Ю. Д. Черниченко

РЕЛЯТИВИСТСКИЙ КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНЫЙ ПОДХОД В ЗАДАЧАХ РАССЕЯНИЯ

Гомель
ГГТУ им. П. О. Сухого
2011

УДК 539.172

Черниченко, Ю. Д. Релятивистский квазипотенциальный подход в задачах рассеяния / Ю. Д. Черниченко. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2011. – 237 с. : ил. – ISBN 978-985-535-009-6.

В монографии впервые систематически изложены методы решения релятивистской прямой и обратной задач и применения полученных результатов к исследованию свойств двухчастичных систем. Изложение результатов проводится в рамках полностью ковариантного релятивистского квазипотенциального подхода, основанного на гамильтоновой формулировке квантовой теории поля, сформулированного в релятивистском конфигурационном представлении для случая взаимодействия двух релятивистских бесспиновых частиц произвольных масс.

Для специалистов в области физики высоких энергий и квантовой теории поля, а также для аспирантов и студентов соответствующего профиля.

Ил. 9, список лит. – 169 назв.

Рецензенты: ведущий науч. сотрудник д-р физ.-мат. наук, проф. *Э. Э. Боос* (НИИЯФ МГУ);
канд. физ.-мат. наук, доц. каф. «Теоретическая физика» *Е. А. Дей* (ГГУ им. Ф. Скорины)

Рекомендовано к изданию Советом ГГТУ им. П. О. Сухого
(*протокол № 3 от 15.11.2010 г.*)

ISBN 978-985-535-009-6

© Черниченко Ю. Д., 2011
© Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого», 2011

Оглавление

ПЕРЕЧЕНЬ УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

РКП-подход	–	релятивистский квазипотенциальный подход
РКП-уравнение	–	релятивистское квазипотенциальное уравнение
РКП-функция	–	релятивистская квазипотенциальная функция
КХД	–	квантовая хромодинамика

ВВЕДЕНИЕ

Релятивистский квазипотенциальный (РКП) подход Логунова–Тавхелидзе [1] построен на основе ковариантной одновременной формулировки проблемы двух тел в квантовой теории поля. Развитию данного подхода было посвящено большое количество публикаций (см., например, работы [2]–[11]). РКП-подход сводит изучение релятивистской двухчастичной системы к исследованию ковариантных трехмерных двухчастичных уравнений для волновой функции шредингеровского вида или уравнений Липпмана–Швингера для инвариантной амплитуды рассеяния вне энергетической поверхности с обобщенным потенциалом – квазипотенциалом. Предложенный в этих и ряде других работах формализм,будучи трехмерным и допуская вероятностную интерпретацию волновой функции, в то же время обладает и главными преимуществами (перенормируемость, аналитичность и т. д.) полностью ковариантного метода. Кроме того, в данном подходе все рассматриваемые величины имеют ясный физический смысл и аналогию с нерелятивистской квантовой механикой. Еще один вариант РКП-подхода к задаче о двух релятивистских частицах был предложен в работах [12], [13]. Данный подход не связанн с формализмом Бете–Солпитера и ковариантным формализмом Фейнмана–Дайсона, а использует гамильтонову формулировку квантовой теории поля [14]–[16]. При этом важно, что трехмерность в нее заложена с самого начала, а все частицы даже в промежуточных состояниях являются физическими, т.е. лежат на массовых поверхностях.

РКП-подход в квантовой теории поля является одним из эффективных методов релятивистского описания связанной системы двух частиц и нашел широкое применение для описания свойств атомов, адронов и ядер как связанных состояний [17]–[28]. В настоящее время этот подход продолжает оставаться одним из методов исследования составных объектов [29]–[40]. При этом одноглюонный обмен между кварками на малых расстояниях в соответствии с квантовой хромодинамикой индуцирует кулоновский член. В то же время на больших расстояниях форма запирающего члена, существенно влияющая на спектральные свойства связанных систем, из-за отсутствия в настоящее время эффективных методов расчета вне рамок теории возмущений квантовой хромодинамикой не определяется. Точные решения релятивистских квазипотенциальных уравнений с квазипотенциалами конкретного вида (см., например, работы [41]–[45]) представляют такой же интерес, как и соответствующие решения нерелятивистского уравнения Шредингера. Разработка же методов решения РКП-уравнений с квазипотенциалами общего вида, в том числе и с нелокальными сепарабельными квазипотенциалами, продолжает оставаться актуальной и в настоящее время.

Важным аспектом любой теории, в том числе и квантовой теории поля, является необходимость проводить сравнение ее теоретических результатов с экспериментальными данными. При этом необходимо использовать такие “простейшие"объекты, которые позволяют проверять прямые следствия квантовой теории поля, не прибегая к модельным предположениям. В этом случае это дает возможность удостовериться в законности основных утверждений теории и сделать некоторые выводы о полноте и эффективности использованных теоретических методов. Некоторые функции одного аргумента, которые имеют простую связь с экспериментально измеренными величинами, могут сыграть роль этих объектов. Соответствующие функции могут быть определены с Евклидовыми и Минковскими аргументами [46]. Отношение Дрелла $R(s)$, которое определяется мнимой частью коррелятора векторного или аксиально-векторного кваркового тока, может выполнить роль такого объекта. В ряде физически интересных случаев функция $R(s)$ встречается как фактор в подынтегральном выражении, как, например, при описании инклюзивного τ распада [47], сглаженных (smearing) функций [48], D-функции Адлера [49], адронного вклада в g-фактор мюона [50] и в постоянную тонкой структуры (см., например, [51]).

Таким образом, отношение Дрелла $R(s)$ играет исключительно важную роль в физике сильных взаимодействий. Ресуммирующие же факторы появляются в параметризации мнимой части соответствующих кварковых токовых корреляторов, в отношении Дрелла $R(s)$. При этом особо важное значение имеет кулоновский ресуммирующий фактор [52]. Это связано с тем, что при описании квантовых систем в около пороговой области ($v \to 0$), например, e^+e^- аннигиляции в адроны, кварк-антикварко-вых систем, мы не можем обрезать пертурбативный ряд даже в том случае, когда константа связи α_s мала [48], [53], [54]. Причина состоит в том, что в около пороговой области пертурбативный ряд из Феймановских диаграмм содержит пороговые сингулярности в форме $(\alpha/v)^n$, где

$$v = \sqrt{1 - \frac{4\,m^2}{s}}\,, \tag{1}$$

$\sqrt{s}$ – полная энергия взаимодействующих частиц в с.ц.и., а m – их масса. Эта проблема хорошо известна из квантовой электродинамики. Такие пороговые сингулярности вида $(\alpha/v)^n$ должны быть просуммированы. В нерелятивистском случае это ресуммирование выполняет кулоновский фактор. Так решение задачи о нерелятивистском потенциальном рассеянии двух бесспиновых частиц с произвольными массами m_1, m_2 на притягивающем кулоновском потенциале [1)]

$$V(r) = -\frac{\alpha\,Z_1\,Z_2}{r} \tag{2}$$

позволяет вычислить кулоновский ресуммирующий фактор для произвольного орбитального момента $\ell \geq 0$ [55]

$$L_{\rm nr}(\eta) = \frac{X_{\rm nr}(\eta)}{1 - \exp\left[-X_{\rm nr}(\eta)\right]}\,\prod_{n=1}^{\ell}\left[1 + \left(\frac{\eta}{n}\right)^2\right]\,,\; X_{\rm nr}(\eta) = 2\,\pi\,\eta\,, \tag{3}$$

который выражается через производную порядка ℓ от волновой функции непрерывного спектра в нуле. Здесь $\eta = \lambda/k$ – кулоновский параметр Зоммерфельда, $\lambda = \mu\,\alpha\,Z_1\,Z_2 > 0$; $k = 2\,\mu\,v_{\rm nr}$ – относительный импульс двух нерелятивистских сталкивающихся частиц, а $2\,v_{\rm nr}$ – их относительная скорость; $\mu = m_1\,m_2/(m_1 + m_2)$ – обычная приведенная масса этих частиц, а Z_1, Z_2 – их заряды; $\alpha = e^2/4\pi = 1/137$ – постоянная тонкой структуры.

Отметим, что впервые задача о кулоновском взаимодействии в конечном состоянии между компонентами электрон-позитронной пары была рассмотрена в рамках нековариантной теории возмущений на основе нерелятивистского уравнения Шредингера в известной работе Сахарова [56]. В рамках этого подхода решение данной задачи с кулоновским

1) Мы будем всюду использовать систему единиц, в которой положено: $\hbar = c = 1$.

потенциалом (2) ($Z_1 = Z_2 = 1$) для случая $\ell = 0$ приводит к общеизвестному S-фактору Сахарова–Гамова–Зоммерфельда [56]–[58] [2)]

$$S_{\rm nr}(v_{\rm nr}) = \frac{X_{\rm nr}(v_{\rm nr})}{1 - \exp[-X_{\rm nr}(v_{\rm nr})]}\,, \qquad X_{\rm nr}(v_{\rm nr}) = \frac{\pi\,\alpha}{v_{\rm nr}}\,, \tag{4}$$

который связан с волновой функцией непрерывного спектра в нуле через $|\psi(0)|^2$, где $\psi(r)$ – решение нерелятивистского уравнения Шредингера для случая кулоновского взаимодействия.

Еще одно решение задачи о кулоновском взаимодействии в конечном (или начальном) состоянии для произвольного процесса с участием заряженных частиц с малыми относительными скоростями (т.е. нерелятивистских частиц, для которых $\alpha/v \gtrsim 1$) было дано в работе [62] путем суммирования главных (по α/v) диаграмм теории возмущений.

В двухчастичном приближении отношение Дрелла $R(s)$ может быть апроксимировано амплитудой Бете–Солпитера двух заряженных частиц $\chi'_{\rm BS}(x)$ при $x = 0$ [63]. Представление амплитуды Бете–Солпитера через волновую функцию $\psi(r)$, которая отвечает нерелятивистскому уравнению Шредингера с кулоновским потенциалом (2), ведет к формуле (4) с заменой $\alpha \to 4\,\alpha_s/3$ для КХД. Именно учет пороговых сингулярностей приводит к модификации выражения для функции $R(s)$. Поэтому поведение S-фактора оказывается важным при всех значениях скорости v [64].

В релятивистской теории нерелятивистский кулоновский S-фактор в выражении (4) должен быть модифицирован. По-видимому, впервые релятивистская модификация S-фактора (4) в КХД для случая взаимодействия двух релятивистских частиц равных масс была выполнена в работе [65] (см. также [66], [67]) и заключалась в замене $v_{\rm nr} \to v$. В этих работах S-фактор был использован для описания эффектов вблизи порога рождения пар в процессах $e^+e^- \to t\bar{t}$ и $e^+e^- \to W^+W^-$. Точно такой же вид S-фактора, как в [65], и также для случая взаимодействия двух частиц равных масс был позднее предложен в работе [68]. Другое релятивистское обобщение S-фактора также для случая двух частиц равных масс было получено в [69], [70]. Релятивистский S-фактор для

[2)] Нерелятивистское выражение для ресуммирующего фактора в случае $\ell = 0, 1$ состояний также можно найти в [59] (см. также книги [60], [61]).

случая двух частиц произвольных масс $m_1\,, m_2$ был предложен в работе [71]. Этот фактор был получен в рамках релятивистской квантовой механики на основе уравнения Шредингера.

Новый метод получения релятивистско S-фактора для случая взаимодействия двух релятивистских частиц равных масс был предложен Милтоном и Соловцовым в [72]. Их метод базируется на РКП-подходе [12]. Разработанный ими метод также использует возможность перехода от интегрального уравнения в трехмерном импульсном пространстве Лобачевского к интегральному уравнению в трехмерном релятивистском конфигурационном представлении, введенном в [73] для случая взаимодействия двух релятивистских частиц равных масс. Подчеркнем, что использованный ими потенциал (2) ($Z_1 = Z_2 = 1$) учитывает существенную сторону КХД – свойство асимптотической свободы и закон эволюции инвариантного заряда [74]. Решение с произвольным i-периодическим фактором с таким потенциалом было ранее получено в [75]. Другие формы релятивистских квазипотенциальных уравнений с кулоновским потенциалом были рассмотрены в [76]. Однако использование такого решения пригодно только для спектральных задач.

Таким образом, в [72] был сделан новый шаг к применению квазипотенциального подхода в КХД. Этот подход приводит к следующему релятивистскому S-фактору:

$$S(\chi') = \frac{X(\chi')}{1 - \exp\left[-X(\chi')\right]}\,, \qquad X(\chi') = \frac{\pi\,\alpha}{\operatorname{sh}\chi'}\,, \tag{5}$$

где χ' есть быстрота, которая связана с полной энергией взаимодействующих частиц в с.ц.и., $\sqrt{s}$, соотношением

$$2m\,\operatorname{ch}\chi' = \sqrt{s}\,.$$

Функция $X(\chi')$ в (5) может быть выражена в терминах скорости v:

$$X(v) = \frac{\pi\,\alpha}{v}\sqrt{1 - v^2}\,. \tag{6}$$

Обобщение предложенного в [72] метода на случай произвольных ℓ состояний и также для случая взаимодействия двух частиц равных масс было проведено в работах [77], [78]. Это приводит к следующему выражению для релятивистского ресуммирующего L-фактора ($\ell \geq 0$):

$$L(\chi') = \frac{X(\chi')}{1 - \exp[-X(\chi')]} \prod_{n=1}^{\ell} \left[1 + \left(\frac{\alpha}{2\, n \operatorname{sh} \chi'} \right)^2 \right], \tag{7}$$

где функция $X(\chi')$ определена в (5).

Применение релятивистского S-фактора (5) для описания ряда характеристик адронных процессов можно найти в [64], [79], [80]. Недавно фактор (5) был также применен в [81] для оценки границ массы магнитных монополей, поиск которых ведется в Фермилабе (Fermilab) на коллайдере Тэватрон (Tevatron).

Цель данной монографии состоит в разработке методов решения релятивистской прямой и обратной задач и применения полученных результатов к исследованию свойств двухчастичных систем. Рассмотрение проводится в рамках полностью коваринтного РКП-подхода, основанного на гамильтоновой формулировке квантовой теории поля и сформулированного в релятивистском конфигурационном представлении для случая взаимодействия двух релятивистских частиц произвольных масс [82], [83]. Разработанные здесь методы непосредственно связаны с возможностью представить полную энергию двух релятивистских бесспиновых частиц неравных масс в с.ц.и. в виде выражения, пропорционального энергии одной эффективной релятивистской частицы массы m'. Кратко остановимся на содержании монографии.

Глава 1 посвящена изложению основных положений рассматриваемого РКП-подхода. В главе 2 предложен метод изучения свойств решений конечно-разностного квазипотенциального уравнения с локальным квазипотенциалом в релятивистском конфигурационном представлении, описывающим взаимодействие двух релятивистских бесспиновых частиц произвольных масс m_1 , m_2.

В главе 3 изложены методы решения конечно-разностного РКП-уравнения в конфигурационном представлении с кулоновским квазипотенциалом и интегрального РКП-уравнения с линейным квазипотенциалом.

Решению РКП-уравнений как для случая чисто нелокального сепарабельного квазипотенциала, так и для случая, когда полный квазипотенциал, описывающий взаимодействие двух релятивистских бесспиновых частиц произвольных масс, представляет собой суперпозицию локального и нелокального сепарабельного квазипотенциалов (и обобщение на случай суммы нелокальных сепарабельных квазипотенциалов) посвящена глава 4. В главе 4 также проведено исследование свойств найденных решений и получены точные выражения для приращений фазового сдвига и исследованы их свойства, а также определены условия существования связанных состояний и даны обобщения теорем Левинсона в рассматриваемых в этой главе случаях.

Глава 5 посвящена разработке методов восстановления компонент нелокальной сепарабельной составляющей полного взаимодействия, когда его локальная часть, приращения фазового сдвига и значения энергий связанных состояний известны.

В главе 6 дано обобщение метода, предложенного в [72], для вывода релятивистских пороговых факторов для произвольного значения орбитального момента ($\ell \geq 0$); анализ поведения полученных факторов в нерелятивистском, релятивистском и в ультрарелятивистском случаях, в случае равных масс частиц и когда одна из частиц покоится; сравнение этих факторов с их нерелятивистскими аналогами и с факторами, которые рассматривались в работах [65]–[71].

Исследование поведения функции $R(s)$, параметризованной этими пороговыми факторами, в случае векторного и аксиально-векторного токов, возникающих для двух кварков произвольных масс, выполнено в главе 7.

ГЛАВА 1
РЕЛЯТИВИСТСКИЕ КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1.1. Уравнение для релятивистской амплитуды рассеяния

В основу нашего рассмотрения положено полностью ковариантное РКП-уравнение в пространстве моментов, построенное в [82] для амплитуды рассеяния $A(\mathbf{p}', \mathbf{q}')$ двух релятивистских скалярных частиц произвольных масс m_1, m_2 [3]. Это уравнение в с.ц.и. имеет вид

$$
\begin{gathered}
A\,(\mathbf{p}',\,\mathbf{q}') = -\frac{\mu}{2\pi}\,\widetilde{V}\,(\,\mathbf{p}',\;\mathbf{q}'\,;E_{q'})\,+ \\
+\frac{\mu}{m'\,(2\pi)^3}\int d\,\Omega_{\mathbf{k}'}\,\frac{\widetilde{V}\,(\,\mathbf{p}',\,\mathbf{k}'\,;E_{q'})\;A\,(\mathbf{k}',\,\mathbf{q}')}{E_{q'}-E_{k'}+i\varepsilon}\,,
\end{gathered}
\tag{1.1}
$$

где $d\,\Omega_{\mathbf{k}'} = m'\,d\,\mathbf{k}'/E_{k'}$ – релятивистский трехмерный элемент объема в пространстве Лобачевского, $E_{k'} = \sqrt{m'^2 + \mathbf{k}'^2}$, $E_{q'} = \sqrt{m'^2 + \mathbf{q}'^2}$, $m' = \sqrt{m_1\,m_2}$, а $\mu = m_1\,m_2/(m_1+m_2)$ – обычная приведенная масса.

Подчеркнем, что квадрат трехмерного относительного импульса эффективной релятивистской частицы массы m', выступающей в качестве двухчастичной системы, связан в с.ц.и. с неевклидовым расстоянием $\tilde{s}$ в релятивистском пространстве скоростей, несущего геометрию Лобачевского, и скалярным произведением 4-скоростей взаимодействующих частиц соотношением (см. [82], [83])

$$
\mathbf{k}'^2 = -\left(\frac{m_2\,k_1 - m_1\,k_2}{m_1+m_2}\right)^2 = 2\,\mu^2\,(\,\mathrm{ch}\,\tilde{s}-1) = -\mu^2\,(u_1-u_2)^2\,, \tag{1.2}
$$

где 4-импульсы двух свободных частиц в с.ц.и. могут быть записаны в виде

$$
\mathbf{k}_1 = -\,\mathbf{k}_2 = \,\mathbf{k}\,,\; k_1 = \left(\sqrt{m_1^2 + \,\mathbf{k}^2},\;\mathbf{k}\right),\, k_2 = \left(\sqrt{m_2^2 + \,\mathbf{k}^2}\,,\,-\,\mathbf{k}\right)\,, \tag{1.3}
$$

[3] Отметим, что в случае рассмотрения частиц со спином вся специфика, которую привносит спин в амплитуду рассеяния (точно также, как и в нерелятивистской теории) является следствием зависимости от спина только квазипотенциала.

а их релятивистские 4-скорости определяются выражениями

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{k_1}{m_1} = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\mathbf{v}_1^2}}\,,\,\frac{\mathbf{v}_1}{\sqrt{1-\mathbf{v}_1^2}}\right)\,, \\ u_2 &= \frac{k_2}{m_2} = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\mathbf{v}_2^2}}\,,\,\frac{\mathbf{v}_2}{\sqrt{1-\mathbf{v}_2^2}}\right)\,. \end{aligned} \tag{1.4}$$

В то же время относительная скорость взаимодействующих частиц

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1}{1 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}$$

связана с неевклидовым расстоянием $\tilde{s}$ и скалярным произведением 4-скоростей (1.4) этих частиц формулой

$$(\sqrt{1-\mathbf{v}^2})^{-1} = \operatorname{ch}\tilde{s} = u_1\,u_2 = u_{10}\,u_{20} - \mathbf{u}_1\,\mathbf{u}_2\,. \tag{1.5}$$

Из выражений (1.2) и (1.5) непосредственно видно, что зависимость между кинетической энергией относительного движения и релятивистской относительной скоростью $\mathbf{v}$ взаимодействующих частиц дается соотношением

$$\frac{\mathbf{k}'^2}{2\mu} = \mu\left(\frac{1}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}} - 1\right)\,. \tag{1.6}$$

Кроме того, из (1.2) и (1.3) следует, что выражение для полной энергии взаимодействующих частиц в с.ц.и.

$$\sqrt{s} = \sqrt{(k_1+k_2)^2} = \sqrt{m_1^2 + \mathbf{k}^2} + \sqrt{m_1^2 + \mathbf{k}^2}$$

может быть представлено в виде [82], [83]

$$\sqrt{s} = \sqrt{{m_1}^2 + \mathbf{k}^2} + \sqrt{{m_2}^2 + \mathbf{k}^2} = \frac{m'}{\mu}\,E_{k'}\,,\; E_{k'} = \sqrt{m'^2 + \mathbf{k}'^2}\,. \tag{1.7}$$

Таким образом, уравнение (1.1) можно рассматривать как релятивистское обобщение уравнения Липпмана–Швингера в духе геометрии Лобачевского, реализующейся на верхней полé массового гиперболоида $E_{p'}^2 - \mathbf{p}'^2 = m'^2$. Это уравнение описывает рассеяние на квазипотенциале $\widetilde{V}(\,\mathbf{p}'\,,\;\mathbf{q}'\,; E_{q'})$ эффективной релятивистской частицы, которая выступает в качестве двухчастичной системы, имеет массу m', относительный 3-импульс $\mathbf{k}'$ и несет полную энергию взаимодействующих частиц в с.ц.и. $\sqrt{s}$, пропорциональную энергии $E_{k'}$ одной эффективной релятивистской частицы массы m' – формула (1.7).

1.2. Уравнение для волновой функции

1.2.1. Пространство моментов

Волновая функция системы в пространстве моментов $\Psi_{q'}(\mathbf{p}')$ определяется выражением (см. [82], [83])

$$\Psi_{q'}(\mathbf{p}') = (2\pi)^3 \,\delta\,(\,\mathbf{p}'(-)\ \mathbf{q}') - \frac{4\pi}{m'}\,\frac{A\,(\mathbf{p}'\,,\,\mathbf{q}')}{2E_{q'} - 2E_{p'} + i\varepsilon}\,, \tag{1.8}$$

где $\delta\,(\,\mathbf{p}'(-)\ \mathbf{q}') = \sqrt{1 + \mathbf{p}'^2/m'^2}\,\delta\,(\,\mathbf{p}' -\ \mathbf{q}')$ – релятивистская δ-функция в пространстве моментов.

С помощью соотношений (1.1) и (1.8) легко получить РКП-уравнение в пространстве моментов, построенное в [82] для волновой РКП-функции $\Psi_{q'}(\mathbf{p}')$ для случая взаимодействия двух релятивистских частиц произвольных масс $m_1\,, m_2$:

$$(2E_{q'} - 2E_{p'})\,\Psi_{q'}(\,\mathbf{p}') = \frac{2\mu}{m'\,(2\pi)^3}\int d\,\Omega_{\mathbf{k}'}\,\widetilde{V}\,(\,\mathbf{p}'\,,\ \mathbf{k}'\,; E_{q'})\ \Psi_{q'}(\,\mathbf{k}')\,. \tag{1.9}$$

Уравнение (1.9) также можно рассматривать как непосредственное релятивистское обобщение уравнения Шредингера в духе геометрии Лобачевского. При этом верхняя поля́ массового гиперболоида $E_{p'}^2 - \mathbf{p}'^2 = m'^2$ погружена в 4-мерное импульсное пространство и служит моделью релятивистского неевклидова пространства импульсов.

Отметим, что уравнение (1.9) отличается от квазипотенциального уравнения, рассмотренного в работе [25], путем введения в него релятивистской приведенной массы. Однако в [25] было показано, что можно использовать различные выражения для релятивистской приведенной массы путем выбора функциональной связи между относительным импульсом $\mathbf{k}$ и релятивистской относительной скоростью $\mathbf{v}$ взаимодействующих частиц, связанной с их полной энергией в с.ц.и. $\sqrt{s}$ хорошо известным соотношением

$$|\,\mathbf{v}| = 2\sqrt{\frac{s-(m_1+m_2)^2}{s-(m_1-m_2)^2}}\left(1+\frac{s-(m_1+m_2)^2}{s-(m_1-m_2)^2}\right)^{-1}\,, \tag{1.10}$$

т.е. точно также как, например, в [69]–[71]. В частности, если зависимость между кинетической энергией относительного движения и релятивистской относительной скоростью $\mathbf{v}$ взаимодействующих частиц (см. [82],

[83]) дается выражением (1.6), то вместе с соотношением (1.10) это приводит к выражению (1.7). Такой выбор функциональной связи позволил ввести концепцию эффективной релятивистской частицы, выступающей в качестве двухчастичной системы и имеющей массу m', относительный 3-импульс $\mathbf{k}'$, и несущей полную энергию взаимодействующих частиц в с.ц.и. $\sqrt{s}$ [4)].

1.2.2. Конфигурационное пространство

В рассматриваемом $\mathbf{p}'$-пространстве роль трансляций играют собственно преобразования Лоренца $\Lambda_{\mathbf{k}}'$ [83]:

$$\mathbf{q}' = (\overrightarrow{\Lambda_{\mathbf{k}'}\,\mathbf{p}'}) = \mathbf{p}'(+)\,\mathbf{k}' =$$
$$= \mathbf{p}' + \mathbf{k}'\left[\sqrt{1+\frac{\mathbf{p}'^2}{m'^2}} + \frac{\mathbf{p}'\cdot\mathbf{k}'}{m'^2\left(1+\sqrt{1+\frac{\mathbf{k}'^2}{m'^2}}\right)}\right]. \tag{1.11}$$

Роль плоских волн, соответствующих этим трансляциям, играют функции

$$\xi(\mathbf{p}'\,,\,\mathbf{r}) = \left(\frac{E_{p'} - \mathbf{p}'\cdot\mathbf{n}}{m'}\right)^{-1-irm'}, \tag{1.12}$$

где модуль радиуса-вектора $\mathbf{r}$ $(\mathbf{r} = r\;\mathbf{n}\,, |\,\mathbf{n}| = 1)$ является релятивистским инвариантом [83], причем в нерелятивистском пределе $(p' \ll 1\,,\, r \gg\gg 1)$ $\xi(\mathbf{p}'\,,\,\mathbf{r}) \to \exp(i\mathbf{p}'\cdot\mathbf{r})$. Функции (1.12) соответствуют главной серии унитарных представлений группы Лоренца и удовлетворяют условиям полноты и ортогональности

$$\begin{gathered}\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\,\Omega_{\mathbf{p}'}\,\xi(\mathbf{p}'\,,\,\mathbf{r})\,\xi^*(\mathbf{p}'\,,\,\mathbf{r}') = \delta\,(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,,\\ \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{r}\,\xi(\mathbf{p}'\,,\,\mathbf{r})\,\xi^*(\mathbf{q}'\,,\,\mathbf{r}) = \delta\,(\mathbf{p}'(-)\mathbf{q}')\,.\end{gathered} \tag{1.13}$$

Кроме того, эти функции удовлетворяют уравнению в терминах конечных разностей [83]

$$\left(2E_{p'} - \hat{H}_0\right)\xi(\mathbf{p}'\,,\,\mathbf{r}) = 0\,. \tag{1.14}$$

[4)] Напомним, что 3-импульс $\mathbf{k}'$ эффективной релятивистской частицы в силу выражения (1.6) является инвариантом преобразований Лоренца.

Здесь оператор

$$\hat{H}_0 =$$
$$= 2\,m'\left[\mathrm{ch}\left(i\,\lambda'\frac{\partial}{\partial\,r}\right)+\frac{i\,\lambda'}{r}\,\mathrm{sh}\left(i\,\lambda'\frac{\partial}{\partial\,r}\right)-\frac{\lambda'^2}{2\,r^2}\,\Delta_{\,\theta\,,\,\varphi}\,\exp\left(i\,\lambda'\frac{\partial}{\partial\,r}\right)\right] \tag{1.15}$$

– оператор свободного гамильтониана, являющийся конечно-разностным оператором, построенным из операторов сдвига $\exp\left(\pm i\lambda'\,\partial/\partial\,r\right)$, в то время как $\Delta_{\,\theta\,,\,\varphi}$ – его угловая часть, а $\lambda' = 1/m'$ является комптоновской длиной волны, связанной с эффективной релятивистской частицей массы m'.

Волновые функции в пространстве моментов и в $\mathbf{r}$-представлении, называемом релятивистским конфигурационным представлением [82], [83], связаны соотношениями

$$\begin{gathered}\psi_{q'}(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\,\Omega_{\,\mathbf{p}'}\,\xi(\mathbf{p}'\,,\,\mathbf{r})\,\Psi_{q'}(\mathbf{p}')\,,\\ \Psi_{q'}(\mathbf{p}') = \int d\mathbf{r}\,\xi^*(\mathbf{p}'\,,\,\mathbf{r})\,\psi_{q'}(\mathbf{r})\,.\end{gathered} \tag{1.16}$$

Применение преобразований (1.16) (преобразования Шапиро или ξ-преобразования) к уравнению (1.9) позволяет получить интегральную форму релятивистского уравнения Шредингера в конфигурационном представлении:

$$\begin{gathered}\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\,\Omega_{\,\mathbf{p}'}\,\left(2E_{q'}-2E_{p'}\right)\,\xi(\mathbf{p}'\,,\,\mathbf{r})\int d\mathbf{r}'\,\xi^*(\mathbf{p}'\,,\,\mathbf{r}')\,\psi_{q'}(\,\mathbf{r}') =\\ = \frac{2\,\mu}{m'}\int d\mathbf{r}'\,V(\,\mathbf{r}\,,\;\mathbf{r}';E_{q'})\,\psi_{q'}(\,\mathbf{r}')\,.\end{gathered} \tag{1.17}$$

Здесь квазипотенциал $V(\,\mathbf{r}\,,\;\mathbf{r}'\,;E_{q'})$ дается в терминах тех же релятивистских плоских волн:

$$V(\,\mathbf{r}\,,\;\mathbf{r}';E_{q'}) = \frac{1}{(2\pi)^6}\int d\,\Omega_{\,\mathbf{p}'}\,\xi(\mathbf{p}'\,,\,\mathbf{r})\int d\,\Omega_{\,\mathbf{k}'}\,\widetilde{V}\,(\,\mathbf{p}'\,,\;\mathbf{k}'\,;E_{q'})\;\xi^*(\mathbf{k}'\,,\,\mathbf{r}')\,.$$

Для случая локального квазипотенциала

$$\widetilde{V}\,(\,\mathbf{p}'\,,\;\mathbf{k}'\,;E_{q'}) \equiv \widetilde{V}\,\left((\,\mathbf{p}'(-)\,\mathbf{k}')^2\,;E_{q'}\right)$$

можно положить

$$V(\,\mathbf{r}\,,\;\mathbf{r}'\,;E_{q'}) = V(\,\mathbf{r}\,;E_{q'})\,\delta\,(\,\mathbf{r}'-\,\mathbf{r})\,.$$

Тогда вместо уравнения (1.17) получим интегральную форму релятивистского уравнения Шредингера в конфигурационном представлении для случая локального квазипотенциала:

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\,\Omega_{\mathbf{p}'}\;(2E_{q'}-2E_{p'})\;\xi(\mathbf{p}',\mathbf{r})\int d\mathbf{r}'\,\xi^*(\mathbf{p}',\mathbf{r}')\,\psi_{q'}(\mathbf{r}')=\\
=\frac{2\,\mu}{m'}\,V(\,\mathbf{r}\,;E_{q'})\,.\psi_{q'}(\,\mathbf{r})\,,
\end{gathered}
\tag{1.18}
$$

Здесь правая часть уже является локальной в $\mathbf{r}$-представлении, а квазипотенциал $V(\,\mathbf{r}\,;E_{q'})\,\delta\,(\,\mathbf{r}'-\,\mathbf{r})$ так же выражается в терминах тех же релятивистских плоских волн:

$$
\begin{gathered}
V(\,\mathbf{r}\,;E_{q'})\,\delta\,(\,\mathbf{r}'-\,\mathbf{r})=\\
=\frac{1}{(2\pi)^6}\int d\,\Omega_{\mathbf{p}'}\int d\,\Omega_{\mathbf{k}'}\,\xi(\mathbf{p}',\mathbf{r})\,\widetilde{V}\left((\,\mathbf{p}'(-)\,\mathbf{k}')^2\,;E_{q'}\right)\,\xi^*(\mathbf{k}',\mathbf{r}')=\\
=\frac{1}{(2\pi)^6}\int d\,\Omega_{\mathbf{\Delta}'}\,\widetilde{V}\left(\mathbf{\Delta}'^2\,;E_{q'}\right)\int d\,\Omega_{\mathbf{p}'}\,\xi(\mathbf{p}',\mathbf{r})\,\xi^*(\,\mathbf{p}'(-)\mathbf{\Delta}',\mathbf{r}')=\\
=\frac{1}{(2\pi)^6}\int d\,\Omega_{\mathbf{\Delta}'}\,\widetilde{V}\left(\mathbf{\Delta}'^2\,;E_{q'}\right)\,\xi(\mathbf{\Delta}',\mathbf{r}')\int d\,\Omega_{\mathbf{p}'}\,\xi(\mathbf{p}',\mathbf{r})\,\xi^*(\,\mathbf{p}',\mathbf{r}')=\\
=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\,\Omega_{\mathbf{\Delta}'}\,\widetilde{V}\left(\mathbf{\Delta}'^2\,;E_{q'}\right)\,\xi(\mathbf{\Delta}',\mathbf{r})\,\delta\,(\,\mathbf{r}'-\,\mathbf{r})\,,
\end{gathered}
$$

где $\mathbf{\Delta}'=\,\mathbf{p}'(-)\,\mathbf{k}'$, а $d\,\Omega_{\mathbf{k}'}=d\,\Omega_{\mathbf{p}'(-)\mathbf{\Delta}'}$, поскольку элемент объема инвариантен относительно преобразований Лоренца (1.11), и было принято во внимание условие полноты в (1.13) и правило сложения релятивистских плоских волн

$$
\xi^*(\,\mathbf{p}'(-)\mathbf{\Delta}',\mathbf{r}')=\xi^*(\,\mathbf{p}',\mathbf{r}')\,\xi(\mathbf{\Delta}',\mathbf{r}')\,.
$$

Отсюда также следует, что квазипотенциал

$$
V(\,\mathbf{r}\,;E_{q'})=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\,\Omega_{\mathbf{\Delta}'}\,\widetilde{V}\left(\mathbf{\Delta}'^2\,;E_{q'}\right)\,\xi(\mathbf{\Delta}',\mathbf{r})
$$

является локальным в смысле геометрии Лобачевского и в общем случае зависит параметрически от энергии $E_{q'}$ одной эффективной релятивистской частицы массы m' (подробности см. в [82]–[84]).

Отметим, что использование условия полноты в (1.13) и уравнения (1.14) позволяет нам выразить левую часть уравнений (1.17) и (1.18) в терминах конечных разностей:

$$\left(2E_{q'} - \hat{H}_0\right) \psi_{q'}(\mathbf{r}) = \frac{2\,\mu}{m'} \int d\mathbf{r'}\, V(\,\mathbf{r}\,,\ \mathbf{r'}; E_{q'})\, \psi_{q'}(\,\mathbf{r'})\,, \tag{1.19}$$

$$\left(2E_{q'} - \hat{H}_0\right) \psi_{q'}(\mathbf{r}) = \frac{2\,\mu}{m'} V(\,\mathbf{r}\,; E_{q'})\, \psi_{q'}(\,\mathbf{r})\,. \tag{1.20}$$

Известно, что решения этих уравнений в принципе могут содержать произвольные функции переменной r с периодом i, так называемые i-периодические константы, которые появляются в решениях из-за конечно-разностной природы гамильтониана (1.15). Для некоторых задач, таких как определение спектра связанных состояний, эти i-периодические константы неважны. Однако для целей выделения ресуммирующих факторов их необходимо учитывать. Поэтому при нахождении ресуммирующих факторов будем рассматривать интегральное уравнение (1.18), для которого обобщим метод, предложенный в работе [72], устраняющий указанную неоднозначность.

