $z \in R$, будем называть *операцией сложения* x и y.

Определение 7.2. Закон, согласно которому каждому элементу множества $x \in R$ и числу λ ставится в соответствие элемент того же множества $z \in R$, будем называть операцией *умножения x на число* λ.

Определение 7.3. Множество, состоящее из элементов любой природы, с определенными в нем операциями сложения и умножения на число называется *пространством*.

Определение 7.4. Множество R называется *линейным пространством*, а его элементы – векторами, если на нем определены операции сложения векторов и умножения вектора на число, удовлетворяющие следующим аксиомам:

1. Сложение векторов коммутативно: $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$.
2. Сложение векторов ассоциативно: $\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}$.
3. Существует нулевой вектор $\vec{0} \in R$: $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}, \forall\, \vec{x} \in R$.
4. Для каждого вектора $\vec{x} \in R$ существует противоположный вектор $-\vec{x} \in R$, такой что: $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$.
5. Операция умножения вектора на число дистрибутивно относительно суммы чисел μ и λ: $(\mu + \lambda)\vec{x} = \mu\vec{x} + \lambda\vec{x}$.
6. Операция умножения вектора на число дистрибутивно относительно суммы векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$: $\lambda(\vec{x} + \vec{y}) = \lambda\vec{x} + \lambda\vec{y}$.
7. Операция умножения вектора на число ассоциативно: $(\mu\lambda)\vec{x} = \mu(\lambda\vec{x})$.
8. $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}, \forall\, \vec{x} \in R$.

Если операция умножения вектора на число определена только для умножения на вещественное число, линейное пространство R называется *вещественным линейным пространством*; если же операция умножения на число определена и для комплексных чисел, то линейное пространство R называется *комплексным линейным пространством*.

Следствия из аксиом линейного пространства**:**

1. В линейном пространстве существует единственный нулевой вектор.

Доказательство

Предположим, что существует два нулевых элемента $\vec{O}_1$ и $\vec{O}_2$. Тогда согласно аксиоме 3 имеем

$$\vec{O}_1 + \vec{O}_2 = \vec{O}_1$$
$$\vec{O}_2 + \vec{O}_1 = \vec{O}_2$$

Но, согласно аксиоме 1, $\vec{O}_1 + \vec{O}_2 = \vec{O}_2 + \vec{O}_1$. Таким образом, получаем

$$\vec{O}_1 = \vec{O}_2.$$

2. В линейном пространстве каждый вектор имеет единственный противоположный элемент.

Доказательство

Предположим, что существуют два противоположных элемента $\vec{x}_1 = -\vec{x}$ и $\vec{x}_2 = -\vec{x}$. Тогда, согласно аксиомам 2-4 имеем

$$\left.\begin{array}{l} \vec{x}_1 + \vec{x} + \vec{x}_2 = (\vec{x}_1 + \vec{x}) + \vec{x}_2 = \vec{0} + \vec{x}_2 = \vec{x}_2 \\ \vec{x}_1 + \vec{x} + \vec{x}_2 = \vec{x}_1 + (\vec{x} + \vec{x}_2) = \vec{x}_1 + \vec{0} = \vec{x}_1 \end{array}\right. \Longrightarrow \vec{x}_2 = \vec{x}_1$$

3. Для любого вектора $\vec{x} \in R$ имеет место равенство

$$0 \cdot \vec{x} = \vec{0}$$

Доказательство

Согласно аксиоме 3

$$0 \cdot \vec{x} = 0 \cdot \vec{x} + \vec{0} = 0 \cdot \vec{x} + \vec{x} - \vec{x}$$

Воспользуемся аксиомой 6:

$$0 \cdot \vec{x} + \vec{x} - \vec{x} = (0 + 1)\vec{x} - \vec{x} = \vec{x} - \vec{x} = \vec{0}.$$

Утверждение доказано. Из последнего равенства следует, что

$$-1 \cdot \vec{x} = -\vec{x}.$$

Исходя из последнего равенства, можно определить операцию *вычитания векторов*:

Разностью векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ называется вектор $\vec{z}$, удовлетворяющий равенству

$$\vec{z} + \vec{y} = \vec{x}$$

4. Для любого числа λ и нулевого вектора $\vec{0} \in R$ справедливо равенство

$$\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}.$$

Доказательство

$$\lambda \cdot \vec{0} = \lambda \cdot \big(\vec{x} + (-\vec{x})\big) = \lambda \cdot \vec{x} + \lambda \cdot (-\vec{x}) = \lambda \cdot \vec{x} + \lambda \cdot (-1 \cdot \vec{x})$$
$$= \lambda \cdot \vec{x} - \lambda \cdot \vec{x} = (\lambda - \lambda) \cdot \vec{x} = 0 \cdot \vec{x} = \vec{0}$$

Примеры линейных пространств

1. Множество вещественных чисел.

Векторами, в данном случае, являются вещественные числа. Операция сложения и умножения определены как сложение и умножение вещественных чисел. Все аксиомы линейного пространства выполняются для множества вещественных чисел.

2. Множество векторов в пространстве.

Векторами являются векторы в трехмерном пространстве. Операция сложения и умножения вектора на число удовлетворяют всем аксиомам.

3. Множество всех многочленов степени, не превосходящей n.

Векторами являются многочлены вида

$$\vec{a} = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i}x^{n-i}$$

Сумму векторов

$$\vec{a} = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0$$

и

$$\vec{b} = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x^1 + b_0$$

определим как

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1 + b_1)x^1 + (a_0 + b_0) = \sum_{i=0}^{n} (a_{n-i} + b_{n-i})x^{n-i}$$

Произведение вектора на число:

$$\lambda\vec{a} = (\lambda a_n)x^n + (\lambda a_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (\lambda a_1)x^1 + (\lambda a_0) = \sum_{i=0}^{n} \lambda a_{n-i}x^{n-i}$$

Проверим выполнение аксиом:

1.

$$\vec{a} + \vec{b} = \sum_{i=0}^{n} (a_{n-i} + b_{n-i})x^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} (b_{n-i} + a_{n-i})x^{n-i} = \vec{b} + \vec{a}$$

2. $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i}x^{n-i} + \sum_{i=0}^{n} (b_{n-i} + \mathrm{c}_{n-i})x^{n-i} =$

$$= \sum_{i=0}^{n} a_{n-i}x^{n-i} + \sum_{i=0}^{n} b_{n-i}x^{n-i} + \sum_{i=0}^{n} c_{n-i}x^{n-i} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (a_{n-i} + b_{n-i}) x^{n-i} + \sum_{i=0}^{n} c_{n-i} x^{n-i} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$$

3. В качестве нулевого вектора $\vec{0}$ *выберем многочлен, все коэффициенты в котором равны нулю*

$$\vec{0} = 0 \cdot x^n + 0 \cdot x^{n-1} + \cdots + 0 \cdot x^1 + 0 = \sum_{i=0}^{n} 0 \cdot x^{n-i}$$

Тогда

$$\vec{a} + \vec{0} = \sum_{i=0}^{n} (a_{n-i} + 0) x^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} x^{n-i} = \vec{a}$$

4. В качестве противоположного вектора $-\vec{a}$ *выберем многочлен, все коэффициенты которого равны коэффициентам* $\vec{a}$*, взятым с противоположным знаком:*

$$-\vec{a} = -a_n x^n - a_{n-1} x^{n-1} - \cdots - a_1 x^1 - a_0 = \sum_{i=0}^{n} (-a_{n-i}) x^{n-i}$$

Тогда

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \sum_{i=0}^{n} (a_{n-i} - a_{n-i}) x^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} 0 \cdot x^{n-i} = \vec{0}$$

5.

$$(\mu + \lambda)\vec{a} = \sum_{i=0}^{n} (\mu + \lambda) a_{n-i} x^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} \mu a_{n-i} x^{n-i} + \sum_{i=0}^{n} \lambda a_{n-i} x^{n-i} =$$
$$= \mu\vec{a} + \lambda\vec{a}$$

6.

$$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \sum_{i=0}^{n} \lambda (a_{n-i} + b_{n-i}) x^{n-i} =$$
$$= \sum_{i=0}^{n} (\lambda a_{n-i} + \lambda b_{n-i}) x^{n-i} = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$$

7.

$$(\lambda\mu)\vec{a} = \sum_{i=0}^{n} (\lambda\mu) a_{n-i} x^{n-i} =$$
$$= \sum_{i=0}^{n} (\lambda\mu) a_{n-i} x^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} \lambda(\mu a_{n-i} x^{n-i}) = \lambda(\mu)\vec{a}$$

8.

$$1 \cdot \vec{a} = \sum_{i=0}^{n} 1 \cdot a_{n-i} x^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} x^{n-i} = \vec{a}$$

Все аксиомы сложения и умножения на число выполнены, следовательно, множество всех многочленов степени, не превосходящей n, является линейным пространством.

4. Множество решений заданной системы однородных линейнных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad m < n$$

Данная система имеет бесконечное число решений, каждое из которых, можно записать в виде столбца (матрицы $n \times 1$):

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Сумму решений опеределим по правилу сложения матриц:

$$\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{pmatrix}$$

Сумма решений также является решением заданной системы:

$$\begin{aligned} a_{i1}(\alpha_1 + \beta_1) + a_{i2}(\alpha_2 + \beta_2) + \cdots + a_{in}(\alpha_n + \beta_n) \\ = (a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \cdots a_{in}\alpha_n) + (a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \cdots a_{in}\beta_n) \\ = 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Умножение на число определим по правилу умножения матрицы на число:

$$C\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} C\alpha_1 \\ C\alpha_2 \\ \vdots \\ C\alpha_n \end{pmatrix}$$

Решение однородной системы, умноженное на число, также является решением системы:

$$\begin{aligned} a_{i1}(C\alpha_1) + a_{i2}(C\alpha_2) + \cdots a_{in}(C\alpha_n) = C(a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \cdots a_{in}\alpha_n) \\ = C \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

В качестве нулевого вектора выберем

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Очевидно, что аксиомы 1-8 будут выполнены как аксиомы сложения матриц и умножения матрицы на число. Таким образом, множество решений системы однородных линейных уравнений является векторным пространством.

5. Множество всех функций $f(t) = ae^t + be^{-t}$, $-\infty < t < \infty$ с произвольными вещественными числами a и b.

Для элементов множества

$$f_1(t) = a_1e^t + b_1e^{-t} \text{ и } f_2(t) = a_2e^t + b_2e^{-t}$$

определим операции сложения и умножения на число следующим образом:

$$f_1(t) + f_2(t) = (a_1 + a_2)e^t + (b_1 + b_2)e^{-t}$$
$$\lambda f(t) = (\lambda a)e^t + (\lambda b)e^{-t}$$

Проверкой убеждаемся в истинности аксиом 1-8.

Все аксиомы сложения и умножения на число выполнены, следовательно, множество всех функций $f(t) = ae^t + be^{-t}$, $-\infty < t < \infty$ *с произвольными вещественными числами* a *и* b *является линейным пространством.*

6. Множество функций $f(t) = e^{at}(-\infty < t < \infty)$ с произвольным вещественным числом a.

Для элементов множества функции

$$f_1(t) = e^{a_1t} \text{ и } f_2(t) = e^{a_2t}$$

операцию сложения определим как

$$f_1(t) + f_2(t) = e^{(a_1+a_2)t}$$

Операцию умножения $f(t) = e^{at}$ *на число* λ *определим как*

$$\lambda f(t) = e^{a\lambda t}$$

Проверим выполнение аксиом 1-8.

1. $f_1(t) + f_2(t) = e^{(a_1+a_2)t} = e^{(a_2+a_1)t} = f_2(t) + f_1(t)$

2. $f_1(t) + (f_2(t) + f_3(t)) = e^{\left(a_1+(a_2+a_3)\right)t} = e^{\left((a_1+a_2)+a_3\right)t} = \left(f_1(t) + f_2(t)\right) + f_3(t)$

3. В качестве нулевого вектора выберем $\vec{0} = e^{0\cdot t} = 1$

$$f(t) + \vec{0} = e^{(a+0)t} = e^{at} = f(t)$$

4.Противоположным элементом для $f(t)$ *является* $-f(t) = e^{-at}$

$$f(t) + \left(-f(t)\right) = e^{\left(a+(-a)\right)t} = e^{0\cdot t} = \vec{0}$$

$$5.\,(\lambda + \mu)f(t) = e^{a(\lambda+\mu)t} = e^{(a\lambda+a\mu)t} = \lambda f(t) + \mu f(t)$$

$$6.\lambda\left(f_1(t) + f_2(t)\right) = e^{\lambda(a_1+a_2)t} = e^{(\lambda a_1+\lambda a_2)t} = \lambda f_1(t) + \lambda f_2(t)$$

$$7.(\lambda\mu)f(t) = e^{(\lambda\mu)at} = e^{\lambda(a\mu)t} = \lambda\left(\mu f(t)\right)$$

$$8.1 \cdot f(t) = e^{a\cdot 1\cdot t} = e^{at} = f(t)$$

Все аксиомы выполнены. Таким образом, множество функций $f(t) = e^{at}(-\infty < t < \infty)$ *с произвольным вещественным числом* a *с определенными нами операциями сложения и умножения на число является линейным пространством.*

7.2.Линейные подпространства

Определение 7.5. *Подпространством* линейного пространства R называется подмножество L множества R, элементы которого, в свою очередь, образуют линейное пространства с теми же операциями сложения и умножения на число, что и в R.

Теорема 7.1. Для того чтобы подмножество L множества R было подпространством линейного пространства R, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

1. Если $\vec{x} \in L$ и $\vec{y} \in L$, то $\vec{x} + \vec{y} \in L$
2. Если $\vec{x} \in L$ и α- любое число, то $\alpha\vec{x} \in L$.

Пример 7.1. Доказать, что множество L векторов, параллельных одной и той же плоскости, является линейным подпространством линейного пространства R – множества векторов в пространстве.

Решение

Пусть $\vec{x} \in L$ *и* $\vec{y} \in L$- два вектора, параллельных одной и той же плоскости.

Сумма $\vec{x} + \vec{y}$ лежит в той же плоскости, что и слагаемые, следовательно, $\vec{x} + \vec{y} \in L$.

При умножении вектора на число получается вектор, коллинеарный исходному, следовательно, $\alpha\vec{x} \in L$.

Оба условия теоремы выполнены. Таким образом доказано, что множество L векторов, параллельных одной и той же плоскости является линейным подпространством линейного пространства R – множества векторов в пространстве.

7.3. Размерность линейного пространства

Определение 7.6. Линейное пространство R называется -*мерным*, если в нем существует n и не более линейно независимых векторов. Число n называется *размерностью* линейного пространства.

Пространства, имеющие конечную размерность, называют *конечномерными*. Обычно их обозначают как R^n.

Примерами конечномерных пространств могут служить множество векторов на плоскости (R^2); множество векторов в пространстве (R^3).

Пространство, в котором можно найти сколь угодно много линейно-независимых векторов, называется *бесконечномерным*.

В качестве примеры бесконечномерных пространств можно указать множество многочленов, степени не выше n; множество решений однородной системы линейных уравнений.

Определение 7.7. *Базисом* в n-мерном линейном пространстве называют любую упорядоченную совокупность n линейно независимых векторов $\{\vec{l}_1, \vec{l}_2, \cdots, \vec{l}_n\}$.

Теорема 7.2. Каждый вектор $\vec{x}$ линейного пространства R^n можно представить, притом единственным образом, в виде линейной комбинации базисных векторов.

Доказательство

Пусть $\{\vec{l}_1, \vec{l}_2, \cdots, \vec{l}_n\}$ – базис. Тогда система $\{\vec{l}_1, \vec{l}_2, \cdots, \vec{l}_n, \vec{x}\}$ линейно зависима, так как содержит $n+1$ элемент. Поэтому

$$\mathrm{C}_1\vec{l}_1 + \mathrm{C}_2\vec{l}_2 + \cdots + \mathrm{C}_n\vec{l}_n + \mathrm{C}_{n+1}\vec{x} = 0,$$

причем $\mathrm{C}_{n+1} \neq 0$ (в противном случае, при $\mathrm{C}_{n+1} = 0$, система $\{\vec{l}_1, \vec{l}_2, \cdots, \vec{l}_n, \vec{x}\}$ была бы линейно независимой).

Тогда

$$\vec{x} = -\frac{\mathrm{C}_1}{\mathrm{C}_{n+1}}\vec{l}_1 - \frac{\mathrm{C}_2}{\mathrm{C}_{n+1}}\vec{l}_2 - \cdots - \frac{\mathrm{C}_n}{\mathrm{C}_{n+1}}\vec{l}_n = x_1\vec{l}_1 + x_2\vec{l}_2 + \cdots + x_n\vec{l}_n$$

Пусть разложение не единственное, т.е. вектор $\vec{x}$ можно представить одновременно и как

$$\vec{x} = x_1\vec{l}_1 + x_2\vec{l}_2 + \cdots + x_n\vec{l}_n$$

и как

$$\vec{x} = x'_1\vec{l}_1 + x'_2\vec{l}_2 + \cdots + x'_n\vec{l}_n$$

Используем аксиомы линейного пространства:

$$\vec{x} - \vec{x} = 0$$

$$\left(x_1\vec{l}_1 + x_2\vec{l}_2 + \cdots + x_n\vec{l}_n\right) - \left(x'_1\vec{l}_1 + x'_2\vec{l}_2 + \cdots + x'_n\vec{l}_n\right) =$$
$$= (x_1 - x'_1)\vec{l}_1 + (x_2 - x'_2)\vec{l}_2 + \cdots + (x_n - x'_n)\vec{l}_n$$

Тогда

$$(x_1 - x'_1)\vec{l}_1 + (x_2 - x'_2)\vec{l}_2 + \cdots + (x_n - x'_n)\vec{l}_n = 0.$$

Система $\left\{\vec{l}_1, \vec{l}_2, \cdots, \vec{l}_n\right\}$ линейно независима, следовательно, все коэффициенты

$$x_i - x'_i = 0$$

Таким образом, все $x_i = x'_i$. Мы доказали, что разложение вектора $\vec{x}$ по базису $\left\{\vec{l}_1, \vec{l}_2, \cdots, \vec{l}_n\right\}$ единственно.

Определение 7.8. Числа $x_1, x_2, \cdots, x_n$ называются *координатами* вектора $\vec{x}$ в базисе $\left\{\vec{l}_1, \vec{l}_2, \cdots, \vec{l}_n\right\}$.

- Два вектора равны тогда и только тогда, когда их координаты в одном и том же базисе равны.
- При умножении вектора на число все его координаты умножаются на это число

При сложении или вычитании векторов их соответствующие координаты кладываются или вычитаются.

7.4. Преобразование базиса

Пусть в n-мерном линейном пространстве заданы два различных базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n$ и $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \cdots, \vec{e}'_n$. Назовем их «старый» и «новый». Разложим векторы нового базиса по векторам старого:

$$\begin{gathered}
\vec{e}'_1 = p_{11}\vec{e}_1 + p_{12}\vec{e}_2 + \cdots + p_{1n}\vec{e}_n \\
\vec{e}'_2 = p_{21}\vec{e}_1 + p_{22}\vec{e}_2 + \cdots + p_{2n}\vec{e}_n \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\vec{e}'_n = p_{n1}\vec{e}_1 + p_{n2}\vec{e}_2 + \cdots + p_{nn}\vec{e}_n
\end{gathered}$$

Коэффициенты p_{ij} запишем в виде матрицы

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

Заметим, что данная матрица является невырожденной, так как в противном случае, она не имела бы обратной матрицы и, следовательно, векторы «старого» базиса не могли бы быть разложены по векторам «нового», что противоречит определению базиса.

Некоторый вектор $\vec{x}$ в старом и новом базисах выражается как

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n$$

$$\vec{x} = x'_1\vec{e}'_1 + x'_2\vec{e}'_2 + \cdots + x'_n\vec{e}'_n$$

Координаты вектора в старом базисе связаны с координатами в новом как

$$x_1 = p_{11}x'_1 + p_{21}x'_2 + \cdots + p_{n1}x'_n$$
$$x_2 = p_{12}x'_1 + p_{22}x'_2 + \cdots + p_{n2}x'_n$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_n = p_{1n}x'_1 + p_{2n}x'_2 + \cdots + p_{nn}x'_n$$

В матричном виде связь старых координат с новыми записывается в виде:

$$X = BX' \tag{7.1}$$

где матрица B имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} & \cdots & p_{n1} \\ p_{12} & p_{22} & \cdots & p_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{1n} & p_{2n} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \tag{7.2}$$

Матрица $B = P^T$ называется матрицей *перехода от старого базиса к новому***.**

Матрица $(P^T)^{-1}$ называется матрицей, *контргградиентной* к матрице P.

Если зависимость новых базисных векторов от старых выражается матрицей P, то зависимость новых координат вектора от старых выражается матрицей, *контргградиентной* к матрице P.

Пример 7.2. Вектор $\vec{x} = \{1; -1; 0\}$ задан координатами в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Найдите координаты этого вектора в базисе

$$\vec{e}'_1 = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 6\vec{e}_3,$$
$$\vec{e}'_2 = 5\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + 7\vec{e}_3,$$
$$\vec{e}'_3 = -2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3.$$

Решение

Построим матрицу P перехода от «старых» базисных векторов к «новым».

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 5 & -3 & 7 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Чтобы найти координаты вектора в «новом» базисе, построим матрицу, контргградиентную P.

$$P^T = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 6 & 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

Матрица, контргредиентная к P, является обратной для P^T.

$$|P^T| = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 6 & 7 & -3 \end{vmatrix} = 10.$$

Используя формулу для обратной матрицы, получаем

$$(P^T)^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 15 & 3 & -8 \\ 25 & 9 & -14 \end{pmatrix}.$$

Координаты вектора $\vec{x}$ в «новом» базисе найдем как

$$X' = (P^T)^{-1}X = \begin{pmatrix} -0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}4 \\ 1{,}5 & 0{,}3 & -0{,}8 \\ 2{,}5 & 0{,}9 & -1{,}4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}6 \\ 1{,}2 \\ 1{,}6 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\vec{x} = \{-0{,}6; 1{,}2; 1{,}6\}$.

7.5. Евклидово пространство

Определение 7.9. *Скалярным произведением* двух векторов $\vec{x}, \vec{y}$ называется закон, по которому каждой паре векторов $\vec{x}, \vec{y}$ ставится в соответствие вещественное число $(\vec{x}, \vec{y})$.

Определение 7.10. Вещественное линейное пространство E называется *евклидовым***,** если в нем определена операция скалярного произведения, удовлетворяющая аксиомам:

1.Коммутативности: $(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{x})\ \forall \vec{x}, \vec{y} \in E$;

2.Дистрибутивность: $(\vec{x} + \vec{y}, \vec{z}) = (\vec{x}, \vec{z}) + (\vec{y}, \vec{z})$, $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in E$;

3.Ассоциативности относительно умножения на число:
$(\alpha\vec{x}, \vec{y}) = \alpha(\vec{x}, \vec{y})$, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E$ и для любого вещественного числа α.