ГЛАВА 2
ПРЯМАЯ ЗАДАЧА С ЛОКАЛЬНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

В данной главе (раздел 2.2) в рамках РКП-подхода в квантовой теории поля [12] рассматриваются [85] свойства решений конечно-разностного квазипотенциального уравнения (1.20) с локальным квазипотенциалом $V(\,\mathbf{r}\,; E_{q'})$, описывающим взаимодействие двух бесспиновых частиц произвольных масс m_1 , m_2. При этом, исходя из требования простоты, будем считать, что локальный квазипотенциал является сферически-симметричным и не зависит от энергии: $V(\,\mathbf{r}\,; E_{q'}) \equiv w(r)$.

Раздел 2.3 настоящей главы посвящен выводу интегральной формы квазипотенциального уравнения для парциальной волновой функции.

2.1. Конечно-разностное квазипотенциальное уравнение для парциальной волновой функции

В уравнении (1.20) удобно перейти от старых переменных и функций к новым безразмерным переменным и новым функциям по формулам

$$\begin{gathered}
\mathbf{q}' = m'\,\mathbf{q}\,,\ \mathbf{q} = \operatorname{sh}\chi_q\,\mathbf{n}_q\,,\ |\mathbf{n}_q| = 1\,,\ q = |\,\mathbf{q}| = \operatorname{sh}\chi_q\,, \\
m'\,\mathbf{r} = \boldsymbol{\rho}\,,\ |\mathbf{r}| = r\,,\ |\boldsymbol{\rho}| = \rho\,,\ E_{q'} = m'\,E_q\,,\ E_q = \sqrt{1+\,\mathbf{q}^2}\,, \qquad (2.1)\\
\psi_{q'}(\mathbf{r}) \equiv \psi_q(\boldsymbol{\rho})\,,\ V(\,\mathbf{r}\,;\,E_{q'}) \equiv V(\lambda'\boldsymbol{\rho}\,;\,E_q)\,,\ 0 \le\, q\,,\,\rho \le \infty\,.
\end{gathered}$$

Тогда уравнение (1.20) преобразуется к виду

$$\begin{gathered}
\left[\operatorname{ch}\left(i\,\frac{\partial}{\partial\,\rho}\right) + \frac{i}{\rho}\operatorname{sh}\left(i\,\frac{\partial}{\partial\,\rho}\right) - \frac{1}{2\,\rho^2}\,\Delta_{\theta\,,\,\varphi}\,\exp\left(i\,\frac{\partial}{\partial\,\rho}\right) - \operatorname{ch}\chi_q\right]\,\psi_q\,(\boldsymbol{\rho}) + \\
+\frac{\mu}{m'^2}\,V\,(\lambda'\boldsymbol{\rho}\,;\,E_q)\,\psi_q\,(\boldsymbol{\rho}) = 0\,. \qquad (2.2)
\end{gathered}$$

Теперь, считая квазипотенциал $V\,(\lambda'\boldsymbol{\rho}\,;\,E_q)$ сферически симметричным, перейдем в уравнении (2.2) к сферической системе координат и учтем разложение волновой функции $\psi_q(\boldsymbol{\rho})$ по парциальным волнам [85], [86]

$$\psi_q(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\,\ell+1)\, i^{\ell}\, \frac{\varphi_\ell(\rho\,,\chi_q)}{\rho}\, P_\ell\!\left(\frac{\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\rho}}{q\,\rho}\right) \tag{2.3}$$

и соотношение для функций Лежандра первого рода $P_\mu^\nu(z)$

$$\Delta_{\theta,\varphi} P_\ell\!\left(\frac{\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\rho}}{q\,\rho}\right) = -\ell\,(\ell+1)\, P_\ell\!\left(\frac{\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\rho}}{q\,\rho}\right). \tag{2.4}$$

Тогда вместо уравнения (2.2) получим дифференциально-разностное уравнение для парциальной волновой функции с локальным квазипотенциалом:

$$\left[\nabla + \left(1 + \frac{\ell\;(\ell+1)}{\rho^{(2)}}\right)\,\nabla^* - 2\,\mathrm{ch}\,\chi' + W\,(\rho)\right]\,\varphi_\ell\,(\rho\,,\,\chi') = 0\,, \tag{2.5}$$

где

$$\begin{gathered}\nabla = \exp\left(-i\,\frac{d}{d\,\rho}\right)\,,\ \nabla^* = \exp\left(i\,\frac{d}{d\,\rho}\right)\,,\\ W\,(\rho) = \frac{2\,\mu\,w\,(\lambda'\rho)}{m'^2}\,,\ \rho^{(2)} = \rho\,(\rho+i)\,.\end{gathered} \tag{2.6}$$

Здесь $\chi_q \equiv \chi'$ – быстрота, которая связана с E_q соотношением $E_q = \mathrm{ch}\,\chi'$, а функция

$$(-\rho)^{(l)} = i^l\,\frac{\Gamma(l+i\,\rho)}{\Gamma(i\,\rho)} \tag{2.7}$$

называется обобщенной степенью [73], где $\Gamma(z)$ – гамма-функция.

Напомним, что в уравнении (2.5) ℓ нумерует собственные значения инвариантно определенного относительного орбитального момента двух частиц [87], а модуль релятивистской относительной координаты ρ нумерует собственные значения оператора Казимира группы Лоренца и, следовательно, является релятивистским инвариантом [73], [83], [87].

2.2. Свойства и спектральная плотность регулярного решения для локального квазипотенциала

2.2.1. Основные предположения

Будем считать, что локальный квазипотенциал $W\,(\rho)$ имеет n_ℓ связанных состояний с энергиями

$$0 \leq E_j = E_{q'j}/m' = \operatorname{ch}\chi_j < 1\,,\ \chi_j = i\,\kappa_j\,,\ 0 < \kappa_j \leq \frac{\pi}{2}\,, \qquad j = 1, 2, ..., n_\ell\,. \tag{2.8}$$

Для существования единственного решения уравнения (2.5) с граничным условием

$$\varphi_\ell\,(0\,,\,\chi') = 0 \tag{2.9}$$

потребуем, чтобы, как и в нерелятивистском случае, локальный $W(\rho)$ квазипотенциал удовлетворял условию

$$\rho\,W\,(\rho) \in L_1\,(0\,,\,\infty)\ . \tag{2.10}$$

Требование в (2.10) означает, что регулярное решение $\varphi_\ell(\rho\,,\,\chi')$ и решение Йоста $f_\ell(\rho\,,\,\chi')$ уравнения (2.5) обладают необходимыми свойствами, которые будут изложены ниже.

Для того, чтобы строго определить регулярное решение $\varphi_\ell(\rho\,,\,\chi')$ и решение Йоста $f_\ell(\rho\,,\,\chi')$ уравнения (2.5), рассмотрим случай свободного движения ($W\,(\rho) \equiv 0$).

2.2.2. Свободные решения и их свойства

Свободными решениями уравнения (2.5) при выключенном взаимодействии ($W\,(\rho) \equiv 0$) являются релятивистские аналоги функций Риккати–Бесселя $s_\ell\,(\rho\,,\,\chi')$, $c_\ell\,(\rho\,,\,\chi')$ и Риккати–Ханкеля $e_\ell^{(1\,,\,2)}\,(\rho\,,\,\chi')$. Выражения для этих решений, в принятых здесь обозначениях, имеют вид [83], [88]:

$$\begin{aligned} s_\ell(\rho\,,\,\chi') &= \sqrt{\frac{\pi\,\operatorname{sh}\chi'}{2}}\,e^{i\,\pi(\ell+1)}\,(-\rho)^{(\ell+1)}\,P_{-1/2+i\,\rho}^{-1/2-\ell}(\,\operatorname{ch}\chi') = \\ &= \frac{e^{i\,\pi(\ell+1)-\pi\,\rho}\,(-\rho)^{(\ell+1)}}{\Gamma\,(\ell+1-i\,\rho)}\,Q_\ell^{-i\,\rho}(\,\operatorname{cth}\chi')\,, \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$c_\ell(\rho\,,\,\chi') = e^{-i\,\pi\,\ell}\,s_{-\ell-1}(\rho\,,\,\mathrm{ch}\,\chi') =$$
$$= \sqrt{\frac{\pi\,\mathrm{sh}\,\chi'}{2}}\,(-\rho)^{(-\ell)}\,P^{1/2+\ell}_{-1/2+i\,\rho}(\,\mathrm{ch}\,\chi')\,, \tag{2.12}$$

$$e^{(1\,,\,2)}_\ell(\rho\,,\,\chi') = c_\ell(\rho\,,\,\chi') \pm i\,s_\ell(\rho\,,\,\chi') =$$
$$= -i\,\sqrt{\frac{2\,\mathrm{sh}\,\chi'}{\pi}}\,(-\rho)^{(-\ell)}\,Q^{1/2+\ell}_{-1/2\mp i\,\rho}(\,\mathrm{ch}\,\chi') = e^{-i\,\pi\,\ell/2}\,P_\ell(\,\mathrm{cth}\,\chi')\,. \tag{2.13}$$

Здесь $P^{\nu}_{\mu}(z)$, $Q^{\nu}_{\mu}(z)$ – функции Лежандра первого и второго рода, а обобщенная степень $(-\rho)^{(l)}$ определена в (2.7).

Для функций $s_\ell\,(\rho\,,\,\chi')$ и $e^{(1\,,\,2)}_\ell\,(\rho\,,\,\chi')$ для действительных ρ и произвольных значений χ' и ℓ выполняются правила комплексного сопряжения

$$[s_\ell\,(\rho\,,\,\chi')]^* = \nu_{\ell^*}\,(\rho)\;s_{\ell^*}\,(\rho\,,\,\chi'^*)\;, \tag{2.14}$$

$$\left[e^{(1\,,\,2)}_\ell\,(\rho\,,\,\chi')\right]^* = \nu_{\ell^*}\,(\rho)\;e^{(2\,,\,1)}_{\ell^*}\,(\rho\,,\,\chi'^*)\;, \tag{2.15}$$

и свойства “симметрии”

$$s_\ell\,(\rho\,,\,-\chi') = e^{i\,\pi(\ell+1)}\,s_\ell\,(\rho\,,\,\chi')\;, \tag{2.16}$$

$$e^{(1\,,\,2)}_\ell\,(\rho\,,\,-\chi') = e^{i\,\pi\,\ell}\,e^{(2\,,\,1)}_\ell\,(\rho\,,\,\chi')\;, \tag{2.17}$$

где

$$\nu_\ell\,(\rho) = e^{i\,\pi\,(\ell+1)}\,\frac{(\rho)^{(\ell+1)}}{(-\rho)^{(\ell+1)}}\,, \tag{2.18}$$

а обобщенная степень $(-\rho)^{(l)}$ определена в (2.7).

В качестве свободных решений уравнения (2.5) при выключенном взаимодействии ($W\,(\rho) \equiv 0$) выберем функции $s_\ell\,(\rho\,,\,\chi')$ и $e^{(1\,,\,2)}_\ell\,(\rho\,,\,\chi')$. Поведения этих решений вблизи начала координат и на бесконечности даются выражениями [83], [88]:

$$s_\ell(\rho\,,\,\chi') \approx \frac{e^{i\,\pi(\ell+1)}\,(-\rho)^{(\ell+1)}}{\Gamma(\ell+1)}\,Q_\ell(\mathrm{cth}\,\chi') \;\to\; \rho\,Q_\ell(\mathrm{cth}\,\chi')\,e^{-i\,\pi\,\ell/2}\,,\quad \rho \to 0\,, \tag{2.19}$$

$$s_\ell\,(\rho\,,\,\chi') \approx \sin\left(\rho\,\chi' - \frac{\pi\,\ell}{2}\right)\,,\;\rho\,\chi' \to \infty\,, \tag{2.20}$$

$$e_\ell^{(1\,,2)}(0\,,\chi') = e^{-i\,\pi\,\ell/2}\,P_\ell(\mathrm{cth}\,\chi')\,, \tag{2.21}$$

$$e_\ell^{(1\,,2)}(\rho\,,\chi') \approx e^{\pm i\,(\rho\,\chi' - \pi\,\ell/2)}\,,\ \rho\,\chi' \to \infty\,, \tag{2.22}$$

где ℓ принимает только целые значения.

Более того, для функций $s_\ell(\rho\,,\chi')$ справедливы свойства ортогональности и полноты [73], [83], [88]

$$(2/\pi)\int\limits_0^\infty d\rho\, s_\ell(\rho\,,\chi')\, s_\ell^*(\rho\,,\chi) = \delta\,(\chi' - \chi)\,, \tag{2.23}$$

$$(2/\pi)\int\limits_0^\infty d\chi'\, s_\ell(\rho'\,,\chi')\, s_\ell^*(\rho\,,\chi') = \delta\,(\rho' - \rho)\,. \tag{2.24}$$

Именно свойства ортогональности (2.23) и полноты (2.24) будут положены в основу метода решения квазипотенциального уравнения с сепарабельным взаимодействием (Глава 4).

2.2.3. Регулярное решение, решения и функции Йоста, их свойства

Введем, используя поведение (2.19) и (2.22) свободных решений $s_\ell\,(\rho\,,\chi')$ и $e_\ell^{(1\,,2)}\,(\rho\,,\chi')$ уравнения (2.5) при выключенном взаимодействии ($W\,(\rho) \equiv 0$), релятивистские регулярное решение $\varphi_\ell\,(\rho\,,\chi')$, удовлетворяющее граничному условию (2.9), и решения Йоста $f_\ell^{(\pm)}\,(\rho\,,\chi')$ уравнения (2.5), полагая [5]:

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{e^{-i\,\pi\,(\ell+1)}\,\Gamma\,(\ell+1)}{(-\rho)^{(\ell+1)}}\,\varphi_\ell\,(\rho\,,\chi') = 1\,, \tag{2.25}$$

$$\lim_{\rho\,\chi'\to\infty} e^{\mp i\,(\rho\,\chi' - \pi\,\ell/2)}\, f_\ell^{(\pm)}\,(\rho\,,\chi') = 1\,. \tag{2.26}$$

Легко проверить, что при комплексных значениях χ' и действительных ρ и ℓ регулярное решение и решения Йоста обладают свойствами "симметрии" и комплексного сопряжения:

$$\varphi_\ell\,(\rho\,,-\chi') = \varphi_\ell\,(\rho\,,\chi')\ , \tag{2.27}$$

$$[\varphi_\ell\,(\rho\,,\chi')]^* = \nu_\ell\,(\rho)\ \varphi_\ell\,(\rho\,,\chi'^*)\ , \tag{2.28}$$

[5] Такой выбор граничного условия для решения Йоста в форме (2.26) означает, что всюду в дальнейшем $\mathrm{Im}\,\chi' \geq 0$ для решения Йоста $f_\ell^{(+)}\,(\rho\,,\chi')$, и $\mathrm{Im}\,\chi' \leq 0$ для решения Йоста $f_\ell^{(-)}\,(\rho\,,\chi')$.

$$\left[f_\ell^{(\pm)}(\rho\,,\,\chi')\right]^* = \nu_\ell(\rho)\; f_\ell^{(\mp)}\left(\rho\,,\,\chi'^*\right)\,, \tag{2.29}$$

$$f_\ell^{(\pm)}(\rho\,,\,-\chi') = e^{\mp i\pi\ell}\, f_\ell^{(\mp)}(\rho\,,\,\chi')\,, \tag{2.30}$$

где функция $\nu_\ell(\rho)$ определена в (2.18).

Заметим, что из условия (2.30) следует, что вместо решения Йоста $f_\ell^{(-)}(\rho\,,\,\chi')$ можно рассматривать функцию $f_\ell(\rho\,,\,-\chi') \equiv f_\ell^{(+)}(\rho\,,\,-\chi')$.

Принимая во внимание последнее замечание, покажем, что при $\operatorname{sh}\chi' \neq 0$ два решения Йоста $f_\ell(\rho\,,\,\pm\chi')$ линейно независимы. С этой целью умножим уравнение (2.5) для решений Йоста $f_\ell(\rho\,,\,\pm\chi')$ соответственно на функции $f_\ell(\rho\,,\,\mp\chi')$, а затем вычтем эти равенства. Тогда получим:

$$W_\nabla\left[f_\ell(\rho\,,\,\chi')\;,\;f_\ell(\rho\,,\,-\chi')\right] \equiv$$

$$\equiv\; f_\ell(\rho\,,\,\chi')\;\nabla f_\ell(\rho\,,\,-\chi') - f_\ell(\rho\,,\,-\chi')\;\nabla f_\ell(\rho\,,\,\chi') =$$

$$= -\left(1 + \frac{\ell\,(\ell+1)}{\rho^{(2)}}\right)\left[f_\ell(\rho\,,\,\chi')\;\nabla^* f_\ell(\rho\,,\,-\chi') - f_\ell(\rho\,,\,-\chi')\;\nabla^* f_\ell(\rho\,,\,\chi')\right]\,.$$

Отсюда следует уравнение для вронскиана [6]:

$$\nabla\, W_\Delta\left[f_\ell(\rho\,,\,\chi')\;,\;f_\ell(\rho\,,\,-\chi')\right] =$$

$$= \left(1 + \frac{\ell\,(\ell+1)}{(-\rho)^{(2)}}\right) W_\Delta\left[f_\ell(\rho\,,\,\chi')\;,\;f_\ell(\rho\,,\,-\chi')\right]\,.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$W_\Delta\left[f_\ell(\rho\,,\,\chi')\;,\;f_\ell(\rho\,,\,-\chi')\right] = \frac{I_\ell(\rho\,,\,\chi')}{\nu_\ell(\rho)}\,,$$

[6] Здесь $\Delta = i\,(\nabla - 1)$ – оператор конечно-разностного дифференцирования, откуда следует, что $\nabla = 1 - i\,\Delta$. Напомним, что в обычных единицах он имеет вид [83], [89], [90]

$$\Delta = \frac{1}{-i\,\lambda'}\,(\nabla - 1) = \frac{1}{-i\,\lambda'}\left[\exp\left(-i\,\lambda'\,\frac{d}{d\rho}\right) - 1\right]\,,\ \lambda' = \frac{\hbar}{m'\,c}\,.$$

Кроме того, мы учли свойство операторов ∇ и ∇^*: $\nabla\,\nabla^* = 1$. А также приняли во внимание, что для обобщенной степени (2.7) имеет место равенство

$$\nabla\,\left(1 + \frac{\ell\,(\ell+1)}{\rho^{(2)}}\right) = 1 + \frac{\ell\,(\ell+1)}{(-\rho)^{(2)}}\,.$$

где $I_\ell(\rho\,,\,\chi')$ – i-периодическая функция. Для ее нахождения произведем замену переменной $\rho = r - i\,n\,, n$ – целое и устремим n к бесконечности. Тогда, принимая во внимание граничное условие (2.26) для решения Йоста $f_\ell\,(\rho\,,\,\chi') \equiv f_\ell^{(+)}\,(\rho\,,\,\chi')$ и рекурентную формулу для Г-функции, находим:

$$I_\ell(\rho\,,\,\chi') = \lim_{n\to\infty} \nu_\ell(r - i\,n)\, W_\Delta\left[f_\ell\,(\rho\,,\,\chi')\;,\; f_\ell\,(\rho\,,\,-\chi')\right]\Big|_{\rho=r-i\,n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{e^{i\,\pi\,(\ell+1)}\,\Gamma(\ell+1-n-i\,r)\,\Gamma(n+i\,r)}{\Gamma(\ell+1+n+i\,r)\,\Gamma(-n-i\,r)}\times\right.$$

$$\times\left[e^{i\,(\rho\chi'-\pi\,\ell/2)}\,i\,e^{i\,(-\rho\chi'-\pi\,\ell/2)}\left(e^{-\chi'}-1\right)-\right.$$

$$\left.\left.-e^{i\,(-\rho\chi'-\pi\ell/2)}\,i\,e^{i\,(\rho\chi'-\pi\,\ell/2)}\left(e^{\chi'}-1\right)\right]\Big|_{\rho=r-i\,n}\right\} = -2\,i\,e^{i\,\pi\,\ell}\,\mathrm{sh}\,\chi'\,.$$

Таким образом, вронскиан для двух решений Йоста $f_\ell\,(\rho\,,\,\pm\chi')$ дается выражением

$$W_\Delta\left[f_\ell\,(\rho\,,\,\chi')\;,\; f_\ell\,(\rho\,,\,-\chi')\right] = 2\,i\,e^{i\,\pi\,(\ell+1)}\,\frac{\mathrm{sh}\,\chi'}{\nu_\ell\,(\rho)} \neq 0 \tag{2.31}$$

при $\mathrm{sh}\,\chi' \neq 0$, а, значит, решения Йоста $f_\ell\,(\rho\,,\,\pm\chi')$ линейно независимы.

Следовательно, регулярное решение $\varphi_\ell\,(\rho\,,\,\chi')$ можно представить в виде линейной комбинации этих двух решений Йоста с постоянными (не зависящими от ρ) коэффициентами:

$$\begin{aligned}\varphi_\ell\,(\rho\,,\,\chi') = \frac{1}{2\,i\,Q_\ell(\mathrm{cth}\,\chi')}&\left[F_\ell^W\,(-\chi')\;f_\ell\,(\rho\,,\,\chi') +\right.\\ &\left.+e^{i\,\pi\,(\ell+1)}\,F_\ell^W\,(\chi')\;f_\ell\,(\rho\,,\,-\chi')\right].\end{aligned} \tag{2.32}$$

Функция $F_\ell^W\,(\chi')$, которую можно представить, используя значение вронскиана (2.31), в виде

$$F_\ell^W\,(\chi') = \frac{Q_\ell\,(\mathrm{cth}\,\chi')}{\mathrm{sh}\,\chi'}\,\nu_\ell\,(\rho)\;W_\Delta\left[f_\ell\,(\rho\,,\,\chi')\;,\;\varphi_\ell\,(\rho\,,\,\chi')\right]\,, \tag{2.33}$$

является функцией Йоста для локального квазипотенциала $W\,(\rho)$ и связана с соответствующим ей фазовым сдвигом $\delta_\ell^W\,(\chi')$ соотношением

$$F_\ell^W\,(\chi') = \left|F_\ell^W\,(\chi')\right|\,\exp\left[-i\,\delta_\ell^W\,(\chi')\right]\,. \tag{2.34}$$

Из соотношений (2.28), (2.29), (2.30), (2.32) и (2.34) следуют свойства "симметрии":

$$\left[F_\ell^W(\chi')\right]^* = F_\ell^W(-\chi'^*) \ , \tag{2.35}$$

$$\left[\delta_\ell^W(\chi')\right]^* = \delta_\ell^W(\chi'^*) \ , \tag{2.36}$$

$$\delta_\ell^W(-\chi') = -\delta_\ell^W(\chi') \ . \tag{2.37}$$

Кроме того, из представления (2.33) и поведения (2.25) регулярного решения $\varphi_\ell(\rho\,,\,\chi')$ вблизи точки $\rho = 0$ устанавливаем, что решение и функция Йоста связаны предельным соотношением

$$F_\ell^W(\chi') = \lim_{\rho\to 0} \frac{e^{-i\pi\ell}\ (2\,\ell+1)\ Q_\ell(\operatorname{cth}\chi')}{\Gamma(\ell+1)\ \operatorname{sh}\chi'\ (-\rho)^{(-\ell)}}\, f_\ell(\rho\,,\,\chi') \ . \tag{2.38}$$

Далее, используя асимптотику (2.26), из представления (2.32) находим

$$\varphi_\ell(\rho\,,\,\chi') \approx \frac{\left|F_\ell^W(\chi')\right|}{Q_\ell(\operatorname{cth}\chi')} \sin\left[\rho\,\chi' - \frac{\pi\,\ell}{2} + \delta_\ell^W(\chi')\right]\ ,\ \rho\,\chi' \to \infty\,. \tag{2.39}$$

Заметим, что из свойства "симметрии" (2.30) следует, что представление (2.32) можно записать в виде

$$\begin{aligned}\varphi_\ell(\rho\,,\,\chi') = \frac{1}{2\,i\,Q_\ell(\operatorname{cth}\chi')}\Big[&F_\ell^{W\,(-)}(\chi')\ f_\ell^{(+)}(\rho\,,\,\chi') - \\ &-F_\ell^{W\,(+)}(\chi')\ f_\ell^{(-)}(\rho\,,\,\chi')\Big]\,,\end{aligned} \tag{2.40}$$

где теперь функции $F_\ell^{W\,(\pm)}(\chi')$ также являются функциями Йоста для локального квазипотенциала $W(\rho)$ и связаны с фазовым сдвигом $\delta_\ell^W(\chi')$ соотношениями

$$F_\ell^{W\,(\pm)}(\chi') = \left|F_\ell^{W\,(\pm)}(\chi')\right| \exp\left[\mp\,i\,\delta_\ell^W(\chi')\right] \ . \tag{2.41}$$

Очевидно, что $F_\ell^{W\,(+)}(\chi') \equiv F_\ell^W(\chi')$.

Далее, из соотношений (2.28)–(2.30), (2.40) и (2.41) следуют свойства комплексного сопряжения и "симметрии":

$$\left[F_\ell^{W\,(\pm)}(\chi')\right]^* = F_\ell^{W\,(\mp)}(\chi'^*) \ , \tag{2.42}$$

$$F_\ell^{W\,(\pm)}(-\chi') = F_\ell^{W\,(\mp)}(\chi') \ . \tag{2.43}$$

2.2.4. Связанные состояния и теорема Левинсона

Прежде всего покажем, что всякий нуль χ_j функции Йоста при $\operatorname{Im}\chi_j > 0$ соответствует связанному состоянию. Действительно, если $F_\ell^W\left(\chi_j\right) = 0$, то из представлений (2.32) и (2.33) следует, что функции $\varphi_\ell(\rho\,,\,\chi_j)$ и $f_\ell(\rho\,,\,\chi_j)$ не являются независимыми:

$$\varphi_\ell(\rho\,,\,\chi_j) = b_\ell(\chi_j)\, f_\ell(\rho\,,\,\chi_j)\,, \quad b_\ell(\chi_j) = \frac{F_\ell^W(-\chi_j)}{2\,i\,Q_\ell(\operatorname{cth}\chi_j)}\,. \tag{2.44}$$

Тогда, в силу условия (2.26), имеем

$$\varphi_\ell(\rho\,,\,\chi_j) = O\left(e^{-\kappa_j\,\rho}\right)\,,\ \rho \to \infty\,, \tag{2.45}$$

т.е. функция $\varphi_\ell(\rho\,,\,\chi_j)$ убывает экспоненциально при $\rho \to \infty$, $\operatorname{Im}\chi_j = \kappa_j > 0$, а, значит, мы имеем связанное состояние с энергией $E_j = \operatorname{ch}\chi_j$. При этом функция Йоста не может обращаться в нуль ни при каких действительных значениях χ', кроме, быть может, точки $\chi' = 0$. Действительно, если $F_\ell^W\left(\chi_R\right) = 0$ при каком-нибудь действительном значении $\chi' = \chi_R \neq 0$, то в силу свойства (2.35) из представлений (2.32) и (2.33) находим, что и $F_\ell^W\left(-\chi_R\right) = 0$. Но тогда из представления (2.32) следует, что $\varphi_\ell\left(\rho\,,\,\chi_R\right) \equiv 0$, а это противоречит граничному условию (2.25).

Далее покажем, что все нули функции Йоста простые и чисто мнимые. С этой целью умножим уравнение (2.5) для двух решений Йоста $f_\ell\left(\rho\,,\,\chi\right)$ и $f_\ell\left(\rho\,,\,\chi'\right)$ со значениями быстрот χ и χ' соответственно на функции $f_\ell\left(\rho\,,\,\chi'\right)$ и $f_\ell\left(\rho\,,\,\chi\right)$, а затем вычтем эти равенства. Тогда получим:

$$W_\nabla\left[f_\ell\left(\rho\,,\,\chi\right)\,,\,f_\ell\left(\rho\,,\,\chi'\right)\right] - \left(1 + \frac{\ell\left(\ell+1\right)}{\rho^{(2)}}\right)\nabla^*\,W_\nabla\left[f_\ell\left(\rho\,,\,\chi\right)\,,\,f_\ell\left(\rho\,,\,\chi'\right)\right] -$$
$$-2\left(\operatorname{ch}\chi' - \operatorname{ch}\chi\right) f_\ell\left(\rho\,,\,\chi\right)\,f_\ell\left(\rho\,,\,\chi'\right) = 0\,.$$

Домножая полученное равенство на $\nu_\ell(\rho)$ и принимая во внимание свойства комплексного сопряжения (2.29) и “симметрии” (2.30) для решения Йоста, находим

$$\begin{aligned} -i\,e^{i\pi\ell}\,\Delta^*\left\{\nu_\ell(\rho)\,W_\nabla\left[f_\ell\left(\rho\,,\,\chi\right)\,,\,f_\ell\left(\rho\,,\,\chi'\right)\right]\right\} &= \\ = 2\left(\operatorname{ch}\chi' - \operatorname{ch}\chi\right) f_\ell\left(\rho\,,\,\chi\right)\,f_\ell^*\left(\rho\,,\,-\chi'^*\right)\,, \end{aligned} \tag{2.46}$$

где было учтено, что

$$\nabla^* \nu_\ell(\rho) = \left(1 + \frac{\ell\,(\ell+1)}{\rho^{(2)}}\right)\, \nu_\ell(\rho)\,. \qquad (2.47)$$

Пусть $\chi = \chi_j$, $\chi' = -\chi_j^*$, $\chi_j = \mathrm{Re}\,\chi_j + i\,\mathrm{Im}\,\chi_j$, $\mathrm{Im}\,\chi_j > 0$. Отсюда находим:

$$\mathrm{ch}\,\chi' - \mathrm{ch}\,\chi\Big|_{\chi=\chi_j\,,\,\chi'=-\chi_j^*} = -2\,i\;\mathrm{sh}\,(\mathrm{Re}\,\chi_j)\;\sin\,(\mathrm{Im}\,\chi_j)\,.$$

Тогда из (2.46) имеем:

$$\begin{aligned} &e^{i\,\pi\,\ell}\,\Delta^*\left\{\nu_\ell(\rho)\,W_\nabla\left[f_\ell\left(\rho\,,\,\chi_j\right)\,,\,f_\ell\left(\rho\,,\,-\chi_j^*\right)\right]\right\} = \\ &= 4\;\mathrm{sh}\,(\mathrm{Re}\,\chi_j)\;\sin\,(\mathrm{Im}\,\chi_j)\,|f_\ell\left(\rho\,,\,\chi_j\right)|^2\,. \end{aligned} \qquad (2.48)$$

Теперь, интегрируя выражение (2.48) по ρ в пределах от 0 до ∞ и принимая во внимание граничное условие (2.26) и предельное соотношение (2.38) для решения Йоста, получим [7]:

$$\begin{aligned} &4\;\mathrm{sh}\,(\mathrm{Re}\,\chi_j)\;\sin\,(\mathrm{Im}\,\chi_j)\int\limits_0^\infty d\rho\,|f_\ell\left(\rho\,,\,\chi_j\right)|^2 = \\ &= e^{i\,\pi\,\ell}\int\limits_0^\infty d\rho\,\Delta^*\left\{\nu_\ell(\rho)\,W_\nabla\left[f_\ell\left(\rho\,,\,\chi_j\right)\,,\,f_\ell\left(\rho\,,\,-\chi_j^*\right)\right]\right\} = \\ &= e^{i\,\pi\,\ell}\sum_{n=1}^\infty\frac{i^{n-1}}{n!}\,\frac{d^{n-1}}{d\rho^{n-1}}\left\{\nu_\ell(\rho)\,W_\nabla\left[f_\ell\left(\rho\,,\,\chi_j\right)\,,\,f_\ell\left(\rho\,,\,-\chi_j^*\right)\right]\right\}\Big|_0^\infty = \\ &= \lim_{\rho\to\infty} e^{i\,\pi\,\ell}\sum_{n=1}^\infty\frac{i^{n-1}}{n!}\,\frac{d^{n-1}}{d\rho^{n-1}}\left\{\nu_\ell(\rho)\,e^{i\,\rho\,(\chi_j-\chi_j^*)-i\,\pi\,\ell}\left[e^{-\chi_j^*}-e^{\chi_j}\right]\right\} = \\ &= -2\;\mathrm{sh}\,(\mathrm{Re}\,\chi_j)\,e^{i\,\mathrm{Im}\,\chi_j}\lim_{\rho\to\infty}\sum_{n=1}^\infty\frac{i^{n-1}}{n!}\,\frac{d^{n-1}}{d\rho^{n-1}}\left\{\nu_\ell(\rho)\,e^{-2\,\rho\,\mathrm{Im}\,\chi_j}\right\} = \\ &= -\frac{2\;\mathrm{sh}\,(\mathrm{Re}\,\chi_j)\;\sin\,(\mathrm{Im}\,\chi_j)}{\mathrm{Im}\,\chi_j}\lim_{\rho\to\infty} e^{-2\,\rho\,\mathrm{Im}\,\chi_j} = 0\,, \end{aligned}$$

---

[7] При вычислении интеграла мы представили оператор $\Delta^* = -i\,(\nabla^* - 1)$ в виде ряда

$$\Delta^* = \sum_{n=1}^\infty\frac{i^{n-1}}{n!}\,\frac{d^n}{d\rho^n}\,,$$

что позволило снять интегрирование. Кроме того, мы учли, что $\nu_\ell(\rho)\Big|_{\rho\to\infty} \approx 1 + O\left(\rho^{-1}\right)$, а, значит, для ряда имеем асимптотику

$$\sum_{n=1}^\infty\frac{i^{n-1}}{n!}\,\frac{d^{n-1}}{d\rho^{n-1}}\left\{\nu_\ell(\rho)\,e^{-2\,\rho\,\mathrm{Im}\,\chi_j}\right\}\Big|_{\rho\to\infty} \approx \frac{1-e^{-2\,i\,\mathrm{Im}\,\chi_j}}{2\,i\,\mathrm{Im}\,\chi_j}\,e^{-2\,\rho\,\mathrm{Im}\,\chi_j} + O\left(\rho^{-1}\,e^{-2\,\rho\,\mathrm{Im}\,\chi_j}\right)\,.$$

если $\operatorname{Im}\chi_j > 0$. Следовательно,

$$4\,\operatorname{sh}\left(\operatorname{Re}\chi_j\right)\,\sin\left(\operatorname{Im}\chi_j\right)\int\limits_0^\infty d\rho\,|f_\ell\left(\rho\,,\,\chi_j\right)|^2 = 0\,, \qquad (2.49)$$

если $\operatorname{Re}\chi_j = 0\,,\ \operatorname{Im}\chi_j > 0$ и $F_\ell^W\left(\chi_j\right) = 0$.

Таким образом, все нули функции Йоста чисто мнимые и в то же время – простые, поскольку функции $\varphi_\ell(\rho\,,\,\chi_j)$ и $f_\ell(\rho\,,\,\chi_j)$ являются зависимыми – соотношение (2.44), а из представления (2.33) следует:

$$\dot{F}_\ell^W\left(\chi_j\right) \equiv \frac{dF_\ell^W\left(\chi'\right)}{d\chi'}\bigg|_{\chi'=\chi_j} =$$
$$= \frac{i\,Q_\ell\left(\operatorname{cth}\chi_j\right)\nu_\ell\left(\rho\right)}{\operatorname{sh}\chi_j}\left\{-\frac{F_\ell^W\left(-\chi_j\right)}{2\,i\,Q_\ell\left(\operatorname{cth}\chi_j\right)}\,W_\nabla\left[f_\ell\left(\rho\,,\,\chi_j\right)\,,\,\dot{f}_\ell\left(\rho\,,\,\chi_j\right)\right] + \right.$$
$$\left. + W_\nabla\left[f_\ell\left(\rho\,,\,\chi_j\right)\,,\,\dot{\varphi}_\ell\left(\rho\,,\,\chi_j\right)\right]\right\} \neq 0\,.$$

Для вывода теоремы Левинсона заметим, что функция Йоста (2.34) для локального квазипотенциала $W\left(\rho\right)$ является аналитической в полосе $0 \leq \operatorname{Im}\chi' \leq \pi/2$, имеет там n_ℓ простых нулей с энергиями (2.8), так что $F_\ell^W(\chi_j) = 0$, и не имеет там полюсов. Тогда, применяя теорему о логарифмическом вычете для функции Йоста $F_\ell^W(\chi')$ по границе Γ^+ полосы $0 \leq \operatorname{Im}\chi' \leq \pi/2$ и учитывая нечетность фазового сдвига, находим

$$2\,\pi\,n_\ell = -i\lim_{R\to+\infty\,,\,\eta\to+0}\int\limits_{\Gamma^+} d\ln F_\ell^W(\chi') = -\lim_{R\to+\infty\,,\,\eta\to+0}\operatorname{var}\delta_\ell^W(\chi')\Big|_{\Gamma^+} =$$
$$= 2\left[\delta_\ell^W\left(0\right) - \delta_\ell^W\left(\infty\right)\right]\,.$$

Здесь $\operatorname{var}\delta_\ell^W(\chi')\,|_{\Gamma^+}$ – вариация фазового сдвига при обходе точкой χ' замкнутого контура Γ^+ – границы полосы $0 \leq \operatorname{Im}\chi' \leq \pi/2$. Отсюда приходим к теореме Левинсона для локального квазипотенциала, когда последний допускает существование n_ℓ связанных состояний с энергиями (2.8), в форме [8)]

$$\delta_\ell^W(0) - \delta_\ell^W(\infty) = \delta_\ell^W(0) = \pi\,n_\ell\,. \qquad (2.50)$$

[8)] Мы, как всегда, выбрали $\delta_\ell^W(\infty) = 0$.