4. $(\vec{x}, \vec{x}) > 0, \forall \vec{x} \neq 0$

Пример. *Рассмотрим множество свободных векторов в пространстве. Данное множество является линейным пространством. В данном множеств определено скалярное произведение, которое удовлетворяет аксиомам 1-4. Следовательно, множество свободных векторов в пространстве является евклидовым пространством.*

Следствия из аксиом скалярного произведения

1.$(\vec{x}, \alpha\vec{y}) = \alpha(\vec{x}, \vec{y})$

Доказательство

$(\vec{x}, \alpha\vec{y})$={по аксиоме 1}=$(\alpha\vec{y}, \vec{x})$={по аксиоме 3}= $\alpha(\vec{x}, \vec{y})$

2. $(\vec{x}, \vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{x}, \vec{z})$

Доказательство

$(\vec{x}, \vec{y} + \vec{z})$ ={по аксиоме 1}= $(\vec{y} + \vec{z}, \vec{x})$ ={по аксиоме 2}= $(\vec{y}, \vec{x}) + (\vec{z}, \vec{x})$ = { по аксиоме 1} = $(\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{x}, \vec{z})$

3.$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i, \vec{y}\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\vec{x}_i, \vec{y})$

Доказательство

$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i, \vec{y}\right) = (\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \cdots \alpha_n \vec{x}_n, \vec{y})$ ={по аксиоме 2}= $= (\alpha_1 \vec{x}_1, \vec{y}) + (\alpha_2 \vec{x}_2, \vec{y}) + \cdots (\alpha_n \vec{x}_n, \vec{y})$ ={по аксиоме 3} $= \alpha_1 (\vec{x}_1, \vec{y}) + +\alpha_2 (\vec{x}_2, \vec{y}) + \cdots \alpha_n (\vec{x}_n, \vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\vec{x}_i, \vec{y})$

4. $\forall \vec{x} \in E \ \left(\vec{x}, \vec{0}\right) = 0$

Доказательство

$$\vec{0} = 0 \cdot \vec{y}, \forall \vec{y} \in E$$

Тогда

$\left(\vec{x}, \vec{0}\right) = (\vec{x}, 0 \cdot \vec{y})$ ={по аксиоме 3}= $0 \cdot (\vec{x}, \vec{y}) = 0$

В каждом евклидовом пространстве можно ввести понятие *длины(нормы*) и *угла между векторами.*

Определение 7.11. *Длиной* (*нормой*) вектора называется число

$$\boxed{\|\vec{x}\| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})}.} \tag{7.3}$$

Из определения следует, что длина вектора равна нулю тогда и только тогда, когда вектор является нулевым.

$$\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}.$$

Вектор единичной длины называется *нормированным*.

Любой ненулевой вектор можно нормировать:

$$\vec{x}^0 = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$$

Рассмотрим вектор $\lambda\vec{x} - \vec{y}$.

Тогда, используя аксиомы 1-3 и следствия из них, получаем:

$$(\lambda\vec{x} - \vec{y}, \lambda\vec{x} - \vec{y}) = (\lambda\vec{x}, \lambda\vec{x}) - (\lambda\vec{x}, \vec{y}) - (\vec{y}, \lambda\vec{x}) + (\vec{y}, \vec{y}) =$$
$$= \lambda^2 (\vec{x}, \vec{x}) - \lambda(\vec{x}, \vec{y}) - \lambda(\vec{y}, \vec{x}) + (\vec{y}, \vec{y}) =$$
$$= \lambda^2 (\vec{x}, \vec{x}) - 2\lambda(\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{y}, \vec{y}).$$

Согласно аксиоме 4

$$(\lambda\vec{x} - \vec{y}, \lambda\vec{x} - \vec{y}) \geq 0$$

Таким образом, получаем неравенство

$$\lambda^2 (\vec{x}, \vec{x}) - 2\lambda(\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{y}, \vec{y}) \geq 0,$$

которое должно выполняться при любых значениях λ.

Поэтому

$$D = (\vec{x}, \vec{y})^2 - (\vec{y}, \vec{y}) \leq 0$$

Следовательно,

$$\boxed{(\vec{x},\vec{y})^2 \leq (\vec{x},\vec{x}) \cdot (\vec{y},\vec{y}).} \qquad (7.4)$$

Полученное неравенство называется ***неравенством Коши-Буняковского***.

Пусть векторы $\vec{x},\vec{y}$ ненулевые. Тогда неравенство (7.4) можно переписать в виде:

$$\frac{(\vec{x},\vec{y})^2}{(\vec{x},\vec{x}) \cdot (\vec{y},\vec{y})} \leq 1.$$

Учитывая определение длины вектора, получаем:

$$\frac{|(\vec{x},\vec{y})|}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|} \leq 1$$

В евклидовом пространстве можно ввести понятие угла между векторами.

Определение 7.12. *Углом* между векторами $\vec{x}$ и $\vec{y}$ в евклидовом пространстве называется число φ, удовлетворяющее условию

$$cos\,\varphi = \frac{(\vec{x},\vec{y})}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|} \qquad (7.5)$$

Рассмотрим вектор $\vec{x}+\vec{y}$.

Тогда

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = (\vec{x}+\vec{y},\vec{x}+\vec{y}) = (\vec{x},\vec{x}) + 2(\vec{x},\vec{y}) + (\vec{y},\vec{y}).$$

Из формулы (7.5)

$$(\vec{x},\vec{y}) = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|\, cos\,\varphi \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|,$$

и учитывая, что $(\vec{x},\vec{x}) = \|\vec{x}\|^2, (\vec{y},\vec{y}) = \|\vec{y}\|^2$,получаем:

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = (\vec{x},\vec{x}) + 2(\vec{x},\vec{y}) + (\vec{y},\vec{y}) \leq \|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| + \|\vec{y}\|^2 =$$
$$= (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2$$

Таким образом, доказано ***неравенство треугольника***

$$\|\vec{x}+\vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\| \qquad (7.6)$$

7.6. Ортонормированный базис

Определение 7.13. Система векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n$ называется *ортонормированной*, если

$$\left(\vec{x}_i, \vec{x}_j\right) = \begin{cases} 0, i \neq j \\ 1, i = j \end{cases}$$

Теорема 7.3. Ортонормированная система векторов линейно независима.

Доказательство

Пусть система векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n$ – линейно зависима. Это означает, что существует хотя бы одно число $C_i \neq 0$, такое что

$$C_1\vec{x}_1 + C_2\vec{x}_2 + \cdots C_i\vec{x}_i + \cdots + C_n\vec{x}_n = 0.$$

Умножим обе части равенства на $\vec{x}_i$. В силу ортонормированности все $(\vec{x}_i, \vec{x}_j) = 0$, при $i \neq j$. Поэтому

$$C_i(\vec{x}_i, \vec{x}_i) = C_i \cdot 1 = C_i = 0,$$

что противоречит нашему предположению. Доказано, что ортонормированная система векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n$ – линейно независима.

Теорема 7.4. В n-мерном евклидовом пространстве существует ортонормированная система линейно независимых векторов.

Метод ортогонализации системы векторов

Пусть задана линейно независимая система векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n$.

1. В качестве вектора $\vec{e}_1$ возмем $\vec{e}_1 = \frac{\vec{x}_1}{|\vec{x}_1|}$.

2. Рассмотрим вектор $\vec{x}'_2 = \vec{x}_2 - \alpha_1\vec{e}_1$. Коэффициент α выберем так, чтобы вектор $\vec{x}'_2$ был ортогонален вектору $\vec{e}_1$. Тогда $(\vec{x}'_2, \vec{e}_1) = (\vec{x}_2, \vec{e}_1) - \alpha_1(\vec{e}_1, \vec{e}_1)$.

Таким образом, находим $\alpha_1 = (\vec{x}_2, \vec{e}_1)$. В качестве вектора $\vec{e}_2$ возмем $\vec{e}_2 = \frac{\vec{x}'_2}{|\vec{x}'_2|}$

3. Аналогичным образом последовательно построим $\vec{e}_i = \frac{\vec{x}'_i}{|\vec{x}'_i|}$, где $\vec{x}'_i = \vec{x}_i - \alpha_1\vec{e}_1 - \alpha_2\vec{e}_2 - \cdots - \alpha_{i-1}\vec{e}_{i-1}$ и коэффициенты $\alpha_j = (\vec{x}_i, \vec{e}_j)$.

В результате применения указанного алгоритма последовательно ко всем векторам заданной системы будут получены векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n$, которые имеют единичную длину и взаимно ортогональны. Тем самым теорема доказана.

Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n$ – некоторый ортонормированный базис. Тогда любой вектор $\vec{x}$ может быть представлен в виде

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n$$

Тогда $(\vec{x}, \vec{e}_i) = x_i$. Таким образом, координаты любого вектора $\vec{x}$ относительно ортонормированного базиса равны скалярному произведению вектора $\vec{x}$ на соответствующий базисный вектор.

Скалярное произведение двух векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ евклидова пространства, заданных в ортонормированном базисе, равно *сумме произведений соответствующих координат*:

$$(\vec{x}\,,\vec{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n.$$

Если координаты векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ в ортонормированном базисе записать виде столбцов

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ и } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

то скалярное произведение может быть записано в виде

$$(\vec{x}\,,\vec{y}) = X^TY = Y^TX.$$

Пример 7.3. Постройте ортонормированную систему векторов по линейно независимой системе $\vec{x}_1 = \{1;1;0\}, \vec{x}_2 = \{1;1;1\}, \vec{x}_3 = \{1;3;-3\}$.

Решение.

Построим вектор $\vec{e}_1$:

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{x}_1}{|\vec{x}_1|} = \frac{\{1;1;0\}}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}};0\right\}$$

Построим вектор $\vec{x}_2'$, ортогональный вектору $\vec{e}_1$:

$$\vec{x}_2' = \vec{x}_2 - \alpha\vec{e}_1.$$

Умножим обе части равенства на $\vec{e}_1$. Вектор $\vec{x}_2'$ ортогонален вектору $\vec{e}_1$, поэтому $(\vec{x}_2', \vec{e}_1) = 0$, $(\vec{e}_1, \vec{e}_1) = 1$.Таким образом,

$$\alpha = (\vec{x}_2, \vec{e}_1) = 1\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\cdot 0 = \sqrt{2}.$$

Тогда

$$\vec{x}_2' = \{1;1;1\} - \sqrt{2}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}};0\right\} = \{0;0;1\}.$$

Длина вектора $\vec{x}_2'$ равна 1, поэтому

$\vec{e}_2 = \vec{x}_2' = \{0;0;1\}$.

Построим вектор $\vec{x}_3'$, ортогональный векторам $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$.

$$\vec{x}_3' = \vec{x}_3 - \alpha_1\vec{e}_1 - \alpha_2\vec{e}_2$$

Умножим обе части равенства на $\vec{e}_1$. Вектор $\vec{x}_3'$ ортогонален вектору $\vec{e}_1$, поэтому $(\vec{x}_3', \vec{e}_1) = 0$. Вектор $\vec{e}_2$ ортогонален вектору $\vec{e}_1$, поэтому $(\vec{e}_2, \vec{e}_1) = 0$.Таким образом,

$$\alpha_1 = (\vec{x}_3, \vec{e}_1) = 1\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + 3\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - 3\cdot 0 = 2\sqrt{2}.$$

Умножим обе части равенства на $\vec{e}_2$. Вектор $\vec{x}_3'$ ортогонален вектору $\vec{e}_2$, поэтому $(\vec{x}_3', \vec{e}_2) = 0$. Вектор $\vec{e}_1$ ортогонален вектору $\vec{e}_2$, поэтому $(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 0$.Таким образом,

$$\alpha_2 = (\vec{x}_3, \vec{e}_2) = 1 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 3 \cdot 1 = -3.$$

Тогда

$$\vec{x}_3' = \{1; 3; -3\} - 2\sqrt{2}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right\} + 3\{0; 0; 1\} = \{-1,1,0\}$$

Построим вектор $\vec{e}_3$:

$$\vec{e}_3 = \frac{\vec{x}_3}{|\vec{x}_3|} = \frac{\{-1; 1; 0\}}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2}} = \left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right\}$$

Ответ: ортонормированная система векторов

$$\begin{cases} \vec{e}_1 = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right\} \\ \vec{e}_2 = \{0; 0; 1\} \\ \vec{e}_3 = \left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right\} \end{cases}$$

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение линейного пространства.
2. Сформулируйте аксиомы сложения и умножения на число в линейном пространстве.
3. Какие следствия из аксиом линейного пространства Вы знаете?
4. Приведите примеры линейных пространств.
5. Сформулируйте определение линейного подпространства.
6. Необходимое и достаточное условие того, чтобы подмножество линейного пространства было подпространством.
7. Что называется размерностью линейного пространства?
8. В каком случае пространство является бесконечномерным?
9. В каком случае пространство является конечномерным?
10. Дайте определение базиса в линейном пространстве.
11. Что называется координатами вектора в выбранном базисе?
12. Чему равны координаты суммы векторов?
13. Чему равны координаты разности векторов?
14. В каком случае два вектора равны друг другу?

15. Как изменятся координаты вектора при умножении вектора на число?

16. Что называется скалярным произведением векторов в линейном пространстве?

17. Сформулируйте определение евклидова пространства.

18. Что называется длиной вектора в евклидовом пространстве?

19. Что называется углом между векторами в евклидовом пространстве?

20. Сформулируйте неравенство Коши-Буняковского.

21. Неравенство треугольника.

22. Какая система векторов называется ортонормированной?

23. Алгоритм ортогонализации системы линейно независимых векторов.

24. Запись скалярного произведения векторов в матричной форме.

25. Какова связь между координатами вектора в старом базисе и координатами вектора в новом, если матрицей перехода от старого базиса к новому является матрица Р?

26. Какова связь между координатами вектора в новом базисе и координатами вектора в старом, если матрицей перехода от старого базиса к новому является матрица Р?

27. Какая матрица называется контргадиентной к матрице P?

Задания для самостоятельного решения

1. Являются ли действительными линейными пространствами следующие множества чисел с обычными операциями сложения и умножения:

а) $\mathbf{Z}$ – множество всех целых чисел;

б) $\mathbf{Q}$ – множество всех рациональных чисел;

в) $\mathbf{R}$ – множество всех действительных чисел?

2. Являются ли действительными линейными пространствами множества свободных векторов, если сложение векторов и умножение на число определяются правилами векторной алгебры:

а) V_1 – множество всех векторов, параллельных заданной прямой;

б) V_2 – множество всех векторов, параллельных заданной плоскости;

в) V_3 – множество всех векторов, не параллельных заданной прямой?

3. Являются ли действительными линейными пространствами множества матриц с обычными операциями сложения и умножение на число? В случае положительного ответа укажите какой-либо базис.

а) множество всех матриц;

б) множество всех прямоугольных $m \times n$ матриц с действительными элементами;

в) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} | \alpha, \beta, \gamma \epsilon R\right\}$;

г) $\left\{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} | \alpha, \beta \epsilon R\right\}$.

4. Над функциями $f(x)$ и $g(x)$ определены операции сложения и умножения на число по обычным правилам. Выяснить, являются ли линейными пространствами множества функций:

а) множество всех многочленов степени не более, чем n, дополненное нулевым многочленом;

б) множество всех многочленов степени n;

в) множество всех многочленов, удовлетворяющих условию $f(0) = 1$;

г) множество всех многочленов, удовлетворяющих условию $f(0) = 0$;

д) множество всех непрерывных на отрезке $[a; b]$ функций;

е) множество всех разрывных на отрезке $[a; b]$ функций;

ж) множество всех интегрируемых на отрезке $[a; b]$ функций.

5. Исследовать, являются ли данные векторы (функции) линейно зависимыми. В случае положительного ответа найти нетривиальную линейную комбинацию, равную нулю:

а) $\{5; 3; 1\}, \{1; 1; 1\}, \{1; 4; 2\}$;

б) $\{1; 2; 5\}, \{5; 3; 1\}, \{-15; -2; 21\}$;

в) $x^2 + 5, x^2 - 4x + 3, x^2 + 16x + 13$;

г) $z_1 = 2 + 5i, z_2 = 1 - i, z_3 = 6 + 29i$;

д) $\sin x, \cos x, \sin 2x$;

е) $\sin x, \sin(x + 2), \cos(x - 5)$.

6. Найти матрицу перехода от базиса e_1, e_2, e_3 к базису a, b, c и матрицу перехода от базиса a, b, c к базису e_1, e_2, e_3, если:

а) $a = e_1 + e_2 + e_3$, $b = e_3$, $c = e_1 + 2e_2 + 3e_3$;

б) $a = 2e_1 + 2e_3$, b$= 3e_3 - e_2$, $c = 3e_1 + e_3$.

7. Найти координаты вектора x в базисе e_1, e_2, если $e'_1 = 2e_1 + +3e_2$, $e'_2 = e_2 - e_1$, $x = e'_1 - 3e'_2$.

8. Найти координаты вектора x в базисе e'_1, e'_2, если $e'_1 = e_1 + +3e_2$, $e'_2 = e_1 - e_2$, $x = 2e_1 - 5e_2$.

9. Даны два базиса: e_1, e_2, e_3 и e'_1, e'_2, e'_3. Найти координаты вектора x в базисе e'_1, e'_2, e'_3, если:

а) $e'_1 = e_1 + e_2 + e_3$, $e'_2 = 3e_1 + 4e_3$, $e'_3 = e_3$, $x = 3e_1 - 2e_2 + +e_3$;

б) $e'_1 = 2e_1 + 2e_2 + e_3$, $e'_2 = -2e_1 + e_2 + 2e_3$, $e'_3 = = e_1 - 2e_2 + 2e_3$, $x = 2e_1 + 2e_2 + e_3$.

10. Найти матрицу перехода от базиса a_1, a_2 к базису b_1, b_2 по указанныморазложениям этих векторов в базисе e_1, e_2:

а) $a_1 = e_1 + 4e_2$, $a_2 = 3e_1 + 5e_2$, $b_1 = 7e_1 + e_2$, $b_2 = e_2$;

б) $a_1 = e_1 - e_2$, $a_2 = 2e_1 + 5e_2$, $b_1 = 2e_1 - 3e_2$, $b_2 = 5e_2 - 3e_1$.

11. Записать матрицу перехода от базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$ к базису $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$, найдите координаты векторов a и b в этих базисах, если:

а) $e_1 = i - j$, $e_2 = 2i + j$, $e'_1 = 5i - 2j$, $e'_2 = -5i - 4j$, $a = 10i - j$, $b = 2i$;

б) $e_1 = \{1; 2; 1\}$, $e_2 = \{2; 3; 3\}$, $e_3 = \{3; 7; 1\}$, $e'_1 = \{3; 1; 4\}$, $e'_2 = \{5; 2; 1\}$, $e'_3 = \{1; 1; -6\}$, $a = \{9; 4; -1\}$;

в) $e_1 = 1$, $e_2 = x$, $e_3 = x^2$, $e'_1 = 2$, $e'_2 = x - 1$, $e'_3 = (x-1)^2$, $a = 6x^2 - 4x + 5$, $b = 3x^3 - 5x^2 + 4x - 2$.

12. Является ли евклидовым пространство R^2, если паре векторов $x = \{x_1; x_2\}$, $y = \{y_1; y_2\}$ поставлено в соответствие число:

а) $x_1y_1 + x_2y_2$; б) $x_1x_2y_1y_2$?

13. В пространстве $C_{[a;b]}$ всех непрерывных на отрезке $[a; b]$ функций скалярное произведение задано формулой:

$$(f, g) = \int_a^b f(x)\, g(x) dx.$$

Найти:

а) длину вектора $\sin x + \cos x$, если $a = -\pi, b = \pi$;

б) скалярное произведение векторов x и e^x;

в) угол между векторами $\sin x$ и $\cos x$, если $a = -\pi, b = \pi$.

14. Являются ли ортогональными в евклидовом пространстве следующие системы векторов:

а) $\{0; 1; 0\}, \{-6; 0; 4\}$;

б) $\{1; 1; 3\}, \{-1; -2; 1\}, \{7; -4; -1\}$;

в) $\{2; 1; -1\}, \{-1; 2; 0\}, \{0,1,1\}$?

15. Какие из данных систем векторов являются ортогональными в евклидовом пространстве $C_{[-1;1]}$:

а) $1, x^2$; б) x^2, x^3;

в) $1, \sin\pi x, \cos\pi x, \sin 2\pi x, \cos 2\pi x, \dots, \sin n\pi x, \cos n\pi x$?

16. Построить ортонормированную систему векторов по линейно независимой системе:

а) $\vec{x}_1 = \{3; 4\}, \vec{x}_2 = \{-1; 2\}$;

б) $\vec{x}_1 = \{1; 2; 3\}, \vec{x}_2 = \{0; 2; 0\}, \vec{x}_3 = \{0; 0; 3\}$;

в) $\vec{x}_1 = \{1; 2; 3\}, \vec{x}_2 = \{0; 3; -2\}, \vec{x}_3 = \{0; 1; -1\}$.

8. ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

8.1. Линейные преобразования: определения и примеры

Определение 8.1. Закон A, по которому каждому вектору $\vec{x}$, принадлежащему линейному пространству R, ставится в соответствие вектор $\vec{x}'$, принадлежащий тому же пространству, называется *преобразованием линейного пространства* R. Этот закон символически записывают в виде:

$$\vec{x}' = A\vec{x}$$

Определение 8.2. Преобразование A называется *линейным*, если для любых векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ линейного пространства R и любого числа λ справедливы равенства:

$$A(\vec{x} + \vec{y}) = A(\vec{x}) + A(\vec{y}),$$

$$(\lambda\vec{x}) = \lambda A(\vec{x}).$$

Итак, пусть задано линейное преобразование A:

$$\vec{y} = A\vec{x} \tag{8.1}$$

Найдем матрицу линейного преобразования A в выбранном базисе.

Запишем разложения векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ по некоторому базису $\{\vec{e}_i\}$:

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\vec{e}_i$$

$$\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + \dots + y_n\vec{e}_n = \sum_{j=1}^{n} y_j\vec{e}_j$$

Подставив полученные разложения в (8.1) и используя свойство линейности, получаем:

$$\sum_{j=1}^{n} y_j \vec{e}_j = A \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^{n} x_i A\, \vec{e}_i.$$

Разложим образы базисных векторов $\vec{e}_i$ по базису $\{\vec{e}_i\}$:

$$A\vec{e}_1 = a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + \cdots + a_{n1}\vec{e}_n = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\vec{e}_j$$

$$A\vec{e}_2 = a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + \cdots + a_{n2}\vec{e}_n = \sum_{j=1}^{n} a_{2j}\vec{e}_j$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A\vec{e}_n = a_{1n}\vec{e}_1 + a_{2n}\vec{e}_2 + \cdots + a_{nn}\vec{e}_n = \sum_{j=1}^{n} a_{nj}\vec{e}_j$$

Таким образом,

$$\sum_{j=1}^{n} y_j \vec{e}_j = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\vec{e}_j$$

Изменив порядок суммирования, получим

$$\vec{y} = \sum_{j=1}^{n} y_j \vec{e}_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \right) \vec{e}_j$$

В силу единственности разложения вектора по данному базису окончательно имеем:

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \qquad (8.2)$$

Формула (8.2) устанавливает связь между координатами вектора и его образа и является координатным выражением линейного преобразования A.

Запишем координаты векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ в виде столбцов

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ и } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тогда связь между координатами векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ можно записать в матричной форме:

$$Y = AX \tag{8.3}$$

Матрица A, i-тый столбец которой составлен из координат вектора $A\vec{e}_i$ в базисе $\{\vec{e}_i\}$, называется матрицей линейного преобразования A в выбранном базисе.

Пример 8.1. В базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ заданы вектор $\vec{x} = \{1,2\}$ и матрица линейного преобразования $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$. Найти координаты вектора $\vec{y} = A\vec{x}$.

Решение

Воспользуемся матричной формой записи линейного преобразования:

$$Y = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+6 \\ -5+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\vec{y} = \{4,3\}$.

8.2. Действия с линейными преобразованиями

Определение 8.3. Рассмотрим два линейных преобразования $\vec{y} = A(\vec{x})$ и $\vec{z} = B\vec{x}$. Суммой преобразований A и B называется преобразование D, такое что

$$D\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$$

Если в выбранном базисе матрицы A и B имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix},$$

то матрица линейного преобразования $D = A + B$ равна

$$D = A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{nn}+b_{nn} \end{pmatrix}$$

Определение 8.4. Пусть $\vec{y} = A(\vec{x})$ – линейное преобразование, λ – произвольное число, тогда *произведением* данного линейного преобразования A *на число* λ называется преобразование $\vec{z} = B\vec{x} = \lambda(A\vec{x})$.

Преобразование B является линейным и в выбранном базисе его матрица равна

$$B = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{pmatrix}$$

Определение 8.5. Пусть $\vec{y} = A\vec{x}$ и $\vec{z} = B\vec{y}$ – два линейных преобразования *Произведением преобразований* A и B называется преобразование C, такое что

$$C\vec{x} = BA\vec{x} = \vec{z}.$$

Матрица линейного преобразования C равна произведению матриц линейных преобразований B и A

$C = BA.$

Определение 8.6. Пусть матрица A преобразования $\vec{y} = A\vec{x}$ является невырожденной. Тогда существует *обратное преобразование*

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{y},$$

матрица которого является обратной к матрице A.

Пример 8.2. Даны два линейных преобразования

$$\begin{cases} x_1 = 3y_1 + y_2 - 2y_3; \\ x_2 = 3y_3; \\ x_3 = y_1 - 2y_2; \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y_1 = z_1 - 2z_2 \\ y_2 = 2z_1 - 3z_2 + 4z_3 \\ y_3 = 3z_1 + z_2 - 2z_3 \end{cases}$$

Найти

а) линейное преобразование, выражающее x_1, x_2, x_3 через z_1, z_2, z_3;

б) линейное преобразование, выражающее z_1, z_2, z_3 через x_1, x_2, x_3.

Решение

Запишем заданые линейные преобразования в матричном виде

$$X = AY \text{ и } Y = BZ,$$

где матрицы A и B имеют вид:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Линейное преобразование, выражающее x_1, x_2, x_3 через z_1, z_2, z_3, может быть записано как произведение преобразований A и B:

$$X = AY = ABZ = DZ.$$

Матрицу D найдем как произведение матриц A и B:

$$D = AB = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -11 & 8 \\ 9 & 3 & -6 \\ -3 & 4 & -8 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, линейное преобразование, выражающее x_1, x_2, x_3 через z_1, z_2, z_3, имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 = -z_1 - 11z_2 + 8z_3; \\ x_2 = 9z_1 + 3z_2 - 6z_3; \\ x_3 = -3z_1 + 4z_2 - 8z_3; \end{cases}$$

Линейное преобразование, выражающее z_1, z_2, z_3 через x_1, x_2, x_3, является обратным к преобразованию D. Найдем матрицу D^{-1}, обратную к матрице D.

$$|D| = \begin{vmatrix} -1 & -11 & 8 \\ 9 & 3 & -6 \\ -3 & 4 & -8 \end{vmatrix} = -630,$$

$$D^{-1} = -\frac{1}{630} \begin{pmatrix} 0 & -56 & 42 \\ 90 & 32 & 66 \\ 45 & 37 & 96 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{45} & -\frac{1}{15} \\ -\frac{1}{7} & -\frac{16}{215} & -\frac{33}{215} \\ -\frac{1}{14} & -\frac{37}{630} & -\frac{16}{105} \end{pmatrix}$$

Таким образом, линейное преобразование, выражающее z_1, z_2, z_3 через x_1, x_2, x_3, имеет вид:

$$\begin{cases} z_1 = \frac{4}{45} x_2 - \frac{1}{15} x_3 \\ z_2 = -\frac{1}{7} x_1 - \frac{16}{215} x_2 - \frac{33}{215} x_3 \\ z_3 = -\frac{1}{14} x_1 - \frac{37}{630} x_2 - \frac{16}{105} x_3 \end{cases}$$

Примеры линейных преобразований

1.Ортогональные преобразования

Определение 8.7. Преобразование плоскости (пространства) f называется *ортогональным*, если для любых двух точек M и N

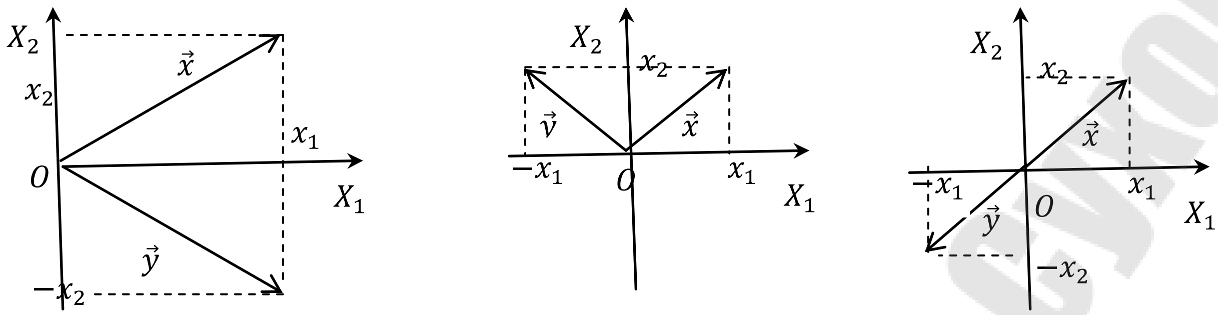
$$\rho(M, N) = \rho(f(M), f(N)),$$

где $\rho(M, N)$ – расстояние между точками.

Ортогональными линейными преобразованиями являются параллельный перенос, симметрия относительно точки, симметрия относительно оси, вращение.

Найдем матрицы преобразования некоторых из них.

а) Симметрия



Пусть $\vec{x}$ – произвольный вектор с координатами $\{x_1, x_2\}$.

Симметричный ему относительно оси OX_1 вектор $\vec{y}$ имеет координаты $\{x_1, -x_2\}$. Матрица преобразования будет иметь вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Симметричный ему относительно оси OX_2 вектор $\vec{y}$ имеет координаты $\{-x_1, x_2\}$. Матрица преобразования будет иметь вид:

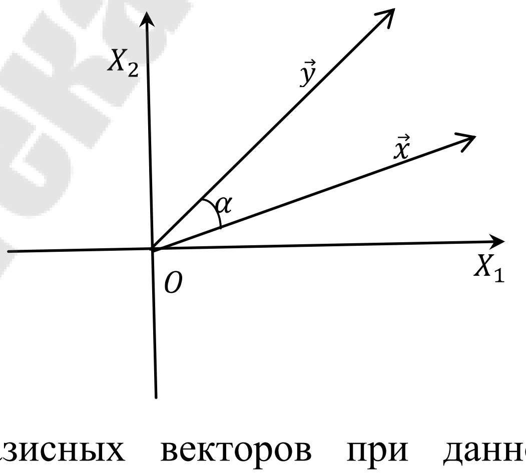
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Симметричный ему относительно начала координат вектор $\vec{y}$ имеет координаты $\{-x_1, -x_2\}$. Матрица преобразования будет иметь вид:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

б) Вращение.

Преобразование состоит в повороте вокруг начала координат на угол α.



Образами базисных векторов при данном преобразовании являются

$$A\vec{i} = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\sin\alpha$$
$$A\vec{j} = -\vec{i}\sin\alpha + \vec{j}\cos\alpha.$$

Поэтому матрица преобразования имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} cos\,\alpha & -sin\,\alpha \\ sin\,\alpha & cos\,\alpha \end{pmatrix}.$$

Таким образом, координаты вектора $\vec{y}$ выражаются через координаты вектора $\vec{x}$ как

$$\begin{cases} y_1 = cos\,\alpha\, x_1 - sin\,\alpha\, x_2 \\ y_2 = sin\,\alpha\, x_1 + cos\,\alpha\, x_2 \end{cases}.$$

2. Аффинные преобразования.

Определение 8.8. *Аффинным преобразованием* называется преобразование f, обладающее следующим свойством: если точка P лежит на отрезке MN, то $f(P)$ лежит на отрезке $f(M)f(N)$, причем

$$\frac{\rho(M,P)}{\rho(P,N)} = \frac{\rho\big(f(M), f(P)\big)}{\rho\big(f(P), f(N)\big)}.$$

Таким образом, аффинное преобразование сохраняет отношение длин параллельных отрезков. Всякое ортогональное преобразование является аффинным. Пример неортогонального аффинного преобразования – гомотетия.

Определение 8.9. *Гомотетией* называется такое преобразование плоскости (пространства), при котором для некоторой точки O $f(O) = 0$, а для все точек M, отличных от O выполняется

$$\overline{Of(M)} = \lambda \overline{OM}.$$

<u>Свойства аффинного преобразования</u>

1.Каждое аффинное преобразование имеет обратное преобразование, которое также является аффинным.

2. Пусть точки M', N', P' являются образами точек M, N, P при аффинном преобразовании f. Если $\overrightarrow{MP} = \mu\overrightarrow{MN}$, то $\overrightarrow{M'P'} = \mu\overrightarrow{M'N'}$.

3. При аффинном преобразовании прямая переходит в прямую, отрезок в отрезок.

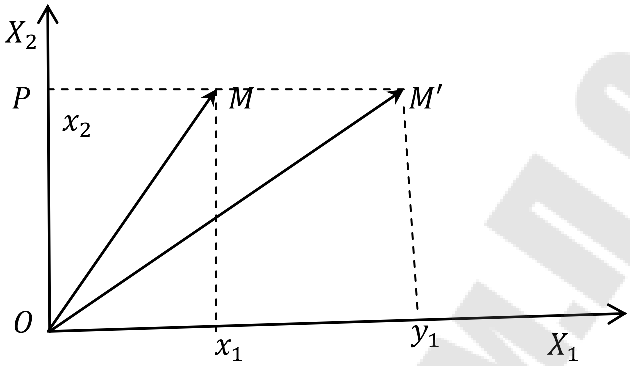
4. При аффинном преобразовании параллельные прямые переходят в параллельные, пересекающиеся прямые – в пересекающиеся.

5.Если M', N', P', L' являются образами точек M, N, P, L при аффинном преобразовании, то из равенства $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PL}$ следует $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{P'L'}$.

6. Если M', N', P', L' являются образами точек M, N, P, L при аффинном преобразовании, то из равенства $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{ML}$ следует $\overrightarrow{M'P'} = \overrightarrow{M'N'} + \overrightarrow{M'L'}$.

Пример.

Произведем растяжение в направлении оси OX_1. Это означает, что произвольному вектору $\vec{x} = \overrightarrow{OM}$ сопоставляется вектор $\vec{y} = \overrightarrow{OM'}$, такой что: если P - основание перпендикуляра, проведенного из точки M на ось OX_2, то точка M' лежит на луче PM, причем отношение $|PM'|$ к $|PM|$ равно заранее заданному коэффициенту растяжения k_1.



Из рисунка видно, что координаты вектора $\vec{y}$ есть

$$\begin{cases} y_1 = k_1 x_1 \\ y_2 = x_2 \end{cases}.$$

Таким образом, матрица данного преобразования имеет вид:

$$A_1 = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично определим растяжение вдоль оси OX_2 с коэффициентом растяжения k_2. В этом случае

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = k_2 x_2 \end{cases}$$

и матрица преобразования имеет вид

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим преобразование, которое состоит в одновременном растяжении и вдоль оси OX_1, и вдоль оси OX_2. Данное преобразование можно рассматривать как произведение рассмотренных выше. Тогда матрица преобразования имеет вид:

$$A = A_1 A_2 = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}.$$

В случае, когда $k_1 = k_2 = k$, имеет место равномерное растяжение по всем направлениям. Такое преобразование называется *подобием*. В результате преобразования подобия ни одно из направлений не смещается, а каждый вектор, отложенный от начала координат, растягивается в k раз.

8.3. Изменение матрицы преобразования при переходе к новому базису

Пусть A – матрица линейного преобразования $\vec{y} = A\vec{x}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n$.

Перейдем к новому базису $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \cdots, \vec{e}'_n$ с помощью матрицы P:

$$\begin{array}{c} \vec{e}'_1 = p_{11}\vec{e}_1 + p_{12}\vec{e}_2 + \cdots + p_{1n}\vec{e}_n \\ \vec{e}'_2 = p_{21}\vec{e}_1 + p_{22}\vec{e}_2 + \cdots + p_{2n}\vec{e}_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \vec{e}'_n = p_{n1}\vec{e}_1 + p_{n2}\vec{e}_2 + \cdots + p_{nn}\vec{e}_n \end{array}$$

Тогда в новом базисе матрица линейного преобразования имеет вид

$$\boxed{A' = B^{-1}AB,} \tag{8.4}$$

где $B = P^T$ – матрица перехода от старого базиса к новому.

Определение 8.10. Матрица $A' = B^{-1}AB$ называется матрицей, *подобной* матрице A.

Пример 8.3. Матрица линейного преобразования в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу этого преобразования в базисе $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$, если

$$\begin{cases} \vec{e}'_1 = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \\ \vec{e}'_2 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 \\ \vec{e}'_3 = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3 \end{cases}$$

Решение

Выпишем матрицу P:

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Найдем матрицу $B = P^T$ – матрицу перехода от старого базиса к новому.

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Матрица A' может быть найдена по формуле (8.4). Найдем матрицу B^{-1}.

$$|B| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 1,$$

$$B^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & -12 & 5 \\ -1 & 17 & -7 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда, согласно (8.3),

$$A' = B^{-1}AB = \begin{pmatrix} 1 & -12 & 5 \\ -1 & 17 & -7 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -85 & -59 & 18 \\ 121 & 84 & -25 \\ -13 & -9 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $A' = \begin{pmatrix} -85 & -59 & 18 \\ 121 & 84 & -25 \\ -13 & -9 & 3 \end{pmatrix}$.

8.4. Собственные векторы и собственные значения линейного преобразования

Определение 8.11. Всякий ненулевой вектор $\vec{x}$ называется *собственным вектором* линейного преобразования A, если найдется такое число λ, что будет выполняться равенство:

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}.$$

Число λ называется *собственным значением* (или *числом*) линейного преобразования A.

Свойства собственных векторов и собственных чисел:

1. Каждому собственному вектору соответствует единственное собственное значение.

Доказательство

Пусть заданному собственому вектору $\vec{x}$ соответствуют два различных значения $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Это означает, что

$$A\vec{x} = \lambda_1\vec{x}$$
$$A\vec{x} = \lambda_2\vec{x}.$$

Тогда

$$A\vec{x} - A\vec{x} = 0 = \lambda_1\vec{x} - \lambda_2\vec{x} = (\lambda_1 - \lambda_2)\vec{x}.$$

По условию $\vec{x} \neq 0$, следовательно, $(\lambda_1 - \lambda_2) = 0$, т.е. $\lambda_1 = \lambda_2$.

2. Если $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ являются собственными векторами линейного преобразования A с одним и тем же собственным числом, то их сумма также является собственным вектором с тем же самым числом.

Доказательство

По условию $A\vec{x}_1 = \lambda\vec{x}_1, A\vec{x}_2 = \lambda\vec{x}_2$. В силу линейности имеем

$$A(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = A\vec{x}_1 + A\vec{x}_2 = \lambda\vec{x}_1 + \lambda\vec{x}_2 = \lambda(\vec{x}_1 + \vec{x}_2)$$

3. Если $\vec{x}$ - собственный вектор линейного преобразования A с собственным числом λ ,то любой вектор $\alpha\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{x}$, также является собственным вектором линейного преобразования A с тем же самым собственным числом λ.

Доказательство

A является линейным преобразованием, поэтому $A(\alpha\vec{x}) = \alpha A\vec{x}$. Тогда

$$A(\alpha\vec{x}) = \alpha A\vec{x} = \alpha\,\lambda\vec{x} = \lambda(\alpha\,\vec{x})$$

4. Если собственные векторы $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n$ принадлежат попарно различным собственным числам, то они линейно независимы.

Доказательство

Докажем методом от противного. Пусть векторы $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n$ линейно зависимы, что означает

$$C_1\vec{x}_1 + C_2\vec{x}_2 + \cdots + C_n\vec{x}_n = 0$$

Не при всех $C_i = 0$ одновременно. Пусть $C_1 \neq 0$.

Применим к указанной линейной комбинации линейное преобразование A, для которого векторы $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n$ являются собственными.

$$A(C_1\vec{x}_1 + C_2\vec{x}_2 + \cdots + C_n\vec{x}_n) = C_1\lambda_1\vec{x}_1 + C_2\lambda_2\vec{x}_2 + \cdots + C_n\lambda_n\vec{x}_n = 0$$

Умножим линейную комбинация на λ_n и почленно отнимем от полученного выражения

$$C_1\lambda_1\vec{x}_1 + C_2\lambda_2\vec{x}_2 + \cdots + C_n\lambda_n\vec{x}_n = 0$$

$$-$$

$$C_1\lambda_n\vec{x}_1 + C_2\lambda_n\vec{x}_2 + \cdots + C_n\lambda_n\vec{x}_n = 0$$

Получим

$$C_1(\lambda_1 - \lambda_n)\vec{x}_1 + C_2(\lambda_2 - \lambda_n)\vec{x}_2 + \cdots + C_n(\lambda_n - \lambda_n)\vec{x}_n = 0$$

или

$$C_1(\lambda_1 - \lambda_n)\vec{x}_1 + C_2(\lambda_2 - \lambda_n)\vec{x}_2 + \cdots + C_{n-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_n)\vec{x}_{n-1} = 0$$

К полученном равенству опять применим линейное преобразование A

$$A(C_1(\lambda_1 - \lambda_n)\vec{x}_1 + C_2(\lambda_2 - \lambda_n)\vec{x}_2 + \cdots + C_{n-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_n)\vec{x}_{n-1}) =$$
$$= C_1(\lambda_1 - \lambda_n)\lambda_1\vec{x}_1 + C_2(\lambda_2 - \lambda_n)\lambda_2\vec{x}_2 + \cdots +$$
$$+C_{n-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_n)\lambda_{n-1}\vec{x}_{n-1} = 0$$

Отнимем от последнего равенство предыдущее, умноженное на λ_{n-1}. Получим

$$C_1(\lambda_1-\lambda_n)(\lambda_1-\lambda_{n-1})\vec{x}_1+C_2(\lambda_2-\lambda_n)(\lambda_2-\lambda_{n-1})\vec{x}_2+$$
$$+\cdots+C_{n-2}(\lambda_{n-2}-\lambda_n)(\lambda_{n-2}-\lambda_{n-1})\vec{x}_{n-2}=0$$

Повторив указанную процедуру $n-1$ раз, окончательно получим

$$C_1(\lambda_1-\lambda_n)(\lambda_1-\lambda_{n-1})\cdots(\lambda_1-\lambda_2)\vec{x}_1=0.$$

Так как ,по условию ,все собственные значения попарно различны и коэффициент $C_1\neq 0$ по нашему предположения, то $\vec{x}_1=0$, что противоречит условию. Следовательно, предположение о линейной зависимости собственных векторов неверно.

Отыскание собственных значений и собственных векторов матрицы линейного преобразования в выбранном базисе

Пусть матрица A является матрицей линейного преобразования A в некотором базисе.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

Тогда равенство, определяющее собственные значения и собственные векторы может быть записано в матричном виде.

$$AX=\lambda X$$

Записанное уравнение можно переписать в виде

$$AX-\lambda EX=0$$

или

$$(A-\lambda E)X=0 \qquad (8.5)$$

Матрица $(A-\lambda E)$ имеет вид

$$(A-\lambda E)=\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda\end{pmatrix}$$

Перейдя к координатной записи равенства (8.4), получаем:

$$\begin{cases}(a_{11}-\lambda)x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\ a_{21}x_1+(a_{22}-\lambda)x_2+\cdots a_{2n}x_n=0\\ \cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+(a_{nn}-\lambda)x_n=0\end{cases} \qquad (8.6)$$

Полученная однородная система линейных уравнений будет иметь отличные от нуля решения только в случае, когда определитель системы равен нулю, т.е.

$$\Delta(A-\lambda E)=|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0 \qquad (8.7)$$

Мы получили уравнение n-ой степени относительно λ, которое называется характеристическим уравнением матрицы A. Полученное уравнение имеет n корней, среди которых могут быть действительные и комплексные, простые и кратные.

Координаты собственного вектора, соответствующего корню λ_i, находим, подставив λ_i в систему.

Пример 8.4. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение

Запишем характеристическое уравнение матрицы A согласно (8.7):

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -2 \\ 1 & -\lambda & 3 \\ 1 & 3 & -\lambda \end{vmatrix}=0.$$

Разложим определитель по элементам первого столбца:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -2 \\ 1 & -\lambda & 3 \\ 1 & 3 & -\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 3 \\ 3 & -\lambda \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -\lambda \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -\lambda & 3 \end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 3 \\ 3 & -\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)(\lambda^2-9)=0$$

Характеристическое уравнение имеет три корня

$$\lambda_1=1; \lambda_2=3; \lambda_3=-3,$$

Которые являются собственными значениями матрицы A.

Для отыскания собственных векторов составим систему

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1+2x_2-2x_3=0 \\ x_1-\lambda x_2+3x_3=0 \\ x_1+3x_2-\lambda x_3=0 \end{cases}$$

При $\lambda_1=1$ получаем систему

$$\begin{cases} 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

откуда $x_2 = x_3; x_1 = -2x_2$. В частности, при $x_2 = 1$, получаем собственный вектор $\vec{x}_1 = \{-2; 1; 1\}$

При $\lambda_2 = 3$:

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Получаем $x_2 = x_3; x_1 = 0$. При $x_2 = 1$, получаем собственный вектор $\vec{x}_2 = \{0; 1; 1\}$

При $\lambda_3 = -3$:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Получаем $7x_1 = -6x_2$; $5x_1 = 6x_3$. Полагая $x_1 = 6$, получаем собственный вектор $\vec{x}_3 = \{6; -7; 5\}$

Ответ: $\lambda_1 = 1, \vec{x}_1 = \{-2; 1; 1\}; \lambda_2 = 3, \vec{x}_2 = \{0; 1; 1\};$ $\lambda_3 = -3, \vec{x}_3 = \{6; -7; 5\}$.

8.5. Приведение матрицы преобразования к диагональному виду

Теорема 8.1. Матрица линейного преобразования A в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n$ имеет диагональный вид тогда и только тогда, когда все векторы базиса являются собственными векторами преобразования.

Доказательство

Если вектор $\vec{e}_i$ является собственным для преобразования A, то

$$A\vec{e}_i = \lambda_i \vec{e}_i.$$

Следовательно, образы вектора $\vec{e}_i$ имеют единственную отличную от нуля координату λ_i:

$$A\vec{e}_i = \{0,0, \cdots, \lambda_i, \cdots, 0\}.$$

Согласно определению матрицы линейного преобразования в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n$ i-ый столбец матрицы составлен из координат вектора $A\vec{e}_i$, т.е. матрица A в выбранном базисе имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

т.е. является диагональной.