2.2.5. Условия ортогональности и полноты для регулярного решения

Установим свойство ортогональности двух регулярных решений уравнения (2.5) при двух значениях быстроты χ и χ'^{*}. С этой целью умножим уравнение (2.5) для функций $\varphi_\ell(\rho\,,\,\chi'^{*})$ и $\varphi_\ell(\rho\,,\,\chi)$ соответственно на функции $\varphi_\ell(\rho\,,\,\chi)$ и $\varphi_\ell(\rho\,,\,\chi'^{*})$, а затем вычтем полученные результаты. Тогда, учитывая свойство сопряжения (2.28) для регулярного решения и соотношение (2.47), получим:

$$2\,(\operatorname{ch}\chi - \operatorname{ch}\chi'^{*})\;\varphi_\ell\,(\rho\,,\,\chi)\;\varphi^{*}_\ell\,(\rho\,,\,\chi') =$$

$$= \Delta^{*}\left\{\nu_\ell\,(\rho)\;W_\Delta\left[\varphi_\ell\,(\rho\,,\,\chi)\;,\;\varphi_\ell\,(\rho\,,\,\chi'^{*})\right]\right\}\;.$$

Отсюда, принимая во внимание сноску 7, находим

$$\begin{gathered}\int\limits_0^\infty d\rho\,\varphi_\ell\,(\rho\,,\,\chi)\;\varphi^{*}_\ell\,(\rho\,,\,\chi') = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^{n-1}}{n!\,2\,(\operatorname{ch}\chi - \operatorname{ch}\chi'^{*})}\times\\ \times\frac{d^{n-1}}{d\rho^{n-1}}\left\{\nu_\ell\,(\rho)\;W_\Delta\left[\varphi_\ell\,(\rho\,,\,\chi)\;,\;\varphi_\ell\left(\rho\,,\,\chi'^{*}\right)\right]\right\}\Big|_0^\infty\,.\end{gathered}\tag{2.51}$$

Из (2.51) следует, что при действительных значениях быстрот χ' и χ интеграл в его правой части, как и в случае отсутствия взаимодействия ($W(\rho)\equiv 0$), должен быть пропорционален δ-функции $\delta\,(\operatorname{ch}\chi' - \operatorname{ch}\chi)$. В этом можно непосредственно убедиться, если выполнить в правой части выражения (2.51) вычисления с использованием соотношений (2.25), (2.26), (2.38) и (2.39). Опуская некоторые громоздкие вычисления, получим:

$$\int\limits_0^\infty d\rho\,\varphi_\ell\,(\rho\,,\,\chi)\;\varphi^{*}_\ell\,(\rho\,,\,\chi') =$$

$$= \frac{|F^W_\ell(\chi')|^2}{4\,Q^2_\ell(\operatorname{cth}\chi')}\;\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^{n+1}}{n!}\;\frac{(\chi'-\chi)^{n-1}}{\operatorname{sh}\left[(\chi'-\chi)/2\right]}\times$$

$$\times\cos\left[\left(\rho - \frac{i}{2} + \dot{\delta}^W_\ell\,(\chi)\right)(\chi'-\chi) + \frac{\pi\,n}{2}\right]\Bigg|_{\rho\to\infty} =$$

$$
= \frac{|F_\ell^W(\chi')|^2}{4\,Q_\ell^2(\operatorname{cth}\chi')} \left\{ \frac{i\,\cos\left[\left(\rho - \frac{i}{2} + \dot{\delta}_\ell^W(\chi)\right)(\chi'-\chi)\right]}{(\chi'-\chi)\,\operatorname{sh}\left[(\chi'-\chi)/2\right]} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\chi'-\chi)^{2k}}{(2k)!} + \right.
$$

$$
\left. + \frac{\sin\left[\left(\rho - \frac{i}{2} + \dot{\delta}_\ell^W(\chi)\right)(\chi'-\chi)\right]}{(\chi'-\chi)\,\operatorname{sh}\left[(\chi'-\chi)/2\right]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\chi'-\chi)^{2k+1}}{(2k+1)!} \right\}\Bigg|_{\rho\to\infty} =
$$

$$
= \frac{|F_\ell^W(\chi')|^2}{2\,Q_\ell^2(\operatorname{cth}\chi')} \left\{ \frac{\sin\left[i\,(\chi'-\chi)/2\right]\,\cos\left[\left(\rho - \frac{i}{2} + \dot{\delta}_\ell^W(\chi)\right)(\chi'-\chi)\right]}{\chi'-\chi} + \right.
$$

$$
\left. + \frac{\cos\left[i\,(\chi'-\chi)/2\right]\,\sin\left[\left(\rho - \frac{i}{2} + \dot{\delta}_\ell^W(\chi)\right)(\chi'-\chi)\right]}{\chi'-\chi} \right\}\Bigg|_{\rho\to\infty} =
$$

$$
= \frac{|F_\ell^W(\chi')|^2}{2\,Q_\ell^2(\operatorname{cth}\chi')}\, \frac{\sin\left[\left(\rho + \dot{\delta}_\ell^W(\chi)\right)(\chi'-\chi)\right]}{\chi'-\chi}\Bigg|_{\rho\to\infty} =
$$

$$
= \frac{\pi\,|F_\ell^W(\chi')|^2}{2\,Q_\ell^2(\operatorname{cth}\chi')}\,\delta\,(\chi'-\chi) = \frac{\pi\,\operatorname{sh}\chi'\,|F_\ell^W(\chi')|^2}{2\,Q_\ell^2(\operatorname{cth}\chi')}\,\delta\,(\operatorname{ch}\chi' - \operatorname{ch}\chi)\ .
$$

Здесь мы воспользовались одним из представлений δ-функции (см., например, [91]):

$$
\lim_{r\to\infty} \frac{\sin\left[(r\,(\chi'-\chi)\right]}{\chi'-\chi} = \pi\,\delta\,(\chi'-\chi)\ .
$$

Итак, свойство ортогональности двух регулярных решений уравнения (2.5) при действительных значениях быстрот χ' и χ принимает вид

$$
\int_0^\infty d\rho\,\varphi_\ell\,(\rho\,,\,\chi)\;\varphi_\ell^*\,(\rho\,,\,\chi') = \frac{\delta\,(E-E')}{d\rho_\ell\,(E)\,/dE}\,,
$$

$$
E = \operatorname{ch}\chi \ge 1\,,\; E' = \operatorname{ch}\chi' \ge 1\,, \tag{2.52}
$$

где

$$
\frac{d\rho_\ell\,(E)}{dE} = \frac{2}{\pi}\,\operatorname{sh}^{-1}\chi\,Q_\ell^2\,(\operatorname{cth}\chi)\,\left|F_\ell^W\,(\chi)\right|^{-2}\,,
$$

$$
E = \operatorname{ch}\chi \ge 1\,,\; E' = \operatorname{ch}\chi' \ge 1 \tag{2.53}
$$

– спектральная плотность при действительных значениях быстрот χ' и χ.

Теперь установим свойство ортогональности двух регулярных решений уравнения (2.5), соответствующих двум связанным состояниям со значением быстрот $\chi' = \chi_{j'}^* = -\chi_{j'}$ и $\chi = \chi_j$. Тогда, учитывая четность регулярного решения и соотношение (2.44), выражение (2.51) запишется в виде

$$\int\limits_0^\infty d\rho\, \varphi_\ell\left(\rho\,,\,\chi_j\right)\,\varphi_\ell^*\left(\rho\,,\,\chi_{j'}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^{n-1}\,b_\ell(\chi_j)\,b_\ell(\chi_{j'})}{n!\,2\,\left(\operatorname{ch}\chi_j - \operatorname{ch}\chi_{j'}\right)}\times$$
$$\times\frac{d^{n-1}}{d\rho^{n-1}}\left\{\nu_\ell\left(\rho\right)\,W_\Delta\left[f_\ell\left(\rho\,,\,\chi_j\right)\,,\,f_\ell\left(\rho\,,\,\chi_{j'}\right)\right]\right\}\Big|_0^\infty . \tag{2.54}$$

Правая часть выражения (2.54) легко вычисляется, если воспользоваться предельными соотношениями (2.26) и (2.38). В результате получим:

$$\int\limits_0^\infty d\rho\, \varphi_\ell\left(\rho\,,\,\chi_j\right)\,\varphi_\ell^*\left(\rho\,,\,\chi_{j'}\right) =$$
$$= \frac{i\,b_\ell(\chi_j)\,b_\ell(\chi_{j'})\,(-1)^\ell\,(e^{\chi_{j'}} - e^{\chi_j})\,e^{i\,\rho\,(\chi_{j'}+\chi_j)}\,(e^{-\chi_{j'}-\chi_j} - 1)}{2\left(\operatorname{ch}\chi_{j'} - \operatorname{ch}\chi_j\right)\,\left(\chi_{j'}+\chi_j\right)} \xrightarrow[\rho\to\infty]{} 0 \tag{2.55}$$

при $\chi_{j'} = i\,\kappa_{j'} \neq \chi_j = i\,\kappa_j\,,\ 0 < \kappa_{j'}\,,\ \kappa_j \leq \pi/2$.

В то же время при $\chi_{j'} = \chi_j$ имеем неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Следовательно, вместо выражения (2.54) будем иметь:

$$\int\limits_0^\infty d\rho\, \varphi_\ell\left(\rho\,,\,\chi_j\right)\,\varphi_\ell^*\left(\rho\,,\,\chi_j\right) =$$
$$= -\frac{b_\ell(\chi_j)}{2\,\operatorname{sh}\chi_j^*}\int\limits_0^\infty d\rho\,\Delta^*\left\{\nu_\ell\left(\rho\right)\,W_\nabla\left[f_\ell\left(\rho\,,\,\chi_j\right)\,,\,\dot{\varphi}_\ell\left(\rho\,,\,\chi_j^*\right)\right]\right\}. \tag{2.56}$$

Для вычисления интеграла в правой части выражения (2.56), воспользуемся вронскианом

$$W_\nabla\left[f_\ell\left(\rho\,,\,\chi\right)\,,\,\varphi_\ell\left(\rho\,,\,\chi'\right)\right] =$$
$$= \frac{F_\ell^W\left(-\chi'\right)}{2\,i\,Q_\ell\left(\operatorname{cth}\chi'\right)}\,W_\nabla\left[f_\ell\left(\rho\,,\,\chi\right)\,,\,f_\ell\left(\rho\,,\,\chi'\right)\right] + \tag{2.57}$$
$$+\frac{e^{i\,\pi\,(\ell+1)}\,F_\ell^W\left(\chi'\right)}{2\,i\,Q_\ell\left(\operatorname{cth}\chi'\right)}\,W_\nabla\left[f_\ell\left(\rho\,,\,\chi\right)\,,\,f_\ell\left(\rho\,,\,-\chi'\right)\right],$$

который получается, если использовать представление (2.32). Вычислим производную вронскиана (2.57) по χ' и положим $\chi = \chi_j\,,\ \chi' = \chi_j^* = -\chi_j$.

Тогда, учитывая, что $F_\ell^W(\chi_j)=0$, находим:

$$W_\nabla\left[f_\ell\left(\rho\,,\,\chi_j\right)\,,\,\dot{\varphi}_\ell\left(\rho\,,\,{\chi_j}^*\right)\right]=$$

$$=\frac{e^{-i\,\pi\,\ell}\,\dot{F}_\ell^W\left(\chi_j\right)}{2\,i\,Q_\ell\left(\mathrm{cth}\,\chi_j\right)}\,W_\nabla\left[f_\ell\left(\rho\,,\,\chi_j\right)\,,\,f_\ell\left(\rho\,,\,-\chi_j\right)\right]-$$
$$-\frac{\dot{F}_\ell^W\left(-\chi_j\right)}{2\,i\,Q_\ell\left(\mathrm{cth}\,\chi_j\right)}\,W_\nabla\left[f_\ell\left(\rho\,,\,\chi_j\right)\,,\,\dot{f}_\ell\left(\rho\,,\,\chi_j\right)\right]\,. \tag{2.58}$$

Теперь, используя (2.58), можем вычислить интеграл в правой части выражения (2.56), если так же воспользоваться предельными соотношениями (2.26) и (2.38). В результате получим:

$$\int\limits_0^\infty d\rho\,\varphi_\ell\left(\rho\,,\,\chi_j\right)\,\varphi_\ell^*\left(\rho\,,\,\chi_j\right)=$$

$$=-\frac{b_\ell(\chi_j)}{4\,i\,\mathrm{sh}\,\chi_j\,Q_\ell\left(\mathrm{cth}\,\chi_j\right)}\,\sum_{n=1}^\infty\frac{i^n}{n!}\,\frac{d^{n-1}}{d\rho^{n-1}}\Big\{\nu_\ell\left(\rho\right)\,\Big[-2\,\mathrm{sh}\,\chi_j\,\dot{F}_\ell^W\left(\chi_j\right)-$$
$$-F_\ell^W\left(-\chi_j\right)\,e^{-i\,\pi\,\ell+\chi_j+2\,i\rho\,\chi_j}\Big]\Big\}\Big|_{\rho\to\infty}= \tag{2.59}$$
$$=-\frac{b_\ell(\chi_j)\,\dot{F}_\ell^W\left(\chi_j\right)}{2\,i\,Q_\ell\left(\mathrm{cth}\,\chi_j\right)}\,\sum_{n=1}^\infty\frac{i^n}{n!}\,\frac{d^{n-1}}{d\rho^{n-1}}\Big\{\nu_\ell\left(\rho\right)\Big\}\Big|_{\rho\to\infty}=$$
$$=-\frac{b_\ell(\chi_j)\,\dot{F}_\ell^W\left(\chi_j\right)}{2\,Q_\ell\left(\mathrm{cth}\,\chi_j\right)}==-\,\frac{F_\ell^W(-\chi_j)\,\dot{F}_\ell^W(\chi_j)}{4\,i\,Q_\ell^2(\mathrm{cth}\,\chi_j)}\,,$$

где так же приняли во внимание сноску 7.

Точно также доказывается, что свойство ортогональности двух регулярных решений $\varphi_\ell\left(\rho\,,\,\chi\right)$ и $\varphi_\ell^*\left(\rho\,,\,\chi_{j'}\right)$ уравнения (2.5), соответствующих двум значениям быстрот χ и $\chi'=\chi_{j'}^*=-\chi_{j'}$, имеет вид

$$\int\limits_0^\infty d\rho\,\varphi_\ell\left(\rho\,,\,\chi\right)\,\varphi_\ell^*\left(\rho\,,\,\chi_{j'}\right)=0\,. \tag{2.60}$$

Итак, учитывая, что локальный квазипотенциал $W(\rho)$ имеет n_ℓ связанных состояний с энергиями (2.8), свойство ортогональности двух регулярных решений уравнения (2.5), в соответствии с полученными в

(2.52), (2.53), (2.55), (2.59) и (2.60) значениями, запишем в виде:

$$\int\limits_0^\infty d\rho\, \varphi_\ell\,(\rho\,,\,\chi)\;\varphi_\ell^*\,(\rho\,,\,\chi') =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\delta\,(E-E')}{d\rho_\ell\,(E)\,/dE}\,,\;\; E=\operatorname{ch}\chi \geq 1\,,\; E'=\operatorname{ch}\chi' \geq 1\,; \\ C_{\ell j}^{-1}\,\delta_{jj'}\,,\;\; 0 \leq E_j = \operatorname{ch}\chi_j < 1\,,\; 0 \leq E_j' = \operatorname{ch}\chi_j' < 1\,, \\ \chi=\chi_j = i\,\kappa_j\,,\; \chi'=\chi_j'=i\,\kappa_j'\,,\; 0<\kappa_j\,,\;\kappa_j' \leq \pi/2\,, \\ j\,,\; j' = 1,2,...,n_\ell\,; \\ 0\,,\;\; E=\operatorname{ch}\chi \geq 1\,,\; 0 \leq E_j' = \operatorname{ch}\chi_j' < 1\,,\; \chi'=\chi_j' = i\,\kappa_j'\,, \\ 0<\kappa_j' \leq \pi/2\,. \end{cases} \tag{2.61}$$

Здесь

$$C_{\ell j}^{-1} = \int\limits_0^\infty d\rho\, \varphi_\ell(\rho\,,\,\chi_j)\,\varphi_\ell^*(\rho\,,\,\chi_j) = -\frac{F_\ell^W(-\chi_j)\,\dot F_\ell^W(\chi_j)}{4\,i\,Q_\ell^2(\operatorname{cth}\chi_j)}\,, \tag{2.62}$$

$$\dot F_\ell^W(\chi_j) = \frac{dF_\ell^W(\chi_j)}{d\chi_j}\,, \quad j=1,2,...,n_\ell\,,$$

суть нормировочные константы, а спектральная плотность в этом случае дается выражением

$$\frac{d\rho_\ell\,(E)}{dE} = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\operatorname{sh}^{-1}\chi\, Q_\ell^2\,(\operatorname{cth}\chi)\,\left|F_\ell^W\,(\chi)\right|^{-2}\,,\;\; E=\operatorname{ch}\chi \geq 1\,; \\ \sum\limits_{j=1}^{n_\ell} C_{\ell j}\,\delta\,(E-E_j)\,,\;\; \leq E = \cos\,\kappa < 1\,, \\ 0 \leq E_j = \operatorname{ch}\chi_j < 1\,,\; \chi_j = i\,\kappa_j\,,\; 0<\kappa,\;\kappa_j \leq \pi/2\,. \end{cases} \tag{2.63}$$

С другой стороны, мы имеем свойство полноты

$$\int\limits_0^\infty d\rho_\ell\,(E)\;\varphi_\ell\,(\rho\,,\,\chi)\;\varphi_\ell^*\,(\rho'\,,\,\chi) = \sum_{j=1}^{n_\ell} C_{\ell j}\,\varphi_\ell\left(\rho\,,\,\chi_j\right)\;\varphi_\ell^*\left(\rho'\,,\,\chi_j\right) + \\ + \int\limits_0^\infty d\chi\,\tau_\ell\,(\chi)\;\varphi_\ell\,(\rho\,,\,\chi)\;\varphi_\ell^*\,(\rho'\,,\,\chi) = \delta\,(\rho'-\rho)\,, \tag{2.64}$$

где

$$\tau_\ell\,(\chi) = \frac{2}{\pi}\,Q_\ell^2\,(\operatorname{cth}\chi)\,\left|F_\ell^W\,(\chi)\right|^{-2}\,. \tag{2.65}$$

Отметим, что при отсутствии взаимодействия условия (2.61) и (2.64) переходят в обычные условия ортогональности и полноты для свободных решений $s_\ell(\rho,\chi)$ – соотношения (2.23) и (2.24).

2.3. Интегральная форма квазипотенциального уравнения для парциальной волновой функции

В уравнении (1.18) перейдем от старых переменных и функций к новым безразмерным переменным и новым функциям по формулам

$$\begin{gathered}
\mathbf{q}' = m'\mathbf{q}\,,\; \mathbf{p}' = m'\mathbf{p}\,,\; \mathbf{q} = \operatorname{sh}\chi_q\,\mathbf{n}_q\,,\; \mathbf{p} = \operatorname{sh}\chi_p\,\mathbf{n}_p\,,\; |\mathbf{n}_q| = |\mathbf{n}_p| = 1\,,\\
\boldsymbol{\rho} = m'\mathbf{r}\,,\; \boldsymbol{\rho}' = m'\mathbf{r}'\,,\; d\mathbf{r}' = m'^{-3}\,d\boldsymbol{\rho}'\,,\; |\boldsymbol{\rho}| = \rho\,,\; |\boldsymbol{\rho}'| = \rho'\,,\\
|\,\mathbf{r}| = r\,,\; |\,\mathbf{r}'| = r'\,,\; d\,\Omega_{\mathbf{p}'} = m'^3\,d\,\Omega_{\mathbf{p}}\,,\; d\,\Omega_{\mathbf{p}} = \frac{d\mathbf{p}}{E_p}\,,\\
E_{q'} = m'E_q\,,\; E_{p'} = m'E_p\,,\; E_q = \sqrt{1+\,\mathbf{q}^2}\,,\; E_p = \sqrt{1+\,\mathbf{p}^2}\,,\\
\xi(\mathbf{p}'\,,\,\mathbf{r}) \equiv \xi(\mathbf{p}\,,\,\boldsymbol{\rho}) = (E_p -\,\mathbf{p}\cdot\,\mathbf{n})^{-1-i\,\rho}\,,\; \psi_{q'}(\mathbf{r}) \equiv \psi_q(\boldsymbol{\rho})\,,\\
\Psi_{q'}(\,\mathbf{p}') \equiv m'^{-3}\,\Psi_q(\,\mathbf{p})\,,\; V(\,\mathbf{r}\,;\,E_{q'}) \equiv\, V(\lambda'\,\boldsymbol{\rho}\,;\,E_q)\,.
\end{gathered}\tag{2.66}$$

Тогда уравнение (1.18) преобразуется к виду

$$\begin{gathered}
\frac{1}{(2\,\pi)^3}\int d\,\Omega_{\mathbf{p}}\;(2\,E_q - 2\,E_p)\;\xi(\mathbf{p}\,,\,\boldsymbol{\rho})\int d\boldsymbol{\rho}'\,\xi^*(\mathbf{p}\,,\,\boldsymbol{\rho}')\,\psi_q(\boldsymbol{\rho}') =\\
= \frac{2\,\mu}{m'^2}\,V(\lambda'\,\boldsymbol{\rho}\,;\,E_q)\,\psi_q(\boldsymbol{\rho})\,.
\end{gathered}\tag{2.67}$$

Теперь, считая квазипотенциал $V(\lambda'\,\boldsymbol{\rho}\,;E_q)$ сферически симметричным, перейдем в уравнении (2.67) к сферической системе координат, в которой

$$d\,\mathbf{p} = p^2\,\sin\theta_p\,dp\,d\,\theta_p\,d\varphi_p\,,\; p = |\,\mathbf{p}| = \operatorname{sh}\chi_p\,,\; q = |\,\mathbf{q}| = \operatorname{sh}\chi_q\,,$$

$$d\boldsymbol{\rho}' = \rho'^2\,\sin\theta_{\rho'}\,d\rho'\,d\theta_{\rho'}\,d\varphi_{\rho'}\,,$$

$$0 \le\, p\,,\,q\,,\,\rho' \le \infty\,,\; 0 \le \theta_p\,,\,\theta_{\rho'} \le \pi\,,\; 0 \le \varphi_p\,,\,\varphi_{\rho'} \le 2\pi\,,$$

а также учтем формулу (2.4), соотношение

$$\int\limits_0^{2\pi} d\,\varphi_\rho\int\limits_0^{\pi} d\,\theta_\rho\,\sin\theta_\rho\,P_\ell\!\left(\frac{\boldsymbol{\rho}'\cdot\boldsymbol{\rho}}{\rho'\,\rho}\right)P_{\ell''}\!\left(\frac{\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\rho}'}{q\,\rho'}\right) = \frac{4\,\pi\,\delta_{\ell\ell''}}{2\,\ell+1}\,P_\ell\!\left(\frac{\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\rho}}{q\,\rho}\right)\tag{2.68}$$

для функций Лежандра первого рода и разложения по парциальным волнам для волновой функции $\psi_q(\boldsymbol{\rho})$, соотношение (2.3), и для релятивистских плоских волн (1.12):

$$\xi(\mathbf{p}\,,\,\boldsymbol{\rho}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\,\ell+1)\, i^{\ell}\, p_{\ell}(\rho\,,\,\mathrm{ch}\,\chi_p)\, P_{\ell}\left(\frac{\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\rho}}{p\,\rho}\right). \tag{2.69}$$

Здесь функция

$$p_{\ell}(\rho\,,\,\mathrm{ch}\,\chi') = \sqrt{\frac{\pi}{2\,\mathrm{sh}\,\chi'}}\,\frac{(-1)^{\ell+1}}{\rho}\,(-\rho)^{(\ell+1)}\,P^{-1/2-\ell}_{-1/2+i\,\rho}(\mathrm{ch}\,\chi') \tag{2.70}$$

является решением уравнения (1.14); быстроты $\chi_p \equiv \chi\,,\ \chi_q \equiv \chi'$ связаны с $E_p\,,\,E_q$ соотношениями $E_p = \mathrm{ch}\,\chi\,,\ E_q = \mathrm{ch}\,\chi'$, а обобщенная степень $(-\rho)^{(\ell+1)}$ определена в (2.7).

Тогда вместо уравнения (2.67) получим интегральное уравнение для парциальной волновой функции:

$$\begin{gathered}\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty} d\chi\,(\mathrm{sh}\,\chi)^2\,\left(2\,\mathrm{ch}\,\chi' - 2\,\mathrm{ch}\,\chi\right)\,p_{\ell}(\rho\,,\,\mathrm{ch}\,\chi)\times\\ \times\int\limits_0^{\infty} d\rho'\,\rho'\,p_{\ell}^{\,*}(\rho'\,,\,\mathrm{ch}\,\chi)\,\varphi_{\ell}(\rho'\,,\,\chi') = \frac{2\,\mu}{m'^2}\,\frac{V(\lambda'\,\rho\,;\,E_q)\,\varphi_{\ell}(\rho\,,\,\chi')}{\rho}\,.\end{gathered} \tag{2.71}$$

Наконец, используя формулу [73]

$$p_{\ell}(\rho\,,\,\mathrm{ch}\,\chi) = \frac{(-1)^{\ell}\,(\mathrm{sh}\,\chi)^{\ell}}{\rho^{(\ell+1)}}\left(\frac{d}{d\,\mathrm{ch}\,\chi}\right)^{\ell}\left(\frac{\sin\,\rho\chi}{\mathrm{sh}\,\chi}\right),$$

уравнение (2.71) приводится к виду

$$\begin{gathered}\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty} d\chi\,\frac{(\mathrm{sh}\,\chi)^{2\,\ell+2}\,(-1)^{\ell+1}}{\rho^{(\ell+1)}}\,\left(2\,\mathrm{ch}\,\chi' - 2\,\mathrm{ch}\,\chi\right)\times\\ \times\left(\frac{d}{d\,\mathrm{ch}\,\chi}\right)^{\ell}\left(\frac{\sin\,\rho\chi}{\mathrm{sh}\,\chi}\right)\left(\frac{d}{d\,\mathrm{ch}\,\chi}\right)^{\ell}\frac{1}{\mathrm{sh}\,\chi}\int\limits_0^{\infty} d\rho'\,\frac{\rho'\,\sin\,\rho'\chi}{(-\rho')^{(\ell+1)}}\,\varphi_{\ell}(\rho'\,,\,\chi') =\\ = \frac{2\,\mu}{m'^2}\,\frac{V(\lambda'\,\rho\,;\,E_q)\,\varphi_{\ell}(\rho\,,\,\chi')}{\rho}\,.\end{gathered} \tag{2.72}$$

Очевидно, уравнение (2.72) отличается от соответствующего уравнения для случая равных масс (см. выражение (9) в [92]) только коэффициентом $2\mu/m'^2$, переходящим в $1/m$ при $m_1 = m_2 = m$.

Итак, сформулируем основные результаты и выводы настоящей главы.

В рамках РКП-подхода в квантовой теории поля разработан метод исследования свойств решений конечно-разностного квазипотенциального уравнения с локальным квазипотенциалом, описывающим взаимодействие двух релятивистских бесспиновых частиц произвольных масс m_1 , m_2.

На основе развитого метода впервые:

а) определены граничные условия для существования и единственности решений конечно-разностного квазипотенциального уравнения с локальным квазипотенциалом;

б) исследованы свойства регулярного решения, решений Йоста и функций Йоста;

в) получено асимптотическое выражение для регулярного решения для любого орбитального момента $\ell \geq 0$;

г) определены условия существования связанных состояний;

д) показано, что нули функции Йоста простые и чисто мнимые и соответствуют связанным состояниям и дан вывод теоремы Левинсона;

е) найдены выражения для спектральной плотности и нормировочные константы;

ж) получены условия ортогональности и полноты для регулярного решения.

ГЛАВА 3

ЧАСТНЫЕ ВИДЫ ЛОКАЛЬНЫХ КВАЗИПОТЕНЦИАЛОВ

3.1. Вводная часть

Большой интерес представляет нахождение точных решений для различных вариантов релятивистских квазипотенциальных уравнений с различными модельными квазипотенциалами, которые являлись бы релятивистскими аналогами широко используемых в нерелятивистской теории феноменологических потенциалов. Такая задача для некоторых модельных квазипотенциалов ставилась и решалась в ряде работ. Так, в случае частиц равных масс задача с кулоновским потенциалом типа хромодинамического была решена в работах [17], [20], [42], [43], [45], [75], [76], [83], [93]. Получению точных решений интегральных квазипотенциальных уравнений в импульсном представлении и конечно-разностных уравнений в конфигурационном представлении с модельными квазипотенциалами типа суперпозиции квазипотенциалов однобозонного обмена и также в случае частиц равных были посвящены работы [94]–[97].

Решения интегральных квазипотенциальных уравнений в случае частиц равных масс для запирающих потенциалов типа линейного и осцилляторного были получены в работах [41], [76], [98]–[100], а в работе [101], даны решения для квазипотенциалов вида $V(r) = -g^2/r^2$ и $V(r) = -g^2/(r^2 \pm a^2)$.

Точные решения для широкого класса квазипотенциальных уравнений, описывающих двухчастичные связанные системы в случае взаимодействия, взятого в виде суперпозиции квазипотенциалов однобозонного обмена, были рассмотрены в работе [42[, [45].

Рассмотрению одномерных релятивистских задач о связанных состояниях и рассеянии для суперпозиции двух δ-потенциалов была посвящена работа [102], а в работе [103] получены точные решения релятивистских одномерных интегральных уравнений, описывающих рассеяние двух частиц с потенциалами вида производных первого, второго и третьего порядков от δ-функции. На основании полученных решений были найдены коэффициенты прохождения и отражения и исследованы некоторые их свойства.

Изложению метода решения интегрального квазипотенциального уравнения в конфигурационном представлении с кулоноводобным квазипотенциалом, описывающим взаимодействие двух релятивистских бесспиновых частиц равных масс, с целью нахождения релятивистских пороговых ресуммирующих факторов для произвольного орбитального момента $\ell \geq 0$ были посвящены работы [77], [78], [92], [104].

В настоящей главе (раздел 3.2) в рамках РКП-подхода в квантовой теории поля [12] излагается метод решения конечно-разностного квазипотенциального уравнения (2.5) для парциальной волновой функции с кулоновским квазипотенциалом, описывающим взаимодействие двух бесспиновых частиц произвольных масс $m_1\,, m_2$.

Раздел 3.3 настоящей главы посвящен излжению метода решения интегрального квазипотенциального уравнения в конфигурационном представлении для случая s-волны ($\ell = 0$) с линейным квазипотенциалом и также в случае частиц произвольных масс $m_1\,, m_2$.

3.2. Кулоновский потенциал

В данном разделе рассмотрим пример решения конечно-разностного квазипотенциального уравнения (2.5) для парциальной волновой функции с кулоновским квазипотенциалом (2) ($Z_1 = Z_2 = 1$), описывающим взаимодействие двух бесспиновых частиц произвольных масс $m_1\,, m_2$, который, в принятых нами обозначениях (2.6), запишем в виде

$$W(\rho) = -\,\frac{\tilde{\alpha}}{\rho}\,, \tag{3.1}$$

где $\tilde{\alpha} = 2\,\mu\,\alpha/m'$, $\alpha > 0$.

3.2.1. Регулярное решение

Релятивистское регулярное решение $\varphi_\ell^c(\rho\,,\,\chi')$ уравнения (2.5) с кулоновским квазипотенциалом (3.1), удовлетворяющее граничному условию (2.25), будем искать в виде

$$\varphi_\ell^c(\rho\,,\,\chi') = (-\rho)^{(\ell+1)}\; e^{i\,\rho\,\chi'}\,\phi_\ell(\rho\,,\,\chi')\;. \tag{3.2}$$

Подстановка представления (3.2) в уравнение (2.5) с кулоновским квазипотенциалом (3.1) приводит к уравнению

$$\begin{aligned}(\ell+1+i\,\rho)\,\nabla\phi_\ell(\rho\,,\,\chi') + \Big[-2\,i\,\rho+ \\ +\left(i\,\rho - \frac{i\,\tilde{\alpha}}{2\,\operatorname{sh}\chi'}\right)2\,\operatorname{sh}\chi'\,e^{-\chi'}\Big]\phi_\ell(\rho\,,\,\chi') + \\ +(\ell+1-i\,\rho)\left(2\,\operatorname{sh}\chi'\,e^{-\chi'}-1\right)\nabla^*\phi_\ell(\rho\,,\,\chi') = 0\,,\end{aligned} \tag{3.3}$$

которое совпадает с соотношением Гаусса для смежных гипергеометрических функций [105]

$$\begin{aligned}(c-b)\,F\,(a\,,\,b-1\,;\,c\,;\,z) + [2\,b-c+(a-b)\,z]\,F\,(a\,,\,b\,;\,c\,;\,z) + \\ +b\,(z-1)\,F\,(a\,,\,b+1\,;\,c\,;\,z) = 0\,,\end{aligned} \tag{3.4}$$

при

$$\begin{aligned}a = \ell+1-\frac{i\,\tilde{\alpha}}{2\,\operatorname{sh}\chi'}\,,\; b = \ell+1-i\,\rho\,, \\ c = 2\,\ell+2\,,\; z = 2\,\operatorname{sh}\chi'\,e^{-\chi'} = 1-e^{-2\,\chi'}\,.\end{aligned} \tag{3.5}$$

Отсюда следует, что решение для функции $\phi_\ell(\rho\,,\,\chi')$ дается выражением

$$\phi_\ell(\rho\,,\,\chi') = F\left(\ell+1-\frac{i\,\tilde{\alpha}}{2\,\operatorname{sh}\chi'}\,,\,\ell+1-i\,\rho\,;\,2\,\ell+2\,;\,1-e^{-2\,\chi'}\right)\,. \tag{3.6}$$

Тогда из выражений (3.2) и (3.6) находим, что регулярное решение $\varphi_\ell^c(\rho\,,\,\chi')$ уравнения (2.5) с кулоновским квазипотенциалом (3.1), удовлетворяющее граничному условию (2.25), имеет (с точностью до i-периодического множителя) вид

$$\begin{aligned}\varphi_\ell^c(\rho\,,\,\chi') = (-\rho)^{(\ell+1)}\,\exp\left[i\,\rho\,\chi' + \frac{i\,\tilde{\alpha}\,\chi'}{2\,\operatorname{sh}\chi'} + i\,\pi(\ell+1)\right]\,\times \\ \times\,F\left(\ell+1-\frac{i\,\tilde{\alpha}}{2\,\operatorname{sh}\chi'}\,,\,\ell+1-i\,\rho\,;\,2\,\ell+2\,;\,1-e^{-2\,\chi'}\right)\,,\end{aligned} \tag{3.7}$$

где фактор $e^{i\,\tilde{\alpha}\,\chi'/(2\,\mathrm{sh}\,\chi')+i\,\pi(\ell+1)}$ введен для того, чтобы при действительных значениях ρ, χ' и ℓ решение (3.7), в соответствии с формулой [105]

$$F\,(a\,,\,b\,;\,c\,;\,z) = (1-z)^{c-a-b}\,F\,(c-a\,,\,c-b\,;\,c\,;\,z)\;, \tag{3.8}$$

удовлетворяло условию сопряжения (2.28).