Если матрица линейного преобразования A в выбранном базисе диагональна, т.е. имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

то, согласно определению, ее -ый столбец составлен из координат образа i-го базисного вектора:

$$A\vec{e}_i = \{0,0,\cdots,\lambda_i,\cdots,0\} = \lambda_i\{0,0,\cdots,1,\cdots,0\} = \lambda_i\vec{e}_i,$$

Таким образом, векторы $\vec{e}_i$ являются собственными векторами линейного преобразования.

Теорема полностью доказана.

Из доказанной теоремы следует, что если все корни характеристического многочлена линейного преобразования A вещественны и различны, то существует матрица B с определителем, отличным от нуля, такая, что матрица $B^{-1}AB$- диагональна. Матрица B- матрица перехода к координатам в базисе, векторы которого являются собственными для матрицы A.

Пример 8.5. Привести матрицу $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ к диагональному виду. Найти матрицу B, приводящую заданную матрицу к диагональному виду.

Решение

Найдем собственные значения матрицы A. Составим характеристическое уравнение согласно (8.7):

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(-1-\lambda) + 6 = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2.$

Таким образом, матрица A может быть приведена к виду

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдем собственные вектора, которые соответствуют полученным значениям. Для этого решим систему

$$\begin{cases} (4-\lambda)x_1 - 2x_2 = 0 \\ 3x_1 + (-1-\lambda)x_2 = 0 \end{cases}$$

Для $\lambda_1 = 1$

$$\begin{cases} (4-1)x_1 - 2x_2 = 0 \\ 3x_1 + (-1-1)x_2 = 0 \end{cases}$$

Получаем собственный вектор $\vec{u}_1 = \{2,3\}$.

Для $\lambda_2 = 2$

$$\begin{cases} (4-2)x_1 - 2x_2 = 0 \\ 3x_1 + (-1-2)x_2 = 0 \end{cases}$$

Получаем собственный вектор $\vec{u}_2 = \{1,1\}$.

Построим матрицу B, столбцами в которой являются координаты собственных векторов

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Сделаем проверку.

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1$$

Тогда

$$B^{-1} = -\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = A'.$$

Ответ: $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Теорема 8.2. Характеристический многочлен матрицы линейного преобразования не зависит от выбора базиса.

Доказательство

Пусть A и A' – матрицы линейного преобразования в различных базисах. Они связаны соотношением (8.4):

$$A' = B^{-1}AB\ ,$$

где матрица B – матрица перехода от старых координат к новым.

Для единичной матрицы имеем

$$E = B^{-1}EB.$$

Тогда

$$A' - \lambda E = B^{-1}AB - \lambda B^{-1}EB = B^{-1}(AB - \lambda E)B.$$

Характеристический многочлен в новом базисе имеет вид:

$$\Delta(A' - \lambda E)$$

Воспользовавшись тем, что определитель произведения равен произведению определителей, получаем

$$\Delta(A' - \lambda E) = \Delta(B^{-1}(AB - \lambda E)B) = \Delta(B^{-1})\Delta(A - \lambda E)\Delta(B)$$

$$\Delta(B^{-1})\Delta(B) = \Delta(B^{-1}B) = \Delta(E) = 1.$$

Следовательно,

$$\Delta(A' - \lambda E) = \Delta(A - \lambda E)$$

и теорема доказана.

Из теоремы следует, что характеристический многочлен матрицы A можно называть характеристическим многочленом линейного преобразования A.

8.6. Симметрические преобразования

Определение 8.12. Линейное преобразование A называется *симметрическим*, если для произвольных векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ справедливо равенство

$$(\vec{x}, A\vec{y}) = (\vec{y}, A\vec{x}).$$

Определение 8.13. Матрица называется *симметрической*, если ее матричные элементы удовлетворяют условию

$$a_{ij} = a_{ji}.$$

Теорема 8.3. Для того чтобы линейное преобразование A было симметрическим необходимо и достаточно, чтобы матрица преобразования в ортонормированном базисе была симметрической.

Доказательство

Необходимость: Запишем разложения для образов базисных векторов

$$A\vec{e}_i = a_{1i}\vec{e}_1 + a_{2i}\vec{e}_2 + \cdots + a_{ji}\vec{e}_j + \cdots + a_{ni}\vec{e}_n = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\vec{e}_j$$

$$A\vec{e}_j = a_{1j}\vec{e}_1 + a_{2j}\vec{e}_2 + \cdots + a_{ij}\vec{e}_i + \cdots + a_{nj}\vec{e}_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\vec{e}_i$$

Умножим скалярно обе части первого равенства на $\vec{e}_j$, а второго – на $\vec{e}_i$. Принимая во внимание, что

$$(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \begin{cases} 0, \vec{e}_i \neq \vec{e}_j \\ 1, \vec{e}_i = \vec{e}_j \end{cases},$$

Получаем

$$(\vec{e}_j, A\vec{e}_i) = a_{ji}; (\vec{e}_i, A\vec{e}_j) = a_{ij}.$$

По условию линейное преобразование A является симметрическим, поэтому

$$(\vec{e}_j, A\vec{e}_i) = (\vec{e}_i, A\vec{e}_j),$$

следовательно, $a_{ji} = a_{ij}$, т.е. матрица A является симметрической.

Достаточность: Матрица A является симметрической, поэтому $a_{ji} = a_{ij}$.

Тогда для двух произвольных векторов имеем

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\vec{e}_i$$

$$\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + \dots + y_n\vec{e}_n = \sum_{j=1}^{n} y_j\vec{e}_{j.}$$

Поэтому

$$A\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i A\vec{e}_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\vec{e}_j = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji}\, x_i\right)\vec{e}_j$$

$$A\vec{y} = \sum_{j=1}^{n} y_j A\vec{e}_j = \sum_{j=1}^{n} y_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\vec{e}_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, y_j\right)\vec{e}_i$$

Найдем скалярные произведения $(\vec{x}, A\vec{y})$ и $(\vec{y}, A\vec{x})$:

$$(\vec{x}, A\vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, y_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_i y_j$$

$$(\vec{y}, A\vec{x}) = \sum_{j=1}^{n} y_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji}\, x_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ji}\, x_i y_j$$

Так как $a_{ji} = a_{ij}$, получаем

$$(\vec{x}, A\vec{y}) = (\vec{y}, A\vec{x}),$$

что и доказывает, что преобразование является симметрическим.

Свойства симметрическихпреобразований

1. Все собственные значения симметрической матрицы вещественны.

Доказательство

Рассмотрим произведение $X^T A\bar{X}$, где $\bar{X}$ – столбец, комплексно-сопряженный к X, X^{T} – матрица строка, поэтому произведение $X^T A\bar{X}$ является матрицей первого порядка, т.е. числом.

Воспользуемся ассоциативностью произведения:

$$X^T A\bar{X} = X^T(A\bar{X})$$

$$X^T A\bar{X} = (X^T A)\bar{X}$$

Матрица A – вещественная, симметрическая матрица, поэтому $(A\bar{X}) = (\overline{AX})$, $A = A^T$. Поэтому

$$X^T A\bar{X} = X^T(A\bar{X}) = X^T(\overline{AX})$$
$$X^T A\bar{X} = (X^T A)\bar{X} = (AX)^T\bar{X}$$

Но $AX = \lambda X$. Значит

$$(\overline{AX}) = (\overline{\lambda X}) = \bar{\lambda}\bar{X}$$
$$(AX)^T = (\lambda X)^T = \lambda X^T$$

Тогда

$$X^T A\bar{X} = X^T(A\bar{X}) = X^T(\overline{AX}) = X^T\,\bar{\lambda}\bar{X}$$
$$X^T A\bar{X} = (X^T A)\bar{X} = (AX)^T\bar{X} = \lambda X^T\bar{X}$$

2. Все собственные значения симметрической матрицы вещественны.

Доказательство

Рассмотрим произведение $X^T A\bar{X}$, где $\bar{X}$ – столбец, комплексно-сопряженный к X, X^T – матрица строка, поэтому произведение $X^T A\bar{X}$ является матрицей первого порядка, т.е. числом.

Воспользуемся ассоциативностью произведения

$$X^T A\bar{X} = X^T(A\bar{X})$$
$$X^T A\bar{X} = (X^T A)\bar{X}$$

Матрица A – вещественная, симметрическая матрица, поэтому $(A\bar{X}) = (\overline{AX})$, $A = A^T$. Поэтому

$$X^T A\bar{X} = X^T(A\bar{X}) = X^T(\overline{AX})$$
$$X^T A\bar{X} = (X^T A)\bar{X} = (AX)^T\bar{X}$$

Но $AX = \lambda X$. Значит

$$(\overline{AX}) = (\overline{\lambda X}) = \bar{\lambda}\bar{X}$$
$$(AX)^T = (\lambda X)^T = \lambda X^T$$

Тогда

$$X^T A\bar{X} = X^T(A\bar{X}) = X^T(\overline{AX}) = X^T\,\bar{\lambda}\bar{X}$$
$$X^T A\bar{X} = (X^T A)\bar{X} = (AX)^T\bar{X} = \lambda X^T\bar{X}.$$

Таким образом, получаем

$$\bar{\lambda}(X^T\,\bar{X}) = \lambda(X^T\bar{X}),$$

откуда $\bar{\lambda} = \lambda$, что означает,что λ – вещественное число.

3. Собственные векторы симметрической матрицы, отвечающие различным собственным числам, ортогональны.

Доказательство

Пусть λ_1 и λ_2 – различные собственные значения, *а* $\vec{x}_1$ *и* $\vec{x}_2$ – соответствующие им собственные векторы: $A\vec{x}_1 = \lambda_1\vec{x}_1$ *и* $A\vec{x}_2 = \lambda_2\vec{x}_2$.

Преобразование является симметрическим, поэтому

$$(A\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{x}_1, A\vec{x}_2) \Rightarrow (\lambda_1\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \lambda_1,$$

откуда

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = 0$$

Так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то $(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = 0$, что означает, что векторы $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ ортогональны.

4. Если матрица A – симметрическая и вещественная, а матрица B – ортогональна, подобная матрица $B^{-1}AB$ – симметрическая и вещественная.

   Доказательство

   Необходимо доказать, что $(B^{-1}AB)^T = B^{-1}AB$.

$$(B^{-1}AB)^T = (AB)^T(B^{-1})^T = B^T A^T (B^{-1})^T.$$

   По условию B – ортогональна, что означает $B^{-1} = B^T$,

   A – симметрическая , т.е. $A = A^T$. Поэтому

$$(B^{-1}AB)^T = B^T A^T (B^{-1})^T = B^{-1}AB.$$

Пусть в трехмерном евклидовом пространстве имеется ортонормированный базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Рассмотрим симметрическое линейное преобразование A.

1. Предположим, что для данного линейного преобразования существуют три собственных вектора $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ с соответствующими собственными числами $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Построим из этих векторов единичные векторы

$$\vec{e}'_1 = \frac{\vec{u}_1}{|\vec{u}_1|}, \vec{e}'_2 = \frac{\vec{u}_2}{|\vec{u}_2|}, \vec{e}'_3 = \frac{\vec{u}_3}{|\vec{u}_3|}.$$

Постоенные векторы также являются собственными для A и образуют ортонормированный базис. Поэтому в новом базисе матрица A диагональна.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Так как старый и новый базисы являются ортонормированными, то переход от одного базиса к другому задается ортогональной матрицей $P^T = B$.

2. Среди корней характеристического уравнения есть кратные. Пусть $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$.

Возьмем произвольный вектор $\vec{u}$ в плоскости α, перпендикулярной вектору $\vec{u}_1$. Вектор $\vec{u}$ перпендикулярен $\vec{u}_1$. Пусть $\vec{u}' = A\vec{u}$. Тогда

$$(\vec{u}_1, \vec{u}') = (\vec{u}_1, A\vec{u}) = (\vec{u}, A\vec{u}_1) = (\vec{u}, \lambda_1\vec{u}_1) = \lambda_1(\vec{u}, \vec{u}_1) = 0.$$

Отсюда следует, что вектор $\vec{u}'$ перпендикулярен вектору $\vec{u}_1$, т.е. вектор $\vec{u}'$ лежит в плоскости α. Таким образом, любой вектор плоскости α можно рассматривать как собственный вектор, соответствующий собственном числу λ. Следовательно векторы $\vec{u}_1$ и два ортогональных вектора $\vec{u}_2$ и $\vec{u}_3$, принадлежащие плоскости α , образуют тройку попарно перпендикулярных собственных векторов симметрического преобразования A.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

3. Все корни характеристического уравнения совпадают $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$. В этом случае A является преобразованием подобия. В этом случае любой вектор, отложенный от начала координат является собственным вектором преобразования подобия. Следовательно, любые три попарно перпендикулярные вектора являются собственными векторами преобразования *A:*

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Таким образом мы доказали, что ***каждое симметрическое линейное преобразование А в пространстве имеет, по крайней мере, одну тройку попарно перпендикулярных векторов.***

Пример 8.6. В ортонормированном базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ задано линейное преобразование

$$y_1 = 2x_1 + x_3$$
$$y_2 = x_2$$
$$y_3 = x_1 + 2x_3$$

Найти новый ортонормированный базис, в котором матрица преобразования будет диагональной.

Решение

Матрица преобразования в заданном базисе

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

является симметрической.

Найдем ее собственные значения. Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Найдем собственные значения матрицы A.

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda) - (1-\lambda) =$$

$$= (1-\lambda)((2-\lambda)^2 - 1) = (1-\lambda)(3-\lambda)(1-\lambda) = 0$$

Корнями данного уравнения являются $\lambda_1 = 3$ и $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Найдем собственные векторы, соответствующие $\lambda_1 = 3$ и $\lambda_2 = 1$.

Для этого необходимо решить систему

$$\begin{cases} (2-\lambda)x_1 + x_3 = 0 \\ (1-\lambda)x_2 = 0 \\ x_1 + (2-\lambda)x_3 = 0 \end{cases}$$

Для $\lambda_1 = 3$ имеем

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 = 0 \\ -2x_2 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$x_1 = x_3, x_2 = 0$$

Положив $x_1 = 1$, получим собственный вектор $\vec{u}_1 = \{1,0,1\}$. Нормируя этот вектор, получим

$$\vec{e}'_1 = \frac{\vec{u}_1}{|\vec{u}_1|} = \frac{\{1,0,1\}}{\sqrt{1+0+1}} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}.$$

Для $\lambda_2 = 1$ имеем

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ 0 \cdot x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$x_1 = -x_3$, x_2 – любое число.

Положив $x_1 = 1$,а $x_2 = 0$ получим собственный вектор $\vec{u}_2 = \{1,0,-1\}$. Нормируя этот вектор, получим

$$\vec{e}'_2 = \frac{\vec{u}_2}{|\vec{u}_2|} = \frac{\{1,0,-1\}}{\sqrt{1+0+1}} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}.$$

Третий вектор найдем как результат векторного произведения $\vec{e}'_1$ на $\vec{e}'_2$:

$$\vec{e}'_3 = \vec{e}'_1 \times \vec{e}'_2 = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = -\vec{e}_2 \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = \vec{e}_2 = \{0,1,0\}.$$

Таким образом, в базисе $\vec{e}'_1$, $\vec{e}'_2, \vec{e}'_3$ матрица симметрического преобразования имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

8.7. Квадратичные формы

Определение 8.14. *Квадратичной формой* от n переменных $x_1, x_2, \cdots, x_n$ называется однородный многочлен второй степени от этих переменных

$$\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j,$$

где $a_{ij} = a_{ji}$.

Квадратичную форму можно переписать в виде

$$\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right)$$

Запишем коэффициенты квадратичной формы в виде симметрической матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Определение 8.15. Симметрическая матрица A, составленная из коэффициентов квадратичной формы, называется *матрицей квадратичной формы*.

Если переменные $x_1, x_2, \cdots, x_n$ записать в виде столбца

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

то квадратичная форма может быть записана в виде

$$\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X^T AX. \tag{8.8}$$

Введем в n-мерном пространстве произвольную систему координат. Будем рассматривать переменные $x_1, x_2, \cdots, x_n$ как координаты точки M в этой системе. Тогда $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ есть значение квадратичной формы в точке M.

Перейдем к новой системе координат. «Старые» координаты $x_1, x_2, \cdots, x_n$ связаны с «новыми» $y_1, y_2, \cdots, y_n$ следующим образом:

$$\begin{cases} x_1 = p_{11}y_1 + p_{21}y_2 + \cdots + p_{n1}y_n \\ x_2 = p_{12}y_1 + p_{22}y_2 + \cdots + p_{n2}y_n \\ \cdots \\ x_n = p_{1n}y_1 + p_{2n}y_2 + \cdots + p_{nn}y_n \end{cases}$$

Преобразование координат в матричной форме запишем как

$$X = BY,$$

где B – неособенная матрица с элементами p_{ij}.

Тогда

$$X^T AX = (BY)^T ABY = Y^T (B^T AB)Y.$$

Таким образом, получим

$$\varphi(y_1, y_2, \cdots, y_n) = Y^T (B^T AB)Y.$$

Поэтому в «новых» координатах матрица квадратичной формы может быть найдена как

$$A' = B^T AB.$$

Квадратичная форма вида

$$\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$$

называется *квадратической формой канонического вида*.

Матрица квадратической формы канонического вида является диагональной, поэтому для приведения произвольной квадратичной формы

$$\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

к каноническому виду необходимо найти собственные числа λ_i матрицы квадратичной формы. Числа λ_i называются *собственными числами* квадратичной формы. Направления собственных векторов, соответствующих собственным числам квадратичной формы, называются *главными направлениями* квадратичной формы.

Пример 8.7. Приведите к каноническому виду квадратичную форму.

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 5x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2$$

Укажите, главные направления квадратичной формы. Найдите формулы перехода к новым переменным.

Решение

Запишем матрицу квадратичной формы, учитывая, что

$$a_{12} = a_{21}, a_{13} = a_{31}, a_{23} = a_{32}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем собственные числа матрицы A.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)(5-\lambda)(1-\lambda) + 6 - 9(5-\lambda) - 2(1-\lambda) =$$

$$= (5-\lambda)((1-\lambda)^2 - 9) - 2(1-\lambda-3) =$$

$$= (5-\lambda)(4-\lambda)(-2-\lambda) - 2(-2-\lambda) =$$

$$= (-2-\lambda)\big((5-\lambda)(4-\lambda) - 2\big) = -(2+\lambda)(\lambda^2 - 9\lambda + 18) =$$

$$= -(2+\lambda)(\lambda-3)(\lambda-6) = 0.$$

Таким образом, собственными числами матрицы A являются числа

$$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 6.$$

Квадратичная форма примет канонический вид

$$\varphi(y_1, y_2, y_3) = -2y_1^2 + 3y_2^2 + 6y_3^2.$$

Найдем главные направления квадратичной формы. Они являются собственными для матрицы A. Для этого решим систему

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + (5-\lambda)x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + (1-\lambda)x_3 = 0 \end{cases}$$

Для $\lambda_1 = -2$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 7x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Одним из решений системы является $\{1, 0, -1\}$.

Для $\lambda_2 = 3$ имеем:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases},$$

откуда $\begin{cases} x_2 + 3x_3 = 2x_1 \\ 2x_2 + x_3 = -x_1 \end{cases}.$

Решим систему по формулам Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2x_1 & 3 \\ -x_1 & 1 \end{vmatrix} = 5x_1, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2x_1 \\ 2 & -x_1 \end{vmatrix} = -5x_1.$$

Следовательно,

$$x_2 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{5x_1}{-5} = -x_1; x_3 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-5x_1}{-5} = x_1.$$

Положив $x_1 = 1$, получаем решение $\{1, -1, 1\}$.

Для $\lambda_3 = 6$ имеем:

$$\begin{cases} -5x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -5x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4x_1 + 4x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = 2x_1 \end{cases}$$

Положив $x_1 = 1$, получаем решение $\{1,2,1\}$.

Таким образом, в качестве собственных направлений квадратичной формы выберем векторы

$$\begin{cases} \vec{u}_1 = \{1,0,-1\} \\ \vec{u}_2 = \{1,-1,1\} \\ \vec{u}_3 = \{1,2,1\} \end{cases}$$

Найдем связь «старых» координат с «новыми». Векторы $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ образуют новый базис. Матрица перехода к новому базису имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Координаты x_1, x_2, x_3 выражаются через новые y_1, y_2, y_3 как

$$X = P^T Y, P^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + y_2 + y_3 \\ -y_2 + 2y_3 \\ -y_1 + y_2 + y_3 \end{pmatrix}$$

Таким образом, для приведения заданной квадратичной формы к каноническому виду необходимо сделать замену переменных по формулам:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 + y_3 \\ x_2 = -y_2 + 2y_3 \\ x_3 = -y_1 + y_2 + y_3 \end{cases}$$

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение линейного преобразования.
2. Что из себя представляет матрица линейного преобразования в выбранном базисе?
3. Запишите линейное преобразование в матричной форме.
4. Что называется суммой линейных преобразований?
5. Чему равна матрица суммы линейных преобразований?
6. Как изменится матрица линейного преобразования при умножении на число?
7. Чему равна матрица произведения линейных преобразований?
8. Что называется обратным преобразованием? Чему равна его матрица?
9. Как изменится матрица линейного преобразования при переходе к новому базису?
10. Какие линейны преобразования называются ортогональными? Приведите примеры.
11. Какие линейные преобразования называются аффинными? Приведите примеры.
12. Свойства аффинных преобразований.
13. Дайте определение собственных чисел и собственных векторов линейного преобразования.
14. Свойства собственных чисел и собственных векторов линейного преобразования.
15. Сформулируйте алгоритм отыскания собственных значений и собственных векторов матрицы линейного преобразования.
16. Что называется характеристическим многочленом матрицы?
17. Зависит ли характеристический многочлен матрицы от выбранного базиса?
18. Какая матрица называется подобной заданной матрице A?
19. Какая матрица называется симметрической?
20. Какое преобразование называется симметрическим.

21. Необходимое и достаточное условие того, чтобы линейное преобразование было симметрическим?

22. Свойства симметрических преобразований.

23. Сформулируйте алгоритм приведения матрицы к диагональному виду.

24. Дайте определение квадратичной формы.

25. Что называется матрицей квадратичной формы?

26. Какая квадратичная форма называется квадратичной формой канонического вида?

27. Сформулируйте алгоритм приведения канонической формы к каноническому виду.

28. Что называется главными направлениями квадратичной формы?

Задания для самостоятельного решения

1. Является ли линейным каждое из преобразований $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, заданное следующим образом:

а) $f(x) = 3x$; б) $f(x) = 2^x$; в) $f(x) = 2x + 5$?

2. Доказать, что матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ определяет линейное преобразование двумерного векторного пространства на плоскости как зеркальное отражение относительно биссектрисы $y = x$.

3. Записать матрицу зеркального отражения векторов плоскости xOy относительно прямой $y = -x$.

4. Выяснить, какие из указанных отображений $f: V_3 \to V_3$, где V_3 – пространство свободных векторов, являются линейными преобразованиями. Найти матрицы линейных преобразований в базисе $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$. Каждое преобразование описывается своим действием на произвольный вектор $\overline{x} = x_1\overline{i} + x_2\overline{j} + x_3\,\overline{k}$:

а) $f(\overline{x}) = 0$;

б) $f(\overline{x}) = \overline{x} + \overline{i}$;

в) $f(\overline{x}) = (\overline{a}, \overline{x})\overline{x}$, где $\overline{a} = 2\overline{i} + \overline{j} + 3\overline{k}$;

г) $f(\overline{x}) = (\overline{a}, \overline{x})\overline{a}$, где $\overline{a} = 2\overline{i} + \overline{j} + 3\overline{k}$;

д) $f(\overline{x}) = \overline{x} \times \overline{a}$, где $\overline{a} = 2\overline{i} + \overline{j} + 3\overline{k}$;

е) $f(\overline{x}) = x_1\overline{i}$;

ж) $f(\overline{x}) = x_1\overline{i} + x_2\overline{j}$.