Найдем асимптотику регулярного решения (3.7) при $\rho \to \infty$. Для этого воспользуемся асимптотическим разложением для гипергеометрической функции (см. вывод в приложении A, формула (A.7))

$$\begin{gathered} F\,(a\,,\,b\,;\,c\,;\,z)\Big|_{|b|\to\infty} \approx \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)}\left(\frac{e^{-i\,\pi}}{b\,z}\right)^{a} + \frac{\Gamma(c))\,(1-z)^{c-a-b}}{\Gamma(a)\,(b\,z)^{c-a}}\,, \\ -\frac{3\,\pi}{2} < \arg\,(b\,z) < \frac{\pi}{2}\,. \end{gathered} \tag{3.9}$$

Тогда, применяя формулу (3.9) к решению (3.7), получим

$$\begin{gathered} \varphi^{c}_{\ell}\,(\rho\,,\,\chi')\Big|_{\rho\to\infty} \approx \frac{\Gamma(2\,\ell+2)\,e^{(\ell+1)\,\chi'}}{i\,\Gamma(\ell+1)\,(2\,\mathrm{sh}\,\chi')^{\ell+1}}\times \\ \times\left\{\frac{\Gamma(\ell+1)e^{-\pi\tilde{\alpha}/(4\,\mathrm{sh}\,\chi')}}{\Gamma\left(\ell+1+\frac{i\tilde{\alpha}}{2\,\mathrm{sh}\,\chi'}\right)}\exp\left[i\left(\rho\chi'+\frac{\tilde{\alpha}}{2\,\mathrm{sh}\,\chi'}\ln\,(2\rho\,\mathrm{sh}\,\chi')-\frac{\pi\ell}{2}\right)\right]-\right. \\ \left.-\frac{\Gamma(\ell+1)e^{-\pi\tilde{\alpha}/(4\,\mathrm{sh}\,\chi')}}{\Gamma\left(\ell+1-\frac{i\tilde{\alpha}}{2\,\mathrm{sh}\,\chi'}\right)}\exp\left[-i\left(\rho\chi'+\frac{\tilde{\alpha}}{2\,\mathrm{sh}\,\chi'}\ln\,(2\rho\,\mathrm{sh}\,\chi')-\frac{\pi\ell}{2}\right)\right]\right\}, \end{gathered} \tag{3.10}$$

где при вычислении асимптотики в (3.10) было учтено, что для обобщенной степени (2.7) имеет место асимптотическая оценка

$$(-\rho)^{(\ell+1)} = i^{\ell+1}\,\frac{\Gamma(\ell+1+i\,\rho)}{\Gamma(i\,\rho)}\Big|_{\rho\to\infty} \approx e^{i\,\pi\,(\ell+1)}\,\rho^{\ell+1}\,.$$

3.2.2. Функции Йоста и энергии связанных состояний

Для того чтобы найти выражения для функций Йоста, сравним представление (2.40) с асимптотиками в (3.10) и (2.22). Из сравнения следует, что решения Йоста $f^{c\,(\pm)}_{\ell}(\rho\,,\,\chi')$ должны удовлетворять граничным условиям

$$\lim_{\rho\chi'\to\infty}\exp\left[\mp i\left(\rho\chi'+\frac{\tilde{\alpha}}{2\,\mathrm{sh}\,\chi'}\ln\,(2\rho\,\mathrm{sh}\,\chi')-\frac{\pi\ell}{2}\right)\right]f^{c\,(\pm)}_{\ell}\,(\rho\,,\,\chi') = 1\,, \tag{3.11}$$

а функции Йоста и фазовый сдвиг для кулоновского квазипотенциала (3.1), согласно представлению (2.41), даются выражениями

$$F_\ell^{c\,(\pm)}(\chi') = \frac{\Gamma(\ell+1)\, e^{-\pi\tilde{\alpha}/(4\,\mathrm{sh}\,\chi')}}{\Gamma\left(\ell+1\mp\frac{i\tilde{\alpha}}{2\,\mathrm{sh}\,\chi'}\right)}\,, \tag{3.12}$$

$$\delta_\ell^c(\chi') = \arg\Gamma\left(\ell+1-\frac{i\,\tilde{\alpha}}{2\,\mathrm{sh}\,\chi'}\right). \tag{3.13}$$

Тем самым асимптотическое выражение (3.10) принимает вид

$$\begin{gathered}\varphi_\ell^c(\rho\,,\,\chi') \approx \frac{2\left|F_\ell^{c\,(+)}(\chi')\right|\Gamma(2\,\ell+2)\,e^{(\ell+1)\,\chi'}}{\Gamma(\ell+1)\,(2\,\mathrm{sh}\,\chi')^{\ell+1}}\,\sin\Big[\rho\,\chi'+ \\ +\frac{\tilde{\alpha}}{2\,\mathrm{sh}\,\chi'}\ln(2\rho\,\mathrm{sh}\,\chi')-\frac{\pi\,\ell}{2}+\delta_\ell^c(\chi')\Big]\,,\ \rho\,\chi'\to\infty\,.\end{gathered} \tag{3.14}$$

Подчеркнем, что регулярное решение (3.7) конечно-разностного уравнения (2.5) с кулоновским квазипотенциалом (3.1), удовлетворяющее граничному условию (2.25), а, значит, и его асимптотическое выражение (3.14), было получено нами с точностью до нормировочного множителя, который в общем случае является i-периодической функцией. Поэтому, как было отмечено в конце главы 1, решение (3.7) непригодно для нахождения кулоновских ресуммирующих факторов. Решение же кулоновской задачи, пригодное для нахождения кулоновских ресуммирующих факторов, будет рассматрено в главе 6. В тоже время решение (3.7) можно использовать для определения спектра связанных состояний, поскольку для этой задачи i-периодические константы неважны. Действительно, связанные состояния с энергиями $E_j = \mathrm{ch}\,\chi_j\,(j = 0, 1, \ldots, n_\ell)$ определяются нулями функции Йоста (см. раздел 2.2.4)

$$F_\ell^{c\,(+)}\left(\chi_j\right) = 0\,,$$

лежащих в области $0 < \mathrm{Im}\,\chi_j \leq \pi/2$. Тогда из выражения (3.12) следует условие для энергий связанных состояний в случае релятивистского кулоновского квазипотенциала (3.1):

$$\frac{1}{\Gamma\left(\ell+1-\frac{i\,\tilde{\alpha}}{2\,\mathrm{sh}\,\chi_j}\right)} = 0\,. \tag{3.15}$$

Отсюда находим явный вид для энергий связанных состояний:

$$E_j = \cos \kappa_j = \sqrt{1 - \frac{\tilde{\alpha}^2}{4\,(\ell + 1 + j)^2}}\,, \tag{3.16}$$
$$\chi_j = i\,\kappa_j\,,\; 0 < \kappa_j \leq \pi/2\,,\; j = 0, 1, \ldots, n_\ell\,.$$

3.2.3. Решения Йоста

Второе линейно независимое решение конечно-разностного уравнения (2.5) при отсутствии взаимодействия ($W(\rho) \equiv 0$) можно получить из решения $s_\ell(\rho\,,\chi')$ заменой $\ell \longrightarrow -\ell - 1$, где ℓ – целое число. Однако такой прием, как и в нерелятивистском случае, не применим при наличии кулоновского взаимодействия.

Для того чтобы получить второе линейно независимое решение конечно-разностного уравнения (2.5) с кулоновским квазипотенциалом (3.1) в случае, когда ℓ – целое число, заметим, что вторым нерегулярным решением гипергеометрического уравнения является функция [106]

$$u_2(z) = F(a\,,\,b\,;\,1 + a + b - c\,;\,1 - z)\,, \tag{3.17}$$
$$1 + a + b - c \neq 0\,, -1, -2, \ldots;\; c = \text{целому числу}\,,$$

в то время как регулярное решение дается выражением

$$u_1(z) = F(a\,,\,b\,;\,c\,;\,z)\,, \quad c = 1, 2, \ldots\,, \tag{3.18}$$

где значения для параметров $a\,, b\,, c\,, z$ даны в (3.5).

Отсюда следует, что решения Йоста $f_\ell^{c\,(\pm)}(\rho\,,\chi')$ должны выражаться через функцию (3.17) и так, чтобы выполнялись граничные условия (3.11). Для того чтобы найти асимптотику функции (3.17), заметим, что по определению вырожденных гипергеометрических функций имеем [106]:

$$\Phi(a\,;\,c\,;\,z') = \lim_{b \to \infty} F\left(a\,,\,b\,;\,c\,;\,\frac{z'}{b}\right)\,, \tag{3.19}$$

$$\lim_{c \to \infty} F\left(a\,,\,b\,;\,c\,;\,1 - \frac{c}{z'}\right) = (z')^a \Psi\left(a\,;\,a - b + 1\,;\,z'\right)\,. \tag{3.20}$$

Кроме того, для функции $u_2(z)$ справедливы формулы [106]:

$$\begin{gathered} u_2(z) = F(a\,,\,b\,;\,1+a+b-c\,;\,1-z) = \\ = z^{-a} F\left(a\,,\,1+a-c\,;\,1+a+b-c\,;\,1-\frac{1}{z}\right)\,. \end{gathered} \tag{3.21}$$

Тогда из (3.17), (3.20) и (3.21) находим:

$$\begin{gathered} \lim_{b\to\infty} u_2(z) = z^{-a} \lim_{b\to\infty} F\left(a, 1+a-c; 1+a+b-c; 1-\frac{b}{b\,z}\right) \approx \\ \approx b^a \Psi\left(a\,;\,c\,;\,b\,z\right)\,,\; b\to\infty\,. \end{gathered} \tag{3.22}$$

С другой стороны, учитывая представление [106]

$$\begin{gathered} u_2(z) = \frac{\Gamma(1+a+b-c)\,\Gamma(1-c)}{\Gamma(1+b-c)\,\Gamma(1+a-c)}\,F(a\,,\,b\,;\,c\,;\,z) + \\ + \frac{\Gamma(1+a+b-c)\Gamma(c-1)}{\Gamma(b)\Gamma(a)}\,z^{1-c} F\left(1+a-c, 1+b-c; 2-c; z\right) \end{gathered} \tag{3.23}$$

и асимптотическую формулу (3.19), получим

$$\begin{gathered} \lim_{b\to\infty} u_2(z) \approx b^a \left[\frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(1+a-c)}\,\Phi(a\,;\,c\,;\,b\,z) + \right. \\ \left. + \frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)}\,(b\,z)^{1-c}\,\Phi\left(1+a-c\,;\,2-c\,;\,b\,z\right)\right],\; b\to\infty\,, \end{gathered} \tag{3.24}$$

где при вычислении предела по b также использовали асимптотическую формулу Стирлинга для гамма-функции [105]:

$$\Gamma(az+b)\Big|_{z\to\infty} \approx \sqrt{2\,\pi}\,e^{-a\,z}\,(a\,z)^{az+b-1/2}\,,\; a>0\,,\; |\arg z| < \pi\,. \tag{3.25}$$

Теперь, сравнивая асимптотические выражения (3.22) и (3.24) и учитывая, что для вырожденных гипергеометрических функций $\Psi(a\,;\,b\,;\,z)$ и $\Phi(a\,;\,b\,;\,z)$ справедливы (см., например, [105]) соотношения

$$\begin{gathered} \Psi(a\,;\,c\,;\,z') = \frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(1+a-c)}\,\Phi(a\,;\,c\,;\,z') + \\ + \frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)}\,(z')^{1-c}\,\Phi\left(1+a-c\,;\,2-c\,;\,z'\right)\,, \end{gathered} \tag{3.26}$$

$$\Psi(a\,;\,c\,;\,z') \approx (z')^{-a}\,,\; z'\to\infty\,,\; z' = b\,z\,, \tag{3.27}$$

легко находим:

$$u_2(z)\Big|_{b\to\infty} \approx b^a\,\Psi(a\,;\,c\,;\,b\,z) \approx z^{-a}\,,\;b\to\infty\,. \tag{3.28}$$

Значит, чтобы получить нужную асимптотику, т.е. $\sim (b\,z)^{-a}$, необходимо, в соответствии с формулами (3.17) и (3.23), вместо функции $u_2(z)$ взять функцию

$$\begin{gathered}\tilde u_2(z) = \frac{\Gamma(1+b-c)}{\Gamma(1+a+b-c)}\,u_2(z) = \\ = \frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(1+a-c)}\,F(a\,,\,b\,;\,c\,;\,z) + \\ + \frac{\Gamma(1+b-c)\Gamma(c-1)}{\Gamma(b)\Gamma(a)}\,z^{1-c}F\left(1+a-c, 1+b-c; 2-c; z\right) = \\ = \frac{\Gamma(1+b-c)}{\Gamma(1+a+b-c)}\,F(a\,,\,b\,;\,1+a+b-c\,;\,1-z)\,.\end{gathered} \tag{3.29}$$

Непосредственной подстановкой функции (3.29) в соотношение Гаусса (3.4) для смежных гипергеометрических функций убеждаемся, что при замене

$$a\to 1+a-c\,,\;b\to 1+b-c\,,\;c\to 2-c$$

функция $\tilde u_2(z)$ удовлетворяет соотношению (3.4), а, значит, она является решением и уравнения (3.3).

Итак, принимая во внимание выражения (3.2), (3.5) и (3.29), находим, что решения Йоста $f_\ell^{c\,(\pm)}(\rho\,,\,\chi')$ уравнения (2.5) с кулоновским квазипотенциалом (3.1), удовлетворяющие свойствам комплексного сопряжения (2.29) и граничным условиям (3.11), имеют вид

$$\begin{gathered}f_\ell^{c\,(\pm)}(\rho\,,\,\chi') = \frac{(2\,\mathrm{sh}\,\chi')^{\ell+1}\,\mathrm{sh}(\pi\,\rho)\,\Gamma(-\ell\mp i\,\rho)\;(-\rho)^{(\ell+1)}}{\mathrm{sh}\left[\pi\,\left(\rho+\tilde\alpha/(2\,\mathrm{sh}\,\chi')\right)\right]\,\Gamma\left[1\mp i\,\rho\mp i\,\tilde\alpha/(2\,\mathrm{sh}\,\chi')\right]}\times \\ \times\exp\left[\pm\,i\,\rho\,\chi'\pm\frac{i\,\tilde\alpha\,\chi'}{2\,\mathrm{sh}\,\chi'}\pm\frac{i\,\pi}{2}+\frac{\pi\,\tilde\alpha}{4\,\mathrm{sh}\,\chi'}-(\ell+1)\,\chi'\right]\times \\ \times F\left(\ell+1\mp\frac{i\,\tilde\alpha}{2\,\mathrm{sh}\,\chi'}\,,\,\ell+1\mp i\,\rho\,;\,2\,\ell+2\,;\,e^{-2\chi'}\right)\,.\end{gathered} \tag{3.30}$$

Используя выражения для функций и решений Йоста, соотношения (3.12) и (3.30), а также формулы [105]

$$F(a,b;c;z)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\,F(a,b;a+b-c+1;1-z)+$$
$$+(1-z)^{c-a-b}\,\frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\times \tag{3.31}$$
$$\times F\left(c-a,c-b;c-a-b+1;1-z\right)\;,\;|\arg(1-z)|<\pi\,,$$

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin(\pi\,z)}\,, \tag{3.32}$$

можно показать, что регулярное решение (3.7) может быть представлено в виде соотношения (2.40):

$$\varphi_\ell^c(\rho\,,\,\chi')=\frac{\Gamma(2\,\ell+2)\,e^{(\ell+1)\,\chi'}}{i\,(2\,\mathrm{sh}\,\chi')^{\ell+1}\,\Gamma(\ell+1)}\Big[F_\ell^{c\,(-)}(\chi')\;f_\ell^{c\,(+)}(\rho\,,\,\chi')-$$
$$-F_\ell^{c\,(+)}(\chi')\;f_\ell^{c\,(-)}(\rho\,,\,\chi')\Big]\,, \tag{3.33}$$

которое получено нами с точностью до нормировочного множителя, являющегося в общем случае i-периодической функцией.

В заключение данного раздела приведем полезные соотношения, связывающие решения Йоста $f_\ell^{c\,(\pm)}(\rho\,,\,\chi')$ и функции Йоста $F_\ell^{c\,(\pm)}(\chi')$ при $\rho=\pm i\,\ell$:

$$F_\ell^{c\,(\pm)}(\chi')=-\frac{(2\,\mathrm{sh}\,\chi')^{\ell}\,\Gamma(\ell+1)}{\pi}\times$$
$$\times\,\mathrm{sh}\left(\frac{\pi\,\tilde\alpha}{2\,\mathrm{sh}\,\chi'}\right)\exp\left[-\frac{\pi\,\tilde\alpha}{2\,\mathrm{sh}\,\chi'}\mp\frac{i\,\tilde\alpha\,\chi'}{2\,\mathrm{sh}\,\chi'}\right]\lim_{\rho\to\pm i\,\ell}\frac{f_\ell^{c\,(\pm)}(\rho\,,\,\chi')}{(-\rho)^{(\ell+1)}}\,, \tag{3.34}$$

где при вычислении значения гипергеометрической функции при $\rho=\pm i\,\ell$ использовали формулу [105]

$$F(a\,,\,b\,;\,b\,;\,z)=(1-z)^{-a}\,. \tag{3.35}$$

3.3. Линейный потенциал

В данном разделе в рамках рассматриваемого РКП-подхода в квантовой теории поля [12] предложен метод решения интегрального квазипотенциального уравнения (2.72) для парциальной волновой функции для случая s-волны ($\ell = 0$) с линейным квазипотенциалом, описывающим взаимодействие двух бесспиновых частиц произвольных масс $m_1\,, m_2$. В принятых нами обозначениях (2.66), запишем его в виде

$$V(\lambda'\,\rho) = \frac{\beta\,\rho}{m'}\,, \tag{3.36}$$

где $\beta > 0\,.$

3.3.1. Регулярное и нерегулярные решения

Интегральное квазипотенциальное уравнение (2.72) для парциальной волновой функции в случае s-волны ($\ell = 0$) с линейным квазипотенциалом (3.36) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty d\chi\,(\operatorname{ch}\chi' - \operatorname{ch}\chi)\sin(\rho\chi)\int\limits_0^\infty d\rho'\sin(\rho'\,\chi)\,\varphi_0(\rho',\,\chi') = \\ = \frac{\rho}{\tilde{\beta}}\,\varphi_0(\rho\,,\,\chi')\,, \end{aligned} \tag{3.37}$$

где параметр $\tilde{\beta} = \dfrac{m'^3}{\mu\,\beta}$, как будет установлено ниже, связан с “размером” эффективной релятивистской частицы массы m'.

Поскольку потенциал (3.36) запирающий, то в области $\rho \leq 0$ релятивистское регулярное решение $\varphi_0^R\,(\rho\,,\,\chi')$ тождественно равно нулю, а в области $\rho \geq 0$ оно в силу осцилляций должно обращаться в нуль n раз (см., например, работу [18]). Поэтому релятивистское регулярное решение $\varphi_0^R\,(\rho\,,\,\chi')$ должно удовлетворять нулевому граничному условию

$$\varphi_0^R\,(0\,,\,\chi') = 0\,. \tag{3.38}$$

Решение $\varphi_0\,(\rho\,,\,\chi')$ уравнения (3.37) с линейным квазипотенциалом (3.36) будем искать в форме

$$\varphi_0\,(\rho\,,\,\chi') = \int\limits_{\alpha_-}^{\alpha_+} d\,\zeta\,e^{i\,\rho\,\zeta}\,R_0(\zeta\,,\,\chi')\,. \tag{3.39}$$

Контур интегрирования с концевыми точками α_- и α_+ расположен в комплексной ζ-плоскости и для регулярного, и нерегулярных решений он различен и будет определен ниже. Подставляя представление (3.39) в уравнение (3.37), получим

$$\begin{gathered}\int\limits_{\alpha_-}^{\alpha_+} d\zeta\, R_0(\zeta\,,\chi')\int\limits_0^\infty d\chi\,(\operatorname{ch}\chi'-\operatorname{ch}\chi)\sin(\rho\,\chi)\,\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty d\rho'\sin(\rho'\chi)\,e^{i\rho'\zeta}= \\ =\frac{\rho}{\tilde{\tilde\beta}}\int\limits_{\alpha_-}^{\alpha_+} d\,\zeta\, e^{i\,\rho\,\zeta}\,R_0(\zeta\,,\chi')\,.\end{gathered}\tag{3.40}$$

Интеграл по переменной ρ' может быть вычислен как предел при $R\to+\infty$ следующим образом:

$$\begin{gathered}\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty d\rho'\sin(\rho'\chi)\,e^{i\rho'\zeta}=\frac{1}{i\pi}\lim_{R\to+\infty}\int\limits_0^R d\rho'\left[e^{i\rho'(\zeta+\chi)}-e^{i\rho'(\zeta-\chi}\right]= \\ =\frac{1}{\pi}\lim_{R\to+\infty}\left[-\frac{e^{i\rho'(\zeta+\chi)}}{\zeta+\chi}+\frac{e^{i\rho'(\zeta-\chi}}{\zeta-\chi}\right]\Bigg|_0^R= \\ =\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{\zeta+\chi}-\frac{1}{\zeta-\chi}\right]=\frac{2\,\chi}{\pi\,(\chi^2-\zeta^2)}\,,\ \operatorname{Im}\zeta>0\,.\end{gathered}\tag{3.41}$$

Тогда уравнение (3.40) принимает вид

$$\begin{gathered}\int\limits_{\alpha_-}^{\alpha_+} d\zeta\, R_0(\zeta\,,\chi')\int\limits_0^\infty d\chi\,(\operatorname{ch}\chi'-\operatorname{ch}\chi)\,\frac{2\,\chi\sin(\rho\,\chi)}{\pi\,(\chi^2-\zeta^2)}= \\ =\frac{\rho}{\tilde{\tilde\beta}}\int\limits_{\alpha_-}^{\alpha_+} d\,\zeta\, e^{i\,\rho\,\zeta}\,R_0(\zeta\,,\chi')\,.\end{gathered}\tag{3.42}$$

Интеграл по переменной χ в левой части выражения (3.42) представим в виде

$$\begin{gathered}I=\int\limits_0^\infty d\chi\,(\operatorname{ch}\chi'-\operatorname{ch}\chi)\,\frac{2\,\chi\sin(\rho\,\chi)}{\pi\,(\chi^2-\zeta^2)}= \\ =\int\limits_0^\infty d\chi\,(\operatorname{ch}\chi'-\operatorname{ch}\chi)\,\frac{\chi\,e^{i\,\rho\,\chi}}{i\,\pi\,(\chi^2-\zeta^2)}- \\ -\int\limits_0^\infty d\chi\,(\operatorname{ch}\chi'-\operatorname{ch}\chi)\,\frac{\chi\,e^{-i\,\rho\,\chi}}{i\,\pi\,(\chi^2-\zeta^2)}=I_+-I_-\,.\end{gathered}\tag{3.43}$$

Интеграл I_+ в (3.43) вычисляется как предел при $R\to+\infty$ применением основной теоремы теории вычетов вдоль контура, состоящего из отрезка $[0;R]$ действительной оси, отрезка $[iR;i0]$ мнимой оси и части дуги окружности C_R^+ радиуса R с центром в начале координат, находящейся в первой четверти и соединяющей данные отрезки. При этом дуга окружности C_R^+ обходится в положительном направлении, т.е. против часовой стрелки, а значение $\chi = \zeta$ лежит в верхней полуплоскости $\mathrm{Im}\,\chi > 0$, $\mathrm{Re}\chi > 0$, поскольку $\mathrm{Im}\,\zeta > 0$ в соответствии с (3.41). Тогда, принимая во внимание, что интеграл по дуге окружности C_R^+, находящейся в первой четверти, при $R \to +\infty$ равен нулю, получим:

$$I_+ + \int\limits_{i\,\infty}^{i\,0} d\chi\,(\mathrm{ch}\,\chi' - \mathrm{ch}\,\chi)\,\frac{\chi\,e^{i\,\rho\,\chi}}{i\,\pi\,(\chi^2 - \zeta^2)} =$$

$$= 2\,\mathrm{res}\left[(\mathrm{ch}\,\chi' - \mathrm{ch}\,\chi)\,\frac{\chi\,e^{i\,\rho\,\chi}}{i\,\pi\,(\chi^2 - \zeta^2)}\,,\,\chi = \zeta\right].$$

Отсюда, выполнив во втором интеграле замену переменной $\chi = i\,t$, находим:

$$I_+ = \int\limits_0^\infty dt\,(\mathrm{ch}\,\chi' - \cos t)\,\frac{t\,e^{-\rho\,t}}{i\,\pi\,(t^2 + \zeta^2)} + (\mathrm{ch}\,\chi' - \mathrm{ch}\,\zeta)\,e^{i\,\rho\,\zeta}. \tag{3.44}$$

Второй интеграл I_- в (3.43) также вычисляется как предел при $R \to +\infty$, но применением теоремы Коши вдоль контура, состоящего из отрезка $[0; R]$ действительной оси, отрезка $[-iR; -i0]$ мнимой оси и той части дуги окружности C_R^- радиуса R с центром в начале координат, которая находится в четвертой четверти и соединяет данные отрезки. При этом дуга окружности C_R^- теперь обходится в отрицательном направлении, т.е. по часовой стрелке, а интеграл по этой части дуги окружности C_R^- при $R \to +\infty$ также равен нулю. Следовательно, применение теоремы Коши приводит к равенству

$$I_- + \int\limits_{-i\,\infty}^{-i\,0} d\chi\,(\mathrm{ch}\,\chi' - \mathrm{ch}\,\chi)\,\frac{\chi\,e^{-i\,\rho\,\chi}}{i\,\pi\,(\chi^2 - \zeta^2)} = 0\,,$$

откуда, выполнив во втором интеграле замену переменной $\chi = -i\,t$, получим

$$I_- = \int\limits_0^\infty dt\,(\mathrm{ch}\,\chi' - \cos t)\,\frac{t\,e^{-\rho\,t}}{i\,\pi\,(t^2 + \zeta^2)}\,. \tag{3.45}$$

Таким образом, интеграл I в (3.43) в соответствии с соотношениями (3.43) и (3.45) дается выражением

$$I = (\mathrm{ch}\,\chi' - \mathrm{ch}\,\zeta)\,e^{i\,\rho\,\zeta}\,. \tag{3.46}$$

Принимая во внимание последний результат, вместо уравнения (3.42) приходим к уравнению

$$\int\limits_{\alpha_-}^{\alpha_+} d\zeta\, e^{i\rho\zeta} (\operatorname{ch}\chi' - \operatorname{ch}\zeta)\, R_0(\zeta,\chi') = \frac{\rho}{\tilde{\beta}} \int\limits_{\alpha_-}^{\alpha_+} d\zeta\, e^{i\rho\zeta}\, R_0(\zeta,\chi')\,, \tag{3.47}$$

которое справедливо для любого $\rho \geq 0$.

Проинтегрируем правую часть уравнения (3.47) по частям. В результате для функции $R_0(\zeta,\chi')$ получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dR_0(\zeta,\chi')}{d\zeta} - i\,\tilde{\beta}\,(\operatorname{ch}\zeta - \operatorname{ch}\chi')\, R_0(\zeta,\chi') = 0 \tag{3.48}$$

с граничным условием

$$e^{i\rho\zeta}\, R_0(\zeta,\chi')\Big|_{\alpha_-}^{\alpha_+} = 0\,,\ \forall\rho \geq 0\,. \tag{3.49}$$

Уравнение (3.48) является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными. Его общее решение дается выражением

$$R_0(\zeta,\chi') = C_0(\chi')\, \exp\left[i\,\tilde{\beta}\,(\operatorname{sh}\zeta - \zeta\,\operatorname{ch}\chi')\right]\,, \tag{3.50}$$

где $C_0(\chi')$ – нормировочный множитель, зависящий от χ'.

Подставляя решение (3.50) в представление (3.39), находим решение уравнения (3.37) с линейным квазипотенциалом (3.36):

$$\varphi_0\,(\rho\,,\,\chi') = C_0(\chi') \int\limits_{\alpha_-}^{\alpha_+} d\zeta\, e^{i\,\tilde{\beta}\,\operatorname{sh}\zeta + i\,\zeta\left(\rho - \tilde{\beta}\,\operatorname{ch}\chi'\right)}\,. \tag{3.51}$$

Запишем для произвольного ν представления Зоммерфельда для функций Бесселя (см., например, [107]):

$$J_\nu\,(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma_1} dt\, e^{iz\cos t + i\nu(t - \pi/2)}\,, \tag{3.52}$$

$$H_\nu^{(1)}\,(z) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\Gamma_2} dt\, e^{iz\cos t + i\nu(t - \pi/2)}\,, \tag{3.53}$$

$$H_\nu^{(2)}\,(z) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\Gamma_3} dt\, e^{iz\cos t + i\nu(t - \pi/2)}\,, \tag{3.54}$$

где для любого числа η, $0 \le \eta \le \pi$, пути интегрирования $\Gamma_i\,(i = 1, 2, 3)$ представляют собой кривые, которые определяются соотношениями:

$$\Gamma_1 : t \in (-\eta + i\infty\,;\, 2\pi - \eta + i\infty)\ ;$$

$$\Gamma_2 : t \in (-\eta + i\infty\,;\, \eta - i\infty)\ ; \tag{3.55}$$

$$\Gamma_3 : t \in (\eta - i\infty\,;\, 2\pi - \eta + i\infty)\ .$$

Приведенные интегральные представления Зоммерфельда для функций Бесселя справедливы в области $-\eta < \arg z < \pi - \eta$. В представлениях (3.52)–(3.54) положим $t = i\zeta + \pi/2$. Следовательно, $\cos t = -i \operatorname{sh} \zeta$, а пути интегрирования $\Gamma_i\,(i = 1, 2, 3)$ в (3.55) преобразуются в кривые $\gamma_i\,(i = 1, 2, 3)$:

$$\gamma_1 : \zeta \in \left(\infty + i\eta + \frac{i\pi}{2}\,;\, \infty + i\eta - \frac{3i\pi}{2}\right)\ ;$$

$$\gamma_2 : \zeta \in \left(\infty + i\eta + \frac{i\pi}{2}\,;\, -\infty - i\eta + \frac{i\pi}{2}\right)\ ; \tag{3.56}$$

$$\gamma_3 : \zeta \in \left(-\infty - i\eta + \frac{i\pi}{2}\,;\, \infty + i\eta - \frac{3i\pi}{2}\right)\ .$$

Тогда представления (3.52)–(3.54) принимают вид:

$$J_\nu\,(z) = -\frac{1}{2i\pi} \int\limits_{\gamma_1} d\zeta\, e^{z \operatorname{sh} \zeta - \nu\zeta}\,, \tag{3.57}$$

$$H_\nu^{(1)}\,(z) = -\frac{1}{i\pi} \int\limits_{\gamma_2} d\zeta\, e^{z \operatorname{sh} \zeta - \nu\zeta}\,, \tag{3.58}$$

$$H_\nu^{(2)}\,(z) = -\frac{1}{i\pi} \int\limits_{\gamma_3} d\zeta\, e^{z \operatorname{sh} \zeta - \nu\zeta}\,, \tag{3.59}$$

которые справедливы при условии

$$0 \le \eta \le \pi\,,\ -\eta < \arg z < \pi - \eta\,. \tag{3.60}$$

Из сравнения решения (3.51) и представлений (3.57)–(3.59) следует, что их выражения совпадают, если

$$z = i\tilde{\beta}\,,\ \nu = -i(\rho - \tilde{\beta} \operatorname{ch} \chi')\,, \tag{3.61}$$

а в качестве контура интегрирования с концевыми точками α_- и α_+ необходимо выбрать одну из кривых $\gamma_i \, (i = 1, 2, 3)$ в (3.56). При этом значения концевых точек α_- и α_+ и параметров η и z должны удовлетворять граничному условию (3.49) и условиям (3.60) и (3.61).

Принимая во внимание решение (3.51), граничное условие (3.49) принимает вид

$$\begin{gathered}\exp\Big\{i\left[\left(\rho-\tilde{\beta}\,\operatorname{ch}\chi'\right)\,\operatorname{Re}\zeta+\tilde{\beta}\operatorname{sh}(\operatorname{Re}\zeta)\,\cos(\operatorname{Im}\zeta)\right]- \\ -\left[\left(\rho-\tilde{\beta}\,\operatorname{ch}\chi'\right)\,\operatorname{Im}\zeta+\tilde{\beta}\sin(\operatorname{Im}\zeta)\,\operatorname{ch}(\operatorname{Re}\zeta)\right]\Big\}\Big|_{\alpha_-}^{\alpha_+}=0\,.\end{gathered} \tag{3.62}$$

Из (3.62) следует, что для любого $\rho \geq 0$ данное равенство, а, значит, и граничное условие (3.49), будут выполняться, если

$$\operatorname{Re}\alpha_\pm = \pm\infty\,,\ \sin(\operatorname{Im}\alpha_\pm) > 0\,,$$

которое, не ограничивая общности, равносильно условию

$$\operatorname{Re}\alpha_\pm = \pm\infty\,,\ 0 < \operatorname{Im}\alpha_\pm < \pi \text{ или } -\pi < \operatorname{Im}\alpha_\pm < -2\pi\,. \tag{3.63}$$

С другой стороны, из условий (3.60) и (3.61) имеем систему неравенств

$$\begin{cases} 0 \leq \eta \leq \pi\,, \\ -\eta < \arg z < \pi - \eta\,, \\ \arg z = \dfrac{\pi}{2}\,, \end{cases}$$

которая равносильна системе неравенств

$$\begin{cases} 0 \leq \eta < \dfrac{\pi}{2}\,, \\ -\eta < \arg z < \pi - \eta\,, \\ \arg z = \dfrac{\pi}{2}\,, \end{cases} \tag{3.64}$$

откуда следует, что можно выбрать $\eta = 0$. Но тогда кривые интегрирования $\gamma_i \, (i = 1, 2, 3)$ в (3.56) принимают вид

$$\begin{aligned} \gamma_1 : \zeta \in \left(\infty + \frac{i\pi}{2}\,;\, \infty - \frac{3i\pi}{2}\right)\,; \\ \gamma_2 : \zeta \in \left(\infty + \frac{i\pi}{2}\,;\, -\infty + \frac{i\pi}{2}\right)\,; \\ \gamma_3 : \zeta \in \left(-\infty + \frac{i\pi}{2}\,;\, \infty - \frac{3i\pi}{2}\right)\,. \end{aligned} \tag{3.65}$$

Таким образом, в качестве линейно независимых решений уравнения (3.37) с линейным квазипотенциалом (3.36) в соответствии с выше изложенным можно выбрать функции

$$\varphi_0^R(\rho\,,\,\chi') = \frac{i\pi\, C_0(\chi')}{2}\, H^{(1)}_{-i(\rho-\tilde{\beta}\,\mathrm{ch}\,\chi')}\left(i\tilde{\beta}\right) = = \frac{C_0(\chi')}{2} \int\limits_{-\infty+i\pi/2}^{\infty+i\pi/2} d\zeta\, e^{i\tilde{\beta}\,\mathrm{sh}\,\zeta + i(\rho-\tilde{\beta}\,\mathrm{ch}\,\chi')\zeta}\,, \tag{3.66}$$

$$\varphi_0^{(+)}(\rho\,,\,\chi') = C_0^{(+)}(\chi')\, J_{-i(\rho-\tilde{\beta}\,\mathrm{ch}\,\chi')}\left(i\tilde{\beta}\right) = = \frac{C_0^{(+)}(\chi')}{2i\pi} \int\limits_{\infty-3i\pi/2}^{\infty+i\pi/2} d\zeta\, e^{i\tilde{\beta}\,\mathrm{sh}\,\zeta + i(\rho-\tilde{\beta}\,\mathrm{ch}\,\chi')\zeta}\,, \tag{3.67}$$

$$\varphi_0^{(2)}(\rho\,,\,\chi') = C_0^{(2)}(\chi')\, H^{(2)}_{-i(\rho-\tilde{\beta}\,\mathrm{ch}\,\chi')}\left(i\tilde{\beta}\right) = = -\frac{C_0^{(2)}(\chi')}{i\pi} \int\limits_{-\infty+i\pi/2}^{\infty-3i\pi/2} d\zeta\, e^{i\tilde{\beta}\,\mathrm{sh}\,\zeta + i(\rho-\tilde{\beta}\,\mathrm{ch}\,\chi')\zeta}\,. \tag{3.68}$$

Решение (3.66) является регулярным решением и удовлетворяет как нулевому граничному условию (3.38), так и при $\ell = 0$ условию комплексного сопряжения (2.28), причем нормировочный множитель $C_0(\chi')$ – действительный и определяется из условия нормировки

$$[C_0(\chi')]^2 \int\limits_0^\infty d\rho\, [\varphi_0^R(\rho\,,\,\chi')]^2 = 1\,. \tag{3.69}$$

Заметим, что поскольку функция Ханкеля первого рода $H^{(1)}_\nu(z)$ связана с модифицированной функцией Бесселя (функцией Макдональда) $K_{-\nu}(z) = K_\nu(z)$ формулой (см., например, [105])

$$K_\nu(z) = \frac{i\,\pi}{2}\, e^{i\,\pi\,\nu/2}\, H^{(1)}_\nu\left(z\, e^{i\,\pi/2}\right)\,,\; -\pi < \arg z \le \frac{\pi}{2}\,, \tag{3.70}$$

то регулярное решение (3.66) можно выразить через функцию Макдональда $K_\nu(z)$:

$$\varphi_0^R(\rho\,,\,\chi') = C_0(\chi')\, e^{-\pi(\rho-\tilde{\beta}\,\mathrm{ch}\,\chi')/2}\, K_{-i(\rho-\tilde{\beta}\,\mathrm{ch}\,\chi')}\left(\tilde{\beta}\right)\,. \tag{3.71}$$

Также отметим, что к аналогичному результату (3.71) приводит решение квазипотенциального интегрального уравнения Логунова–Тавхелидзе в импульсном пространстве (или его конечно-разностного аналога в конфигурационном представлении) с линейным квазипотенциалом для случая взаимодействия двух релятивистских частиц равных масс (см. работу [100]).