Указать геометрический смысл преобразований е) и ж).

5. В базисе $\overline{e}_1, \overline{e}_2$, ($\overline{e}_3$) заданы вектор $\overline{x}$ и матрица A линейного преобразования. Найти координаты вектора $\overline{y} = A\overline{x}$:

а) $\overline{x} = \{1; 2\}$, $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$;

б) $\overline{x} = 2\overline{e}_1 - \overline{e}_2 + 3\,\overline{e}_3$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

6. Выяснить, существует ли линейное преобразование двумерного пространства, переводящее векторы $\overline{a}_1, \overline{a}_2$ соответственно в векторы $\overline{b}_1, \overline{b}_2$, и найти матрицу этого преобразования в базисе $\overline{e}_1, \overline{e}_2$, если $\overline{a}_1 = \overline{e}_1 + 2\overline{e}_2$, $\overline{a}_2 = 3\overline{e}_1 - \overline{e}_2$, $\overline{b}_1 = 6\overline{e}_1 + 9\overline{e}_2$, $\overline{b}_2 = 11\overline{e}_1 - 8\overline{e}_2$.

7. Выяснить, существует ли линейное преобразование трехмерного пространства, переводящее векторы $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$ соответственно в векторы $\overline{b}_1, \overline{b}_2, \overline{b}_3$ и найти матрицу этого преобразования в том же базисе, в котором даны координаты всех векторов, если:

а) $\overline{a}_1 = \{2; 3; 5\}$, $\overline{a}_2 = \{0; 1; 2\}$, $\overline{a}_3 = \{1; 0; 0\}$, $\overline{b}_1 = \{1; 1; 1\}$, $\overline{b}_2 = \{1; 1; -1\}$, $\overline{b}_3 = \{2; 1; 2\}$;

б) $\overline{a}_1 = \{1; 2; 0\}$, $\overline{a}_2 = \{1; 1; 1\}$, $\overline{a}_3 = \{2; 3; 1\}$, $\overline{b}_1 = \{1; 1; 1\}$, $\overline{b}_2 = \{1; 1; 0\}$, $\overline{b}_3 = \{1; 0; 0\}$.

8. Даны два линейных преобразования

$$\begin{cases} x_1 = 3y_1 + y_2 - 2y_3 \\ x_2 = 3y_3 \\ x_3 = y_1 - 2y_2 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y_1 = z_1 - 2z_2 \\ y_2 = 2z_1 - 3z_2 + 4z_3 \\ y_3 = 3z_1 + z_2 - 2z_3 \end{cases}$$

Найти линейное преобразование, выражающее x_1, x_2, x_3 через z_1, z_2, z_3.

9. Даны два линейных преобразования

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - 2y_2 + 3y_3 \\ x_2 = 2y_1 + y_2 - 2y_3 \\ x_3 = y_1 - y_3 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y_1 = 2z_1 - z_2 \\ y_2 = z_1 + z_2 - z_3 \\ y_3 = 3z_1 - 2z_2 + 4z_3 \end{cases}$$

Найти линейное преобразование, выражающее z_1, z_2, z_3 через x_1, x_2, x_3.

10. Дано линейное преобразование

$$\begin{cases} x_1 = 3y_1 + y_2 - 5y_3, \\ x_2 = y_1 + 2y_2 - 4y_3, \\ x_3 = 3y_1 + 2y_2 - y_3. \end{cases}$$

Найти обратное преобразование.

11. Даны два базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ и $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \overrightarrow{e'}_n$ линейного пространства и матрица A линейного преобразования в базисе $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$. Найти матрицу этого оператора в базисе $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \overrightarrow{e'}_n$, если:

а) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\overline{e}'_1 = \overline{e}_1 + \overline{e}_2$, $\overline{e}'_2 = \overline{e}_1 - \overline{e}_2$;

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, $\overline{e}'_1 = 3\overline{e}_1 - 2\overline{e}_2$, $\overline{e}'_2 = 2\overline{e}_1 - \overline{e}_2$;

в) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\overline{e}'_1 = \overline{e}_1 + \overline{e}_2$, $\overline{e}'_2 = \overline{e}_1 + \overline{e}_3$, $\overline{e}'_3 = \overline{e}_2 + \overline{e}_3$;

г) $A = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$, $\overline{e}'_1 = 2\overline{e}_1 + 3\overline{e}_2 + \overline{e}_3$, $\overline{e}'_2 = 3\overline{e}_1 + 4\overline{e}_2 +$ $+\overline{e}_3$, $\overline{e}'_3 = \overline{e}_1 + 2\overline{e}_2 + 2\overline{e}_3$.

12. Найти собственные значения и собственные векторы линейных преобразований вещественного линейного пространства, заданных матрицами:

а) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$;

г) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 3 & -4 & -3 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

13. Выяснить, приводится ли в вещественном пространстве матрица к диагональному виду (в случае приводимости записать диагональный вид матрицы с точностью до диагональных элементов:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

14. В некотором базисе $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ линейный оператор f задан матрицей A. В вещественном линейном пространстве найти базис, в котором матрица оператора f имеет диагональный вид, если:

а) $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; г) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 6 \\ -4 & -4 & -8 \end{pmatrix}$.

15. Найти ортогональную матрицу, диагонализирующую симметрическую матрицу A , и записать диагональный вид этой матрицы, если:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; в) $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

16. Найти ортогональное преобрзование, приводящее к каноническому виду заданную квадратичную форму, и записать соответствующий канонический вид квадратичной формы, если:

а) $\varphi(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2$;

б) $\varphi(x_1, x_2) = x_1^2 + 2\sqrt{6}x_1x_2 + 2x_2^2$;

в) $\varphi(x_1, x_2) = 2x_1x_2$;

г) $\varphi(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$;

д) $\varphi(x_1, x_2, x_3) = 7x_1^2 + 7x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;

е) $\varphi(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3$;

ж) $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

9. ГРУППЫ, КОЛЬЦА, ПОЛЯ

9.1. Прямое произведение множеств

Определение 9.1. Пусть $A_1, A_2, \cdots A_n$ – одинаковые или различные, конечные или бесконечные множества. *Прямым произведением* этих множеств $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ называется множество, состоящее из всвозможных элементов вида $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$, где $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \cdots, a_n \in A_n$.

Пример 9.1. Рассмотрим множество всех действительных чисел $\mathbb{R}$. Тогда прямое произведение $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ будет представлять из себя множество всех возможных троек чисел (a_1, a_2, a_3). Элементы полученного прямого произведения можно рассматривать как декартовы координаты точки в трехмерном пространстве.

Пример 9.2. Рассмотрим множество состоящее из цифр $N = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Тогда любое вещественное n-значное число можно рассматривать как элемент множества, образованного n кратным произведением множества N на само себя:

$$\underbrace{\overline{ab\cdots}}_{n} = N \times N \times \cdots \times N.$$

Пример 9.3. Любое комплексное число можно представить в показательной форме как

$$z = |z|e^{i\varphi}, |z| \in (0;\infty), \varphi \in [0;2\pi).$$

Тогда любое ненулевое комплексное число можно представить как элемент прямого произведения $A_1 \times A_2$, где

$$A_1 = (0;\infty), A_2 = [0;2\pi).$$

Операция прямого произведения $\times$ не является коммутативной

$$A_1 \times A_2 \neq A_2 \times A_1.$$

Операция прямого произведения $\times$ не является ассоциативной

$$A_1 \times (A_2 \times A_3) \neq (A_1 \times A_2) \times A_3.$$

Операция прямого произведения $\times$ является дистрибутивной относительно пересечения и объединения множеств:

$$A \times (B_1 \cap B_2) = (A \times B_1) \cap (A \times B_2);$$
$$A \times (B_1 \cup B_2) = (A \times B_1) \cup (A \times B_2).$$

Лемма 9.1. Обозначим через m_i – число элементов в множестве A_i. Тогда $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ содержит $m_1 \cdot m_2 \cdot \cdots \cdot m_n$ элементов.

9.2. Отношение эквивалентности

Определение 9.2. Пусть задано подмножество T прямого произведения $A \times A$. Говорят, что элементы a, b множества A *находятся в отношении* T, если (a, b) из $A \times A$ содержится в T.

То, что элементы a, b множества A находятся в отношении T, записывается как aTb.

- Отношение T на множестве A называется *рефлексивным*, если

$$aTa, \forall a \in A.$$

- Отношение T на множестве A *симметрично*, если из aTb следует bTa для всех $a, b \in A$.
- Отношение T на множестве A называется *транзитивным* из отношений aTb и bTc следует отношение aTc.

Отношение, которое одновременно является рефлексивным, симметричным и транзитивным, называется *отношением эквивалентности*.

Пример 9.3. На множестве $\mathbb{R}$ отношение "$\leq$" является рефлексивным: $a \leq a$; является транзитивным: из $a \leq b$ и $b \leq c$ следует $a \leq c$; не является симметричным, т.к. из $a \leq b$ не следует $b \leq a$. Поэтому отношение "$\leq$" не является отношением эквивалентности.

Пример 9.4. Отношение "$=$", очевидно, обладает всеми тремя свойствами ($a = a$; из $a = b$ и $b = c$ следует $a = c$; из $a = b$ следует $b = a$). Поэтому равенство является отношением эквивалентности.

Пример 9.5. Отношение подобия на множестве треугольников удовлетворяет всем трем свойствам, поэтому является отношением эквивалентности.

Определение 9.3. Пусть T – отношение эквивалентности на множестве A, a- некоторый элемент, принадлежащий множеству A. Подмножество K_a множества A, состоящее из всех элементов $x \in A$, для которых xTa, называется *классом эквивалентности* отношения T, а элемент a – представителем этого класса.

Теорема 9.1. Пусть T – отношение эквивалентности на множестве A. Если aTb, то классы эквивалентности K_a и K_b совпадают. В противном случае, они не пересекаются.

Доказательство

Пусть $x \in K_a$, что означает xTa. Кроме того, aTb. Тогда, в силу свойств симметричности и транзитивности, имеем xTb. Получаем, что $x \in K_b$, следовательно, $K_a \subset K_b$. С другой стороны, пусть $y \in K_b$, т.е. yTb. Тогда, в силу свойств симметричности и транзитивности, имеем yTa. Получаем, что $y \in K_a$, следовательно, $K_b \subset K_a$. Поэтому K_a и K_b совпадают.

Пусть пересечение K_a и K_b не пусто. Пусть $c = K_a \cap K_b$. Тогда cTa и cTb, откуда, в силу свойст симметричности и транзитивности aTb. Следовательно $K_a = K_b$.Теорема доказана.

Следствие. Множество A с отношением эквивалентности T является объединением непересекающихся классов эквивалентности.

Определение 9.4. Множество всех различных классов эквивалентности, отвечающих отношению эквивалентности T на множестве A, называется фактор-множеством множества A по отношению эквивалентности T и обозначается как A/T.

Пример 9.6. Пусть $\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел, а отношение T означает: «aTb, если $|a| = |b|$». Классы эквивалентности K_a – все комплексные числа, имеющие одинаковый модуль. На плоскости это окружности данного радиуса. Фактор-множеством $\mathbb{C}/T$ является множество всех концентрических окружностей, включая окружность нулевого радиуса.

9.3. Бинарные операции

Определение 9.5. Пусть задано произвольное множество A. Отображение прямого произведения $A \times A$ в множество A называется *бинарной операцией*.

Если $\varphi: A \times A \to A$ – бинарная операция на A, то каждой упорядоченной паре (a, b) элементов множества A соответствует определенный элемент $c = \varphi(a, b)$. Бинарную операцию обычно обозначают одним из символов $+$; $\cdot$; $\circ$; $\otimes$, и т.д. Если вместо φ условимся писать $\circ$, то вместо $c = \varphi(a, b)$ будем писать $c = a \circ b$.

Определение 9.6.Операция $\circ$ на множестве A называется *ассоциативной*, если

$$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c, \forall a, b, c \in A.$$

Определение 9.7.Операция $\circ$ на множестве A называется *коммутативной*, если

$$a \circ b = b \circ a, \forall a, b \in A.$$

Определение 9.8. Элемент e из множества A называтся *нейтральным*, если

$$a \circ e = e \circ a = a, \forall a \in A.$$

Определение 9.9. Элемент a' называтся *обратным* к элементу a, если

$$a \circ a' = a' \circ a = e.$$

Чаще всего используют две формы записи для операции $\circ$: мультипликативную и аддитивную.

При *мультипликативной* форме записи операция $\circ$ называется *умножением* и записывается как

$a \circ b = ab$.

При *аддитивной* форме записи операция $\circ$ называется *сложением* и записывается как

$a \circ b = a + b$.

При мультипликативной форме записи операции $\circ$ нейтральный элемент называется *единичным*, обратный элемент обозначается a^{-1} и справедливо равенство

$$a\,a^{-1} = a^{-1}a = e = 1.$$

При аддитивной форме записи операции $\circ$ нейтральный элемент называется *нулевым*, обратный элемент называется *противоположным* и обозначается $-a$. При этом справедливо равенство:

$$a + (-a) = -a + a = e = 0.$$

В таблице приведена связь между мультипликативной и аддитивной формами записи бинарной операции

	Мультипликативная форма записи	Аддитивная форма записи
Название	умножение	сложение
Обозначение	ab $\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 a_2 \cdots a_n$	$a + b$ $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$
Нейтральный элемент	Единичный элемент $ae = ea = a$	Нулевой элемент $a + 0 = 0 + a = a$
Обратный элемент	a^{-1} $a\,a^{-1} = a^{-1}a = e = 1$	Противоположный элемент $-a$ $a + (-a) = -a + a = 0$
Ассоциативность	$a(bc) = (ab)c$	$a + (b + c) = (a + b) + c$
Коммутативность	$ab = ba$	$a + b = b + a$

9.4 Группы

Определение 9.10. Множество G с бинарной операций $\circ$ называется *группой* если

1) операция определена на G, т.е. $a \circ b \in G\ \forall a, b \in G$;

2) операция $\circ$ ассоциативна;

3) в G существует нейтральный элемент e;

4) для любого $a \in G$ существует обратный элемент a', такой что $a \circ a' = a' \circ a = e$.

Если, кроме того, операция $\circ$ коммутативна, то группа называется *коммутативной* или *абелевой.*

Если множество G, являющееся группой, конечно, то G называется *конечной* группой, а число $|G|$ – порядком группы G.

Примеры групп

1. Множество $\mathbb{Z}$ целых чисел относительно сложения.

- *Сумма целых чисел является целым числом:* $a + b \in \mathbb{Z}$
- *Операция сложения ассоциативна:*

$a+(b+c)=(a+b)+c;$

- *Нейтральным элементом является* 0*:*

$$a+0=0+a=a;$$

- *Существует обратный элемент* $-a$*:*

$$a+(-a)=(-a)+a=0;$$

Операция сложения коммутативна $a+b=b+a$, поэтому группа является абелевой.

2. Множество ненулевых рациональных чисел относительно умножения.

- *Произведение рациональных чисел является рациональным числом*
- *Операция умножения ассоциативна:* $a(bc)=(ab)c;$
- *Нейтральным элементом является 1:*$a\cdot 1=1\cdot a=a;$
- *Существует обратный элемент* $\frac{1}{a}$*:* $a\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{a}\cdot a=1;$

Операция умножения коммутативна $ab=ba$, поэтому группа является абелевой.

3. Множество из четырех комплексных чисел $\{1,-1,i,-i\}$ – абелева группа относительно умножения.

Действительно,

$1\cdot 1\cdot(-1)=-1;$	$-1\cdot(-i)=1;$
$1\cdot(-i)=-i;$	$1\cdot i=i;$
$-1\cdot i=i;$	$i\cdot(-i)=1.$

- *Произведение ассоциативно*
- *Нейтральным элементом является 1;*
- *Существует обратный элемент: для* 1 *это* 1*;для* -1 *это* -1 *для* i *обратным является* $-i$.

4. Множество квадратных невырожденных матриц порядка n.

- *Произведение квадратных матриц порядка* n *является матрицей порядка* n*:* $A_{n\times n}\cdot B_{n\times n}=C_{n\times n}$.
- *Произведение матриц ассоциативно:* $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$.
- *Нейтральным элементом являтся единичная матрица* n*-го порядка*

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}$$

- *Матрицы невырождены, поэтому для каждой из них существует единственная обратная матрица A^{-1}:*

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

Произведение матриц некоммутативно, поэтому группа неабелева.

5. Множество функций

$$\left\{f_1(x) = x, f_2(x) = -x, f_3(x) = \frac{1}{x}, f_4(x) = -\frac{1}{x}\right\}$$

с операций умножения является абелевой группой 4-го порядка

Составим таблицу умножения функций

	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4
f_2	f_2	f_1	f_4	f_3
f_3	f_3	f_4	f_1	f_2
f_4	f_4	f_3	f_2	f_1

Результат произведения $f_i f_j$ находится на пересечении i-й строки и j-го столбца.

Например:

$$f_3 f_4 : x \underset{f_3}{\mapsto} \frac{1}{x} \underset{f_4}{\mapsto} -x = f_2$$

- *Из таблицы видно, что $f_i f_j$ является одной из заданных функций*
- *Произведение отображений ассоциативно*
- *Нейтральным элементом является функция f_1*
- *Обратный элемент определим как $f_i^{-1} = f_i$.*

Таким образом, указанное множество является абелевой группой.

6. Группа перестановок.

Пусть $X = \{1, 2, \cdots, n\}$. Взаимно однозначное отображение X на само себя называется *перестановкой* степени n. Множество всех перестановок степени n обозначим через S_n. Перестановка $\tau \in S_n$ может быть записана в виде двустрочной таблицы, в которой перечислены образы всех элементов:

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix},$$

где $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\} = X$; $\tau: 1 \mapsto a_1, 2 \mapsto a_2, \cdots, n \mapsto a_n$.

Тождественное преобразование $\varepsilon = \varepsilon_X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$ *является взаимно однозначным и принадлежит S_n.*

Произведение перестановок δ и τ определено как произведение отображений:

$$\delta\tau(i) = \delta\big(\tau(i)\big).$$

Операция умножения перестановок ассоциативна.

Всего возможно $n!$ перестановок из n элементов.

Таким образом, множество всех перестановок S_n образует конечную группу с единичным элементом $\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$.

В случае мультипликативной группы произведение элемента a на самого себя n раз будем обозначать как a^n и называть -ой степенью a.

Тогда справедливы следующие соотношения

$$a^{n+m} = a^n a^m; (a^n)^m = a^{nm};\ n, m \in \mathbb{N}$$

$$(ab)^n = a^n b^n; \forall n \in \mathbb{N}$$

<u>Свойства мультипликативных групп</u>

1. Пусть G - группа с нейтральным элементом e. Тогда этот элемент единственный нейтральный элемент в группе. Кроме того, каждый элемент группы обладает единственным обратным элементом.

Доказательство

Предположим, что некоторый элемент с множества G также являтся нейтральным. Тогда $ce = e; ec = c$. Но $ce = ec$, следовательно, $c = e$.

Пусть b является обратным элементом а наряду с $a^{'}$.

Тогда

$$b = be = b(aa^{'}) = (ba)a^{'} = ea^{'} = a^{'}.$$

Мы доказали, что обратный элемент – единственный.

2. $(a^{-1})^{-1} = a$ и $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{1}$ для любых $a, b \in G$

Доказательство

Первое из равенств очевидно.

Для второго имеем

$$ab(b^{-1}a^{-1}) = a(bb^{-1})a^{-1} = aea^{-1} = aa^{-1} = e$$

$$(b^{-1}a^{-1})ab = b^{-1}(aa^{-1})b = b^{-1}eb = b^{-1}b = e$$

Таким образом, доказано, что $b^{-1}a^{-1}$ являтся обратным элементом для ab.

Определим отрицательные степени элементов группы как обратные положительным степеням:

$$a^n = (a^n)^{-1}$$

3. $(a^s)^{-1} = (a^{-1})^s = a^{-s}$ для любых $a \in G$ и любых целых чисел s.

Доказательство

1. Если $s > 0$, то
$(a^s)^{-1} = (aa \cdots a)^{-1} = a^{-1}a^{-1} \cdots a^{-1} = (a^{-1})^s = a^{-s}$;

2. Если $s = 0$, то $(a^s)^{-1} = e = (a^{-1})^s = a^{-s}$;

3. Если $s < 0$, то $(a^s)^{-1} = \left(\left(a^{|s|}\right)^{-1}\right)^{-1} = a^{|s|} = a^{-s}$.

4. Для любых целых s и t справедливы равенства

$$a^s a^t = a^{s+t}; (a^s)^t = a^{st}$$

Доказательство

Если s и t оба больше нуля, то эти соотношения очевидны.

Если $s < 0$ и $t < 0$, то

$$a^s a^t = a^{-|s|} a^{-|t|} = (a^{-1})^{|s|} (a^{-1})^{|t|} = (a^{-1})^{|s|+|t|} = a^{-|s|+|t|} = a^{s+t};$$

$$(a^s)^t = \left(a^{-|s|}\right)^t = \left((a^{-1})^{|s|}\right)^t = \left(\left(a^{|s|}\right)^{-1}\right)^t = \left(a^{|s|}\right)^{-t} = \left(a^{|s|}\right)^{|t|} =$$
$$= a^{|s||t|} = a^{st}.$$

Остальные случаи доказываются аналогично.

5. В группе G уравнения $ax = b$ и $yc = d$ имеют единственные решения

$x = a^{-1}b$ и $y = dc^{-1}$.

Доказательство

$$a(a^{-1}b) = (aa^{-1})b = eb = b.$$

Следовательно, $x = a^{-1}b$ являетя решением уравнения $ax = b$.

Если t является произвольным решением уравнения $ax = b$, тогда

$$t = et = (a^{-1}a)t = a^{-1}(at) = a^{-1}b.$$

Аналогично для второго уравнения:

$$(dc^{-1})c = d(c^{-1}c) = de = d.$$

Следовательно, $y = dc^{-1}$ является решением уравнения $yc = d$.

Если w является произвольным решением уравнения $yc = d$, то

$$w = we = w(cc^{-1}) = (wc)c^{-1} = dc^{-1}.$$

Аналогичные свойства можно доказать и для аддитивных групп, используя связь мультипликативной и аддитивной операций, приведенную в таблице.

Мультипликативная запись	Аддитивная запись
Степень a^n при $n > 0$ $a^n = \underbrace{aa \cdots a}_{n}$	Кратное na при $n > 0$ $na = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{n}$

Степень a^n при $n < 0$ $a^n = \underbrace{a^{-1}a^{-1}\cdots a^{-1}}_{n}$	Кратное na при $\mathrm{n} < 0$ $na = \underbrace{(-a) + (-a) + \cdots + (-a)}_{n}$
$a^n = e$ при $n = 0$	$na = 0$ при $n = 0$
$a^n a^m = a^{n+m}$	$na + ma = (n + m)a$
$(a^n)^m = a^{nm}$	$m(na) = (mn)a$
$(ab)^n = a^n b^n$, если $ab = ba$	$n(a + b) = na + nb$, если $a + b = b + a$

9.5. Подгруппы

Определение 9.11. *Подгруппой* H группы G называется подмножество группы G, которое само является группой относительно бинарной операции, заданной в G.

Лемма 9.1. Для того чтобы подмножество H было подгруппой группы G, необходимо и достаточно, чтобы

1) $ab \in H, \forall a, b \in H$;
2) Для любого элемента $\forall a \in H$ обратный элемент $a^{-1} \in H$.

Замечание. Два указанных выше условия могут быть заменены одним:

$$ab^{-1} \in H, \forall a, b \in H.$$

В случае аддитивной группы это условие будет иметь вид

$$a - b \in H, \forall a, b \in H.$$

Лемма 9.2. Пересечение любого числа подгрупп, также является подгруппой.

Примеры подгрупп.

1. Сама группа G является подгруппой. Подмножество группы G состоящее из одного нейтрального элемента является подгруппой. Указанные группы называются *тривиальными.*

2. Множество всех целых чисел, кратных заданному целому числу, является подгруппой группы целых чисел относительно сложения.

Пусть $m, n, k \in \mathbb{Z}$. Числа km и kn принадлежат рассматриваемому множеству. Тогда, $km - kn = k(m - n)$ также принадлежит множеству целых чисел, кратных заданному числу k. Следовательно, указанное подмножество является подгруппой группы целых чисел относительно сложения.

3. Числа $\{1, -1\}$ образуют подгруппу в группе ненулевых рациональных чисел относительно умножения.

4. Невырожденные квадратные матрицы -го порядка с определителем, равным 1, образуют подгруппу группы невырожденных квадратных матриц n-го порядка.

9.6. Изоморфизм

Определение 9.12. Пусть заданы две группы $(G_1,\cdot)$ и $(G_2,*)$, а f – отображение множества G_1 на множество G_2. Отображение f называется *гомоморфизмом* группы G_1 в группу G_2, если для любых $a, b \in G_1$ имеет место равенство

$$f(a \cdot b) = f(a) * f(b).$$

Если кроме того, отображение f биективно, то f называется *изоморфизмом* G_1 на G_2 и записывается как $G_1 \cong G_2$.

<u>*Свойства изоморфизма*</u>:

Пусть $f: G_1 \to G_2$ - изоморфизм группы G_1 на G_2.

1. Если e – нейтральный элемент группы G_1, то $f(e)$ – нейтральный элемент группы G_2.
2. Если a^{-1} является обратным элементом к элементу $a \in G_1$, то $f(a^{-1})$ является обратным элементом для элемента $f(a)$ в группе G_2.
3. Обратное отображение $f^{-1}: G_2 \to G_1$ является изоморфизмом, т.е. если $G_1 \cong G_2$, то $G_2 \cong G_1$.
4. Если $G_1 \cong G_2$ и $G_2 \cong G_3$, то $G_1 \cong G_3$.
5. Отношение «быть изоморфными группами» является отношением эквивалентности.

На основании определения и перечисленных свойств можно утверждать, что с абстрактной точки зрения изоморфные группы неразличимы. Можно утверждать, что все множество групп распадается на непересекающиеся классы изоморфных групп.

Примеры

1. Пусть $(\mathbb{R}, +)$ – группа вещественных чисел относительно сложения; $(\mathbb{R}^*,\cdot)$ – множество ненулевых вещественных чисел относительно умножения. Тогда отображение $f(x) = e^x$ является гомоморфизмом, поскольку $f(x + y) = e^{x+y} = e^x \cdot e^y$. Это отображение не биективно, так как отрицательное число нельзя представить в виде e^x. Однако, если в качестве второй группы рассматривать множество положительных вещественных чисел $(\mathbb{R}^+,\cdot)$, то отображение $f(x) = e^x$является взаимно однозначным. Обратным отображением является $f^{-1}(x) = \ln x$. Поэтому f – изоморфизм $(\mathbb{R}, +)$ на $(\mathbb{R}^+,\cdot)$.

2. Рассмотрим множество $G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

Найдем произведения

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G_1; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in G_1;$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in G_1; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G_1$

Все произведения принадлежат G_1.

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, следовательно $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in G_1$

Множество G_1 является группой относительно умножения.

Рассмотрим отображение $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto 1; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto -1$

Тогда $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto 1 \cdot 1; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto 1 \cdot (-1) = -1;$
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto (-1) \cdot 1 = -1; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto (-1) \cdot (-1) = 1$

Таким образом, группа G_1 изоморфна группе $G_2 = \{1, -1\}$.

3. Рассмотрим множество перестановок S_n. *Матрицей перестановки* τ назовем квадратную матрицу n-го порядка $M(\tau)$, матричные элементы которой определены как

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, i = \tau(j) \\ 0, i \neq \tau(j) \end{cases}$$

Например, для множества $S_2 = \{\varepsilon, (21)\}$

$M(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, M(12) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Для $S_3 = \{\varepsilon, (12), (13), (23), (312), (231)\}$ имеем:

$$M(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, M(12) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, M(13) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$M(23) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, M(312) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, M(231) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Множество матриц перестановок образует группу.

Группа перестановок S_n изоморфна группе матриц перестановок.

4. Операция сопряжения комплексных чисел переводит сумму в сумму, произведение в произведение. Поэтому операция комплексного сопряжения является изоморфизмом как между группами $(\mathbb{C}, +)$ и $(\mathbb{C}, +)$, так и между $(\mathbb{C}, \cdot)$ и $(\mathbb{C}, \cdot)$. Изоморфизм

группы на саму себя (с той же операцией) называется *автоморфизмом*.

9.7. Циклические группы

Пусть G – мультипликативная группа. Рассмотрим множество, состоящее из целых степеней одного и того же элемента $\{a^n\}$. Нейтральным элементом является a^0, обратным элементом $a^{-n} = (a^n)^{-1}$.

Рассмотрим отображение $f(n): \mathbb{Z} \to G$ по закону $f(n) = a^n$. Данное отображение является гомоморфизмом.

Определение 9.13. Группа, состоящая из степеней одного и того же элемента, называется *циклической* группой, *порожденной* этим элементом.

Определение 9.14. *Порядком элемента* a из группы G называется порядок конечной циклической подгруппы, порожденной этим элементом. Если же эта подгруппа изоморфна Z, то говорят, что элемент a имеет бесконечный порядок.

9.8. Смежные классы

Пусть G – мультипликативная группа. H – подгруппа группы G.

Рассмотрим отношение $a \sim b$, означающее, что $a^{-1}b \in H$. Это отношение является отношением эквивалентности.

Определение 9.15. Классы эквивалентности отношения, определенного условием $a^{-1}b \in H$ называются *левыми смежными классами* группы G по подгруппе H.

Условие $a^{-1}b \in H$ можно переписать в виде $b = ah, h \in H$ или $b \in aH$, если под aH понимать множество $\{ah |\, h \in H\}$. Левый смежный класс так и будем обозначать как aH.

Аналогично определим *правый смежный класс* Ha, используя условие $ba^{-1} \in H$ для определения отношения эквивалентности.

Определение 9.16. Классы эквивалентности отношения, определенного условием $ba^{-1} \in H$ называются *правыми смежными классами* группы G по подгруппе H.

Если группа коммутативна, то понятия левых и правых смежные классы совпадают.

Определение 9.17. *Индексом* $(G: H)$ подгруппы H в группе G называют число различных левых (равно как и правых) смежных классов по подгруппе H, если это число конечно.

Теорема 9.2. Порядок конечной группы G равен произведению порядка подгруппы H на индекс этой подгруппы в группе G, т.е.

$$|G| = |H|(G: H).$$

Определение 9.18. Подгруппа H называется *нормальной* подгупной группы G, если левый смежный класс aH и правый смежный класс Ha совпадают.

Следует заметить, что равенство $aH = Ha$ не означает, что $ah = ha$. Его следует понимать в том смысле, что в подгруппе H найдутся элементы h_1 и h_2 такие, что $ah_1 = h_2a$.

Пример 9.7. Рассмотрим группу G неврожденных квадратных матриц одного и того же порядка. H – подгруппа матриц с определителем, равным 1. Для всех матриц A как левый смежный класс AH, так и правый смежный класс HA представляют собой множество всех матриц, имеющих определенный определитель. Следовательно, $AH = HA$. Таким образом, указанная подгруппа H является нормальной.

Определение 9.19. Пусть H – подгруппа тех элементов группы G, которые коммутируют со всеми элементами группы. Такая подгруппа называется *центром* группы. Очевидно, что центр группы является нормальной подгруппой.

В группе G неврожденных квадратных матриц одного и того же порядка центром является подгруппа диагональных матриц вида cE.

Определение 9.20. Пусть f – гомоморфизм группы G_1 в группу G_2. *Ядром* гоморфизма (обозначается как $Ker\, f$) называется полный прообраз подгруппы $\{e_2\}$, состоящей из одного нейтрального элемента e_2.

Обозначим через G/H множество всех смежных классов по нормальной подгруппе H.

Определим на этом множестве операцию умножения по правилу $(aH)(bH) = (ab)H$. Необходимо проверить корректность данной операции, т.е. надо доказать, что если $a_1H = aH$ и $b_1H = bH$, то должно выполняться равенство $(a_1b_1)H = (ab)H$.

$a_1H = aH \Longrightarrow a_1 = ah_1; b_1H = bH \Longrightarrow b_1 = bh_2$ для некоторых $h_1, h_2 \in H$.

Тогда

$$a_1b_1 = ah_1bh_2 = ah_1bh'_2 = abh'_1h'_2.$$

Т.к. $h'_1, h'_2 \in H$ в силу нормальности H, то $a_1b_1 \in (ab)H$.

Аналогично доказывается, что $ab \in (a_1b_1)H$.

Таким образом, доказано: $(a_1b_1)H = (ab)H$.

Введенная нами операция ассоциативна.

Нейтральным элементом является подгруппа $eH = H$.

Обратным элементом для класса aH является класс $a^{-1}H$.

Все требования к введенной бинарной операции выполняются, поэтому множество G/H является группой.

Определение 9.21. *Факторгруппой* группы G по нормальной подгруппе H называется фактормножество G/H с введенной бинарной операцией $(aH)(bH) = (ab)H$. Факторгруппа обозначается как G/H.

Теорема 9.3. Гомоморфный образ группы изоморфен факторгруппе этой группы по ядру гомоморфизма.

Пример. Рассмотрим множество невырожденных квадратных матриц Xодного и того же порядка n. Отображение $f(X) = \det X$ является гоморфизмом группы в множество ненулевых рациональных чисел $\mathbb{R}^*$.Ядром данного гомоморфизма является подгруппа всех матриц H с определителем равным 1. Тогда, согласно теореме $G/H \cong \mathbb{R}^*$.

Пример 9.8. Рассмотрим аддитивную группу рациональных чисел $\mathbb{R}$. Положим $f(x) = e^{i2\pi x} = cos\, x + i\, sin\, x\,, \forall x \in \mathbb{R}$.Так как

$$f(x_1 + x_2) = e^{i2\pi(x_1+x_2)} = e^{i2\pi x_1}e^{i2\pi x_2} = f(x_1)f(x_2),$$

то $f(x)$ является гоморфизмом группы $\mathbb{R}$ в мультипликативную группу комплексных чисел $\mathbb{C}^*$. Ядром гоморфизма является множество целых чисел $Ker\, f = \mathbb{Z}$. Образом $f(\mathbb{R}) = \{z \in \mathbb{C}|\, |z| = 1\}$- множество комплексных чисел, лежащих на единичной окружности. Таким образом, заданная группа изоморфна факторгруппе $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

9.9. Кольца

Определение 9.21. Множество А называется *кольцом*, если на нем определены две бинарные операции: $"+"$(сложение) и $"\cdot"$ (умножение), обладающие следующими свойствами:

1) $(A, +)$ является абелевой группой;

2) умножение ассоциативно;

3) операции сложения и умножения связаны дистрибутивными законами:

$$(a + b)c = ac + bc,\ c(a + b) = ca + cb$$

для всех $a, b, c \in A$.

Определение 9.22. Абелева группа $(A, +)$ называется *аддитивной группой кольца* A. Если операция умножения в кольце обладает нейтральным элементом (его принято обозначать обычной единицей 1), то говорят, что A – *кольцо с единицей*. Если в кольце операция умножения коммутативна, то кольцо называется *коммутативным*.

Примеры

При обычных операциях сложения и умножения кольцами являются

- множества целых чисел $\mathbb{Z}$, рациональных чисел $\mathbb{Q}$, вещественных чисел $\mathbb{R}$, комплексных чисел $\mathbb{C}$;
- множество O, состоящее из одного элемента 0;
- множество $n\mathbb{Z}$, состоящее из целых чисел, кратных заданному числу n. Следует заметить, что в данном кольце отсутствует единица;
- множество комплексных чисел $m + in$, где $m, n \in \mathbb{Z}$;
- множество вещественных чисел $m + \sqrt{2}n$, где $m, n \in \mathbb{Z}$;
- множество квадратных матриц с элементами из некоторого коммутативного кольца.

Кольцом является множество пар целых чисел $\mathbb{Z}^2$, котором операции сложения и умножения определены как

$$(a, b) + (c, d) = (a + b, c + d);$$
$$(a, b) \cdot (c, d) = (a \cdot b, c \cdot d)$$

Определение 9.23. *Обратным элементом* для данного элемента a любого кольца с единицей называется такой элемент a^{-1}, который удовлетворяет условию $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$.

Элемент называется *обратимым,* если он обладает обратным элементом.

Например, среди элементов кольца $\mathbb{Z}$ обратимыми являются только два элемента, а именно, 1 и -1. Все элементы кольца $\mathbb{Q}$, за исключением 0, обратимы.

Теорема 9.4.Если в кольце один из сомножителей равен нулю, то и все произведение равно нулю.

Доказательство

Действительно, $a \cdot 0 + a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0$, откуда немедленно следует, что $a \cdot 0 = 0$ (аналогично $0 \cdot a = 0$).

Замечание. Обратное утверждение, верное для колец вещественных или комплексных чисел, не сохраняется для любых колец. В кольце $\mathbb{Z}^2 (a, 0) \cdot (0, b) = (0,0)$ при любых целых a и b.

Определение 9.24. Элементы a и b кольца, для которых $ab = 0$ или $ba = 0$, и при этом $a \neq 0$ и $b \neq 0$, называются *делителями нуля*.

Теорема 9.5. Если $ab = ac$ или $ba = ca$, то $b = c$, если $a \neq 0$ и a не является делителем нуля.

Определение 9.25. Подмножество B кольца A называется *подкольцом*, если оно само является кольцом при тех же операциях сложения и умножения, что и в кольце A.

Теорема 9.6. Для того чтобы подмножество $B \neq \emptyset$ кольца A было его подкольцом, необходимо и достаточно, чтобы разность и произведение любых двух элементов B снова принадлежала B.

9.10. Идеал

Определение 9.26. Подкольцо H коммутативного кольца A называется *идеалом*, если $a \cdot h = h \cdot a$ лежит в H при любых $a \in A$ и $h \in H$.

Пример

1.Для любого кольца A само кольцо является идеалом. Подмножество $\mathcal{O} = \{0\}$ является идеалом: $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0 \in \mathcal{O}$ при любых $a \in A$.

2.Подкольцо $n\mathbb{Z}$ является идеалом в кольце $\mathbb{Z}$. Для любого $n \cdot k \in n\mathbb{Z}$ и любого $m \in \mathbb{Z}$ имеем $(n \cdot k) \cdot m = n \cdot (k \cdot m) \in n\mathbb{Z}$.

Теорема 9.7. В кольце A множество $\{xa | x \in A\}$ – множество всех кратных фиксированного элемента $a \in A$ является идеалом в A.

Определение 9.27. Идеал кольца A, состоящий из кратных элементов a, называется главным идеалом, порожденным элементом a, и обозначается (a).

Нулевой идеал $\mathcal{O} = (0)$ всегда является главным.

Если кольцо содержит 1, то единичный идеал (1) является всем кольцом A.

Все идеалы в множестве целых чисел $\mathbb{Z}$ – главные.

Определение 9.28. Пусть $H = (h)$ – главный идеал коммутативного кольца A. Два элемента a и b кольца A называются сравнимыми по модулю (или по главному идеалу H), если их разность $a - b$ принадлежит H. При этом пишут $a \equiv b \ (mod\, h)$.

Определение 9.29. Класс смежности $a + H$ называется классом вычетов по модулю h.

Теорема 9.8. Пусть $H = (h)$ – идеал коммутативного кольца A. Множество классов вычетов по модулю h образует кольцо $A/H = A/(h)$ с операциями.

$$(a + H\ ) + (b + H) = (a + b) + H;$$
$$(a + H\ ) \cdot (b + H) = (a \cdot b) + H\ .$$

Для доказательства достаточно доказать корректность определенных операций.

Для всех $a, b \in A$ и $h_1, h_2 \in H$ имеем

$$(a + h_1) + (b + h_2) = (a + b) + (h_1 + h_2);$$

$$(a + h_1) \cdot (b + h_2) = a \cdot b + a \cdot h_2 + h_1 \cdot b + h_1 \cdot h_2.$$

$H = (h)$ –идеал, поэтому $a \cdot h_2 + h_1 \cdot b + h_1 \cdot h_2 \in H$.

Следствие. В любом коммутативном кольце, если $a_1 \equiv b_1 (mod\, h)$ и $a_2 \equiv b_2 (mod\, h)$,то $a_1 \pm a_2 \equiv b_1 \pm b_2 (mod\, h)$ и $a_1 \cdot a_2 \equiv b_1 \cdot b_2 (mod\, h)$.

Определение 9.30. Кольцо A/H называется *кольцом классов вычетов* кольца A по модулю h.

Примером кольца класса вычетов является кольцо класса вычетов целых чисел $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n$, где $n = 2,3,4,\cdots$.

Определение 9.31. Пусть A – кольцо с 1, неравное $\mathcal{O}$. Целое положительное число m назывется характеристикой кольца A, если

$$m \cdot 1 = \underbrace{1 + 1 + \cdots 1}_{m} = 0$$

и никакое положительное число, меньшее m этим свойством не обладает.

Если указанное свойство не имеет места ни для какого положительного числа, то говорят, что кольцо A имеет характеристику 0.

Кольца $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ имеют характеристику 0.

Кольцо $\mathbb{Z}_n$ имеет характеристику n.

Теорема 9.9. Характеристика любого кольца A без делителей нуля либо равна нулю, либо является простым числом.

Доказательство

Пусть характеристика m является составным натуральным числом, т.е. $m = k \cdot l$. Тогда

$$0 = m \cdot 1 = (k \cdot l) \cdot 1 = (k \cdot 1) \cdot (l \cdot 1).$$

Так как A не содержит делителей нуля, то либо $(k \cdot 1) = 0$, либо $(l \cdot 1) = 0$, что противоречит условию.

Определение 9.32. Идеал H кольца называется *простым*, если из $a \cdot b \in H$ следует, что или $a \in H$, или $b \in H$.

Теорема 9.10. Идеал H кольца A является простым тогда и только тогда, когда кольцо классов вычетов A/H не содержит делителей нуля.

Доказательство

Кольцо классов вычетов A/H не содержит делителей нуля тогда и только тогда, если из $(a+H\ )\cdot(b+H)=H$ следует, что либо $a+H=H$, либо $b+H=H$. Но это условие равносильно утверждению, что если $a\cdot b\in H$, то либо $a\in H$, либо $b\in H$.

9.11. Евклидовы кольца

Определение 9.33. *Евклидовым кольцом* называется кольцо D без делителей нуля, в котором каждому ненулевому элементу a сопоставляется целое неотрицательное число $v(a)$, называемое нормой, со следующими свойствами:

1.$v(a\cdot b)\geq v(a)$ для всех $a\neq 0$, $b\neq 0$ из D;

2.Для любых $a,b\in D$, $b\neq 0$, существует элемент $q\in D$ такой, что

$a=bq+r$, где $r=0$ или $v(r)<v(b)$.

Пример 9.9. Кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$ является евклидовым кольцом с нормой $v(n)=|n|$.

Теорема 9.11. В евклидовом кольце все идеалы главные.

Доказательство

Пусть H – ненулевой идеал евклидова кольца D. Выберем в H ненулевой элемент a с наименьшей нормой $v(a)$. Тогда любой элемент $b\in H$ можно представить как $b=aq+r$. Норма $v(a)$ – наименьшая, поэтому $v(r)<v(a)$ быть не может и, следовательно, $r=0$. Таким образом, $b=aq$, т. е. $H=(a)$.

Следствие. Любое евклидово кольцо содержит единицу.

Определение 9.34. Пусть D – любое кольцо без делителей нуля. Говорят, что a *делит* b (b делится на a), если существует элемент $c\in D$ такой, что $a\cdot c=b$ (запись: $a|b$).

Очевидно, что если $a|b$, то $b\in(a)$, следовательно $(b)\subset(a)$.

Теорема 9.12. В евклидовом кольце D любые два элемента a и b имеют наибольший общий делитель d, который представляется в виде $d=s\cdot a+t\cdot b$,где $s,t\in D$.

Доказательство

Рассмотрим множество $\{s\cdot a+t\cdot b|s,t\in D\}$.

Для любого элемента $f\in D$ $\ c\cdot(s\cdot a+t\cdot b)=s\cdot(f\cdot a)+t\cdot(f\cdot b)\in\ \{s\cdot a+t\cdot b|s,t\in D\}$, следовательно, является идеалом. Согласно доказанной выше теореме этот идел главный,т е. $\{s\cdot a+t\cdot b|s,t\in D\}=\ (d)$.Следовательно, в кольце D существуют такие числа s,t,g,h, что

$c=s\cdot a+t\cdot b, a=gc, b=hc.$

Пример 9.10. Наибольший общий делитель (НОД) в кольце целых чисел можно записать в виде равенства

$\text{НОД}(26,4) = 2 = 26 \cdot 1 + 4 \cdot (-6)$.

Определение 9.35. Необратимый элемент p евклидова кольца называется *простым*, если он допускает лишь тривиальное разложение на множители, т. е. из равенства $p = ab$ следует, что или a, или b обратимы.

Свойства деления

1. В любом евклидовом кольце $a|b$ и $b|a$ тогда и только тогда, когда $b = a \cdot u$ для некоторого обратимого элемента u.

2. Если в евклидовом кольце b делит a, но a не делит b, то $v(b) < v(a)$.

3. В евклидовом кольце любой ненулевой необратимый элемент можно разложить в произведение простых сомножителей.

4. Если произведение $a \cdot b$ делится на простой элемент p, то один из сомножителей должен делиться на p.

На основании перечисленных свойств можно сформулировать теорему

Теорема 9.13. Все элементы евклидова кольца с точностью до обратимых элементов и порядка сомножителей разлагаются в произведение простых элементов.

9.12. Поля

Определение 9.36. *Полем* называется коммутативное кольцо K, содержащее не менее двух элементов, в котором все ненулевые элементы образуют группу по умножению (мультипликативную группу K^* поля K).

Из определения немедленно следует, что поле всегда содержит единицу.

Примеры

При обычных операциях сложения и умножения полями являются

- множества рациональных чисел $\mathbb{Q}$, вещественных чисел $\mathbb{R}$, комплексных чисел $\mathbb{C}$;
- множество комплексных чисел $m + in$, где $m, n \in \mathbb{Q}$ (поле Гауссовых чисел);
- множество вещественных чисел $m + \sqrt{2}n$, где $m, n \in \mathbb{Q}$;
- множество всех алгебраических дробей (дробно-рациональных функций) от одного или нескольких неизвестных с

коэффициентами из некоторого коммутативного кольца без делителей нуля;

- множество, состоящее из двух элементов, которые обозначим 0 и 1. При этом операции сложения и умножения введем как:

$$0+0=1+1=0;$$
$$0+1=1+0=1;$$
$$0\cdot 1=1\cdot 0=0\cdot 0=0;$$
$$1\cdot 1=1$$

Теорема 9.14. Поле не имеет делителей нуля.