3.3.2. Связанные состояния

Релятивистское регулярное решение $\varphi_0^R(\rho\,,\,\chi')$ при $\rho = 0$ удовлетворяет граничному условию (3.38). Отсюда следует точное условие квантования уровней энергии $E_n = (m'^2/\mu)\,\mathrm{ch}\,\chi_n$ релятивистской эффективной частицы массы m', выступающей в качестве системы двух взаимодействующих релятивистских частиц с массами m_1, m_2 [9]:

$$K_{i\,\tilde{\beta}\,\mathrm{ch}\,\chi'}\,(\tilde{\beta}) = 0\,. \tag{3.72}$$

Отметим, что функция Макдональда $K_\nu(z)$, рассматриваемая как функция от ν, имеет бесконечно много нулей и все они являются чисто мнимыми [106].

Исследуем поведение релятивистского регулярного решения $\varphi_0^R(\rho\,,\,\chi')$ в различных областях изменения релятивистской относительной координаты ρ. Для простоты изложения, а также для придания ясности физического содержания получаемых результатов, ограничимся случаем больших $\tilde{\beta}$ (малых β). Для этого воспользуемся асимптотическим выражением для регулярного решения $\varphi_0^R(\rho\,,\,\chi')$ в случае больших значений параметра $\tilde{\beta}$ (малых β), справедливое при $\rho \ll \tilde{\beta}\,\mathrm{ch}\,\chi'$ (см. вывод в приложении B, формула (B.14)):

$$\begin{gathered}\varphi_0^R(\rho\,,\,\chi) \sim \\ \sim C_0(\chi')\sqrt{\frac{2\,\pi}{\tilde{\beta}\,\mathrm{sh}\,\chi'}}\,\sin\left[\rho\chi' + \tilde{\beta}\,(\mathrm{sh}\,\chi' - \chi'\,\mathrm{ch}\,\chi') - \frac{\pi}{4} - \frac{\rho^2}{2\tilde{\beta}\,\mathrm{sh}\,\chi'}\right]\,.\end{gathered} \tag{3.73}$$

Из граничного условия (3.38) и асимптотического выражения (3.73) следует приближенное условие квантования уровней энергии $E_n = \dfrac{m'^2}{\mu}\,\mathrm{ch}\,\chi_n$

[9] Условие квантования уровней энергии с линейным квазипотенциалом для случая взаимодействия двух релятивистских частиц равных масс было исследовано в работе [100].

релятивистской эффективной частицы массы m'

$$\chi_n \operatorname{ch} \chi_n - \operatorname{sh} \chi_n = \frac{\pi}{\tilde{\beta}} \left(n - \frac{1}{4} \right) \, , \; n = 1, 2, \ldots \, , \tag{3.74}$$

которое в нерелятивистском пределе переходит в приближенное условие квантования уровней энергии для уравнения Шредингера с линейным потенциалом [10)]. Из асимптотического выражения (3.73) также вытекает, что величину $\delta_0(\chi')$, определяемую приближенно ($\tilde{\beta} \gg 1$) выражением

$$\delta_0(\chi') = \tilde{\beta} \, (\operatorname{sh} \chi' - \chi' \operatorname{ch} \chi') - \frac{\pi}{4} \, , \tag{3.75}$$

можно рассматривать как аналог фазового сдвига в случае линейного квазипотенциала, причем

$$\delta_0(\chi_n) = -\pi n \, , \; n = \pm 1, \pm 2, \ldots \, . \tag{3.76}$$

Для того чтобы более детально исследовать характер поведения релятивистского регулярного решения $\varphi_0^R \, (\rho \, , \, \chi')$ в различных областях изменения релятивистской относительной координаты ρ, используем асимптотическое представление для функций Макдональда [106]:

$$\begin{gathered} K_{i\,p}(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{4 \, (x^2 - p^2)}} \exp \left[- \sqrt{x^2 - p^2} - p \arcsin \frac{p}{x} \right] \times \\ \times \left[\sum_{m=0}^{N-1} (-2)^m \, b_m \, \Gamma \left(m + \frac{1}{2} \right) \sqrt{(x^2 - p^2)^{-m}} + O \left(x^{-N} \right) \right] \, , \\ x > p > 0 \, , \; b_0 = 1 \, , \; b_1 = \frac{1}{8} - \frac{5}{24} \left(1 - \frac{x^2}{p^2} \right)^{-1} \, , \ldots \, ; \end{gathered} \tag{3.77}$$

$$\begin{gathered} K_{i\,p}(x) \sim \frac{\pi}{3} \, e^{-p\,\pi/2} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \, C_m(\epsilon \, x) \times \\ \times \sin \left[(m+1) \frac{\pi}{3} \right] \Gamma \left(\frac{m+1}{3} \right) \left(\frac{x}{6} \right)^{-(m+1)/3} \, , \\ p \approx x \, , \; p, x > 0 \, , \; \epsilon = 1 - \frac{p}{x} \, , \; \epsilon = o \left(x^{-2/3} \right) \, , \\ C_0(\epsilon \, x) = 1 \, , \; C_1(\epsilon \, x) = \epsilon \, x \, , \; \ldots \, ; \end{gathered} \tag{3.78}$$

---

10) Условие квантования уровней энергии (3.74) с линейным квазипотенциалом для случая взаимодействия двух релятивистских частиц равных масс было получено в работе [100]. К такому же условию квантования приводит и использование ВКБ-приближения при решении конечно-разностного уравнения в конфигурационном представлении в форме Кадышевского с линейным квазипотенциалом и также для случая взаимодействия двух релятивистских частиц равных масс [18].

$$K_{i\,p}(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{p^2 - x^2}}\, e^{-p\,\pi/2} \left[\sum_{m=0}^{N-1} 2^m\, b_m\, \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) \sqrt{\left(p^2 - x^2\right)^{-m}} \times \right.$$

$$\left. \times \sin\left(\frac{m\,\pi}{2} + p\, \mathrm{Arch}\, \frac{p}{x} - \sqrt{p^2 - x^2} + \frac{\pi}{4}\right) + O\left(x^{-N}\right) \right], \tag{3.79}$$

$$p > x > 0\,.$$

Тогда, используя представление (3.71) для регулярного решения $\varphi_0^R(\rho\,,\,\chi')$ через функцию Макдональда $K_\nu(z)$ и ее асимптотическое представление (3.79), находим, что области $p = |\rho - \tilde{\beta}\,\mathrm{ch}\,\chi'| > \tilde{\beta} > 0$ отвечают две области: классически доступная область $0 \le \rho < \tilde{\beta}\,\mathrm{ch}\,\chi' - \tilde{\beta}$ (область I) и область рождения пар $\rho > \tilde{\beta}\,\mathrm{ch}\,\chi' + \tilde{\beta}$ (область III). В областях I и III волновая функция $\varphi_0^R(\rho\,,\,\chi')$ имеет вид

$$\varphi_0^R(\rho\,,\,\chi) \sim \frac{C_0(\chi')\,\sqrt{2\,\pi}}{\sqrt[4]{\left(\rho - \tilde{\beta}\,\mathrm{ch}\,\chi'\right)^2 - \tilde{\beta}^2}} \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{\pi}{2}\left(\rho - \tilde{\beta}\,\mathrm{ch}\,\chi' + |\rho - \tilde{\beta}\,\mathrm{ch}\,\chi'|\right)\right] \times$$

$$\times \left[\sin\left(|\rho - \tilde{\beta}\,\mathrm{ch}\,\chi'|\ \mathrm{Arch}\, \frac{|\rho - \tilde{\beta}\,\mathrm{ch}\,\chi'|}{\tilde{\beta}} - \right.\right. \tag{3.80}$$

$$\left.\left. - \sqrt{\left(\rho - \tilde{\beta}\,\mathrm{ch}\,\chi'\right)^2 - \tilde{\beta}^2} + \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\tilde{\beta}^{-1}\right) \right],$$

$$|\rho - \tilde{\beta}\,\mathrm{ch}\,\chi'| > \tilde{\beta} > 0\,,$$

и, в силу осцилляций в области I, обращается в нуль n раз. Отсюда следует приближенное условие квантования уровней энергии (3.74), а волновая функция в (3.80) при $\rho \ll \tilde{\beta}\,\mathrm{ch}\,\chi' - \tilde{\beta}$ принимает более простое асимптотическое выражение (3.73). При этом значение релятивистской относительной координаты $\rho = \tilde{\beta}\,\mathrm{ch}\,\chi' = m'^3\,\mathrm{ch}\,\chi'/(\mu\,\beta)$ имеет смысл "размера" эффективной релятивистской частицы массы m' с полной энергией $E = (m'^2/\mu)\ \mathrm{ch}\,\chi'$.

Области $0 < p = |\rho - \tilde{\beta}\,\mathrm{ch}\,\chi'| < \tilde{\beta}$ (область II) отвечают две области: $\tilde{\beta}\,\mathrm{ch}\,\chi' - \tilde{\beta} < \rho < \tilde{\beta}\,\mathrm{ch}\,\chi'$ и $\tilde{\beta}\,\mathrm{ch}\,\chi' < \rho < \tilde{\beta}\,\mathrm{ch}\,\chi' + \tilde{\beta}$. Поведение волновой функции $\varphi_0^R(\rho\,,\,\chi')$ в соответствии с выражениями (3.71) и (3.77) носит затухающий характер:

$$
\begin{gathered}
\varphi_0^R(\rho\,,\,\chi) \sim \frac{C_0(\chi')\,\sqrt{\pi/2}}{\sqrt[4]{\tilde{\beta}^2 - \left(\rho - \tilde{\beta}\,\mathrm{ch}\,\chi'\right)^2}} \times \\
\times \exp\left[\, -\frac{\pi}{2}\left(\rho - \tilde{\beta}\,\mathrm{ch}\,\chi'\right) - \sqrt{\tilde{\beta}^2 - \left(\rho - \tilde{\beta}\,\mathrm{ch}\,\chi'\right)^2} - \right. \\
\left. -|\rho - \tilde{\beta}\,\mathrm{ch}\,\chi'|\arcsin\left(\frac{|\rho - \tilde{\beta}\,\mathrm{ch}\,\chi'|}{\tilde{\beta}}\right)\right]\left[1 + O\left(\tilde{\beta}^{-1}\right)\right] \\
0 < |\rho - \tilde{\beta}\,\mathrm{ch}\,\chi'| < \tilde{\beta}\,.
\end{gathered}
\tag{3.81}
$$

В тоже время при $p = |\rho - \tilde{\beta}\,\mathrm{ch}\,\chi'| \approx \tilde{\beta}$, т.е. в области, примыкающей к области II, где $\rho \approx \tilde{\beta}\,\mathrm{ch}\,\chi' \pm \tilde{\beta}$, волновая функция $\varphi_0^R\,(\rho\,,\,\chi')$ в соответствии с выражениями (3.71) и (3.78) ведет себя следующим образом

$$
\begin{gathered}
\varphi_0^R(\rho\,,\,\chi) \sim \frac{C_0(\chi')\,\pi\sqrt{3}}{6}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \times \\
\times \exp\left[-\frac{\pi}{2}\left(\rho - \tilde{\beta}\,\mathrm{ch}\,\chi' + |\rho - \tilde{\beta}\,\mathrm{ch}\,\chi'|\right)\right] \times \\
\times \left\{\left(\frac{\tilde{\beta}}{6}\right)^{-1/3} + O\left[\left(\tilde{\beta} - |\rho - \tilde{\beta}\,\mathrm{ch}\,\chi'|\right)\tilde{\beta}^{-2/3}\right]\right\}\,, \\
\rho \approx \tilde{\beta}\,\mathrm{ch}\,\chi' \pm \tilde{\beta}\,,
\end{gathered}
\tag{3.82}
$$

т.е. является убывающей в окрестностях точек $\rho = \tilde{\beta}\,\mathrm{ch}\,\chi' \pm \tilde{\beta}$.

3.3.3. Аналоги решений Йоста

Аналоги решения Йоста $f_0^{(\pm)}\,(\rho\,,\,\chi')$ при отсутствии взаимодействия (при значениях $\beta \to 0$) и фиксированных значениях ρ, очевидно, должны переходить в соответствующие решения $e_0^{(1\,,\,2)}\,(\rho\,,\,\chi') = e^{\pm\,i\,\rho\,\chi'}$ свободного уравнения (см. (2.13)). Следовательно, граничные условия для аналогов решений Йоста $f_0^{(\pm)}\,(\rho\,,\,\chi')$ естественно выбрать в виде

$$
\lim_{\beta \to 0} e^{\mp\,i\,\rho\,\chi'}\,f_0^{(\pm)}\,(\rho\,,\,\chi') = 1\,. \tag{3.83}
$$

Кроме того, аналоги решений Йоста $f_0^{(\pm)}\,(\rho\,,\,\chi')$ должны быть связаны с функциями $\varphi_0^{(+)}\,(\rho\,,\,\chi')$ и $\varphi_0^{(-)}\,(\rho\,,\,\chi') = \left[\varphi_0^{(+)}\,(\rho\,,\,\chi')\right]^*$, являющиеся решениями уравнения (3.37) с линейным квазипотенциалом (3.36). Следовательно, регулярное решение $\varphi_0^R\,(\rho\,,\,\chi')$, в соответствии с представлением (2.33), должно выражаться через аналоги решений Йоста $f_0^{(\pm)}\,(\rho\,,\,\chi')$.

Для того чтобы получить представление вида (2.32), воспользуемся тем, что функция Ханкеля первого рода $H_\nu^{(1)}(z)$ связана с функциями Бесселя $J_{\pm\nu}(z)$ формулой (см., например, [105])

$$H_\nu^{(1)}\,(z) = \frac{i}{\sin(\pi\,\nu)}\left[e^{-i\,\pi\,\nu}\,J_\nu\,(z) - J_{-\nu}\,(z)\right]\,.$$

Тогда, принимая во внимание формулу аналитического продолжения для функций Бесселя

$$J_\nu\left(z\,e^{m\,\pi\,i}\right) = e^{m\,\pi\,\nu\,i}\,J_\nu\,(z)\ ,\ m - \text{целое}\,,$$

регулярное решение $\varphi_0^R\,(\rho\,,\chi')$ в (3.66) можно представить в виде

$$\begin{aligned}\varphi_0^R(\rho\,,\chi') = \frac{\pi\,C_0(\chi')}{i}\Bigg[&\frac{e^{-\pi\,(\rho-\tilde\beta\,\mathrm{ch}\,\chi')}}{2\,\mathrm{sh}[\pi\,(\rho-\tilde\beta\,\mathrm{ch}\,\chi')]}\,J_{-i\,(\rho-\tilde\beta\,\mathrm{ch}\,\chi')}\left(i\,\tilde\beta\right) - \\ &-\frac{e^{-\pi\,(\rho-\tilde\beta\,\mathrm{ch}\,\chi')}}{2\,\mathrm{sh}[\pi\,(\rho-\tilde\beta\,\mathrm{ch}\,\chi')]}\,J_{i\,(\rho-\tilde\beta\,\mathrm{ch}\,\chi')}\left(-i\,\tilde\beta\right)\Bigg]\,.\end{aligned} \tag{3.84}$$

Используя граничные условия (3.83), представление (3.84) и асиптотику (В.17) для решения $\varphi_0^{(+)}\,(\rho\,,\,\chi')$, определим аналоги решений Йоста $f_0^{(\pm)}\,(\rho\,,\,\chi')$ соотношениями

$$\begin{aligned}&f_0^{(\pm)}(\rho\,,\chi') = \\ &= -\frac{\mathrm{sh}(\pi\,\tilde\beta\,\mathrm{ch}\,\chi')\,e^{-\pi\,\tilde\beta\,\mathrm{ch}\,\chi'}\,J_{\mp i\tilde\beta\,\mathrm{ch}\,\chi'}\left(\mp i\tilde\beta\right)}{\mathrm{sh}[\pi(\rho-\tilde\beta\,\mathrm{ch}\,\chi')]\,e^{\pi(\rho-\tilde\beta\,\mathrm{ch}\,\chi')}|J_{i\tilde\beta\,\mathrm{ch}\,\chi'}\left(i\tilde\beta\right)|^2}J_{\mp i(\rho-\tilde\beta\,\mathrm{ch}\,\chi')}\left(\pm i\tilde\beta\right)\ .\end{aligned} \tag{3.85}$$

Тогда аналоги функций Йоста $F_0^{(\pm)}\,(\chi')$ даются выражениями

$$F_0^{(\pm)}(\chi') = -\frac{e^{\pi\,\tilde\beta\,\mathrm{ch}\,\chi'}\,J_{\mp i\,\tilde\beta\,\mathrm{ch}\,\chi'}\left(\mp i\,\tilde\beta\right)}{2\,\mathrm{sh}(\pi\,\tilde\beta\,\mathrm{ch}\,\chi')\,|J_{i\,\tilde\beta\,\mathrm{ch}\,\chi'}\left(i\,\tilde\beta\right)|}\,, \tag{3.86}$$

а представление (3.84) запишется в виде

$$\begin{aligned}\varphi_0^R(\rho\,,\chi') = \frac{\pi\,C_0(\chi')\,|J_{i\,\tilde\beta\,\mathrm{ch}\,\chi'}\left(i\,\tilde\beta\right)|}{i}\Big[&F_0^{(-)}(\chi')\,f_0^{(+)}(\rho\,,\chi') - \\ &-F_0^{(+)}(\chi')\,f_0^{(-)}(\rho\,,\chi')\Big]\,.\end{aligned} \tag{3.87}$$

Подчеркнем, что аналоги решений Йоста $f_0^{(\pm)}(\rho\,,\,\chi')$, введенные соотношениями (3.85), удовлетворяют как уравнению (3.37) с линейным квазипотенциалом (3.36), так и граничным условиям (3.83). Кроме того, используя асиптотику (B.17), легко убедиться, что для аналогов функций Йоста $F_0^{(\pm)}(\chi')$ в (3.86) справедливо предельное равенство

$$\lim_{\tilde{\beta}\to\infty}\left|F_0^{(\pm)}(\chi')\right| = 1\,.$$

Итак, сформулируем основные результаты, полученные в настоящей главе.

1. В рамках рассматриваемого РКП-подхода в квантовой теории поля изложен метод решения конечно-разностного квазипотенциального уравнения с локальным кулоновоподобным квазипотенциалом, описывающим взаимодействие двух релятивистских бесспиновых частиц произвольных масс m_1 , m_2.

   На основе развитого метода впервые:

а) найден явный вид регулярного решения и решений Йоста для кулоновоподобного квазипотенциала в случае частиц произвольных масс $m_1\,, m_2$;

б) детально исследованы свойства регулярного решения, решений и функций Йоста и установлена связь между ними;

в) показано, что нули функции Йоста простые и чисто мнимые и соответствуют связанным состояниям и найден явный вид для энергий связанных состояний;

2. В рамках того же РКП-подхода в квантовой теории поля разработан метод решения интегрального квазипотенциального уравнения в конфигурационном представлении для случая s-волны ($\ell = 0$) с локальным линейным квазипотенциалом, описывающим взаимодействие двух релятивистских бесспиновых частиц произвольных масс m_1 , m_2.

   На основе развитого метода впервые:

а) найдены регулярное и нерегулярные решения для интегрального квазипотенциального уравнения в конфигурационном представлении с линейным квазипотенциалом для s-волны в случае частиц произвольных масс $m_1\,, m_2$;

б) получено точное уравнение для определения энергий связанных состояний;

в) найдено асиптотическое выражение в случае больших значений параметра $\tilde{\beta}$ (малых β) для регулярного решения и детально исследовано его поведение в различных областях изменения релятивистской относительной координаты ρ;

г) найдены (для малых β) приближенное выражение для аналога фазового сдвига и приближенное условие квантования уровней энергии связанных состояний;

д) определены аналоги решений и функций Йоста.

Рассматриваемые здесь методы непосредственно связаны с возможностью представить полную энергию двух релятивистских бесспиновых частиц неравных масс в с.ц.и. в виде выражения, пропорционального энергии одной эффективной релятивистской частицы массы m'.

ГЛАВА 4
ПРЯМАЯ ЗАДАЧА С НЕЛОКАЛЬНЫМ СЕПАРАБЕЛЬНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

4.1. Вводная часть

Одно из основных достоинств нелокальных сепарабельных двухчастичных взаимодействий связано с возможностью их применения в ядерной физике и в проблеме многих тел, например, при решении уравнений Фаддеева в задаче трех тел. Это обусловлено тем, что парциальная t-матрица для таких взаимодействий имеет простую форму. Именно это обстоятельство позволяет непосредственно экстраполировать ее за поверхность энергии-импульса. Еще одним достоинством для большого класса таких взаимодействий является возможность получать замкнутые выражения при решении нерелятивистского двухчастичного уравнения Шредингера. Этот же подход оказался плодотворным и при решении нерелятивистской обратной задачи [108]–[114]. Тем не менее такой подход не применим для существенно релятивистских систем [115], [116]. Для таких систем, в частности, образованных легкими кварками, вклад релятивистских поправок к гамильтониану взаимодействия сравним с основным нерелятивистским членом. Необходимость релятивистского описания также возникает и при рассмотрении радиационных распадов мезонов и нуклонных резонансов, когда энергия излучаемого фотона сравнима или даже больше массы составляющих их кварков. Тем самым кварк, взаимодействующий с фотоном, неизбежно оказывается релятивистским.

Необходимость такого представления взаимодействия двухчастичной системы вызвана, в частности, предположением мезонной теории ядерных сил. В соответствии с этой теорией взаимодействие между двумя нуклонами является локальным на больших расстояниях, но становится нелокальным и сингулярным на малых расстояниях. При этом мы можем считать, что локальная часть $w(r)$ полного взаимодействия является известной и согласуется с экспериментальными данными при низких энергиях. Поскольку точная теоретическая информация о ядерных силах на малых расстояниях отсутствует, то, исходя из требования простоты, будем предполагать, что на этих расстояниях нелокальная составляющая полного взаимодействия является сепарабельной. Поэтому, ограничиваясь случаем центрально-симметричных сил и считая, что они не зависят от энергии, выберем полное взаимодействие в виде

$$
\begin{gathered}
V\left(\mathbf{r},\ \mathbf{r}';\ E_{q'}\right) \equiv V\left(\mathbf{r},\ \mathbf{r}'\right) = w\left(r\right)\,\delta\left(\mathbf{r}' - \mathbf{r}\right) + \\
+ \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{M_\ell}\left(2\,\ell+1\right)\,\varepsilon_{\ell m}\,\upsilon_{\ell m}\left(r\right)\,\upsilon_{\ell m}\left(r'\right)P_\ell\left(\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r\,r'}\right).
\end{gathered}
\tag{4.1}
$$

Здесь $\varepsilon_{\ell m} = -1$ отвечает притягивающему взаимодействию, а $\varepsilon_{\ell m} = 1$ – отталкивающему взаимодействию; $P^{\nu}_{\mu}(z)$ – функция Лежандра первого рода; $r = |\,\mathbf{r}|$, $r' = |\,\mathbf{r}'|$.

4.2. Квазипотенциальное уравнение для парциальной волновой функции. Общий случай

В уравнении (1.19) удобно перейти от старых переменных и функций к новым безразмерным переменным и новым функциям по формулам

$$
\begin{gathered}
\mathbf{q}' = m'\mathbf{q}\,,\ \mathbf{q} = \operatorname{sh}\chi_q\,\mathbf{n}_q\,,\ |\mathbf{n}_q| = 1\,,\ m'\,\mathbf{r} = \boldsymbol{\rho}\,,\ m'\mathbf{r}' = \boldsymbol{\rho}'\,, \\
|\boldsymbol{\rho}| = \rho\,,\ |\boldsymbol{\rho}'| = \rho'\,,\ d\mathbf{r}' = m'^{-3}\,d\boldsymbol{\rho}'\,,E_{q'} = m'E_q\,,\ E_q = \sqrt{1+\,\mathbf{q}^2}\,, \\
\psi_{q'}(\mathbf{r}) \equiv \psi_q(\boldsymbol{\rho})\,,\ V(\,\mathbf{r}\,,\ \mathbf{r}'\,;\ E_{q'}) \equiv V(\lambda'\boldsymbol{\rho}\,,\,\lambda'\boldsymbol{\rho}'\,;\ E_q)\,.
\end{gathered}
\tag{4.2}
$$

Тогда уравнение (1.19) преобразуется к виду

$$
\begin{gathered}
\left[\operatorname{ch}\left(i\,\frac{\partial}{\partial\,\rho}\right) + \frac{i}{\rho}\operatorname{sh}\left(i\,\frac{\partial}{\partial\,\rho}\right) - \frac{1}{2\,\rho^2}\,\Delta_{\theta,\varphi}\,\exp\left(i\,\frac{\partial}{\partial\,\rho}\right) - \operatorname{ch}\chi_q\right]\,\psi_q\left(\boldsymbol{\rho}\right) + \\
+\frac{\mu}{m'^5}\int d\boldsymbol{\rho}'\,V\left(\lambda'\boldsymbol{\rho}\,,\,\lambda'\boldsymbol{\rho}'\,;\ E_q\right)\,\psi_q\left(\boldsymbol{\rho}'\right) = 0\,.
\end{gathered}
\tag{4.3}
$$

Теперь, считая квазипотенциал $V\left(\lambda'\boldsymbol{\rho}\,,\ \lambda'\boldsymbol{\rho}'\,;\ E_q\right)$ сферически симметричным, перейдем в уравнении (4.3) к сферической системе координат, в которой

$$q = |\,\mathbf{q}| = \operatorname{sh}\chi_q\,,\; d\boldsymbol{\rho}' = \rho'^2\,\sin\theta_{\rho'}\,d\rho'\,d\,\theta_{\rho'}\,d\,\varphi_{\rho'}\,,$$

$$0 \le\, q\,,\,\rho\,,\,\rho' \le \infty\,,\; 0 \le \theta_{\rho'} \le \pi\,,\; 0 \le \varphi_{\rho'} \le 2\,\pi\,,$$

а также учтем формулу (2.4), соотношение (2.68) для функций Лежандра первого рода и разложения по парциальным волнам для релятивистских плоских волн (1.12), соотношение (2.69), и для волновой функции $\psi_q(\boldsymbol{\rho})$

$$\psi_q(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{\ell=0}^{\infty}(2\,\ell+1)\,i^\ell\,\frac{\psi_\ell(\rho\,,\chi_q)}{\rho}\,P_\ell\!\left(\frac{\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\rho}}{q\,\rho}\right). \tag{4.4}$$

Тогда вместо уравнения (4.3) получим дифференциально-разностное уравнение для парциальной волновой функции с квазипотенциалом (4.1):

$$\begin{gathered}\left[\nabla + \left(1 + \frac{\ell\,(\ell+1)}{\rho^{(2)}}\right)\,\nabla^* - 2\operatorname{ch}\chi' + W\,(\rho)\right]\,\psi_\ell\,(\rho\,,\,\chi') + \\ + \sum_{m=1}^{M_\ell}\varepsilon_{\ell m}\,V_{\ell m}\,(\rho)\,\int\limits_0^\infty d\rho'\,V_{\ell m}\,(\rho')\,\psi_\ell\,(\rho'\,,\,\chi') = 0\,,\end{gathered} \tag{4.5}$$

где

$$V_{\ell m}\,(\rho) = \sqrt{\frac{8\,\pi\,\mu}{m'^5}}\,\rho\,\upsilon_{\ell m}\,(\lambda'\rho)\;,$$

а ∇, ∇^* и $W\,(\rho)$ определены в (2.6); $\chi_p \equiv \chi$, $\chi_q \equiv \chi'$ являются быстротами, которые связаны с E_p, E_q соотношениями $E_p = \operatorname{ch}\chi$, $E_q = \operatorname{ch}\chi'$.

Дифференциально-разностные уравнения для некоторых важных для приложений потенциалов решаются точно [41]–[45], [73], [75], [83], [90], [97]. Теория рассеяния в релятивистском конфигурационном пространстве также обладает формальным сходством с квантовомеханической теорией рассеяния. При этом весьма существенно, что свободные решения $s_\ell(\rho\,,\,\chi')$, $c_\ell(\rho\,,\,\chi')$ и $e_\ell^{(1,2)}(\rho\,,\,\chi')$ уравнения (4.5) при выключенном взаимодействии ($V_{\ell m}\,(\rho) \equiv 0$, $W\,(\rho) \equiv 0$) выражаются через известные функции Лежандра [73], [83], [88], аналитические свойства которых хорошо известны [106]. Более того, для функций $s_\ell(\rho\,,\,\chi')$ справедливы свойства ортогональности (2.23) и полноты (2.24). Однако "размазанные" $\hat\theta$-функции, входящие в выражение для квазипотенциальной парциальной функции Грина [89], и обуславливающие конечно-разностный характер квазипотенциальных уравнений, приводят к интегральным уравнениям

Фредгольмовского типа для волновой функции. В нерелятивистской же теории весьма существенно, что уравнение Шредингера в интегральной форме есть уравнение Вольтерра. Именно это обстоятельство не позволяет использовать метод функций Грина, как это обычно делается в нерелятивистской задаче для двух частиц. В связи с этим возникла необходимость разработки метода решения квазипотенциального уравнения (4.5), в основу которого были бы положены свойства ортогональности (2.23) и полноты (2.24).

Подчеркнем, что в рамках рассматриваемого РКП-подхода релятивистская проблема двух тел и в случае неравных масс сводится к одночастичной. Это обусловлено тем, что в рамках данного подхода полная энергия двух релятивистских бесспиновых частиц неравных масс в с.ц.и. пропорциональна энергии одной эффективной релятивистской частицы массы m' – формула (1.7). Однако, несмотря на то, что эффективная частица с массой m', возникающая в уравнении (4.3), находится на гиперболоиде $E_{q'}^2 - \boldsymbol{q}'^2 = m'^2$, тем не менее в уравнении (4.3) сохраняется зависимость от другого массового параметра – приведенной массы μ. Такая зависимость необходима для обеспечения правильных предельных переходов: нерелятивистского и бесконечно большой массы одной из частиц. Более того, реальные расчеты уровней энергии водородоподобных атомов показывают [25], [26], [30]–[32], что они зависят от обоих массовых параметров m' и μ (или их комбинации).

В данной главе в рамках РКП-подхода в квантовой теории поля [12] излагаются методы решения конечно-разностного квазипотенциального уравнения, когда в качестве взаимодействия рассматриваются чисто нелокальный сепарабельный квазипотенциал (раздел 4.3) [86], [117], [118] и суперпозиция локального и нелокального сепарабельного квазипотенциалов (раздел 4.4) [85], [119], [120], описывающих взаимодействие двух бесспиновых частиц произвольных масс m_1, m_2. В разделе 4.5 настоящей главы дается обобщение на случай суперпозиции локального и суммы нелокальных сепарабельных квазипотенциалов [121], [122].

4.3. Чисто нелокальное сепарабельное взаимодействие

В данном разделе рассматривается случай чисто нелокального сепарабельного квазипотенциала, т.е. $W(\rho) \equiv 0$. Для простоты изложения ограничимся случаем, когда каждому ℓ соответствует только один сепарабельный член ($M_\ell = 1$). Тогда уравнение (4.5) принимает вид

$$\begin{gathered}\left[\nabla + \left(1 + \frac{\ell\,(\ell+1)}{\rho^{(2)}}\right)\,\nabla^* - 2\operatorname{ch}\chi'\right]\psi_\ell\,(\rho\,,\,\chi') + \\ +\varepsilon_\ell\,V_\ell\,(\rho)\int\limits_0^\infty d\rho'\,V_\ell\,(\rho')\;\psi_\ell\,(\rho'\,,\,\chi') = 0\,,\end{gathered} \tag{4.6}$$

где теперь

$$V_\ell\,(\rho) = \sqrt{\frac{8\,\pi\,\mu}{m'^5}}\,\rho\,\upsilon_\ell\,(\lambda'\rho)\;,\quad \varepsilon_\ell = \pm\,1\,. \tag{4.7}$$

Решение уравнения (4.6) должно удовлетворять граничному условию

$$\psi_\ell\,(0\,,\,\chi') = 0\,. \tag{4.8}$$

4.3.1. Метод и условие единственности решения квазипотенциального уравнения

Решение уравнения (4.6) с граничным условием (4.8) будем рассматривать для класса потенциалов, для которых компоненты $V_\ell(\rho)$ сепарабельного квазипотенциала удовлетворяют условию

$$\rho\,V_\ell\,(\rho)\,\in\,L_1\,(0\,,\,\infty)\;. \tag{4.9}$$

Ниже будет показано, что требование в (4.9) означает, что регулярное решение $\psi_\ell(\rho\,,\,\chi')$ уравнения (4.6) с граничным условием (4.8) существует и является единственным.

Условия ортогональности (2.23) и полноты (2.24) для свободного решения $s_\ell\,(\rho\,,\,\chi')$ позволяют ввести релятивистские интегральные преобразования Ханкеля [86]:

$$\tilde\psi_\ell(\chi'\,,\,\chi) = \int\limits_0^\infty d\rho\,\psi_\ell(\rho\,,\,\chi')\,s^*_\ell(\rho\,,\,\chi)/Q_\ell(\operatorname{cth}\chi)\,, \tag{4.10}$$

$$\tilde V_\ell(\chi) = \int\limits_0^\infty d\rho\,V_\ell(\rho)\,s^*_\ell(\rho\,,\,\chi)/Q_\ell(\operatorname{cth}\chi)\,, \tag{4.11}$$

$$\psi_\ell(\rho\,,\,\chi') = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty d\chi\, Q_\ell(\,\mathrm{cth}\,\chi)\,\tilde{\psi}_\ell(\chi'\,,\,\chi)\, s_\ell(\rho\,,\,\chi)\,, \tag{4.12}$$

$$V_\ell(\rho) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty d\chi\, Q_\ell(\,\mathrm{cth}\,\chi)\,\tilde{V}_\ell(\chi)\, s_\ell(\rho\,,\,\chi)\,. \tag{4.13}$$

Здесь $Q_\ell(z)$ – функция Лежандра второго рода.

Применяя преобразования (4.12) и (4.13) к уравнению (4.6), получим

$$(\mathrm{ch}\,\chi' - \mathrm{ch}\,\chi)\,\tilde{\psi}_\ell(\chi'\,,\,\chi) = \frac{1}{2}\,\varepsilon_\ell\; N_\ell(\chi')\,\tilde{V}_\ell(\chi)\,, \tag{4.14}$$

где

$$N_\ell(\chi') = \int\limits_0^\infty d\rho\, V_\ell(\rho)\,\psi_\ell(\rho\,,\,\chi')\,. \tag{4.15}$$

Теперь положим

$$V_\ell\,(\rho) = \nu_\ell\;(\rho)\;U_\ell\,(\rho)\;, \tag{4.16}$$

где функция $\nu_\ell(\rho)$ определена в (2.18). И пусть для функции $U_\ell(\rho)$ справедливы релятивистские интегральные преобразования Ханкеля:

$$\tilde{U}_\ell(\chi) = \int\limits_0^\infty d\,\rho\, U_\ell(\rho)\, s^*_\ell(\rho\,,\,\chi)/Q_\ell\,(\mathrm{cth}\,\chi)\,, \tag{4.17}$$

$$U_\ell(\rho) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty d\,\chi\, Q_\ell\,(\mathrm{cth}\,\chi)\,\tilde{U}_\ell(\chi)\, s_\ell(\rho\,,\,\chi)\,. \tag{4.18}$$

Далее учтем, что для действительных ℓ, ρ и χ' функция $s_\ell\,(\rho\,,\,\chi')$ удовлетворяет правилам комплексного сопряжения (2.14). Поэтому вместо (4.15) будем иметь

$$N_\ell(\chi') = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty d\,\chi\, Q^2_\ell(\mathrm{cth}\,\chi)\,\tilde{\psi}_\ell(\chi'\,,\,\chi)\,\tilde{U}_\ell(\chi)\,. \tag{4.19}$$

Покажем, что для существования единственного решения уравнения (4.14) необходимо, чтобы выполнялось условие (4.9). Действительно, в силу свойств (2.19) и (2.20) для функции $s_\ell(\rho\,,\,\chi)$, условие (4.9) означает, что функция $\tilde{V}_\ell(\chi)$ всюду непрерывна, а функция $Q_\ell(\,\mathrm{cth}\,\chi)\,\tilde{V}_\ell(\chi)$ дифференцируема при всех $\chi \geq 0$. Более того, из (4.11) следует, что

$$Q_\ell(\,\mathrm{cth}\,\chi)\,\tilde{V}_\ell(\chi) = O\,(1)\,,\; |\chi| \to \infty\,, \tag{4.20}$$

$$\tilde{V}_\ell(\chi) = O\,(1)\,,\; \chi \to 0\,, \tag{4.21}$$

если только условие (4.9) выполнено. Очевидно, что указанное выше свойство в силу (4.16) и (4.17) имеет место и для функции $\tilde{U}_\ell(\chi)$.

4.3.2. Состояния рассеяния и фазовый сдвиг

Для состояний рассеяния ($E_{q'}/m' = \operatorname{ch}\chi' \geq 1$) решение уравнения (4.14) имеет вид

$$\tilde{\psi}_\ell(\chi', \chi) = \frac{\pi}{2}\,\frac{\operatorname{sh}\chi'}{Q_\ell^2(\operatorname{cth}\chi')}\,\delta\,(\operatorname{ch}\chi' - \operatorname{ch}\chi) + \frac{1}{2}\,\varepsilon_\ell\,N_\ell(\chi')\,\mathrm{P}\,\frac{\tilde{V}_\ell(\chi)}{\operatorname{ch}\chi' - \operatorname{ch}\chi}\,, \quad (4.22)$$

где P – символ главного значения.

Множитель при δ-функции выбран в соответствии с нормировкой волновой функции, т.е. при отсутствии взаимодействия ($\varepsilon_\ell = 0$) представление (4.12) должно приводить к выражению

$$\psi_\ell\,(\rho\,,\,\chi') = s_\ell\,(\rho\,,\,\chi')\,/Q_\ell\,(\operatorname{cth}\chi')\;.$$

После подстановки (4.22) в (4.12) и (4.19) находим:

$$\psi_\ell(\rho\,,\,\chi') = \frac{s_\ell(\rho\,,\,\chi')}{Q_\ell(\operatorname{cth}\chi')} + \frac{1}{\pi}\,\varepsilon_\ell\,N_\ell(\chi')\,\mathrm{P}\int\limits_0^\infty d\chi\,\frac{Q_\ell(\operatorname{cth}\chi)\,\tilde{V}_\ell(\chi)\,s_\ell(\rho\,,\,\chi)}{\operatorname{ch}\chi' - \operatorname{ch}\chi}\,, \quad (4.23)$$

$$N_\ell(\chi') = \tilde{U}_\ell(\chi')\,\left[1 + \mathrm{P}\,\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty d\chi\,\frac{A_\ell(\chi)}{\operatorname{ch}\chi - \operatorname{ch}\chi'}\right]^{-1}\,, \quad (4.24)$$

где

$$A_\ell(\chi) = \frac{2}{\pi}\,\varepsilon_\ell\,Q_\ell^2(\operatorname{cth}\chi)\,\tilde{U}_\ell(\chi)\,\tilde{V}_\ell(\chi)\,. \quad (4.25)$$

Поскольку функции $\tilde{V}_\ell(\chi)$ и $\tilde{U}_\ell(\chi)$ дифференцируемы, то главное значение интегралов существует, а в силу условий (4.20) и (4.21) все интегралы также сходятся и на обоих пределах. Таким образом, при выполнении условия (4.9) соотношения (4.23)–(4.25) определяют единственное решение уравнения (4.6) с граничным условием (4.8).

Асимптотику волновой функции $\psi_\ell(\rho\,,\,\chi')$ найдем, представив решение (4.23) в виде

$$\psi_\ell(\rho\,,\,\chi') = \frac{\sin\,(\rho\,\chi' - \pi\,\ell/2)}{Q_\ell(\operatorname{cth}\chi')} -$$

$$-\varepsilon_\ell\,N_\ell(\chi')\,\frac{1}{2\,i\,\pi}\,\mathrm{P}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\chi\,\frac{Q_\ell(\operatorname{cth}\chi)\,\tilde{V}_\ell(\chi)\,e^{i\,(\rho\,\chi - \pi\,\ell/2)}}{\operatorname{ch}\chi - \operatorname{ch}\chi'}\,,\ \rho\,\chi' \to \infty\,.$$

Это представление следует из асимптотики (2.20) и четности подынтегральной функции по χ в решении (4.23). Теперь воспользуемся соотношением

$$\frac{1}{\alpha - i\eta} = i\pi\delta(\alpha) + \mathrm{P}\left(\frac{1}{\alpha}\right), \ \eta \to +0. \tag{4.26}$$

Тогда получим

$$\psi_\ell(\rho, \chi') = \frac{\sin(\rho\chi' - \pi\ell/2)}{Q_\ell(\mathrm{cth}\,\chi')} -$$

$$-\varepsilon_\ell N_\ell(\chi')\left\{\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\chi \frac{Q_\ell(\mathrm{cth}\,\chi)\,\tilde{V}_\ell(\chi)\,e^{i(\rho\chi - \pi\ell/2)}}{\mathrm{ch}\,\chi - \mathrm{ch}\,\chi' - i\eta} - \right.$$

$$\left. -\frac{Q_\ell(\mathrm{cth}\,\chi')\,\tilde{V}_\ell(\chi')}{2\,\mathrm{sh}\,\chi'}\left[e^{i(\rho\chi' - \pi\ell/2)} - e^{-i(\rho\chi' - \pi\ell/2)}\right]\right\}, \ \eta \to +0.$$

Интеграл в последнем выражении легко вычисляется применением основной теоремы вычетов при интегрировании функции

$$f(z) = \frac{Q_\ell(\mathrm{cth}\,z)\,\tilde{V}_\ell(z)\,e^{i(\rho z - \pi\ell/2)}}{\mathrm{ch}\,z - \mathrm{ch}\,\chi' - i\eta}$$

по границе Γ^+ полосы $0 \le \mathrm{Im}\,\chi \le \pi/2$, $|\mathrm{Re}\,\chi| \le R$, $R \to \infty$ при $\rho\chi' \to \infty$ [11]. Учитывая, что при $\rho\chi' \to \infty$ интегралы от функции $f(z)$ по вертикальным отрезкам $[R;\, R + i\pi/2]$ и $[-R + i\pi/2;\, -R]$ ведут себя как $O\left(e^{-\pi\rho/4}\right)$, а интеграл по горизонтальному отрезку $[R + i\pi/2;\, -R + i\pi/2]$ ведет себя как $O\left(e^{-\pi\rho/2}\right)$, то находим:

$$\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\Gamma^+} dz \frac{Q_\ell(\mathrm{cth}\,z)\,\tilde{V}_\ell(z)\,e^{i(\rho z - \pi\ell/2)}}{\mathrm{ch}\,z - \mathrm{ch}\,\chi' - i\eta} =$$

$$= \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\chi \frac{Q_\ell(\mathrm{cth}\,\chi)\,\tilde{V}_\ell(\chi)\,e^{i(\rho\chi - \pi\ell/2)}}{\mathrm{ch}\,\chi - \mathrm{ch}\,\chi' - i\eta} + O\left(e^{-\pi\rho/4}\right) =$$

$$= \mathrm{res}\left[\frac{Q_\ell(\mathrm{cth}\,z)\,\tilde{V}_\ell(z)\,e^{i(\rho z - \pi\ell/2)}}{\mathrm{ch}\,z - \mathrm{ch}\,\chi' - i\eta}, \ z = \mathrm{arch}\,(\mathrm{ch}\,\chi' + i\eta)\right], \ \eta \to +0.$$

---

[11] Такой контур интегрирования обусловлен выбором верхней полы́ $E_p \ge 0$ гиперболоида $E_p^2 - \mathbf{p}^2 = 1$ и требованием однозначности его параметризации: $E_p = \mathrm{ch}\,\chi$.

Отсюда, после вычисления вычета, получим:

$$\frac{1}{2\,i\,\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\chi\,\frac{Q_\ell(\operatorname{cth}\chi)\,\tilde V_\ell(\chi)\,e^{i\,(\rho\,\chi-\pi\,\ell/2)}}{\operatorname{ch}\chi-\operatorname{ch}\chi'-i\,\eta}=$$

$$=\frac{Q_\ell(\operatorname{cth}\chi')\,\tilde V_\ell(\chi')\,e^{i\,(\rho\,\chi'-\pi\,\ell/2)}}{\operatorname{sh}\chi'}+O\left(e^{-\pi\,\rho/4}\right)\,,\ \eta\to+0\,.$$

Учитывая последний результат, находим асимптотику волновой функции

$$\begin{gathered}\psi_\ell(\rho\,,\,\chi')=\frac{\sin\,(\rho\,\chi'-\pi\,\ell/2)}{Q_\ell(\operatorname{cth}\chi')}-\\ -\varepsilon_\ell\,N_\ell(\chi')\,\frac{Q_\ell(\operatorname{cth}\chi')\,\tilde V_\ell(\chi')\,\cos\,(\rho\,\chi'-\pi\,\ell/2)}{\operatorname{sh}\chi'}+\\ +O\left(e^{-\pi\,\rho/4}\right)\,,\rho\,\chi'\to\infty\,.\end{gathered}\tag{4.27}$$

Для произвольного ℓ асимптотика волновой функции имеет вид

$$\begin{gathered}\psi_\ell(\rho\,,\,\chi')=\frac{\sin\,(\rho\,\chi'-\pi\,\ell/2)}{Q_\ell(\operatorname{cth}\chi')}+\frac{\cos\,(\rho\,\chi'-\pi\,\ell/2)\,\operatorname{tg}\delta_\ell(\chi')}{Q_\ell(\operatorname{cth}\chi')}\,,\\ \rho\,\chi'\to\infty\,.\end{gathered}\tag{4.28}$$

Сравнивая эти два асимптотических равенства, находим выражение для фазового сдвига

$$\operatorname{tg}\delta_\ell(\chi')=-\frac{\pi}{2}\operatorname{sh}^{-1}\chi'\,A_\ell(\chi')\,\left[1+\mathrm{P}\,\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty d\chi\,\frac{A_\ell(\chi)}{\operatorname{ch}\chi-\operatorname{ch}\chi'}\right]^{-1}\,.\tag{4.29}$$

Теперь заметим, что равенство (4.18), учитывая определение (4.16), условие сопряжения (2.14) и преобразование (4.13), можно записать в виде

$$V_\ell(\rho)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty d\chi\,Q_\ell(\operatorname{cth}\chi)\,\tilde U_\ell(\chi)\,s_\ell^*(\rho\,,\,\chi)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty d\chi\,Q_\ell(\operatorname{cth}\chi)\,\tilde V_\ell(\chi)\,s_\ell(\rho\,,\,\chi)\,.$$

Тем самым комплексные функции $\tilde V_\ell(\chi)$ и $\tilde U_\ell(\chi)$ связаны зависимостью

$$\int\limits_0^\infty d\chi\,Q_\ell(\operatorname{cth}\chi)\,\tilde V_\ell(\chi)\,s_\ell(\rho\,,\,\chi)=\int\limits_0^\infty d\chi\,Q_\ell(\operatorname{cth}\chi)\,\tilde U_\ell(\chi)\,s_\ell^*(\rho\,,\,\chi)\,.$$

Эта зависимость вместе с требованием действительности фазового сдвига, а, следовательно, действительности функции $A_\ell(\chi)$, приводит к равенству

$$\tilde{V}_\ell^*(\chi) = \pm\, \tilde{U}_\ell(\chi)\,,$$

которое равносильно условию

$$V_\ell^*(\rho) = \pm\, V_\ell(\rho)\,.$$

Но сепарабельный квазипотенциал $V(\boldsymbol{\rho}\,,\,\boldsymbol{\rho}')$ содержит произведение вида $\varepsilon_\ell\, V_\ell(\rho)\, V_\ell(\rho')$. Поэтому последнее условие означает, что квазипотенциал должен быть действительным

$$V_\ell^*(\rho) = V_\ell(\rho)\,. \tag{4.30}$$

Тем самым

$$\tilde{V}_\ell^*(\chi) = \tilde{U}_\ell(\chi)\,, \tag{4.31}$$

а выражение (4.25) принимает вид

$$A_\ell(\chi) = \frac{2}{\pi}\,\varepsilon_\ell\, Q_\ell^2(\operatorname{cth}\chi)\,|\tilde{V}_\ell(\chi)|^2\,. \tag{4.32}$$

4.3.3. Связанные состояния и состояния рассеяния: s-волна ($\ell = 0$)

Пусть существует хотя бы одно связанное состояние с энергией $E' = E_{q'}/m' = \operatorname{ch}\chi'$. Тогда решение уравнения (4.14) дается выражением

$$\tilde{\psi}_\ell(\chi'\,,\,\chi) = -\frac{1}{2}\,\varepsilon_\ell\, N_\ell(\chi')\,\mathrm{P}\,\frac{\tilde{V}_\ell(\chi)}{\operatorname{ch}\chi - E'}\,. \tag{4.33}$$

Подстановка этого решения в равенство (4.19) дает

$$N_\ell(\chi')\,\left[1 + \frac{1}{2}\,\mathrm{P}\int\limits_0^\infty d\chi\,\frac{A_\ell(\chi)}{\operatorname{ch}\chi - E'}\right] = 0\,,$$

откуда следует уравнение на собственные значения:

$$\Phi_\ell(\operatorname{ch}\,\chi') = \varepsilon_\ell + \frac{1}{2}\,\varepsilon_\ell\,\mathrm{P}\int\limits_0^\infty d\chi\,\frac{A_\ell(\chi)}{\operatorname{ch}\chi - E'} = 0\,. \tag{4.34}$$

При этом из требования существования связанных состояний следует, что уравнение на собственные значения (4.34) должно иметь хотя бы одно решение. Следовательно, функция $A_\ell(\chi)$ должна быть действительной. А это требование приводит к условию (4.31). Причем из равенств (4.32) и (4.34) следует, что связанному состоянию с энергией $0 \le E' = E'_t < 1$ будет отвечать $\varepsilon_\ell = -1$. В то же время для связанных состояний с энергиями $E' = E'_f \ge 1$ уравнение (4.34) может иметь решения при $\varepsilon_\ell = \pm 1$.

Рассмотрим s-волну ($\ell = 0$). Пусть существует связанное состояние с энергией

$$0 \le E'_t = \operatorname{ch}\chi'_t = \cos\kappa'_t < 1\,,\; \chi'_t = i\,\kappa'_t\,,\; 0 < \kappa'_t \le \pi/2\,. \tag{4.35}$$

Тогда из уравнения на собственные значения (4.34) следует, что связанное состояние с энергией $0 \le E'_t < 1$ будет существовать, если

$$\varepsilon_0 = -1\,, \quad \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty d\chi\,\tilde{V}_0^2(\chi) > 1\,. \tag{4.36}$$

Последнее условие связано с тем, что для любых $\chi \ge 0$ функция

$$q_{\,0}(\chi) = \frac{Q_0^2(\operatorname{cth}\chi)}{2\,(\operatorname{ch}\chi - E'_t)} = \frac{\chi^2}{2\,(\operatorname{ch}\chi - E'_t)}$$

является ограниченной, поскольку

$$0 \le q_{\,0}(\chi) \le \max\, q_{\,0}(\chi) = \frac{\chi_{\max}}{\operatorname{sh}\chi_{\max}} < 1\,,\; |\chi_{\max}| > 0\,,$$

где значение $\chi_{\max}$ определяется, как обычно, из условия максимума функции:

$$\left.\frac{d\,q_{\,0}(\chi)}{d\chi}\right|_{\chi=\chi_{\max}} = \frac{2\,\chi_{\max}\,(\operatorname{ch}\,\chi_{\max} - E'_t) - \chi^2_{\max}\,\operatorname{sh}\,\chi_{\max}}{2\,(\operatorname{ch}\,\chi_{\max} - E'_t)^2} = 0\,,$$

откуда следует, что

$$\operatorname{ch}\,\chi_{\max} - E'_t = \frac{1}{2}\chi_{\max}\,\operatorname{sh}\,\chi_{\max}\,.$$

При этом граничное условие (4.8), очевидно, выполняется, а волновую функцию $\psi_0(\rho\,,\,\chi'_t)$, определяемую подстановкой решения (4.33) в преобразование (4.12) при $\ell = 0$, $\varepsilon_0 = -1$ и $\rho \to \infty$, можно записать в виде

$$\psi_0(\rho\,,\,\chi'_t) = \frac{N_0(\chi'_t)}{2\,\pi\,i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\chi\,\frac{Q_0(\operatorname{cth}\chi)\,\tilde{V}_0(\chi)\,e^{i\,\rho\,\chi}}{\operatorname{ch}\chi - E'_t}\,.$$

Это представление следует из асимптотики (2.20) и четности подынтегральной функции по χ в преобразовании (4.12). Асимптотику этой функции вычисляем применением основной теоремы вычетов при интегрировании по границе Γ^+ полосы $0 \le \operatorname{Im}\chi \le \pi/2$, $|\operatorname{Re}\chi| \le R$, $R \to \infty$ при $\rho \to \infty$:

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{1}{2\,i\,\pi} \int\limits_{\Gamma^+} d\,z\, \frac{Q_0(\operatorname{cth} z)\, \tilde{V}_0(z)\, e^{i\,\rho\,z}}{\operatorname{ch} z - E'_t} =$$

$$= \frac{1}{2\,i\,\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\chi\, \frac{Q_0(\operatorname{cth}\chi)\, \tilde{V}_0(\chi)\, e^{i\,\rho\,\chi}}{\operatorname{ch}\chi - E'_t} + O\left(e^{-\pi\,\rho/4}\right) =$$

$$= \operatorname{res}\left[\frac{Q_0(\operatorname{cth} z)\, \tilde{V}_0(z)\, e^{i\,\rho\,z}}{\operatorname{ch} z - E'_t}\,,\ z = \chi'_t\right].$$

Отсюда, после вычисления вычета, получим:

$$\frac{1}{2\,i\,\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\chi\, \frac{Q_0(\operatorname{cth}\chi)\, \tilde{V}_0(\chi)\, e^{i\,\rho\,\chi}}{\operatorname{ch}\chi - E'_t} =$$

$$= \frac{Q_0(\operatorname{cth}\chi'_t)\, \tilde{V}_0(\chi'_t)\, e^{-\rho\,\kappa'_t}}{\operatorname{sh}\chi'_t} + O\left(e^{-\pi\,\rho/4}\right)\,,\ 0 < \kappa'_t \le \pi/2\,.$$

Следовательно, асимптотика волновой функции $\psi_0(\rho\,,\,\chi'_t)$ дается выражением

$$\psi_0(\rho\,,\,\chi'_t) = O\left(e^{-\min(\kappa'_t\,,\,\pi/4)\,\rho}\right) \to 0\,, \quad \rho \to \infty\,, \tag{4.37}$$

а, значит, при значении энергии $0 \le E'_t < 1$ имеется единственное связанное состояние, если выполнено условие (4.36).

Теперь рассмотрим связанные состояния с энергией ($\ell = 0$)

$$E'_f = \operatorname{ch}\chi'_f \ge 1\,. \tag{4.38}$$

Тогда уравнение (4.34) может иметь решения при $\varepsilon_0 = \pm 1$, $\ell = 0$. Если такое решение существует, тогда асимптотика волновой функции дается выражением (4.27) ($\ell = 0$) с опущенным первым членом:

$$\psi_0(\rho\,,\,\chi'_f) = -\varepsilon_0\, N_0(\chi'_f)\, \frac{Q_0(\operatorname{cth}\chi'_f)\, \tilde{V}_0(\chi'_f)\, \cos(\rho\,\chi'_f)}{\operatorname{sh}\chi'_f}) +$$

$$+ O\left(e^{-\pi\,\rho/4}\right)\,,\ \rho \to \infty\,.$$

Отсюда следует, что волновая функция асимптотически стремится к нулю, если только

$$\tilde{V}_0(\chi'_f) = 0\,. \tag{4.39}$$

А поскольку граничное условие (4.8) также выполнено, то значению энергии $E'_f = \operatorname{ch}\chi'_f$ соответствует связанное состояние.

4.3.4. Связанные состояния и состояния рассеяния: волны с $\ell > 0$

Связанные состояния для $\ell > 0$ рассматриваются подобно случаю s-волны. Так из уравнения на собственные значения (4.34) следует, что связанное состояние с энергией (4.35) будет существовать, если

$$\varepsilon_\ell = -1\,, \quad \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty d\chi\, \tilde{V}_\ell^2(\chi) > 1\,. \tag{4.40}$$

Данное условие связано с тем, что для любых $\ell\,,\,\chi \geq 0$ функция $q_\ell(\chi)$ является ограниченной:

$$0 \leq q_\ell(\chi) = \frac{Q_\ell^2(\operatorname{cth}\chi)}{2\,(\operatorname{ch}\chi - E'_t)} < 1\,. \tag{4.41}$$

Действительно, условие максимума функции в точке $\chi = \chi_{\max}$ имеет вид:

$$\frac{d\,q_\ell(\chi)}{d\chi}\Big|_{\chi=\chi_{\max}} = \frac{1}{2\,(\operatorname{ch}\chi - E'_t)^2}\times$$

$$\times\Big\{2Q_\ell(\operatorname{cth}\chi)[Q_\ell(\operatorname{cth}\chi)]'\left(-\operatorname{sh}^{-2}\chi\right)(\operatorname{ch}\chi - E'_t) - Q_\ell^2(\operatorname{cth}\chi)\operatorname{sh}\chi\Big\}\Big|_{\chi=\chi_{\max}} = 0\,.$$

Отсюда, используя формулу

$$(z^2-1)\,\frac{d\,Q_\ell(z)}{d\,z} = (\ell+1)\,[Q_{\ell+1}(z) - z\,Q_\ell(z)]\,,$$

находим, что точка $\chi = \chi_{\max}$ определяется из уравнения

$$\operatorname{ch}\chi_{\max} - E'_t = \frac{Q_\ell(\operatorname{cth}\chi_{\max})\ \operatorname{sh}(\chi_{\max})}{2\,(\ell+1)\,[\operatorname{cth}(\chi_{\max})\,Q_\ell(\operatorname{cth}\chi_{\max}) - Q_{\ell+1}(\operatorname{cth}\chi_{\max})]}\,.$$

Тогда функция $q_\ell(\chi)$ в точке $\chi = \chi_{\max}$ имеет максимум:

$$q_\ell(\chi_{\max}) =$$

$$= \frac{Q_\ell(\operatorname{cth}\chi_{\max})\,(\ell+1)\,[\operatorname{cth}(\chi_{\max})\,Q_\ell(\operatorname{cth}\chi_{\max}) - Q_{\ell+1}(\operatorname{cth}\chi_{\max})]}{\operatorname{sh}(\chi_{\max})} \approx \tag{4.42}$$

$$\approx \frac{\pi\,(\operatorname{th}\chi_{\max})^{2\,\ell}}{4^{\ell+1}\,\operatorname{ch}\chi_{\max}}\left[1 - \frac{\ell+1}{2\,\ell+3}\operatorname{th}^2\chi_{\max}\right] < 1\,,\ |\chi_{\max}| > 0\,,\ \ell > 0\,,$$

где при нахождении асимптотики в (4.42) были использованы асимптотические выражения для функции Лежандра второго рода и Γ-функции:

$$Q_\ell(z) \approx \frac{\Gamma^2(\ell+1)\,2^\ell}{\Gamma(2\,\ell+2)\,z^{\ell+1}}\,,\ |z| > 1\,,\ \ell \geq 0\,;$$

$$\Gamma(a\,z+b) \approx \sqrt{2\,\pi}\,e^{-a\,z}\,(a\,z)^{a\,z+b-1/2},\ a > 0\,,\ |\arg z| < \pi\,.$$

Очевидно,что граничное условие (4.8), как и в случае $\ell = 0$,также выполняется, а волновая функция $\psi_\ell(\rho\,,\,\chi'_t)$ определяется подстановкой решения (4.33) в преобразование (4.12) при $\varepsilon_\ell = -1$, которую также можно при $\rho \to \infty$ записать в виде

$$\psi_\ell(\rho\,,\,\chi'_t) = \frac{N_\ell(\chi'_t)}{2\,\pi\,i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\chi\,\frac{Q_\ell(\operatorname{cth}\chi)\,\tilde{V}_\ell(\chi)\,e^{i\,(\rho\,\chi-\pi\,\ell/2)}}{\operatorname{ch}\chi - E'_t}\,.$$

Здесь, как и в случае $\ell = 0$, данное представление следует из асимптотики (2.20) и четности подынтегральной функции по χ в преобразовании (4.12). Асимптотику функции $\psi_\ell(\rho\,,\,\chi'_t)$ вычисляем применением основной теоремы вычетов при интегрировании по границе Γ^+ полосы $0 \leq \operatorname{Im}\chi \leq \pi/2\,,\ |\operatorname{Re}\chi| \leq R\,,\ R \to \infty$ при $\rho \to \infty$. После вычисления вычета, получим, что асимптотика волновой функции $\psi_\ell(\rho\,,\,\chi'_t)$ дается выражением (4.37), а, значит, при значении энергии (4.35) имеется единственное связанное состояние, если выполнено условие (4.40).

Теперь рассмотрим связанные состояния с энергиями

$$E'_{fk} = \operatorname{ch}\chi'_{fk} \geq 1\,,\ \ell \geq 0\,. \tag{4.43}$$

Для таких связанных состояний с энергиями (4.43) уравнение (4.34) может иметь решения при $\varepsilon_\ell = \pm\,1$. Если такие решения существует, тогда асимптотика волновой функции дается выражением (4.27) с опущенным первым членом:

$$\psi_\ell(\rho\,,\,\chi'_{fk}) = -\varepsilon_\ell\, N_\ell(\chi'_{fk})\,\frac{Q_\ell(\mathrm{cth}\,\chi'_{fk})\,\tilde V_\ell(\chi'_{fk})\,\cos\left(\rho\,\chi'_{fk} - \pi\,\ell/2\right)}{\mathrm{sh}\,\chi'_{fk}}) + \\ + O\left(e^{-\pi\,\rho/4}\right)\,,\ \rho\to\infty\,.$$

Отсюда, как и в случае $\ell = 0$, следует, что волновая функция асимптотически стремится к нулю, если только

$$\tilde V_\ell(\chi'_{fk}) = 0\,. \tag{4.44}$$

Поскольку и граничное условие (4.8) также выполнено, то значениям энергий $E'_{fk} = \mathrm{ch}\,\chi'_{fk}$ соответствуют связанные состояния и даются общими корнями уравнений (4.34) и (4.44).

Наконец, используя выражение (4.29) для фазового сдвига, приходим к следующим выводам.

При значениях энергий E'_{fk} фазовый сдвиг $\delta_\ell(\chi')$ проходит при возрастании χ' через значения $\pi\,k$ (k – целое), убывая. Это имеет место, так как при $E'_{fk} = \mathrm{ch}\,\chi'_{fk}$ в силу условий (4.34) и (4.44) равны нулю как числитель, так и знаменатель в правой части равенства (4.29). Но при этом функция $A_\ell(\chi)$, определяемая выражением (4.32), имеет в точке χ'_{fk} по крайней мере нуль второго порядка, в то время как знаменатель в (4.29) – только простой нуль, поскольку

$$\left.\frac{d\,\Phi_\ell\,(\mathrm{ch}\,\chi')}{d\,\chi'}\right|_{\chi'=\chi'_{fk}} = \frac{\mathrm{sh}\,\chi'_{fk}}{2}\int\limits_0^\infty d\,\chi\,\frac{|A_\ell\,(\chi)|}{\left(\mathrm{ch}\,\chi'_{fk} - \mathrm{ch}\,\chi\right)^2} > 0\,. \tag{4.45}$$

Это означает, что $\mathrm{tg}\ \delta_\ell\,(\chi')$ обращается в нуль в точках χ'_{fk} и меняет знак, т.е.

$$\begin{gathered}\delta_\ell\left(\chi'_{fk}\right) = \pi\,k\,,\ k = \begin{cases} 0, 1, ..., \nu_\ell - 1\,,\ \varepsilon_\ell = 1\,, \\ 1, 2, ..., \nu_\ell\,,\ \varepsilon_\ell = -1\,, \end{cases} \\ \left.\frac{d\,\delta_\ell\,(\chi')}{d\,\chi'}\right|_{\chi'=\chi'_{fk}} < 0\,. \end{gathered} \tag{4.46}$$

Если же знаменатель в (4.29) не обращается в нуль при $\chi' = \chi'_{fk}$, то фазовый сдвиг $\delta_\ell(\chi')$ будет касаться прямых $\delta_\ell = \pi\,k$ сверху или снизу, но не пересекать их, т.е. имеются экстремумы.

Таким образом, если фазовый сдвиг $\delta_\ell(\chi')$ при возрастании χ' пересекает прямые $\delta_\ell = \pi\, k$ сверху, а условия (4.34) и (4.44) выполнены, то имеются связанные состояния с энергиями $E'_{fk} = \mathrm{ch}\,\chi'_{fk}$. При этом знак фазового сдвига $\delta_\ell(\chi')$ при высоких энергиях ($\chi' \to \infty$) обратен знаку величины ε_ℓ. Поэтому, установив знак фазового сдвига при высоких энергиях, можно определить ε_ℓ. Наконец, используя оценку (4.20) и выражение (4.29), находим, что

$$\mathrm{tg}\;\delta_\ell\,(\infty) = 0\,.$$

Следовательно, мы можем выбрать фазовый сдвиг $\delta_\ell(\chi')$ так, чтобы выполнялось условие

$$\delta_\ell(\infty) = 0\,. \tag{4.47}$$

4.3.5. Обобщение теоремы Левинсона

Для вывода теоремы Левинсона для случая чисто нелокального сепарабельного квазипотенциала введем в рассмотрение функцию Йоста

$$F_\ell\,(\chi') = |F_\ell\,(\chi')|\,\exp\left[-i\,\delta_\ell\,(\chi')\right]\,, \tag{4.48}$$

где $\delta_\ell\,(\chi')$ – фазовый сдвиг, определяемый выражением (4.29). Пусть σ_ℓ – число связанных состояний со значением энергии (4.35) ($0 \le E'_t < 1\,,\; \sigma_\ell = \{0\,,\; \varepsilon_\ell = 1\,;\; 1\,,\; \varepsilon_\ell = -1\}$), причем $F_\ell\,(\chi'_t) = 0$, а ν_ℓ – число связанных состояний с энергиями (4.43) ($E'_{fk} \ge 1\,,\; k = \{0, 1, ..., \nu_\ell - 1\,,\; \varepsilon_\ell = 1\,;\; 1, 2, ..., \nu_\ell\,,\; \varepsilon_\ell = -1\}$). Поскольку функция Йоста $F_\ell\,(\chi')$ является аналитической в полосе $0 \le \mathrm{Im}\,\chi \le \pi/2$, имеет там σ_ℓ простых нулей и не имеет полюсов, то, применяя теорему о логарифмическом вычете для функции Йоста по границе Γ^+ полосы $0 \le \mathrm{Im}\,\chi' \le \pi/2$ и учитывая вклад в вариацию от ν_ℓ связанных состояний (свойство (4.46)) и нечетность фазового сдвига, получим:

$$\begin{aligned}
2\,\pi\,i\,\sigma_\ell &= \lim_{R\to+\infty\,,\,\eta\to+0}\,\int\limits_{\Gamma^+} d\ln\,F_\ell\,(\chi') = \\
&= -i\,\lim_{R\to+\infty\,,\,\eta\to+0}\mathrm{var}\,\delta_\ell\,(\chi')\Big|_{\Gamma^+} = \\
&= -i\,\left\{2\,\pi\,\nu_\ell - 2\,\left[\delta_\ell(0) - \delta_\ell(\infty)\right]\right\}\,.
\end{aligned} \tag{4.49}$$

Здесь $\operatorname{var}\delta_\ell(\chi')\big|_{\Gamma^+}$ – вариация фазового сдвига при обходе точкой χ' замкнутого контура Γ^+ – границы полосы $0 \le \operatorname{Im}\chi' \le \pi/2$. Из выражения (4.49), учитывая условие (4.47), получаем обобщение теоремы Левинсона для случая чисто нелокального сепарабельного квазипотенциала в форме ($\ell \ge 0$):

$$\delta_\ell\,(0) = \pi\,(\sigma_\ell + \nu_\ell)\,, \quad \sigma_\ell = \{0\,,\, \varepsilon_\ell = 1\,;\, 1\,,\, \varepsilon_\ell = -1\}\,. \tag{4.50}$$

4.3.6. Применение

В качестве применения полученных результатов найдем условия существования связанных состояний и состояний рассеяния для квазипотенциала ($\ell = 0$)

$$V_0(\rho) = \alpha\,\delta\,(\rho - a)\,, \quad \alpha\,,\, a > 0\,, \tag{4.51}$$

и проведем сравнение с нерелятивистским случаем для этого же потенциала. Очевидно, что квазипотенциалу (4.51) отвечает его образ

$$\tilde{V}_0(\chi') = \frac{\alpha\,\sin\,(a\,\chi')}{\chi'}\,. \tag{4.52}$$

Связанное состояние с энергией E'_t ($0 \le E'_t < 1$, $E'_t = \cos\kappa'_t$, $0 < \kappa'_t \le \pi/2$) для квазипотенциала (4.51) будет существовать при $\varepsilon_0 = -1$, если выполняются условия (4.34) и (4.36). После подстановки образа потенциала (4.52) в условия (4.34) и (4.36) они принимают вид:

$$1 - \frac{\alpha^2}{2\,\pi}\int\limits_0^\infty d\chi\,\frac{1-\cos\,(2\,a\,\chi)}{\operatorname{ch}\chi - \cos\kappa'_t} = 0\,, \tag{4.53}$$

$$\frac{2\,\alpha^2}{\pi}\int\limits_0^\infty d\chi\,\frac{\sin^2(a\,\chi)}{\chi^2} > 1\,. \tag{4.54}$$

Интеграл в условии (4.54) подстановкой $t = a\,\chi$ приводится к виду

$$\int\limits_0^\infty d\chi\,\frac{\sin^2(a\,\chi)}{\chi^2} = a\int\limits_0^\infty d\,x\,\frac{\sin^2 x}{x^2}\,.$$

Последний интеграл часто встречается в приложениях и может быть вычислен с помощью интегрирования функции

$$f(z) = \frac{e^{2\,i\,z} - 1}{z^2}$$

по контуру, состоящему из полуокружностей C^+_{Ro}, радиуса $R\,(R\to+\infty)$, и $C^-_{\eta o}$, радиуса $\eta\,(\eta\to+0)$, центры которых находятся в точке $z=0$ и которые расположены в верхней полуплоскости ($\mathrm{Im}\,z\geq 0$) комплексной плоскости переменной z, и двух отрезков действительной оси $[-R\,;\,-\eta]$ и $[\eta\,;\,R]$, соединяющих концы данных полуокружностей. Опуская вычисления, приведем значение интеграла:

$$\int\limits_0^\infty d\,x\,\frac{\sin^2 x}{x^2}=\frac{\pi}{2}\,.$$

Тогда условие (4.54) принимает вид

$$a\,\alpha^2>1\,. \tag{4.55}$$

Интеграл в условии (4.53) разобьем на два:

$$\int\limits_0^\infty d\chi\,\frac{1}{\mathrm{ch}\,\chi-\cos\kappa'_t}\,,\qquad \int\limits_0^\infty d\chi\,\frac{\cos(2\,a\,\chi)}{\mathrm{ch}\,\chi-\cos\kappa'_t}\,. \tag{4.56}$$

Первый интеграл в (4.56) вычисляется подстановкой $t=e^\chi$, если воспользоваться формулой $\mathrm{ch}\,\chi=(e^\chi+e^{-\chi})\,/2$. В результате получим:

$$\begin{aligned}\int\limits_0^\infty d\chi\,\frac{1}{\mathrm{ch}\,\chi-\cos\kappa'_t}&=2\int\limits_1^\infty d\,t\,\frac{1}{(t-\cos\kappa'_t)^2+\sin^2\kappa'_t}=\\ &=\frac{2}{\sin\kappa'_t}\;\mathrm{arctg}\left(\frac{t-\cos\kappa'_t}{\sin\kappa'_t}\right)\Big|_1^\infty=\\ &=\frac{2}{\sin\kappa'_t}\left[\frac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}\left(\frac{1-\cos\kappa'_t}{\sin\kappa'_t}\right)\right]=\frac{\pi-\kappa'_t}{\sin\kappa'_t}\,.\end{aligned} \tag{4.57}$$

Второй интеграл в (4.56), если воспользоваться четностью подынтегральной функции, вычисляется применением основной теоремы вычетов при интегрировании по границе Γ^+_o полосы $0\leq\mathrm{Im}\,\chi\leq 2\,\pi\,,\ |\mathrm{Re}\,\chi|\leq R\,,\ R\to+\infty$. Это дает:

$$\begin{aligned}\lim_{R\to+\infty}\int\limits_{\Gamma^+_o}d\,z\,\frac{e^{2\,i\,az}}{\mathrm{ch}\,z-\cos\kappa'_t}&=\lim_{R\to+\infty}\left[\int\limits_{-R}^{R}d\chi\,\frac{e^{2\,i\,a\chi}}{\mathrm{ch}\,\chi-\cos\kappa'_t}+\right.\\ &+\int\limits_{R}^{R+2\,i\pi}d\,z\,\frac{e^{2\,i\,az}}{\mathrm{ch}\,z-\cos\kappa'_t}+\int\limits_{R+2\,i\pi}^{-R+2\,i\pi}d\,z\,\frac{e^{2\,i\,az}}{\mathrm{ch}\,z-\cos\kappa'_t}+\\ +\left.\int\limits_{-R+2\,i\pi}^{-R}d\,z\,\frac{e^{2\,i\,az}}{\mathrm{ch}\,z-\cos\kappa'_t}\right]&=2\,i\pi\,\mathrm{res}\left[\frac{e^{2\,i\,az}}{\mathrm{ch}\,z-\cos\kappa'_t}\,,z=i\kappa'_t\,,-i\kappa'_t+2\,i\pi\right]\,.\end{aligned}$$

Интегралы по вертикальным отрезкам $[R;\, R+2\,i\pi]$ и $[-R+2\,i\pi;\, -R]$ в пределе $R \to +\infty$ обращаются в нуль, а в интеграле по горизонтальному отрезку $[R+2\,i\pi;\, -R+2\,i\pi]$ выполним замену переменной $z = \chi + 2\,i\pi$. Тогда, переходя к пределу $R \to +\infty$, после вычисления вычетов в точках $z = i\kappa'_t\,, -i\kappa'_t + 2\,i\pi$ получим:

$$\left(1 - e^{-4\,a\pi}\right) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\chi\, \frac{e^{2\,i\,a\,\chi}}{\operatorname{ch}\chi - \cos\kappa'_t} = 2\,i\pi \left[\frac{e^{-2\,a\kappa'_t}}{\operatorname{sh}(i\kappa'_t)} + \frac{e^{2\,a\kappa'_t - 4\,a\pi}}{\operatorname{sh}(-i\kappa'_t)}\right] =$$

$$= \frac{2\,\pi}{\sin\kappa'_t}\left(e^{-2\,a\kappa'_t} - e^{2\,a\kappa'_t - 4\,a\pi}\right)\,.$$

Отсюда, после несложных преобразований, находим выражение для второго интеграла в (4.56):

$$\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\chi\, \frac{e^{2\,i\,a\,\chi}}{\operatorname{ch}\chi - \cos\kappa'_t} = \frac{\pi\, \operatorname{sh}\left[2\,a\,(\pi - \kappa'_t)\right]}{\sin(\kappa'_t)\, \operatorname{sh}(2\,a\pi)}\,. \tag{4.58}$$

Подставляя найденные выражения (4.57) и (4.58) для интегралов в условие (4.53), получим, что значение κ'_t, отвечающее связанному состоянию с энергией E'_t, определяется как решение уравнения

$$\pi - \kappa'_t - \frac{\pi \operatorname{sh}\left[2\,a\,(\pi - \kappa'_t)\right]}{\operatorname{sh}(2\,\pi\,a)} - \frac{2\,\pi}{\alpha^2}\,\sin\,\kappa'_t = 0\,, \quad 0 < \kappa'_t \le \frac{\pi}{2}\,, \tag{4.59}$$

при условии (4.55).