Доказательство

Пусть $a\cdot b=0, a\neq 0$. Тогда $a^{-1}\cdot 0=a^{-1}\cdot a\cdot b\Rightarrow b=0$.

Теорема 9.15. Всякое конечное коммутативное кольцо без делителей нуля, содержащее более одного элемента, является полем.

Произведение $a\cdot b^{-1}$ записывают в виде дроби $\frac{a}{b}$.

В любом поле $(a\cdot b)^{-1}=a^{-1}\cdot b^{-1}$и $(a^{-1})^n=a^{-n}$. Примем, что $a^{-n}=(a^n)^{-1}$ и $a^0=1$.

9.13. Кольца многочленов

Определение 9.37. *Многочленом* (или *полиномом*) от неизвестной x над кольцом A называется выражение вида

$$a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m=\sum_{k=0}^{m}a_kx^k, a_k\in A.$$

Многочлен может быть обозначен как $f(x)$, однако это не означает отображения A в A.

Определение 9.38. Наибольшее k, при котором $a_k\neq 0$, называется *степенью многочлена* и обозначается $\deg f$. Если $a_k=0$ при всех k, то $\deg f$, по определению примем равной $-\infty$.

Определим сумму и произведение многочленов естественным образом. Тогда

$$\deg(f+g)\leq max\{\deg f, \deg g\};$$
$$\deg(f\cdot g)\leq \deg f+\deg g.$$

Множество всех многочленов от переменной x с коэффициентами из кольца A будем обозначать $A[x]$.

Теорема 9.16. Операции сложения и умножения определяют на множестве $A[x]$ структуру кольца. Многочлены нулевой степени вместе с нулем образуют подкольцо констант, изоморфное кольцу A.

Теорема 9.17. Если D – кольцо без делителей нуля, то

$$\deg(f \cdot g) = \deg f + \deg g.$$

Следствие 1. Если D – кольцо без делителей нуля, то и $D[x]$ также не имеет делителей нуля.

Следствие 2. Если K – поле, то в кольце $K[x]$ обратимы только ненулевые константы, и только они.

Теорема 9.18. Для любого поля K кольцо многочленов $K[x]$ яаляется евклидовым с нормой $v(f) = \deg f$.

Определение 9.39. Многочлен $g(x)$ из кольца $K[x]$ называется *приводимым* (над полем K), если $g(x) = g_1(x) \cdot g_2(x)$ для подходящих непостоянных многочленов $g_1(x), g_2(x) \in K[x]$; в противном случае многочлен $g(x)$ называется *неприводимым.*

Является многочлен приводимым или нет зависит от поля K. Например, многочлен $x^2 + 1$ неприводим над полями $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$, но является приводимым над полем $\mathbb{C}$. Многочлен $x^2 - 2$ неприводим над полем $\mathbb{Q}$, но приводим над полем $\mathbb{R}$. Этот же многочлен неприводим над $\mathbb{Z}_3$, но является приводимым над $\mathbb{Z}_7$. В этом случае его можно представить в виде $x^2 - 2 = (x + 3)(x + 4)$.Линейные многочлены неприводимы ни над одним полем. Над полем $\mathbb{C}$ приводимы любые многочлены степени старше 1. Над полем $\mathbb{R}$ неприводимы квадратные многочлены с отрицательными дискриминантами.

Теорема 9.19. Любой непостоянный многочлен из $K[x]$ можно представить в виде произведения константы и неприводимых многочленов с единичными старшими коэффициентами. Это разложение единственно с точностью до порядка множителей.

Теорема 9.20. Кольцо классов вычетов $L = K[x]/(g(x))$по модулю неприводимого многочлена есть поле.

Доказательство

Возьмем любой $f(x)$ – представитель класса вычетов, не совпадающий с $(g(x))$. Так как $g(x)$ неприводим, то $f(x)$ и $g(x)$ взаимно просты, т.е. их НОД равен 1. Поэтому, найдутся $s(x)$ и $t(x)$ такие, что

$$s(x) \cdot f(x) + t(x) \cdot g(x) = 1.$$

Следовательно, $s(x) \cdot f(x) \equiv 1 \ (mod\ g(x)\,)$, поэтому $s(x)$ принадлежит классу, обратному классу, содержащему $f(x)$. Таким образом, все классы, кроме нулевого обратимы. Тем самым мы доказали, что $L = K[x]/(g(x))$ есть поле.

Теорема 9.21. Любое конечное поле характеристики p состоит из p^n элементов для некоторого n.

Определение 9.40. Конечные поля, состоящие из p^n элементов, называются *полями Галуа* и обозначаются $GF(p^n)$.

Можно доказать, что над полем вычетов $Z_p = GF(p^n)$ существуют неприводимые многочлены любой степени, поэтому кольца классов вычетов $Z_p/(g(x))$ по модулю неприводимых многочленов образуют конечные поля любой степени Z_p

Примеры

1.Многочлен $x^2 + x + 1$ является неприводимым над полем $Z_2 = GF(2)$, поскольку ни 0, ни 1 не являются его корнями. Построим $GF(4) = Z_2[x]/(x^2 + x + 1)$.

Пусть j означает корень $x^2 + x + 1$ в поле $GF(4)$. Тогда таблицы сложения и умножения в $GF(4)$ получим, заменяя всюду j^2 на $j + 1 = -j - 1$.

Таблица сложения:

$+$	0	1	j	$j+1$
0	0	1	j	$j+1$
1	1	0	$j+1$	j
j	j	$j+1$	0	1
$j+1$	$j+1$	j	1	0

Таблица умножения:

$\cdot$	0	1	j	$j+1$
0	0	0	0	0
1	0	1	j	$j+1$
j	0	j	$j+1$	1
$j+1$	0	$j+1$	1	j

2. Многочлен $x^3 + x^2 + 1$ является неприводимым над полем $Z_2 = GF(2)$.

Построим $GF(8) = Z_2[x]/(x^3 + x^2 + 1)$. Общий элемент $GF(8)$ запишем в виде $a_2x^2 + a_1x + a_0$ или кратко в виде тройки чисел (a_2, a_1, a_0) (a_i может принимать значения 0 или 1). Тогда таблица умножения будет иметь вид (заменяя x^3 на $x^2 + 1$)

$\cdot$	(0,0,0)	(0,0,1)	(0,1,0)	(0,1,1)	(1,0,0)	(1,0,1)	(1,1,0)	(1,1,1)
(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)
(0,0,1)	(0,0,0)	(0,0,1)	(0,1,0)	(0,1,1)	(1,0,0)	(1,0,1)	(1,1,0)	(1,1,1)
(0,1,0)	(0,0,0)	(0,1,0)	(1,0,0)	(1,1,0)	(1,0,1)	(1,1,1)	(0,0,1)	(0,1,1)

(0,1,1)	(0,0,0)	(0,1,1)	(1,0,1)	(1,0,1)	(0,0,1)	(0,1,0)	(1,1,1)	(1,0,0)
(1,0,0)	(0,0,0)	(1,0,0)	(1,0,1)	(0,0,1)	(1,1,1)	(0,1,1)	(0,1,0)	(1,1,0)
(1,0,1)	(0,0,0)	(1,0,1)	(1,1,1)	(0,1,0)	(0,1,1)	(1,1,0)	(1,0,0)	(0,0,1)
(1,1,0)	(0,0,0)	(1,1,0)	(0,0,1)	(1,1,1)	(0,1,0)	(1,0,0)	(0,1,1)	(1,0,1)
(1,1,1)	(0,0,0)	(1,1,1)	(0,1,1)	(1,0,0)	(1,1,0)	(0,0,1)	(1,0,1)	(0,1,0)

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется прямым произведением множеств?
2. Что называется отношением?
3. Какое отношение называется рефлексивным?
4. Какое отношение называется симметричным?
5. Какое отношение называется транзитивным?
6. Какое отношение называется отношением эквивалентности?
7. Что называется классом эквивалентности?
8. Сформулируйте определение фактор-множества.
9. Дайте определение бинарной операции.
10. Какая бинарная операция называется ассоциативной?
11. Какая бинарная операция называется коммутативной?
12. Дайте определение нейтрального элемента
13. Какой элемент называется обратным?
14. Запишите таблицу соответствия между мультипликативной и аддитивной формой записи бинарной операции.
15. Что называется группой?
16. Какая группа называется абелевой?
17. Приведите примеры групп.
18. Свойства мультипликативных групп.
19. Что называется подгруппой?
20. Дайте определение изоморфизма; гомоморфизма.
21. Приведите примеры изоморфизмов.
22. Дайте определение смежного класса.
23. Что называется ядром гомоморфизма?
24. Что называется факторгруппой.
25. Какая группа называется циклической?
26. Что называется порядком циклической группы?
27. Дайте определение кольца.
28. Что называется абелевой группой кольца?
29. Приведите примеры колец.
30. Что называется идеалом кольца?

31. Какой идеал называется главным идеалом, порожденным данным элементом?

32. Какие два элемента кольца называются сравнимыми по модулю h?

33. Что называется классом вычетов по модулю h?

34. Что называется характеристикой кольца?

35. Какой идеал называется простым?

36. Дайте определение евклидова кольца.

37. Как можно представить наибольший общий делитель двух элементов евклидова кольца?

38. Какой элемент евклидова кольца называется простым?

39. Какие свойства деления элементов евклидова кольца вы знаете?

40. Что называется полем?

41. Приведите примеры полей.

42. Какой многочлен называется приводимым?

43. Сформулируйте определение поля Галуа.

<u>Задания для самостоятельного решения</u>

1. Изобразить на координатной плоскости прямое произведение множеств $A \times B$, если:

а) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 5\}$; б) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = [3, 5]$;

в) $A = [1, 3]$, $B = [3, 5]$; г) $A = R$, $B = [3, 5]$;

д) $A = R$, $B = R$.

2. Установить, является ли отношение S рефлексивным, симметричным и транзитивным, если $S = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3)\}$.

3. Установить, является ли отношение R = «x взаимно просто с y», определенное на множестве $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, рефлексивным, симметричным, транзитивным.

4. На множестве дробей $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}\right\}$ задано отношение равенства. Какими свойствами обладает это отношение?

5. Отношение T = «иметь одно и то же число делителей» задано на множестве $\{1, 2, 4, 6, 7, 8, 10, 11\}$. Показать, что T – отношение эквивалентности, и записать все классы эквивалентности.

6. Установить, является ли эквивалентным отношение R = «x знаком с y», определенное на множестве студентов университета.

7. Для множества $Z_{\geq 0}$ определены подмножества $A=\{0,1\}$, $B=\{1, 2\}$, $C=\{x \mid x-\textit{простые}\}$, $D=\{x \mid x-\textit{четные}\}$, $E=\{x \mid x-\textit{нечетные}\}$, $F=\{x \mid x=2^n\}$. Указать какие из подмножеств замкнуты относительно арифметических операций: а) сложения; б) умножения.

8. Выяснить, обладают ли свойствами ассоциативности и коммутативности операции * на множестве *A*, если:

$A=N,\ x*y=x+2y$;
$A=N,\ x*y=3xy$;
$A=Z,\ x*y=x-y$;
$A=R,\ x*y=\sin x\cos y$;
$A=N,\ x*y=x^y$;
$A=N,\ x*y=\text{НОД}(x,y)$;
$A=Z,\ x*y=x^2+y^2$;
$A=R,\ x*y=x^{|y|}$.

9. Доказать, что множество положительных целых чисел вида $4k+1$, где k – неотрицательное целое число, замкнуто относительно операции умножения.

10. На множестве N определена операция $*$ следующим образом: $m*n=\text{Н.О.К.}(m,n)$. Является ли множество $(N,*)$ группой?

11. На множестве N определена операция $*$ следующим образом: $m*n=\text{Н.О.Д.}(m,n)$. Является ли множество $(N,*)$ группой?

12. На множестве Q задана операция $*$ следующим образом: $a*b=a+b-ab$. Найти $3*4;\ 5*(-3);\ \frac{2}{3}*\frac{1}{5};\ -\frac{1}{2}*1$. Установить, является ли операция ассоциативной. Существуют ли единичный элемент и обратные элементы?

13. Какие из указанных числовых множеств являются группами относительно заданных операций:

а) множество положительных действительных чисел относительно операции умножения;

б) отрезок [0;1] относительно операции умножения;

в) отрезок [0;1] относительно операции $a*b=\{a+b\}$ ($\{x\}$ – дробная часть числа x);

г) множество комплексных чисел с фиксированным модулем относительно операции умножения;

д) корни n-ой степени из единицы относительно операции умножения?

14. Какие из указанных множеств квадратных матриц фиксированного порядка образуют группу относительно операции умножения:

а) множество симметрических матриц с вещественными элементами;

б) множество невырожденных матриц с вещественными элементами;

в) множество целочисленных матриц с определителем равным ± 1;

г) множество верхних треугольных матриц с вещественными элементами;

д) множество диагональных матриц;

е) множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, где $a, b \in R,\ a^2 + b^2 \neq 0$?

15. Образует ли группу относительно сложения множество многочленов от переменного x с целыми коэффициентами: а) степени n; б) степени не более n?

16. Доказать, что числа, кратные 3, образуют подгруппу целых чисел с операцией сложения. Опишите соответствующие смежные классы этой подгруппы.

17. Составить таблицы сложения и умножения для Z_5. Вычислить $[1]\cdot[2]\cdot[3]$. Найти элемент, обратный $[3]$: а) относительно сложения; б) относительно умножения.

18. Составить таблицы сложения и умножения для Z_6. Вычислить $[1]\cdot[2]\cdot[3]$. Найти элемент, обратный $[3]$: а) относительно сложения; б) относительно умножения.

19. Докажите, что множество классов вычетов по модулю 6 образует группу относительно сложения. Будет ли оно образовывать группу относительно умножения?

20. Для симметрической группы S_3 найти порядок и составить таблицу Кэли.

21. Найти все подгруппы симметрической группы S_3.

22. Множество $G = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ образует группу с групповой операцией умножения по модулю 7: $a \circ b = ab\,(mod\,7)$. а) Составить таблицу Кэли; б) Найти 2^{-1}, 3^{-1}, 6^{-1}; в) Найти порядок и подгруппу, которая генерируется 4.

23. Доказать, что если в группе порядок каждого неединичного элемента равен двум, то она абелева.

24. Доказать, что:

а) аддитивная группа действительных чисел изоморфна мультипликативной группе положительных действительных чисел;

б) аддитивная группа рациональных чисел не изоморфна мультипликативной группе положительных рациональных чисел;

в) изоморфны любые две бесконечные циклические группы;

г) изоморфны любые две конечные циклические группы данного порядка.

25. Докажите, что множество автоморфизмов группы само является группой относительно умножения автоморфизмов как отображений.

26. Выяснить, какие из множеств являются кольцами и какие – полями относительно операций сложения и умножения:

а) множество всех целых чисел;

б) множество $mZ = \{mk \mid k \in Z\}$;

в) множества рациональных, действительных, комплексных чисел;

г) множество нечетных чисел;

д) $\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in Z\}$;

е) $\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in Q\}$;

ж) множество матриц порядка n;

з) множество всех действительных чисел относительно операций сложения $\circ$ и умножения *, заданных равенствами $a \circ b = a + b - 1,\ a * b = a + b - ab$?

Ответы

Раздел 1. **1.** $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 7 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 8 & -10 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$. **2.** $\begin{pmatrix} -2/3 & 0 \\ 2/3 & -1 \end{pmatrix}$.

3. а) нет; б) да; в) да; г) нет; д) нет; е) да. **4**. а) $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & 8 \\ 6 & -9 & 3 & 12 \\ 8 & -12 & 4 & 16 \end{pmatrix}$, (5). **5.** $\begin{pmatrix} 10 & 6 & 1 \\ 5 & 1 & 11 \end{pmatrix}$. **6**. а) $\begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 0 & 9 \\ 7 & -12 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 8 & 6 & 2 \\ 43 & 28 & -2 \\ -26 & -19 & -5 \end{pmatrix}$; в) не существует; г) $\begin{pmatrix} -7 & 33 \\ -2 & 38 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 3 & 18 & -6 \\ 10 & 21 & -7 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} -7 & 14 \\ 14 & -42 \end{pmatrix}$. **8.** а) -13; б) 7; в) -40400; г) 0. **9.** а) $5/4$; б) 0; -3.

10. а) $\begin{pmatrix} 3/8 & -1/4 \\ 1/8 & 1/4 \end{pmatrix}$;б) нет; в) $\begin{pmatrix} 14/23 & 1/23 & -11/23 \\ -7/46 & 11/46 & 1/23 \\ -19/46 & -3/46 & 6/23 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 1/d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/d_4 \end{pmatrix}$. **11.** а) -2; б) 108.

12. а) $\begin{pmatrix} 0{,}1 & -0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -1 & -0{,}5 & 4{,}5 \\ 1{,}75 & -0{,}875 & -1{,}875 \\ 1{,}5 & -2{,}25 & -2{,}25 \end{pmatrix}$. **13.** а) 2; б) 2; в) 1;

г) 2.

Раздел 2.1. а) $(2;3)$; б) $(1;6;5)$; в) $\left(-\frac{4}{3};6\frac{5}{9};-9\frac{4}{9}\right)$; г) $(2;-1;-2)$.

2. а) $\left(C;\frac{2-7C}{11};4+C\right)$, $C\in R$; б) не совместна; в) $\left(a;b;\frac{3+25b-5a}{9};\frac{10b-2a}{3}\right)$, $a,b\in R$. **3.** а) $(1;0;-2;-1)$; б) $\left(a;\frac{3-3a}{5};b;\frac{a+5b+1}{5}\right)$. **4.** а) $(0;0;0;0)$; б) $(-11a-17b;6a+11b;a;b)$.

Раздел 3. **3.** $\sqrt{13}$. **4.** $\lambda(-2;1;13)$, $\lambda>0$. **5.** $\left(-\frac{3}{5\sqrt{2}};-\frac{4}{5\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. **6.** $C(5;-4;7)$, $D(8;-5;8)$. **7.** $B(7;-18;-8)$.**8.** $M_1(3;-4;-5)$, $M_3(5;-6;-5)$. **9.** а) да; б) нет. **10.** $\bar{d}=3\bar{a}-\bar{b}+4\bar{c}$. **11.** $\bar{a}=2e_2+2e_3$. **12.** Нет. **13.** $m=3/4$, $l=-8/3$. **14.** а) 1; б) 1; в) 7; г) -5. **15.** 4 и $\sqrt{13}$. **16.** $\frac{23}{3\sqrt{111}}$, $\sqrt{3/8}$. **17.** $\text{пр}_{\bar{c}}\bar{d}=-\sqrt{5}$, $\text{пр}_{\bar{d}}\bar{c}=-5/\sqrt{14}$. **18.** $\alpha=-3$. **19.** $\alpha=60°$. **20.** $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$. **21.** 8. **22.** $(3;0;0)$. **23.** $(-1;3;-2)$. **24.** -3. **25.** а) 12; б) 24; в) 84. **26.** $10\sqrt{2}$. **27.** $4\sqrt{15}$. **28.** $(2;10;6)$, $(4;20;12)$. **29.** $2\sqrt{13}$, $4\sqrt{13}/5$. **30.** $\left|\bar{M}\right|=5\sqrt{6}$, $\left(\frac{2}{5\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}};-\frac{11}{5\sqrt{6}}\right)$. **31.** $(6;-9;-2)$ или $(-6;9;2)$. **32.** $(3;2;0)$. **33.** Да. **34.** Нет. **35.** Правая. **36.** $7\sqrt{10}/5$. **37.** $\sqrt{62}$, $13/\sqrt{62}$. **38.** Да. **39.** $\left(\frac{6}{5\sqrt{5}};-\frac{1}{\sqrt{5}};-\frac{8}{5\sqrt{5}}\right)$. **40.** $(45;24;0)$. **41.** $(7;5;1)$. **42.** $(0;8;0)$ или $(0;-7;0)$. **43.** ≈ 1530Н, $\alpha\approx 33°$, $\beta\approx 27°$. **44.** $\left(-\frac{5}{\sqrt{2}};\frac{11}{\sqrt{2}};-2\sqrt{2}\right)$.

Раздел 4. **1**. а) окружность радиуса 5 с центром в начале координат; б) луч; г) окружность радиуса 3 с центром в точке $(3;0)$; е) прямая $y=1$; з) лемниската Бернулли. **3**. а) $\rho\cos\varphi=3$; б) $\rho^2\sin^2\varphi=25$; в) $\rho=8\cos\varphi$. **5**. $y=\frac{a^3}{x^2+a^2}$. **6**. $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$.

Раздел 5. **1**. а) $x-8y-4z-43=0$; б) $x-3y=0$; в) $x+y+z-9=0$; г) $5y+2z+5=0$; д) $3x-7y+5z-14=0$, $23/\sqrt{83}$; е) $10x-11y+4z-3=0$; ж) $7x-y-5z-3=0$. **2.** $x-y-2z+22=0$. **3.** $\arccos\sqrt{\dfrac{14}{83}}\approx 66°$. **4.** $11/2\sqrt{38}$. **5.** $a=-1/5$, $b=-2$, $c=-1$. **6.** а) $\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y+2}{-7}=\dfrac{z}{5}$; б) $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z}{0}$; в) $\dfrac{x+2}{0}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z-4}{1}$; г) $\dfrac{x+4}{3}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-1}{7}$; д) $\dfrac{x-7}{2}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z-5}{3}$; е) $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-3}{-7}=\dfrac{z-4}{5}$; ж) $\dfrac{x-2}{0}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+2}{6}$. 7. а) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z+5}{3}$; б) $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{-1}$; в) $\dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y+1}{13}=\dfrac{z-1}{7}$. **8.** $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{z-5}{-7}$. **9.** 2. **10.** а) $\dfrac{24}{5\sqrt{5}}$; б) 3. **11.** а) прямые скрещиваются; б) пересекаются в точке $(1;-5;0)$. **12.** Да. **13.** $\arcsin\dfrac{2}{\sqrt{38}}$. **14**. $x+2y-2z-1=0$. **15.** $11x-17y-19z+10=0$. **16.** $\dfrac{x-8}{3}=\dfrac{y-5}{9}=\dfrac{z-4}{-14}$. **17.** $M(2;3;1)$, $\arcsin\dfrac{11}{7\sqrt{3}}$. **18.** $y-z-4=0$. **20.** $(1;-3;-1)$. **21**. $(-5;0;-1)$. **22.** $(4;9;1)$. **23**. $\left(\dfrac{13}{3};2;-\dfrac{7}{3}\right)$. **24.** $p=24$, $q=-1/8$. **25.** $q=3/2$. **26.** $\dfrac{x-2}{74}=\dfrac{y}{57}=\dfrac{z}{-110}$. **27.** $2x-16y-13z+31=0$. **28.** а) нет; б) $\approx 6{,}2$; в) $\approx 4{,}9$; г) $(-14;13;-3)$; д) $\dfrac{x+2}{42}=\dfrac{y-5}{-23}=\dfrac{z-3}{-12}$; е) $p=17{,}5$, $q=-9\dfrac{7}{12}$; ж) $m=-6$, $l=8$; з) $a=18$. **29.** а) $y=-2$, $x=3$; б) $2x+y-4=0$; в) $x-2y-7=0$; г) $3x+y-7=0$; д) $x+y-1=0$; е) $2x+5y+4=0$; ж) $3x-2y-13=0$; з) $2x+3y=0$. **30.** $x-3y+15=0$, $17/\sqrt{10}$. **31.** $4x+3y+9=0$. **32.** $90°$. **33.** $4x+\sqrt{3}y+2=0$ или $7x-\sqrt{3}y-13=0$. **34.** $x-2y-2=0$, $2x+y-7=0$. **35.** $3x+2y-6=0$ или $3x+8y+12=0$. **36.** $\approx 1{,}68$.