В то же время состояния рассеяния с энергиями $E'_{fk} = \operatorname{ch}\chi'_{fk} \ge 1$ для квазипотенциала (4.51) будут существовать при $\varepsilon_0 = 1$ и определяются как общие корни уравнений (4.34) и (4.39). После подстановки образа потенциала (4.52) в условия (4.34) и (4.39), они принимают вид:

$$1 + \frac{\alpha^2}{2\,\pi}\int\limits_{0}^{\infty} d\chi\, \frac{1 - \cos(2\,a\,\chi)}{\operatorname{ch}\chi - \operatorname{ch}\chi'_{fk}} = 0\,, \tag{4.60}$$

$$\tilde{V}_0(\chi'_{fk}) = \frac{\alpha\,\sin(a\,\chi'_{fk})}{\chi'_{fk}} = 0\,. \tag{4.61}$$

Из условия (4.61) имеем:

$$\chi'_{fk} = \pm\frac{\pi\,k}{a}\,, \quad k = 1, 2, \ldots\,. \tag{4.62}$$

Заметим, что интеграл в (4.60) не содержит символа главного значения, поскольку выполняется условие (4.62). Поэтому этот интеграл вычислим, воспользовавшись четностью подынтегральной функции и применив теорему Коши при интегрировании по границе Γ_o^+ полосы $0 \leq \operatorname{Im}\chi \leq 2\pi$, $|\operatorname{Re}\chi| \leq R$, $R \to +\infty$. Это дает:

$$\lim_{R\to+\infty} \int\limits_{\Gamma_o^+} dz\, \frac{1-e^{2iaz}}{\operatorname{ch} z - \operatorname{ch}\chi'_{fk}} = \lim_{R\to+\infty} \left[\int\limits_{-R}^{R} d\chi\, \frac{1-e^{2ia\chi}}{\operatorname{ch}\chi - \operatorname{ch}\chi'_{fk}} + \right.$$

$$+ \int\limits_{R}^{R+2i\pi} dz\, \frac{1-e^{2iaz}}{\operatorname{ch} z - \operatorname{ch}\chi'_{fk}} + \int\limits_{R+2i\pi}^{-R+2i\pi} dz\, \frac{1-e^{2iaz}}{\operatorname{ch} z - \operatorname{ch}\chi'_{fk}} +$$

$$\left. + \int\limits_{-R+2i\pi}^{-R} dz\, \frac{1-e^{2iaz}}{\operatorname{ch} z - \operatorname{ch}\chi'_{fk}} \right] = 0\,.$$

Как и в случае связанного состояния с энергией E'_t, учтем, что интегралы по вертикальным отрезкам $[R;\, R+2i\pi]$ и $[-R+2i\pi;\, -R]$ в пределе $R \to +\infty$ обращаются в нуль, а в интеграле по горизонтальному отрезку $[R+2i\pi;\, -R+2i\pi]$ выполним замену переменной $z = \chi + 2i\pi$. Тогда, переходя к пределу $R \to +\infty$, получим:

$$\mathrm{P}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\chi\, \frac{e^{2ia\chi}}{\operatorname{ch}\chi - \operatorname{ch}\chi'_{fk}} = 0\,.$$

Следовательно, интеграл в (4.60) можно записать в виде:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\chi\, \frac{1-\cos(2a\chi)}{\operatorname{ch}\chi - \operatorname{ch}\chi'_{fk}} = \mathrm{P}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\chi\, \frac{1}{\operatorname{ch}\chi - \operatorname{ch}\chi'_{fk}}\,. \tag{4.63}$$

Интеграл в (4.63) является несобственным. Поэтому, воспользовавшись формулой $\operatorname{ch}\chi = (e^{\chi} + e^{-\chi})/2$ и выполнив подстановку $t = e^{\chi}$, проводим необходимые вычисления несобственного интеграла:

$$\mathrm{P}\int\limits_{0}^{\infty} d\chi\, \frac{1}{\operatorname{ch}\chi - \operatorname{ch}\chi'_{fk}} = 2\,\mathrm{P}\int\limits_{1}^{\infty} dt\, \frac{1}{\left(t - e^{\chi'_{fk}}\right)\left(t - e^{-\chi'_{fk}}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\operatorname{sh}\chi'_{fk}}\,\mathrm{P}\int\limits_{1}^{\infty} dt\, \left[\frac{1}{\left(t - e^{\chi'_{fk}}\right)} - \frac{1}{\left(t - e^{-\chi'_{fk}}\right)}\right] =$$

$$= \frac{1}{\operatorname{sh}\chi'_{fk}} \lim_{R\to+\infty\,,\,\eta\to+0} \left[\int\limits_{1-e^{\chi'_{fk}}}^{-\eta} \frac{d\tau}{\tau} + \int\limits_{\eta}^{R} \frac{d\tau}{\tau} - \int\limits_{1-e^{-\chi'_{fk}}}^{R} \frac{d\tau}{\tau} \right] =$$

$$= \frac{1}{\operatorname{sh}\chi'_{fk}} \ln \left| \frac{1-e^{-\chi'_{fk}}}{e^{\chi'_{fk}}-1} \right| = -\frac{\chi'_{fk}}{\operatorname{sh}\chi'_{fk}}\,.$$

Тогда для интеграла в (4.63) получим:

$$\int\limits_0^\infty d\chi\,\frac{1-\cos(2\,a\,\chi)}{\operatorname{ch}\chi-\operatorname{ch}\chi'_{fk}} = -\frac{\chi'_{fk}}{\operatorname{sh}\chi'_{fk}}\,. \tag{4.64}$$

Учитывая значение интеграла в (4.64), находим, что условие (4.60) принимает вид

$$1-\frac{\alpha^2\,\chi'_{fk}}{2\,\pi\,\operatorname{sh}\chi'_{fk}} = 0\,, \tag{4.65}$$

где значения χ'_{fk} даются выражением (4.62). Уравнение (4.65) совместно с выражением (4.62) допускает существование двух состояний рассеяния с энергией

$$E'_{fk} = \operatorname{ch}\chi'_{fk} > 1\,, \quad \chi'_{fk} = \pm\,\frac{\pi\,k}{a}\,, \quad k = 1, 2, \dots\,,$$

при условии

$$\alpha^2 > 2\,\pi\,. \tag{4.66}$$

Найденное значение энергии состояния рассеяния E'_{fk} обладает рядом свойств. Во-первых, если ширина ямы a не меняется, то рост параметра α ведет к росту энергии состояния рассеяния E'_{fk}, и наоборот. Во-вторых, если параметр α фиксирован, то изменение параметра a ведет к изменению ‘уровня’ k, но при этом $|\chi'_{fk}| = \dfrac{\pi\,k}{a} = const$, т.е. энергия состояния рассеяния не меняется. Таким образом, имеется квантование энергетических уровней как функции параметров a и α согласно соотношениям (4.62) и (4.65) при условии (4.66).

В нерелятивистском случае [123] квазипотенциалу (4.51) соответствует при $\chi' = k$ тот же образ (4.52). При этом связанное состояние при отрицательной энергии $k^2 = -\kappa^2 < 0$ существует также только при условии (4.55), но определяется как решение уравнения

$$1-\alpha^2\,e^{-a\,\kappa}\,\frac{\operatorname{sh}(a\,\kappa)}{\kappa} = 0\,. \tag{4.67}$$

В то же время состояний рассеяния при положительных энергиях $k^2 \geq 0$ в нерелятивистском случае нет.

4.4. Суперпозиция нелокального сепарабельного и локального квазипотенциалов

В данном разделе рассмотрим случай суперпозиции нелокального сепарабельного и локального квазипотенциалов. Для простоты изложения, так же как и в предыдущем разделе, ограничимся случаем, когда каждому ℓ соответствует только один сепарабельный член ($M_\ell = 1$). Тогда уравнение (4.5) принимает вид

$$\begin{gathered}\left[\nabla + \left(1 + \frac{\ell\,(\ell+1)}{\rho^{(2)}}\right)\,\nabla^* - 2\,\mathrm{ch}\,\chi' + W\,(\rho)\right]\,\psi_\ell\,(\rho\,,\,\chi') + \\ + \varepsilon_\ell\,V_\ell\,(\rho)\int\limits_0^\infty d\rho'\,V_\ell\,(\rho')\,\psi_\ell\,(\rho'\,,\,\chi') = 0\,,\end{gathered} \tag{4.68}$$

где ∇ , ∇^* , $W\,(\rho)$ и $V_\ell\,(\rho)$, ε_ℓ определены в (2.6) и (4.7), а χ', как и в предыдущем разделе, – быстрота, которая связана с энергией E_q прежним соотношением: $E_q = \mathrm{ch}\,\chi'$.

Решение уравнения (4.68) с граничным условием (4.8), получение выражения для приращения фазового сдвига, исследование условий существования связанных состояний и состояний рассеяния, дальнейшее обобщение теоремы Левинсона и вывод условий ортогональности и полноты для регулярного решения для случая суперпозиции нелокального сепарабельного и локального квазипотенциалов и есть цель данного раздела, обобщающего результаты раздела 4.3.

4.4.1. Парциальная волновая функция: метод и условие единственности решения

Решение уравнения (4.6) с граничным условием (4.8) будем рассматривать для класса потенциалов, для которых локальный $W(\rho)$ квазипотенциал и компоненты $V_\ell(\rho)$ сепарабельного взаимодействия удовлетворяют условиям (2.10) и (4.9). Эти требования означают, что регулярное решение $\psi_\ell(\rho\,,\,\chi')$ уравнения (4.6) с граничным условием (4.8) существует и является единственным. Будем считать, что локальная составляющая $W(\rho)$ полного взаимодействия известна и может иметь n_ℓ связанных состояний с энергиями (2.8).

Напомним, что требование в (2.10) означает, что регулярное решение $\varphi_\ell(\rho\,,\,\chi')$ уравнения (4.6) при отсутствии сепарабельного взаимодействия ($\varepsilon_\ell = 0$) с граничным условием (2.9) удовлетворяет условиям ортогональности (2.61) и полноты (2.64). Поэтому, опираясь на условия ортогональности (2.61) и полноты (2.64) для регулярного решения $\varphi_\ell(\rho\,,\,\chi')$ со спектральной плотностью (2.63), введем релятивистские интегральные преобразования Ханкеля [85] [12]:

$$\tilde{\psi}_\ell\,(\chi'\,,\,\chi) = \int\limits_0^\infty d\rho\,\psi_\ell\,(\rho\,,\,\chi')\;\varphi_\ell^*\,(\rho\,,\,\chi)\,, \tag{4.69}$$

$$\begin{gathered}\psi_\ell\,(\rho\,,\,\chi') = \int\limits_0^\infty d\rho_\ell\,(E)\;\tilde{\psi}_\ell\,(\chi'\,,\,\chi)\;\varphi_\ell\,(\rho\,,\,\chi) = \\ = \sum_{j=1}^{n_\ell} C_{\ell j}\,\tilde{\psi}_\ell\left(\chi'\,,\,\chi_j\right)\,\varphi_\ell\left(\rho\,,\,\chi_j\right) + \int\limits_0^\infty d\chi\,\tau_\ell\,(\chi)\;\tilde{\psi}_\ell\,(\chi'\,,\,\chi)\;\varphi_\ell\,(\rho\,,\,\chi)\,,\end{gathered} \tag{4.70}$$

$$\tilde{V}_\ell\,(\chi) = \int\limits_0^\infty d\rho\,V_\ell\,(\rho)\;\varphi_\ell^*\,(\rho\,,\,\chi)\,, \tag{4.71}$$

$$\begin{gathered}V_\ell\,(\rho) = \int\limits_0^\infty d\rho_\ell\,(E)\;\tilde{V}_\ell\,(\chi)\;\varphi_\ell\,(\rho\,,\,\chi) = \\ = \sum_{j=1}^{n_\ell} C_{\ell j}\,\tilde{V}_\ell\left(\chi_j\right)\,\varphi_\ell\left(\rho\,,\,\chi_j\right) + \int\limits_0^\infty d\chi\,\tau_\ell\,(\chi)\;\tilde{V}_\ell\,(\chi)\;\varphi_\ell\,(\rho\,,\,\chi)\,,\end{gathered} \tag{4.72}$$

где нормировочные константы $C_{\ell j}$ определены в (2.62), а функция $\tau_\ell(\chi)$ – в (2.65).

Применяя преобразования (4.70) и (4.72) к уравнению (4.68), получим:

$$\left(\operatorname{ch}\chi' - \operatorname{ch}\chi_j\right)\,\tilde{\psi}_\ell\left(\chi'\,,\,\chi_j\right) = \frac{1}{2}\,\varepsilon_\ell\,N_\ell\,(\chi')\;\tilde{V}_\ell\left(\chi_j\right)\,, \tag{4.73}$$

$$\left(\operatorname{ch}\chi' - \operatorname{ch}\chi\right)\,\tilde{\psi}_\ell\,(\chi'\,,\,\chi) = \frac{1}{2}\,\varepsilon_\ell\,N_\ell\,(\chi')\;\tilde{V}_\ell\,(\chi)\,, \tag{4.74}$$

[12] Заметим, что интегральные преобразования (4.69)–(4.72) при отсутствии локального взаимодействия ($W(\rho) \equiv 0$) сводятся к релятивистским интегральным преобразованиям Ханкеля (4.10)–(4.13), введенным в разделе 4.3.

$$
N_\ell(\chi') = \int_0^\infty d\rho_\ell(E)\ \tilde{\psi}_\ell(\chi', \chi)\ \tilde{U}_\ell(\chi)\,, \tag{4.75}
$$

где, как и в случае чисто сепарабельного взаимодействия, функция $U_\ell(\rho)$ определена в (4.16), причем для функций $U_\ell(\rho)$ и $\tilde{U}_\ell(\chi)$ также справедливы интегральные преобразования:

$$
\tilde{U}_\ell(\chi) = \int_0^\infty d\rho\, U_\ell(\rho)\ \varphi_\ell^*(\rho, \chi)\,, \tag{4.76}
$$

$$
U_\ell(\rho) = \int_0^\infty d\rho_\ell(E)\ \tilde{U}_\ell(\chi)\ \varphi_\ell(\rho, \chi)\,. \tag{4.77}
$$

Заметим, что условия (2.10) и (4.9) обеспечивают выполнение свойств (2.25) и (2.39). Значит, функция $\tilde{V}_\ell(\chi)$ всюду непрерывна, а функция $Q_\ell(\mathrm{cth}\,\chi)\ \tilde{V}_\ell(\chi)\ \left|F_\ell^W(\chi)\right|^{-1}$ дифференцируема при всех $\chi \geq 0$. Более того, из (4.71) следуют оценки

$$
Q_\ell(\mathrm{cth}\,\chi)\ \tilde{V}_\ell(\chi)\ \left|F_\ell^W(\chi)\right|^{-1} = O(1)\,,\ \ |\chi| \to \infty\,, \tag{4.78}
$$

$$
\tilde{V}_\ell(\chi) = O(1)\,,\ \chi \to 0\,, \tag{4.79}
$$

если только условия (2.10) и (4.9) выполняются. Очевидно, что отмеченные выше оценки в силу (4.16) и (4.76) имеют место также и для функции $\tilde{U}_\ell(\chi)$. Кроме того, для действительных $\ell\,,\ \chi$ преобразование (4.77) можно представить, используя условие сопряжения (2.28), определение (4.16) и преобразование (4.72), в виде

$$
V_\ell(\rho) = \int_0^\infty d\rho_\ell(E)\ \tilde{U}_\ell(\chi)\ \varphi_\ell^*(\rho, \chi) = \int_0^\infty d\rho_\ell(E)\ \tilde{V}_\ell(\chi)\ \varphi_\ell(\rho, \chi)\,.
$$

Отсюда, учитывая действительность сепарабельного члена $V_\ell(\rho)$, видим, что комплексные функции $\tilde{V}_\ell(\chi)$ и $\tilde{U}_\ell(\chi)$, как и в случае чисто сепарабельного взаимодействия, связаны зависимостью (4.31).

4.4.2. Состояния рассеяния и приращение фазового сдвига

Для состояний рассеяния ($E' = \operatorname{ch}\chi' \geq 1$) решения уравнений (4.73) и (4.74) имеют вид [13)]:

$$\tilde{\psi}_\ell(\chi', \chi_j) = \frac{1}{2}\varepsilon_\ell N_\ell(\chi')\,\frac{\tilde{V}_\ell(\chi_j)}{\operatorname{ch}\chi' - \operatorname{ch}\chi_j}, \tag{4.80}$$

$$\tilde{\psi}_\ell(\chi', \chi) = \frac{\delta\left(\operatorname{ch}\chi' - \operatorname{ch}\chi\right)}{d\rho_\ell\left(\operatorname{ch}\chi'\right)/d\left(\operatorname{ch}\chi'\right)} + \frac{1}{2}\varepsilon_\ell N_\ell(\chi')\;\mathrm{P}\,\frac{\tilde{V}_\ell(\chi)}{\operatorname{ch}\chi' - \operatorname{ch}\chi}. \tag{4.81}$$

Подставляя решения (4.80) и (4.81) в (4.70) и (4.75) и учитывая свойство сопряжения (4.31), получим:

$$\begin{gathered}\psi_\ell(\rho, \chi') = \varphi_\ell(\rho, \chi') + \frac{1}{2}\varepsilon_\ell N_\ell(\chi')\sum_{j=1}^{n_\ell} C_{\ell j}\,\frac{\tilde{V}_\ell(\chi_j)\,\varphi_\ell(\rho, \chi_j)}{\operatorname{ch}\chi' - \operatorname{ch}\chi_j} + \\ + \frac{1}{2}\varepsilon_\ell N_\ell(\chi')\;\mathrm{P}\int_0^\infty d\chi\,\frac{\tau_\ell(\chi)\,\tilde{V}_\ell(\chi)\,\varphi_\ell(\rho, \chi)}{\operatorname{ch}\chi' - \operatorname{ch}\chi},\end{gathered} \tag{4.82}$$

$$N_\ell(\chi') = \frac{\varepsilon_\ell\,\tilde{V}^*_\ell(\chi')}{\Phi_\ell(\operatorname{ch}\chi')}, \tag{4.83}$$

где

$$\Phi_\ell(\operatorname{ch}\chi') = \varepsilon_\ell - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n_\ell} C_{\ell j}\,\frac{\left|\tilde{V}_\ell(\chi_j)\right|^2}{\operatorname{ch}\chi' - \operatorname{ch}\chi_j} - \frac{1}{2}\varepsilon_\ell\;\mathrm{P}\int_0^\infty d\chi\,\frac{A_\ell(\chi)}{\operatorname{ch}\chi' - \operatorname{ch}\chi}, \tag{4.84}$$

$$A_\ell(\chi) = \varepsilon_\ell\,\tau_\ell(\chi)\left|\tilde{V}_\ell(\chi)\right|^2. \tag{4.85}$$

Причем главные значения интегралов в (4.82) и (4.84) существуют, так как функция $\tilde{V}_\ell(\chi)$ дифференцируема, а в силу условий (4.78) и (4.79) они также сходятся и на обоих пределах. Таким образом, в случае, когда локальный квазипотенциал $W(\rho)$ имеет n_ℓ связанных состояний, соотношения (4.82)–(4.85) дают единственное решение уравнения (4.68) с граничным условием (4.8), если только условия (2.10) и (4.9) выполняются. Если же локальный квазипотенциал $W(\rho)$ не допускает существование

[13)] В выражении (4.81), как и ранее, P – символ главного значения, а множитель при δ-функции выбран в соответствии с нормировкой волновой функции: при отсутствии сепарабельного взаимодействия ($\varepsilon_\ell = 0$) представление (4.70) должно приводить к регулярному решению $\varphi_\ell(\rho, \chi')$ с локальным квазипотенциалом $W(\rho)$.

связанных состояний, то в соотношениях (4.82) и (4.84) необходимо положить $C_{\ell j} \equiv 0$.

Теперь, воспользовавшись представлениями (2.32), (2.44) и свойством (2.35), запишем решение (4.82) в виде

$$\psi_\ell\,(\rho\,,\,\chi') = \varphi_\ell\,(\rho\,,\,\chi') + $$
$$+\frac{1}{4\,i}\,\varepsilon_\ell\,N_\ell\,(\chi')\sum_{j=1}^{n_\ell} C_{\ell j}\,\frac{F_\ell^W\left(-\chi_j\right)\,\tilde{V}_\ell(\chi_j)\,f_\ell(\rho\,,\,\chi_j)}{Q_\ell\left(\operatorname{cth}\chi_j\right)\,\left(\operatorname{ch}\chi' - \operatorname{ch}\chi_j\right)} - \tag{4.86}$$
$$-\,\varepsilon_\ell\,N_\ell\,(\chi')\;\;\mathrm{P}\,\frac{1}{2\,i\,\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\chi\,\frac{Q_\ell\,(\operatorname{cth}\chi)\;\tilde{V}_\ell\,(\chi)\;\,f_\ell\,(\rho\,,\,\chi)}{F_\ell^W\,(\chi)\;\,(\operatorname{ch}\chi - \operatorname{ch}\chi')}\,.$$

Используя граничное условие (2.26) и соотношение (4.26), главное значение интеграла в решении (4.86) при $\rho \to \infty$ можно преобразовать следующим образом:

$$\mathrm{P}\frac{1}{2\,i\,\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\chi\,\frac{Q_\ell\,(\operatorname{cth}\chi)\;\tilde{V}_\ell\,(\chi)\;\,f_\ell\,(\rho\,,\,\chi)}{F_\ell^W\,(\chi)\;\,(\operatorname{ch}\chi - \operatorname{ch}\chi')} =$$
$$= -\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\chi\,\frac{Q_\ell\,(\operatorname{cth}\chi)\;\tilde{V}_\ell\,(\chi)\;\,e^{i\,(\rho\,\chi - \pi\,\ell/2)}\,\delta\;(\operatorname{ch}\chi - \operatorname{ch}\chi')}{F_\ell^W\,(\chi)} +$$
$$+\frac{1}{2\,i\,\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\chi\,\frac{Q_\ell\,(\operatorname{cth}\chi)\;\tilde{V}_\ell\,(\chi)\;\,e^{i\,(\rho\,\chi - \pi\,\ell/2)}}{F_\ell^W\,(\chi)\;\,(\operatorname{ch}\chi - \operatorname{ch}\chi' - i\,\eta)} = \tag{4.87}$$
$$= -\frac{Q_\ell\,(\operatorname{cth}\chi')\;\tilde{V}_\ell\,(\chi')}{2\operatorname{sh}\chi'}\left[\frac{e^{i\,(\rho\,\chi' - \pi\,\ell/2)}}{F_\ell^W\,(\chi')} - \frac{e^{-i\,(\rho\,\chi' - \pi\,\ell/2)}}{F_\ell^W\,(-\chi')}\right] +$$
$$+\frac{1}{2\,i\,\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\chi\,\frac{Q_\ell\,(\operatorname{cth}\chi)\;\tilde{V}_\ell\,(\chi)\;\,e^{i\,(\rho\,\chi - \pi\,\ell/2)}}{F_\ell^W\,(\chi)\;\,(\operatorname{ch}\chi - \operatorname{ch}\chi' - i\,\eta)}\;,\;\;\eta \to +0\,.$$

Применяя основную теорему вычетов при интегрировании по границе Γ^+ полосы $0 \le \operatorname{Im}\chi \le \pi/2\,,\;|\operatorname{Re}\chi| \le R\,,\;R \to \infty$ (см. также раздел 4.3.2), находим [14]:

$$
\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{2\,i\,\pi}\int\limits_{\Gamma^+} d\,z\,\frac{Q_\ell(\operatorname{cth} z)\,\tilde V_\ell(z)\,e^{i\,(\rho\,z-\pi\,\ell/2)}}{F_\ell^W(z)\;(\operatorname{ch} z-\operatorname{ch}\chi'-i\,\eta)}=
$$

$$
\begin{gathered}
=\frac{1}{2\,i\,\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\,\chi\,\frac{Q_\ell(\operatorname{cth}\chi)\,\tilde V_\ell(\chi)\,e^{i\,(\rho\,\chi-\pi\,\ell/2)}}{F_\ell^W(\chi)\;(\operatorname{ch}\chi-\operatorname{ch}\chi'-i\,\eta)}\;+\;O\left(e^{-\pi\,\rho/4}\right)=\\
=\operatorname{res}\left[\frac{Q_\ell(\operatorname{cth} z)\,\tilde V_\ell(z)\,e^{i\,(\rho\,z-\pi\,\ell/2)}}{F_\ell^W(z)\;(\operatorname{ch} z-\operatorname{ch}\chi'-i\,\eta)}\,,\;z=\operatorname{arch}(\operatorname{ch}\chi'+i\,\eta)\right]+\\
+\sum_{j=1}^{n_\ell}\operatorname{res}\left[\frac{Q_\ell(\operatorname{cth} z)\,\tilde V_\ell(z)\,e^{i\,(\rho\,z-\pi\,\ell/2)}}{F_\ell^W(z)\;(\operatorname{ch} z-\operatorname{ch}\chi'-i\,\eta)}\,,\;z=\chi_j\right],\;\eta\to+0\,.
\end{gathered}
\tag{4.88}
$$

Далее, из выражений (4.87) и (4.88), после вычисления вычетов в последнем, получим главное значение интеграла:

$$
\begin{gathered}
\mathrm{P}\frac{1}{2\,i\,\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\chi\,\frac{Q_\ell\,(\operatorname{cth}\chi)\;\tilde V_\ell\,(\chi)\;f_\ell\,(\rho\,,\,\chi)}{F_\ell^W\,(\chi)\;(\operatorname{ch}\chi'-\operatorname{ch}\chi)}=\\
=-\frac{Q_\ell\,(\operatorname{cth}\chi')\;\tilde V_\ell\,(\chi')}{\left|F_\ell^W\,(\chi')\right|\,\operatorname{sh}\chi'}\,\cos\left[\rho\chi'-\frac{\pi\,\ell}{2}+\delta_\ell^W\,(\chi')\right]-\\
-\sum_{j=1}^{n_\ell}\frac{Q_\ell(\operatorname{cth}\chi_j)\,\tilde V_\ell(\chi_j)\,e^{i\,(\rho\,\chi_j-\pi\,\ell/2)}}{\dot F_\ell^W(\chi_j)\,(\operatorname{ch}\chi_j-\operatorname{ch}\chi')}+O\left(e^{-\pi\,\rho/4}\right)\;,\;\eta\to+0\,.
\end{gathered}
\tag{4.89}
$$

Тогда, подставляя главное значение интеграла (4.89) в представление (4.86) и принимая во внимание соотношения (2.26), (2.39) и (2.62), находим асимптотику волновой функции (4.82):

$$
\begin{gathered}
\psi_\ell\,(\rho\,,\,\chi')=\frac{\left|F_\ell^W\,(\chi')\right|}{Q_\ell\,(\operatorname{cth}\chi')}\,\sin\left[\rho\,\chi'-\frac{\pi\,\ell}{2}+\delta_\ell^W\,(\chi')\right]-\\
-\frac{\varepsilon_\ell\,N_\ell\,(\chi')\;Q_\ell\,(\operatorname{cth}\chi')\;\tilde V_\ell\,(\chi')}{\left|F_\ell^W\,(\chi')\right|\,\operatorname{sh}\chi'}\,\cos\left[\rho\,\chi'-\frac{\pi\,\ell}{2}+\delta_\ell^W\,(\chi')\right]+\\
+O\left(e^{-\pi\,\rho/4}\right)\;,\;\rho\,\chi'\to\infty\,.
\end{gathered}
\tag{4.90}
$$

---

[14] Здесь было учтено, что при $\rho\,\chi'\to\infty$ интегралы от функции

$$
f(z)=\frac{Q_\ell(\operatorname{cth} z)\,\tilde V_\ell(z)\,e^{i\,(\rho\,z-\pi\,\ell/2)}}{F_\ell^W(z)\;(\operatorname{ch} z-\operatorname{ch}\chi'-i\,\eta)}
$$

по вертикальным отрезкам $[R\,;\;R+i\,\pi/2]$ и $[-R+i\,\pi/2\,;\,-R]$ ведут себя как $O\left(e^{-\pi\,\rho/4}\right)$, а интеграл по горизонтальному отрезку $[R+i\,\pi/2\,;\,-R+i\,\pi/2]$ ведет себя как $O\left(e^{-\pi\,\rho/2}\right)$.

Полный фазовый сдвиг $\delta_\ell(\chi')$, обусловленный суперпозицией нелокального сепарабельного взаимодействия и локального квазипотенциала, определим в виде

$$\delta_\ell(\chi') = \delta_\ell^W(\chi') + \delta_\ell^V(\chi')\,, \tag{4.91}$$

где $\delta_\ell^V(\chi')$ – приращение фазового сдвига, связанное с сепарабельной составляющей полного взаимодействия.

Заметим, что в данном случае $\delta_\ell^V(\chi')$ зависит также и от локального квазипотенциала $W(\rho)$ и, следовательно, его необходимо отличать от фазового сдвига, обусловленного только чисто сепарабельным взаимодействием, т.е. когда локальный квазипотенциал отсутствует.

Введение приращения фазового сдвига позволяет представить асимптотику волновой функции $\psi_\ell(\rho\,,\,\chi')$ в форме

$$\psi_\ell\,(\rho\,,\,\chi') = \frac{\left|F_\ell^W\,(\chi')\right|}{Q_\ell\,(\mathrm{cth}\,\chi')}\,\sin\left[\rho\,\chi' - \frac{\pi\,\ell}{2} + \delta_\ell^W\,(\chi')\right] +$$

$$+\frac{\left|F_\ell^W\,(\chi')\right|}{Q_\ell\,(\mathrm{cth}\,\chi')}\,\mathrm{tg}\,\delta_\ell^V\,(\chi')\,\cos\left[\rho\,\chi' - \frac{\pi\,\ell}{2} + \delta_\ell^W\,(\chi')\right]\,,\;\rho\,\chi' \to \infty\,.$$

Сравнив это представление с асимптотикой (4.90), получим для приращения фазового сдвига выражение

$$\mathrm{tg}\delta_\ell^V\,(\chi') = -\frac{\pi}{2}\,\mathrm{sh}^{-1}\chi'\,\frac{\varepsilon_\ell\,A_\ell\,(\chi')}{\Phi_\ell\,(\mathrm{ch}\,\chi')}\,. \tag{4.92}$$

4.4.3. Истинные и “поддельные” связанные состояния

Пусть существует хотя бы одно связанное состояние с энергией $E' = \mathrm{ch}\,\chi' \geq 0$. Тогда решение уравнения (4.73) дается выражением (4.80), а решение уравнения (4.74) – выражением

$$\tilde{\psi}_\ell(\chi'\,,\,\chi) = \frac{1}{2}\,\varepsilon_\ell\,N_\ell(\chi')\;\mathrm{P}\,\frac{\tilde{V}_\ell(\chi)}{\mathrm{ch}\,\chi' - \mathrm{ch}\,\chi}\,. \tag{4.93}$$

Здесь предполагается, что все $\tilde{V}_\ell(\chi_j) \neq 0$ и $\tilde{V}_\ell(\chi) \neq 0$. Случаи, когда одно или несколько $\tilde{V}_\ell(\chi_j) = 0$ или $\tilde{V}_\ell(\chi) = 0$, будут рассмотрены ниже.