37. $x+7y-6=0$, $x-y-6=0$, $7x+y-10=0$. **38.** $2x+y-8=0$, $x-3y+10=0$, $x+4y-4=0$.

Раздел 6. **2.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$. **3**. а) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$; б) $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$; в) $\frac{x^2}{5}+y^2=1$. **4.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$. **5**. $a=150$, $\varepsilon\approx 0{,}017$. **6**. $\frac{x^2}{3{,}6}+\frac{y^2}{2}=1$. **7**. $(x-5)^2+(y-6)^2=13$. **8**. $x^2+(y-6)^2=8116/225$. **9.** а) $(x-1)^2+(y-1)^2=4$; б) $225(x-17/15)^2+240(y-5)^2=64$. **10.** $a=13$, $b=5$, $F_1F_2=24$. **11**. 1) $(x-2)^2+(y+3)^2=12$; 2) точка $(5;-1)$; 3) $\frac{(x+1/2)^2}{2{,}5}+\frac{(y-1/5)^2}{10}=1$; 4) мнимый эллипс. **13**. а) $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{81}=1$; б) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$; в) $\frac{x^2}{4}-y^2=1$. **14.** а) $\frac{y^2}{144}-\frac{x^2}{25}=1$; б) $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{4}=1$; в) $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{9}=1$. **15**. $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{4}=1$. **16.** $\frac{x^2}{48}+\frac{y^2}{64}=1$. **18.** а) $y^2=x$; б) $y=-2x^2$; в) $y^2=-12x$. **19**. а) $x=\frac{1}{4}y^2-y+7$; б) $y=\frac{1}{8}x^2-y+3$. **20**. $7\sqrt{37}/18$. **21**. а) $k<1/2$; б) $k=1/2$; в) $k>1/2$. **22.** $5\frac{1}{3}$. **23.** $2x-y-16=0$. **24**. $13\frac{5}{13}$. **25.** а) окружность; б) эллипс; в) точка; г) гипербола; е) окружность; ж) парабола; з) гипербола; и) парабола; к) пара прямых; л) прямая; м) $\varnothing$. **27.** Ответ определяется неоднозначно: а) $X^2+\frac{Y^2}{9}=1$ – эллипс; б) $\frac{X^2}{4}+\frac{Y^2}{9}=1$ – эллипс; в) $-9X^2+Y^2=9$ – гипербола; г) $9X^2-Y^2=0$ – объединение двух прямых; д) $X^2-\frac{Y^2}{4}=1$ – гипербола; е) $Y^2=-\frac{3}{2}X$ – парабола; ж) $X^2=-2Y$ – парабола; з) $\varnothing$. **28.** а) конус; б) сфера; в) двуполостный гиперболоид; г) эллиптический параболоид; д) однополостный гиперболоид; е) конус; ж) круговой цилиндр;

з) гиперболический параболоид; и) точка; к) эллиптический параболоид; л) параболтческий цилиндр. **29**. $\frac{x^2+z^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.
30. $\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$. **31.** $3,\sqrt{3}$; $(2;3;0)$, $(2;-3;0)$, $(2;0;\sqrt{3})$, $(2;0;-\sqrt{3})$.
32. 4,3; $(4;0;-1)$, $(-4;0;-1)$. **33**. а) на плоскость Oxy: $\begin{cases} x^2+4xy+5y^2-x=0, \\ z=0; \end{cases}$ б) на плоскость Oxz: $\begin{cases} x^2-2xz+5z^2-4x=0, \\ y=0; \end{cases}$

в) на плоскость Oyz: $\begin{cases} y^2+z^2+2y-z=0, \\ x=0. \end{cases}$. **34**. а) $m\neq 0$ и $m\geq -\frac{1}{4}$, причем в случае $m=-\frac{1}{4}$ – вырожденный эллипс – точка; б) $m=0$.

35 $(6;-2;2)$. 36. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2+z^2}{25}=1$. **37.** $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$.
38. $\begin{cases} 2x-12y-z+16=0, \\ x-2y+4=0; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x-12y-z+16=0, \\ x-2y-8=0; \end{cases}$ **39.** $\arccos\frac{1}{17}$.

<u>Раздел 7</u>. **1**. а) нет; б) нет; в) да. **2**. а) да; б) да; в) нет. **3**. а) нет; б) да; в) нет; г) да. **4.** а) да; б) нет; в) нет; г) да; д) да; е) нет; ж) да.
5. а) нет; б) да; в) да; г) да; д) нет; е) да. **6**. а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 9 & 3 \\ 0 & -4 & 0 \\ 2 & -6 & -2 \end{pmatrix}$.**7**. $x=5e_1$. **8**. $x=-\frac{3}{4}e_1'+\frac{11}{4}e_2'$.

9. а) $x=-2e_1'+\frac{5}{3}e_2'-\frac{11}{3}e_3'$; б) $x=e_1'$. **10**. а) $-\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 32 & -3 \\ -27 & 1 \end{pmatrix}$;

б) $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 16 & -25 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. **11** а) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $a=4e_1+3e_2$, $a=\frac{3}{2}e_1'-\frac{1}{2}e_2'$,

$b=\frac{2}{3}(e_1+e_2)$, $\quad b=\frac{2}{15}(2e_1'-e_2')$; $\quad$ б) $\begin{pmatrix} -27 & -71 & -41 \\ 9 & 20 & 9 \\ 4 & 12 & 8 \end{pmatrix}$,

$a=-139e_1+38e_2+24e_3$, $\quad a=e_1'+e_2'+e_3'$; $\quad$ в) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$a=5e_1-4e_2+6e_3$, $\quad a=\frac{7}{2}e_1'+8e_2'+6e_3'$, $\quad b\notin V$. **12**. а) да; б) нет. **13**. а) $\sqrt{2\pi}$; б) $e^b(b-1)-e^a(a-1)$; в) $\pi/2$. **14**. а) да; б) да; в) нет. **15**. а) нет; б) да; в) да. **16.** а) $\left\{\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right\}$, $\left\{-\frac{8}{5};\frac{6}{5}\right\}$; б) $\left\{\frac{1}{\sqrt{14}};\frac{2}{\sqrt{14}};\frac{3}{\sqrt{14}}\right\}$, $\left\{-\frac{1}{\sqrt{35}};\frac{5}{\sqrt{35}};-\frac{3}{\sqrt{35}}\right\}$, $\left\{-\frac{3}{\sqrt{10}};0;\frac{1}{\sqrt{10}}\right\}$; в) $\left\{\frac{1}{\sqrt{14}};\frac{2}{\sqrt{14}};\frac{3}{\sqrt{14}}\right\}$, $\left\{0;\frac{3}{\sqrt{13}};-\frac{2}{\sqrt{13}}\right\}$, $\left\{\frac{13}{\sqrt{182}};-\frac{2}{\sqrt{182}};-\frac{3}{\sqrt{182}}\right\}$.

<u>Раздел 8</u>. **1.** а) да; б) нет; в) нет. **3.** $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. **4.** а) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; б) нет; в) нет; г) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, проектирование на ось Ox параллельно плоскости yOz; ж) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, проектирование на плоскость xOy параллельно оси Oz. **5.** а) $\{4;3\}$; б) $\{3;2;7\}$. **6.** $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$. 7. а) $\begin{pmatrix} 2 & -11 & 6 \\ 1 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; б) не существует, т.к. система $\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{a}_3$ линейно зависима, а система $\bar{b}_1,\bar{b}_2,\bar{b}_3$ линейно

независима. **8.** $\begin{cases} x_1 = -z_1 - 11z_2 + 8z_3, \\ x_2 = 9z_1 + 3z_2 - 6z_3, \\ x_3 = -3z_1 + 4z_2 - 8z_3. \end{cases}$ **9.** $\begin{cases} z_1 = \dfrac{3}{44}x_1 + \dfrac{1}{2}11x_2 - \dfrac{39}{44}8x_3, \\ z_2 = -\dfrac{5}{44}x_1 + \dfrac{1}{2}x_2 - \dfrac{67}{44}x_3, \\ z_3 = -\dfrac{1}{22}x_1 - \dfrac{9}{22}x_3. \end{cases}$

10. $\begin{cases} y_1 = \dfrac{2}{9}x_1 - \dfrac{1}{3}x_2 + \dfrac{2}{9}x_3, \\ y_2 = -\dfrac{11}{27}x_1 + \dfrac{4}{9}x_2 - \dfrac{7}{27}x_3, \\ y_3 = -\dfrac{4}{27}x_1 - \dfrac{1}{9}x_2 + \dfrac{5}{27}x_3. \end{cases}$ **11.** а) $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 27 & 14 \\ -41 & -21 \end{pmatrix}$;

в) $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 8 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. **12.** а) $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\{a; a\}, a \in R^{\#}$;

б) $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2}$, $\{a; a\sqrt{2}\}, \{a; -a\sqrt{2}\}, a \in R^{\#}$; в) не существует; г) $\lambda_1 = 1$, $\{a; a; a\}$, $\lambda_2 = 2$, $\{a; 0; a\}$, $\lambda_3 = -1$, $\{a; -3a; -5a\}, a \in R^{\#}$; д) $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $\{2a + b; a; b\}$, $a, b \in R$, $a^2 + b^2 > 0$, $\lambda_3 = -5$, $\{a; 3a; 2a\}, a \in R^{\#}$; е) $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $\{0; 0; 0; a\}, a \in R^{\#}$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$, $\{0; a; b; 0\}$, $a, b \in R$, $a^2 + b^2 > 0$. **13.** а) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$; б) не приводится; в) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **14.** а) $e_1' = 2e_1 + e_2$, $e_2' = -2e_1 + e_2$; б) $e_1' = e_1 - e_2$, $e_2' = 2e_1 + 3e_2$; в) $e_1' = e_1 - e_3$, $e_2' = e_1 + e_3$, $e_3' = e_2$; г) $e_1' = e_1 - e_2$, $e_2' = -3e_1 + 2e_3$, $e_3' = e_1 + e_2 - e_3$. **15**. Ответ определен неоднозначно.

а) $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. **16**. Ответ определен неоднозначно. а) $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_2$, $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_2$, $\varphi(y_1, y_2) = y_1^2 + 3y_2^2$; б) $x_1 = \sqrt{\frac{2}{5}} y_1 - \sqrt{\frac{3}{5}} y_2$, $x_2 = \sqrt{\frac{3}{5}} y_1 + \sqrt{\frac{2}{5}} y_2$, $\varphi(y_1, y_2) = 4y_1^2 - y_2^2$; в) $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_2$, $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_2$, $\varphi(y_1, y_2) = y_1^2 - y_2^2$; г) $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_2 + \frac{1}{\sqrt{6}} y_3$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} y_2 + \frac{1}{\sqrt{6}} y_3$, $x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} y_1 - \frac{2}{\sqrt{6}} y_3$, $\varphi(y_1, y_2, y_3) = 4y_1^2 + 4y_2^2 - 2y_3^2$; д) $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} y_2 - \frac{1}{\sqrt{6}} y_3$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_2 - \frac{1}{\sqrt{6}} y_3$, $x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} y_1 + \frac{2}{\sqrt{6}} y_3$, $\varphi(y_1, y_2, y_3) = 9y_1^2 + 6y_2^2 + 6y_3^2$; е) $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} y_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_3$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 + \frac{1}{2} y_2 + \frac{1}{2} y_3$, $x_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} y_1 + \frac{1}{2} y_2 + \frac{1}{2} y_3$, $\varphi(y_1, y_2, y_3) = \sqrt{2} y_2^2 - \sqrt{2} y_3^2$; ж) $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} y_2 - \frac{1}{\sqrt{6}} y_3$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_2 - \frac{1}{\sqrt{6}} y_3$, $x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} y_1 + \frac{2}{\sqrt{6}} y_3$, $\varphi(y_1, y_2, y_3) - y_1^2 + 2y_2^2 + 2y_3^2$.

Раздел 9. **13.** а), г) только если модуль равен 1, д). **14.** б) – е). **15.** а) нет; б) да. **20.** 6. **21.** $\{e\}$, $\{e, (1,2)\}$, $\{e, (1,3)\}$, $\{e, (2,3)\}$, $\{e, (1,2,3), (1,3,2)\}$, S_3. **26**. а), б), д) – колько, но не поле, в), е) – кольцо и поле, г) – ни кольцо, ни поле.

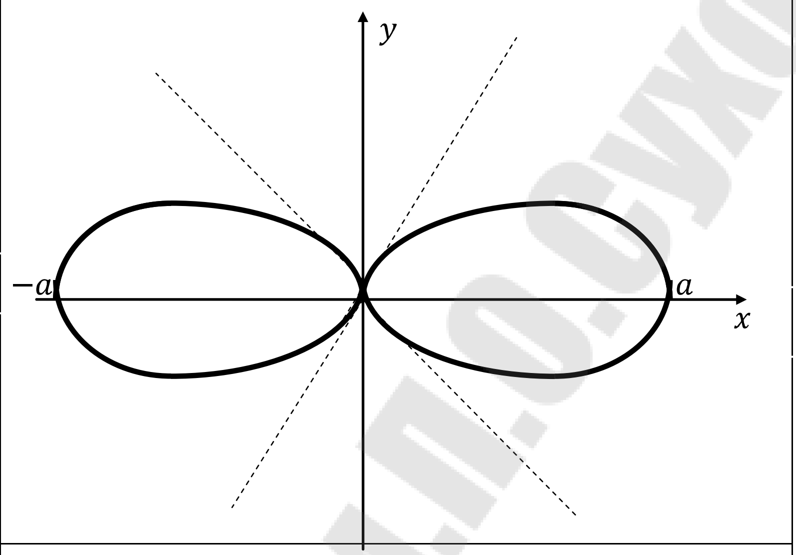
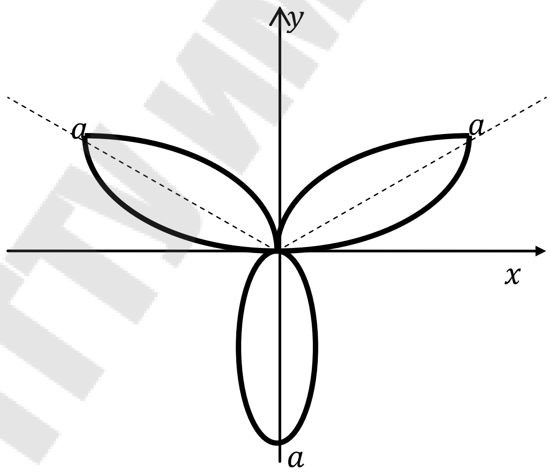
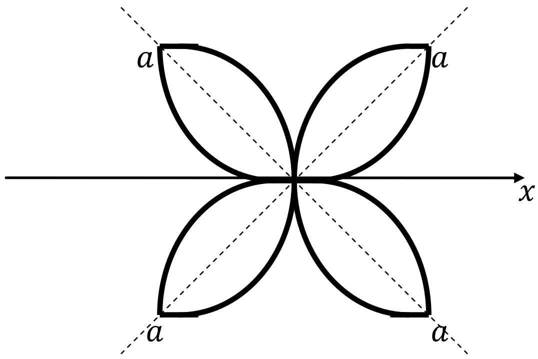
Литература

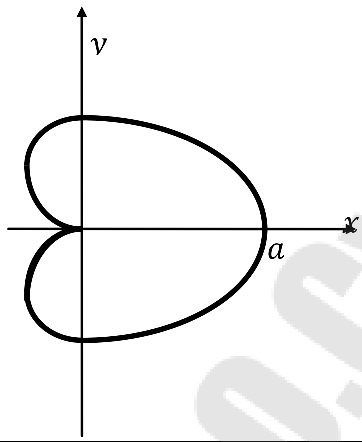
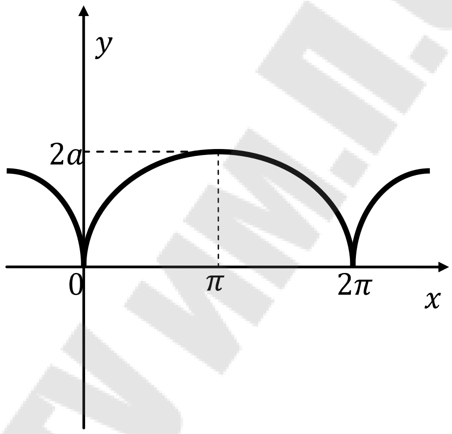
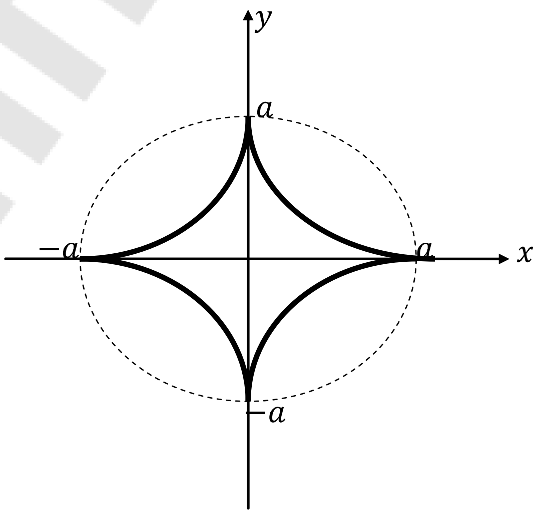
1. Берман, Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г.Н. Берман. – Москва: Наука, 1985. – 356 с.
2. Герасимович, А.И. Математический анализ: Справ. пособие. В 2-х ч.: ч.1 / А.И. Герасимович, Н.А. Рысюк. – Мн.: Выш. шк., 1989. – 287 с.
3. Гурский, Е.И. Основы линейной алгебры и аналитической геометрии: Учеб. для инж.-тех. спец. вузов. / Е.И. Гурский – Мн.: Выш. шк., 1982. – 272 с.
4. Гурский, Е.И. Руководство к решению задач по высшей математике: Учеб. пособие. В 2-х ч.: ч.1 / Е.И. Гурский, В.П. Домашов, В.К. Кравцов, А.П. Сильванович; Под общ. ред. Е.И. Гурского. – Мн.: Выш. шк., 1990. – 349 с.
5. Гусак, А.А. Высшая математика. В 2-х т.: т.1 Учебник для студентов вузов / А.А. Гусак. – Мн.: ТетраСистемс, 2001. – 544 с.
6. Гусак, А.А. Справочник по высшей математике / А.А. Гусак, Г.М. Гусак, Е.А. Бричикова. – Мн.: ТетраСистемс, 2002. – 640 с.
7. Кузнецов, В.А. Сборник задач по высшей математике (типовые расчеты): учеб. пособие для втузов / В.А. Кузнецов. – Москва: Высшая школа, 1983. – 175 с.
8. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. В 2-х ч. / Д.Т. Письменный. – М.: Айрис-пресс, 2005. – 234 с.
9. Рябушко, А.П. Индивидуальные задания по высшей математике: Учеб. пособие. В 4-х ч. / А.П. Рябушко, В.В. Бархатов, В.В. Державец, И.Е. Юруть; Под общ. ред. А.П. Рябушко. – Мн.: Выш. шк., 2004. – 270 с.

Приложение 1

Скалярное произведение $\bar{a}\cdot\bar{b}$ или $(\bar{a},\bar{b})$	***Векторное произведение*** $\bar{a}\times\bar{b}$ или $[\bar{a},\bar{b}]$	***Смешанное произведение*** $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$
$\bar{a}\cdot\bar{b}=\lvert\bar{a}\rvert\lvert\bar{b}\rvert\cos(\bar{a},\bar{b})$	$\bar{a}\times\bar{b}=\bar{c}$: 1) $\bar{c}=\lvert\bar{a}\rvert\lvert\bar{b}\rvert\sin(\bar{a},\bar{b})$ 2) $\bar{c}\perp\bar{a},\bar{c}\perp\bar{b}$ 3) $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ образуют правую тройку	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}=(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}$
$\bar{a}\cdot\bar{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$	$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$
Коммутативность: $\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{b}\cdot\bar{a}$	Антикоммутативность: $\bar{a}\times\bar{b}=-\bar{b}\times\bar{a}$	Цикличность: $\bar{a}\bar{b}\bar{c}=\bar{b}\bar{c}\bar{a}=\bar{c}\bar{a}\bar{b}$
	$\lvert\bar{a}\times\bar{b}\rvert$ равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$	$\lvert\bar{a}\bar{b}\bar{c}\rvert$ равен объему параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$
Необходимое и достаточное условие ортогональности двух векторов: $\bar{a}\perp\bar{b}\Leftrightarrow\bar{a}\cdot\bar{b}=0$.	Необходимое и достаточное условие коллинеарности двух векторов: $\bar{a}\parallel\bar{b}\Leftrightarrow\bar{a}\times\bar{b}=0$ или $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$.	Необходимое и достаточное условие компланарности трех векторов: $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ компланарны $\Leftrightarrow\bar{a}\bar{b}\bar{c}=0$.
$A=\bar{F}\cdot\bar{S}$, где A – работа, совершаемая силой $\bar{F}$ по перемещению материальной точки на вектор $\bar{s}$.	Если тело неподвижно закреплено в точке A, а в точке B этого тела приложена сила $\bar{F}$, то момент этой силы $\bar{M}=\overline{AB}\times\bar{F}$.	

Приложение 2

Лемниската Бернулли $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ или $r^2 = a^2\cos 2\varphi$	
Трехлепестковая роза $r = a\sin 3\varphi \quad (r \geq 0)$	
Четырехлепестковая роза $r = a\lvert\sin 2\varphi\rvert$	

Кардиоида $r = a(1+\cos\varphi)$	
Циклоида $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$	
Гипоциклоида (астроида) $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ или $x^{3/2} + y^{3/2} = a^{3/2}$	

Приложение 3

Эллипс	***Гипербола***	***Парабола***
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (фокусы $F_{1,2}$ на оси Ox)	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (фокусы $F_{1,2}$ на оси Ox)	$y^2=2px$ (фокус $F(p/2;0)$ на оси Ox)
$c=\sqrt{a^2-b^2}$	$c=\sqrt{a^2+b^2}$	
эксцентриситет $\varepsilon=c/a<1$ *(фокусное расстояние делить на большую ось)*	*эксцентриситет* $\varepsilon=c/a>1$ *(фокусное расстояние делить на действительную ось)*	*эксцентриситет* $\varepsilon=1$
Директрисы $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$	*Директрисы* $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$	*Директриса* $x=-\frac{p}{2}$
	Асимптоты $y=\pm\frac{b}{a}x$	

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Пособие
по курсу «Математика» для студентов технических специальностей дневной и заочной форм обучения

Составители: Авакян Елена Зиновьевна
Задорожнюк Мария Викторовна

Подписано к размещению в электронную библиотеку
ГГТУ им. П. О. Сухого в качестве электронного
учебно-методического документа 19.05.16.

Рег. № 67E.
http://www.gstu.by