Подстановка решений (4.80) и (4.93) в равенство (4.75), где спектральная плотность дается выражением (2.63), приводит к уравнению на собственные значения

$$\Phi_\ell\left(E'\right) = \varepsilon_\ell - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n_\ell} C_{\ell j}\,\frac{\left|\tilde{V}_\ell(\chi_j)\right|^2}{E' - E_j} - \frac{1}{2}\,\varepsilon_\ell\,\mathrm{P}\int\limits_0^\infty d\chi\,\frac{A_\ell(\chi)}{E' - \operatorname{ch}\chi} = 0\,, \tag{4.94}$$

которое имеет решения $E' \geq 0$ при $\varepsilon_\ell = \pm 1$. При этом значениям энергий

$$\begin{gathered} 0 \leq E' = E_{tj'} = \operatorname{ch}\chi_{tj'} < 1\,,\ \chi_{tj'} = i\,\kappa_{tj'}\,, \\ 0 < \kappa_{tj'} \leq \pi/2\,,\ j' = 1, 2, ..., \sigma_\ell\,, \end{gathered} \tag{4.95}$$

отвечают истинные связанные состояния, обусловленные полным взаимодействием, в то время как энергиям

$$E' = E_{fk} = \operatorname{ch}\chi_{fk} \geq 1\,,\ k = \begin{cases} 1, 2, ..., \nu_\ell\,,\ \varepsilon_\ell = -1\,, \\ 0, 1, ..., \nu_\ell - 1\,,\ \varepsilon_\ell = +1\,, \end{cases} \tag{4.96}$$

соответствуют “поддельные” связанные состояния, обусловленные сепарабельной составляющей полного взаимодействия [15)].

Истинные связанные состояния

Рассмотрим связанные состояния с энергиями (4.95). Очевидно, что граничное условие (4.8) выполняется, а волновая функция $\psi_\ell\left(\rho\,,\,\chi_{tj'}\right)$ асимптотически стремится к нулю при $\rho \to \infty$. Действительно, подставляя решения (4.80) и (4.93) в выражение (4.70) при $\chi' = \chi_{tj'}$ и учитывая представления (2.32), (2.44) и свойство (2.35), получим:

$$\begin{gathered} \psi_\ell\left(\rho\,,\,\chi_{tj'}\right) = \frac{1}{4\,i}\,\varepsilon_\ell\,N_\ell\left(\chi_{tj'}\right)\sum_{j=1}^{n_\ell} C_{\ell j}\,\frac{F_\ell^W\left(-\chi_j\right)\,\tilde{V}_\ell(\chi_j)\,f_\ell(\rho\,,\,\chi_j)}{Q_\ell\left(\operatorname{cth}\chi_j\right)\,\left(\operatorname{ch}\chi_{tj'} - \operatorname{ch}\chi_j\right)} - \\ -\,\varepsilon_\ell\,N_\ell\left(\chi_{tj'}\right)\,\frac{1}{2\,i\,\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\chi\,\frac{Q_\ell\left(\operatorname{cth}\chi\right)\,\tilde{V}_\ell\left(\chi\right)\,f_\ell\left(\rho\,,\,\chi\right)}{F_\ell^W\left(\chi\right)\,\left(\operatorname{ch}\chi - \operatorname{ch}\chi_{tj'}\right)}\,. \end{gathered} \tag{4.97}$$

[15)] Здесь, как и для сепарабельных потенциалов в нерелятивистском случае [110], [111], “поддельные” связанные состояния представляют собой дискретные уровни, погруженные в непрерывный спектр.

Далее, используя граничное условие (2.26), решение (4.97) при $\rho \to \infty$ принимает вид:

$$\begin{gathered} \psi_\ell\left(\rho\,,\,\chi_{tj'}\right) = \frac{1}{4\,i}\,\varepsilon_\ell\,N_\ell\left(\chi_{tj'}\right)\sum_{j=1}^{n_\ell} C_{\ell j}\,\frac{F_\ell^W\left(-\chi_j\right)\,\tilde V_\ell(\chi_j)\,e^{i\left(\rho\,\chi_j - \pi\,\ell/2\right)}}{Q_\ell\left(\operatorname{cth}\chi_j\right)\,\left(\operatorname{ch}\chi_{tj'} - \operatorname{ch}\chi_j\right)} - \\ - \varepsilon_\ell\,N_\ell\left(\chi_{tj'}\right)\,\frac{1}{2\,i\,\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\chi\,\frac{Q_\ell\left(\operatorname{cth}\chi\right)\,\tilde V_\ell\left(\chi\right)\,e^{i\left(\rho\,\chi - \pi\,\ell/2\right)}}{F_\ell^W\left(\chi\right)\,\left(\operatorname{ch}\chi - \operatorname{ch}\chi_{tj'}\right)}\,,\ \rho \to \infty\,. \end{gathered} \tag{4.98}$$

Теперь к функции

$$f(z) = \frac{Q_\ell(\operatorname{cth} z)\,\tilde V_\ell(z)\,e^{i\left(\rho\,z - \pi\,\ell/2\right)}}{F_\ell^W\left(z\right)\,\left(\operatorname{ch} z - \operatorname{ch}\chi_{tj'}\right)}$$

применим основную теорему вычетов при интегрировании по границе Γ^+ полосы $0 \le \operatorname{Im}\chi \le \pi/2\,,\ |\operatorname{Re}\chi| \le R\,,\ R \to \infty$ и учтем подстрочное примечание 11 в разделе 4.4.2 (см. также раздел 4.3.2). Это дает:

$$\begin{gathered} \lim_{R\to+\infty}\,\frac{1}{2\,i\,\pi}\int\limits_{\Gamma^+} d\,z\,\frac{Q_\ell(\operatorname{cth} z)\,\tilde V_\ell(z)\,e^{i\left(\rho\,z - \pi\,\ell/2\right)}}{F_\ell^W(z)\,\left(\operatorname{ch} z - \operatorname{ch}\chi'_{tj}\right)} = \\ = \frac{1}{2\,i\,\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\,\chi\,\frac{Q_\ell(\operatorname{cth}\chi)\,\tilde V_\ell(\chi)\,e^{i\left(\rho\,\chi - \pi\,\ell/2\right)}}{F_\ell^W\left(\chi\right)\,\left(\operatorname{ch}\chi - \operatorname{ch}\chi_{tj'}\right)} + O\left(e^{-\pi\,\rho/4}\right) = \\ = \operatorname{res}\left[\frac{Q_\ell(\operatorname{cth} z)\,\tilde V_\ell(z)\,e^{i\left(\rho\,z - \pi\,\ell/2\right)}}{F_\ell^W\left(z\right)\,\left(\operatorname{ch} z - \operatorname{ch}\chi_{tj'}\right)}\,,\ z = \chi_{tj'}\right] + \\ + \sum_{j=1}^{n_\ell}\operatorname{res}\left[\frac{Q_\ell(\operatorname{cth} z)\,\tilde V_\ell(z)\,e^{i\left(\rho\,z - \pi\,\ell/2\right)}}{F_\ell^W\left(z\right)\,\left(\operatorname{ch} z - \operatorname{ch}\chi_{tj'}\right)}\,,\ z = \chi_j\right],\ \rho \to \infty. \end{gathered} \tag{4.99}$$

Отсюда, после вычисления вычетов, находим асимптотическое значение интеграла в (4.98):

$$\begin{gathered} \frac{1}{2\,i\,\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\,\chi\,\frac{Q_\ell(\operatorname{cth}\chi)\,\tilde V_\ell(\chi)\,e^{i\left(\rho\,\chi - \pi\,\ell/2\right)}}{F_\ell^W\left(\chi\right)\,\left(\operatorname{ch}\chi - \operatorname{ch}\chi_{tj'}\right)} = \\ = \sum_{j=1}^{n_\ell}\frac{Q_\ell(\operatorname{cth}\chi_j)\,\tilde V_\ell(\chi_j)\,e^{i\left(\rho\,\chi_j - \pi\,\ell/2\right)}}{\dot F_\ell^W(\chi_j)\,(\operatorname{ch}\chi_j - \operatorname{ch}\chi_{tj'})} + \\ + \frac{Q_\ell(\operatorname{cth}\chi_{tj'})\,\tilde V_\ell(\chi_{tj'})\,e^{i\left(\rho\,\chi_{tj'} - \pi\,\ell/2\right)}}{\dot F_\ell^W(\chi_{tj'})\,\operatorname{sh}\chi_{tj'}} + O\left(e^{-\pi\,\rho/4}\right)\,,\ \rho \to \infty\,. \end{gathered} \tag{4.100}$$

Тогда, подставляя найденное значение интеграла (4.100) в представление (4.98) и принимая во внимание выражение (2.62) для нормировочных коэффициентов, находим асимптотику волновой функции $\psi_\ell\left(\rho\,,\,\chi_{tj'}\right)$:

$$\psi_\ell(\rho\,,\,\chi_{tj'}) = O\left(e^{-\rho\,\min\,(\pi/4\,,\,\kappa_{tj'})}\right) \,\to\, 0\,,\;\rho \to \infty\,. \tag{4.101}$$

Следовательно, значению $\chi = \chi_{tj'}$ соответствует связанное состояние с энергией $E_{tj'} = \mathrm{ch}\,\chi_{tj'}$. Поскольку значения энергий (4.95) определяются как корни уравнения (4.94) при $\varepsilon_\ell = \pm 1$ и $\Phi_\ell(1) \neq 0$, то для определения их числа σ_ℓ исследуем два случая (здесь все $\tilde{V}_\ell(\chi_j) \neq 0$ и $\tilde{V}_\ell(\chi) \neq 0$).

1) Пусть $\varepsilon_\ell = +1$. Тогда, очевидно, $\Phi_\ell\,(E') > 1$ при $E' \le 0$, что соответствует выбору верхней полы́ $E_q^2 - q^2 = 1$. Причем если $\Phi_\ell\,(1) > 0$, то уравнение (4.94) имеет $\sigma_\ell = n_\ell$ корней $E_{tj'}$, что отвечает слабой нелокальности. В противном случае, когда $\Phi_\ell\,(1) < 0$, уравнение (4.94) имеет $\sigma_\ell = n_\ell - 1$ корней $E_{tj'}$, что соответствует сильной нелокальности. Также, очевидно, что значения $E_{tj'}$ больше соответствующих значений E_j. Тем самым сепарабельное взаимодействие является отталкивающим и, в зависимости от его величины, может устранить одно связанное состояние, а значение $\Phi_\ell\,(1)$ при этом отвечает за величину нелокальности.
2) Пусть теперь $\varepsilon_\ell = -1$. Тогда уравнение (4.94) допускает решения (4.95), если $\Phi_\ell\,(0) \le 0$. Причем при $\Phi_\ell\,(1) < 0$, сепарабельная составляющая полного взаимодействия обладает слабой нелокальностью притягивающего типа, что не изменяет числа связанных состояний полного взаимодействия ($\sigma_\ell = n_\ell$), а ведет только к уменьшению значений их энергий $E_{tj'}$ по отношению к соответствующим значениям энергий E_j. Если же $\Phi_\ell\,(1) > 0$, то сепарабельная составляющая полного взаимодействия теперь обладает сильной нелокальностью притягивающего типа, что ведет не только к уменьшению значений энергий связанных состояний $E_{tj'}$, но и, будучи сильным, способно привести к образованию еще одного связанного состояния ($\sigma_\ell = n_\ell + 1$) с энергией $E_{t(n_\ell+1)} > E_j > E_{tj'} \quad (j'\,,\, j = 1, 2, ..., n_\ell)$. Тем самым эффективную частицу массы m' в этом случае можно рассматривать как “квазилокальную”, а значение $\Phi_\ell\,(1)$ при этом также будет отвечать за величину нелокальности.

Теперь рассмотрим случай, когда одно из $\left\{\tilde{V}_\ell(\chi_j)\right\}$ равно нулю, например, $\tilde{V}_\ell(\chi_k)$. Тогда функция $\Phi_\ell\,(E')$ является непрерывной при $E' = E_k$, а, следовательно, одно из значений $\{E_{tj'}\}$ будет отсутствовать. При этом собственное значение, которое отсутствует, например, E_{tk}, замещается значением E_k, а собственная функция $\psi_\ell\,(\rho\,,\,\chi_{tk})$ совпадает с волновой функцией $\varphi_\ell\,(\rho\,,\,\chi_k)$. Это означает, что $V_\ell\,(\rho)$ ортогонально $\varphi_\ell\,(\rho\,,\,\chi_k)$, а суперпозиция нелокального сепарабельного взаимодействия $\varepsilon_\ell\,V_\ell\,(\rho)\;V_\ell\,(\rho')$ и локального квазипотенциала $W\,(\rho)$ не изменяет волновой функции $\varphi_\ell\,(\rho\,,\,\chi_k)$ и ее значения энергии $E_k = \operatorname{ch}\chi_k$. Кроме того, по этой же причине, одно из значений $\{E_{tj'}\}$, например, $E_{t(k+1)}$, будет равно значению E_k. Тем самым мы имеем вырождение при энергии E_k, а волновую функцию $\psi_\ell\left(\rho\,,\,\chi_{t(k+1)}\right)$ можно выбрать ортогональной функции $\varphi_\ell\,(\rho\,,\,\chi_k)$, полагая $\tilde{\psi}_\ell\left(\chi_{t(k+1)}\,,\,\chi_k\right) \equiv 0$.

Случай, когда несколько $\tilde{V}_\ell(\chi_j)$ равны нулю, рассматривается аналогично. При этом степень вырождения для каждого E_j не может быть больше двух. Но поскольку $d\,\Phi_\ell(E')/d\,E' > 0$ при $0 \le E' \le 1$, $E' \ne E_j$, то хотя бы одно из $\left\{\tilde{V}_\ell(\chi_j)\right\}$ не равно нулю [16].

Наконец, предположим, что $\tilde{V}_\ell(\chi) \equiv 0$, и, следовательно, в силу условия ортогональности (2.61) и представления (4.71), имеем

$$V_\ell(\rho) = \sum_{j=1}^{n_\ell} a_j\,\varphi_\ell(\rho\,,\,\chi_j)\,.$$

[16] Это не имеет места только при $n_\ell = 1$ и $\varepsilon_\ell = -1$. В этом случае уравнение (4.94) принимает вид

$$\Phi_\ell(E') = -1 + \frac{1}{2}\mathrm{P}\int_0^\infty d\chi\,\frac{|A_\ell(\chi)|}{\operatorname{ch}\chi - E'} = 0\,,$$

т.е. аналогично случаю, когда локальный квазипотенциал не допускает связанных состояний. Причем это уравнение имеет единственный корень $E' = E_t$, если выполнено условие

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\chi\,\left|\tilde{V}_\ell(\chi)/F_\ell^W(\chi)\right|^2 > 1\,.$$

Последнее же требование связано с тем, что для любых $\ell\,,\,\chi \ge 0$ функция $q_\ell(\chi)$ является ограниченной (см. формулы (4.41) и (4.42) в разделе 4.3.4):

$$q_\ell(\chi) = \frac{1}{2}\,\frac{Q_\ell^2(\operatorname{cth}\chi)}{\operatorname{ch}\chi - E_t} \le \max\,q_\ell(\chi) \approx \frac{\pi\,(\operatorname{th}\chi_{\max})^{2\,\ell}}{4^{\ell+1}\operatorname{ch}\chi_{\max}}\,\left[1 - \frac{\ell+1}{2\,\ell+3}\operatorname{th}^2\chi_{\max}\right] < 1.$$

Тогда уравнение (4.94) принимает вид

$$\Phi_\ell\,(E') = \varepsilon_\ell - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n_\ell} C_{\ell j}\frac{\left|\tilde{V}_\ell(\chi_j)\right|^2}{E' - E_j} = 0\,. \tag{4.102}$$

Однако в этом случае уравнение (4.102) не может иметь более чем n_ℓ корней $E_{tj'}$, поскольку $\Phi_\ell\,(0) > \varepsilon_\ell$, $\Phi_\ell\,(1) < \varepsilon_\ell$. При этом, как видно из уравнения (4.68), волновые функции связанных состояний $\psi_\ell(\rho\,,\,\chi_{tj'})$ являются линейными комбинациями функций $\varphi_\ell(\rho\,,\,\chi_j)$, а волновая функция состояний рассеяния $\psi_\ell(\rho\,,\,\chi)$ совпадает с волновой функцией $\varphi_\ell(\rho\,,\,\chi)$. Единственное же изменение происходит только с энергиями связанных состояний, причем из выражения (4.92) следует $\delta_\ell^V(\chi) \equiv 0$.

Заметим, что уравнение (4.102) может также иметь один (и только один) корень $E' = E_f \geq 1$ и только тогда, когда $\varepsilon_\ell = +1$, а $\Phi_\ell\,(1) < 0$, поскольку

$$\frac{d\,\Phi_\ell\,(E')}{d\,E'} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n_\ell} C_{\ell j}\,\frac{\left|\tilde{V}_\ell(\chi_j)\right|^2}{(E' - E_j)^2} > 0$$

при $E' \geq 1$, а $\Phi_\ell\,(E') \approx 1$ при $E' \to +\infty$. Это значение энергии $E' = E_f$ соответствует, как мы увидим позже, "поддельному" связанному состоянию.

"Поддельные" связанные состояния

Теперь рассмотрим в общем случае "поддельные" связанные состояния с энергиями (4.96), значения которых E_{fk} определяются как корни уравнения (4.94). Если такие решения уравнения (4.94) существуют, то решения уравнений (4.73) и (4.74) имеют прежний вид (4.80) и (4.93). Тем самым волновая функция принимает вид (4.90) с опущенным первым членом:

$$\psi_\ell(\rho\,,\,\chi_{fk}) = -\frac{\varepsilon_\ell\, N_\ell(\chi_{fk})\, Q_\ell(\operatorname{cth}\chi_{fk})\, \tilde{V}_\ell(\chi_{fk})}{\left|F_\ell^W(\chi_{fk})\right|\, \operatorname{sh}\chi_{fk}}\, \cos\left[\rho\,\chi_{fk} - \frac{\pi\,\ell}{2} + \delta_\ell^W(\chi_{fk})\right] +$$
$$+\, O\left(e^{-\pi\,\rho/4}\right),\;\; \rho \to \infty\,.$$

Отсюда следует, что волновая функция $\psi_\ell(\rho\,,\,\chi_{fk})$ асимптотически стремится к нулю, если и только если

$$\tilde{V}_\ell(\chi_{fk}) = 0\,. \tag{4.103}$$

Итак, необходимым и достаточным условием существования "поддельных" связанных состояний при энергиях (4.96) является совместное выполнение условий (4.94) и (4.103), поскольку граничное условие (4.8) также выполняется. В свою очередь, выполнение условий (4.94) и (4.103) означает, что при значениях энергий (4.96) приращение фазового сдвига $\delta_\ell^V(\chi')$ при возрастании χ' проходит через значения πk (k – целое), убывая. Это связано с тем, что при таких значениях энергий в силу условий (4.94) и (4.103) равны нулю как числитель, так и знаменатель в правой части равенства (4.92). Но из определений (4.84), (4.85) и условий (2.10) и (4.9) следует, что функции $\Phi_\ell(\operatorname{ch}\chi')$ и $A_\ell(\chi')$ существуют и дифференцируемы. Причем функция $A_\ell(\chi')$ имеет в точках $\chi' = \chi_{fk}$ по крайней мере нуль второго порядка, в то время как функция $\Phi_\ell(\operatorname{ch}\chi')$ имеет в этих точках только простой нуль, поскольку

$$\left.\frac{d\,\Phi_\ell(\operatorname{ch}\chi')}{d\chi'}\right|_{\chi'=\chi_{fk}} = \frac{\operatorname{sh}\chi_{fk}}{2}\left[\sum_{j=1}^{n_\ell} C_{\ell j}\,\frac{\left|\tilde{V}_\ell(\chi_j)\right|^2}{(\operatorname{ch}\chi_{fk}-\operatorname{ch}\chi_j)^2}+\right.$$
$$\left.+\,\mathrm{P}\int\limits_0^\infty d\chi\,\frac{|A_\ell(\chi)|}{(\operatorname{ch}\chi_{fk}-\operatorname{ch}\chi)^2}\right] > 0\,.$$

А это означает, что $\operatorname{tg}\delta_\ell^V(\chi')$ обращается в нуль при $\chi' = \chi_{fk}$ и меняет знак, т.е.

$$\delta_\ell^V(\chi_{fk}) = \pi\,k\,, \quad k = \begin{cases} 1, 2, ..., \nu_\ell\,,\ \varepsilon_\ell = -1\,, \\ 0, 1, ..., \nu_\ell - 1\,,\ \varepsilon_\ell = +1\,, \end{cases} \tag{4.104}$$

$$\left.\frac{d\,\delta_\ell^V(\chi')}{d\chi'}\right|_{\chi'=\chi_{fk}} < 0\,.$$

Если же знаменатель в (4.92) не обращается в нуль при $\chi' = \chi_{fk}$, то приращение фазового сдвига будет только касаться прямых $\delta_\ell^V = \pi\,k$ (k – целое) сверху или снизу, но не пересекать их, т.е. в этих точках приращение фазового сдвига имеет экстремумы.

Таким образом, если приращение фазового сдвига $\delta_\ell^V(\chi')$ при возрастании χ' пересекает прямые $\delta_\ell^V = \pi\,k$ ($k = \{0, 1, ..., \nu_\ell - 1\,,\ \varepsilon_\ell = +1\,;\ 1, 2, ..., \nu_\ell\,,\ \varepsilon_\ell = -1\}$) сверху, т.е. условия (4.94) и (4.103) выполнены, то энергиям (4.96) отвечают "поддельные" связанные состояния, обусловленные сепарабельной составляющей полного взаимодействия. Следовательно, исследуя поведение функции $\delta_\ell^V(\chi')$ при изменении χ', можно найти значения энергий E_{fk}, при которых существуют "поддельные" связанные состояния. Причем знаком приращения фазового сдвига $\delta_\ell^V(\chi')$ при высоких энергиях ($\chi' \to +\infty$) определяется значение ε_ℓ. Наконец, используя оценку (4.78) и выражение (4.92), имеем $\operatorname{tg}\delta_\ell^V(\infty) = 0$.

Аналогично рассматриваются "поддельные" связанные состояния с энергиями (4.96), когда локальный квазипотенциал $W(\rho)$ не допускает связанных состояний. В этом случае значения энергий E_{fk} таких "поддельных" связанных состояний определяются также корнями уравнения (4.94), в котором теперь необходимо положить $C_{\ell j} \equiv 0$. Очевидно, и в этом случае для "поддельных" связанных состояний мы приходим к прежним результатам. Значит, в общем случае мы можем выбрать функцию $\delta_\ell^V(\chi')$ так, чтобы выполнялось условие

$$\delta_\ell^V(\infty) = 0\,. \tag{4.105}$$

4.4.4. Дальнейшее обобщение теоремы Левинсона

Для обобщения теоремы Левинсона заметим, что функция Йоста полного взаимодействия

$$F_\ell(\chi') = |F_\ell(\chi')|\; e^{-i\,\delta_\ell(\chi')}$$

является аналитической в полосе $0 \le \operatorname{Im}\chi' \le \pi/2$, имеет там σ_ℓ ($\sigma_\ell = n_\ell - 1\,,\; n_\ell$ или $n_\ell + 1$) простых нулей (4.95), так что $F_\ell(\chi_{tj'}) = 0$, и не имеет там полюсов. Тогда, применяя теорему о логарифмическом вычете для функции Йоста $F_\ell(\chi')$ по границе Γ^+ полосы $0 \le \operatorname{Im}\chi' \le \pi/2$ и учитывая вклад в вариацию от ν_ℓ "поддельных" связанных состояний (свойство (4.104)) и нечетность фазового сдвига (т.е как и в случае чисто сепарабельного взаимодействия, см. раздел 4.3.5), находим

$$2\,\pi\,\sigma_\ell = -i \lim_{R\to+\infty\,,\,\eta\to+0} \int\limits_{\Gamma^+} d\ln F_\ell(\chi') = - \lim_{R\to+\infty\,,\,\eta\to+0} \operatorname{var}\delta_\ell(\chi')\Big|_{\Gamma^+} =$$

$$= -2\,\pi\,\nu_\ell + 2\,\left[\delta_\ell(0) - \delta_\ell(\infty)\right]\,.$$

Здесь $\operatorname{var}\delta_\ell(\chi')\,|_{\Gamma^+}$ – вариация фазового сдвига при обходе точкой χ' замкнутого контура Γ^+ – границы полосы $0 \le \operatorname{Im}\chi' \le \pi/2$. Отсюда, учитывая условие (4.105), приходим к обобщению теоремы Левинсона для суперпозиции нелокального сепарабельного взаимодействия и локального квазипотенциала, когда последний допускает существование n_ℓ связанных состояний, в форме [17)]

$$\delta_\ell^V\,(0) = \pi\,(\sigma_\ell - n_\ell + \nu_\ell)\;. \tag{4.106}$$

Отметим, что $\delta_\ell^V\,(0) \geq 0$ за исключением единственного случая, когда $\delta_\ell^V\,(0) = -\pi\,(\varepsilon_\ell = -1)$. Последнее имеет место, когда $n_\ell \neq 0\,,\ \sigma_\ell = n_\ell - 1\,,$ а $\nu_\ell = 0$. Этот случай существенно отличается как от чисто сепарабельного случая ($W(\rho) \equiv 0$), так и от случая когда локальный квазипотенциал $W(\rho)$ не допускает связанных состояний: в обоих случаях там всегда $\delta_\ell^V\,(0) = \pi\,(\sigma_\ell + \nu_\ell) \geq 0\,,\ \sigma_\ell = 0, 1$.

4.4.5. Условия ортогональности и полноты для случая сепарабельного квазипотенциала

Условие ортогональности двух регулярных решений уравнения (4.68) для случая суперпозиции локального и сепарабельного квазипотенциалов можно получить тем же методом, который был применен для вывода условия ортогональности (2.61) для регулярного решения $\varphi_\ell(\rho\,,\,\chi')$ в случае чисто локального квазипотенциала. Другой метод состоит в том, чтобы непосредственно использовать условия ортогональности для регулярного решения в случае чисто локального квазипотенциала для вывода условия ортогональности двух регулярных решений уравнения (4.68) для случая суперпозиции локального и сепарабельного квазипотенциалов. Воспользуемся вторым подходом. С этой целью, используя формулу (4.26) и выражения (4.83), (4.85) и (4.92), представим решение (4.82), справедливое для действительных значений χ', в следующем виде:

$$\begin{aligned}\psi_\ell\,(\rho\,,\,\chi') = \left[1 - i\ \mathrm{tg}\,\delta_\ell^V\,(\chi')\right]\varphi_\ell\,(\rho\,,\,\chi') + \\ + \frac{1}{2}\,\varepsilon_\ell\,N_\ell\,(\chi')\sum_{j=1}^{n_\ell} C_{\ell j}\,\frac{\tilde{V}_\ell(\chi_j)\,\varphi_\ell(\rho\,,\,\chi_j)}{\mathrm{ch}\,\chi' - \mathrm{ch}\,\chi_j} -\end{aligned} \tag{4.107}$$

[17)] Мы, как всегда, выбрали $\delta_\ell(\infty) = 0$ и учли обычную теорему Левинсона для локального квазипотенциала, допускающего n_ℓ связанных состояний (см. раздел 2.2.3, формула (2.50)).

$$-\frac{1}{2}\,\varepsilon_\ell\,N_\ell\,(\chi')\int\limits_0^\infty dt\,\frac{\tau_\ell\,(t)\;\tilde{V}_\ell\,(t)\;\varphi_\ell\,(\rho\,,\,t)}{\operatorname{ch}t-\operatorname{ch}\chi'-i\,0}\,.$$

Далее, используя выражение (4.107), находим произведение $\psi_\ell\,(\rho\,,\,\chi')$ $\psi^*_\ell\,(\rho\,,\,\chi)$. Затем, опираясь на условие ортогональности (2.61) для регулярного решения $\varphi_\ell(\rho\,,\,\chi')$ со спектральной плотностью (2.63), соответствующее случаю чисто локального квазипотенциала, вычислим интеграл от произведения $\psi_\ell\,(\rho\,,\,\chi')\,\psi^*_\ell\,(\rho\,,\,\chi)$ по переменной ρ в пределах от 0 до ∞, считая χ', χ действительными. При этом из условия ортогональности (2.61) для регулярного решения $\varphi_\ell(\rho\,,\,\chi')$ следует, что интегралы от перекрестных произведений регулярных решений вида $\varphi_\ell(\rho\,,\,\chi')\,\varphi^*_\ell(\rho\,,\,\chi_j)$ обращаются в нуль, от произведений $\varphi_\ell(\rho\,,\,\chi')\,\varphi^*_\ell(\rho\,,\,\chi)$ – выражаются через δ-функцию, а от $\varphi_\ell(\rho\,,\,\chi_{j'})\,\varphi^*_\ell(\rho\,,\,\chi_j)$ – равны $C^{-1}_{\ell j}\,\delta_{jj'}$, где $C^{-1}_{\ell j}$ – нормировочные константы (см.формулу (2.62)). Принимая во внимание эти замечания и соотношение (2.63), после взятия возникающих интегралов с помощью δ-функций, получим

$$\begin{aligned}\int\limits_0^\infty d\rho\,\psi_\ell\,(\rho\,,\,\chi')\;\psi^*_\ell\,(\rho\,,\,\chi) &= \frac{\delta\,(\operatorname{ch}\chi'-\operatorname{ch}\chi)}{\cos^2\left[\delta^V_\ell\,(\chi')\right]\,d\rho_\ell(\operatorname{ch}\chi')/d(\operatorname{ch}\chi')}+\\ &+\frac{\varepsilon_\ell\,N^*_\ell(\chi')\,\tilde{V}^*_\ell(\chi)\,[1-i\,\operatorname{tg}\delta^V_\ell(\chi)]}{2\,(\operatorname{ch}\chi'-\operatorname{ch}\chi-i\,0)}-\\ &-\frac{\varepsilon_\ell\,N_\ell(\chi)\,\tilde{V}_\ell(\chi')\,[1+i\,\operatorname{tg}\delta^V_\ell(\chi')]}{2\,(\operatorname{ch}\chi'-\operatorname{ch}\chi-i\,0)}+\\ &+\frac{\varepsilon^2_\ell\,N_\ell(\chi)\,N^*_\ell(\chi')}{4}\sum_{j=1}^{n_\ell}\frac{C_{\ell j}\,|\tilde{V}_\ell(\chi_j)|^2}{(\operatorname{ch}\chi'-\operatorname{ch}\chi_j)(\operatorname{ch}\chi-\operatorname{ch}\chi_j)}+\\ &+\frac{\varepsilon^2_\ell\,N_\ell(\chi)\,N^*_\ell(\chi')}{4}\int\limits_0^\infty dt\,\frac{\tau_\ell\,(t)\;|\tilde{V}_\ell\,(t)\,|^2}{(\operatorname{ch}t-\operatorname{ch}\chi'+i\,0)(\operatorname{ch}t-\operatorname{ch}\chi-i\,0)}\,.\end{aligned}\tag{4.108}$$

Покажем, что в правой части выражения (4.108) остается только первый член. Для этого воспользуемся формулой (4.26) и соотношениями (4.83)–(4.85) и (4.92). Тогда, после взятия возникающих интегралов с помощью δ-функций, находим

$$\frac{\varepsilon_\ell\,N^*_\ell(\chi')\,\tilde{V}^*_\ell(\chi)\,[1-i\,\operatorname{tg}\delta^V_\ell(\chi)]}{2\,(\operatorname{ch}\chi'-\operatorname{ch}\chi-i\,0)}-\frac{\varepsilon_\ell\,N_\ell(\chi)\,\tilde{V}_\ell(\chi')\,[1+i\,\operatorname{tg}\delta^V_\ell(\chi')]}{2\,(\operatorname{ch}\chi'-\operatorname{ch}\chi-i\,0)}+$$
$$+\frac{\varepsilon^2_\ell\,N_\ell(\chi)\,N^*_\ell(\chi')}{4}\sum_{j=1}^{n_\ell}\frac{C_{\ell j}\,|\tilde{V}_\ell(\chi_j)|^2}{(\operatorname{ch}\chi'-\operatorname{ch}\chi_j)(\operatorname{ch}\chi-\operatorname{ch}\chi_j)}+$$

$$+\frac{\varepsilon_\ell^2\,N_\ell(\chi)\,N_\ell^*(\chi')}{4}\int\limits_0^\infty dt\,\frac{\tau_\ell\,(t)\;|\tilde V_\ell\,(t)\,|^2}{(\mathrm{ch}\,t-\mathrm{ch}\,\chi'+i\,0)(\mathrm{ch}\,t-\mathrm{ch}\,\chi-i\,0)}=$$

$$=\frac{\varepsilon_\ell^2\,\tilde V_\ell(\chi')\,\tilde V_\ell^*(\chi)\,[1-i\;\mathrm{tg}\,\delta_\ell^V(\chi)]}{2\,\Phi_\ell(\mathrm{ch}\,\chi')\,(\mathrm{ch}\,\chi'-\mathrm{ch}\,\chi-i\,0)}-\frac{\varepsilon_\ell^2\,\tilde V_\ell(\chi')\,\tilde V_\ell^*(\chi)\,[1+i\;\mathrm{tg}\,\delta_\ell^V(\chi')]}{2\,\Phi_\ell(\mathrm{ch}\,\chi)\,(\mathrm{ch}\,\chi'-\mathrm{ch}\,\chi-i\,0)}+$$

$$+\frac{\varepsilon_\ell^4\,\tilde V_\ell(\chi')\,\tilde V_\ell^*(\chi)}{2\,\Phi_\ell(\mathrm{ch}\,\chi')\,\Phi_\ell(\mathrm{ch}\,\chi)\,(\mathrm{ch}\,\chi'-\mathrm{ch}\,\chi-i\,0)}\left[\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n_\ell}\frac{C_{\ell j}\,|\tilde V_\ell(\chi_j)|^2}{\mathrm{ch}\,\chi-\mathrm{ch}\,\chi_j}-\right.$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n_\ell}\frac{C_{\ell j}\,|\tilde V_\ell(\chi_j)|^2}{\mathrm{ch}\,\chi'-\mathrm{ch}\,\chi_j}+i\;\mathrm{tg}\,\delta_\ell^V(\chi')\,\Phi_\ell(\mathrm{ch}\,\chi')+\frac{\varepsilon_\ell}{2}\;\mathrm{P}\int\limits_0^\infty dt\,\frac{A_\ell\,(t)}{\mathrm{ch}\,t-\mathrm{ch}\,\chi'}-$$

$$\left.-i\;\mathrm{tg}\,\delta_\ell^V(\chi)\,\Phi_\ell(\mathrm{ch}\,\chi)-\frac{\varepsilon_\ell}{2}\;\mathrm{P}\int\limits_0^\infty dt\,\frac{A_\ell\,(t)}{\mathrm{ch}\,t-\mathrm{ch}\,\chi}\right]=$$

$$=\frac{\varepsilon_\ell^2\,\tilde V_\ell(\chi')\,\tilde V_\ell^*(\chi)\,[1-i\;\mathrm{tg}\,\delta_\ell^V(\chi)]}{2\,\Phi_\ell(\mathrm{ch}\,\chi')\,(\mathrm{ch}\,\chi'-\mathrm{ch}\,\chi-i\,0)}-\frac{\varepsilon_\ell^2\,\tilde V_\ell(\chi')\,\tilde V_\ell^*(\chi)\,[1+i\;\mathrm{tg}\,\delta_\ell^V(\chi')]}{2\,\Phi_\ell(\mathrm{ch}\,\chi)\,(\mathrm{ch}\,\chi'-\mathrm{ch}\,\chi-i\,0)}+$$

$$+\frac{\varepsilon_\ell^4\,\tilde V_\ell(\chi')\,\tilde V_\ell^*(\chi)}{2\,\Phi_\ell(\mathrm{ch}\,\chi')\,\Phi_\ell(\mathrm{ch}\,\chi)\,(\mathrm{ch}\,\chi'-\mathrm{ch}\,\chi-i\,0)}\Big[\varepsilon_\ell-\Phi_\ell(\mathrm{ch}\,\chi)+\Phi_\ell(\mathrm{ch}\,\chi')-\varepsilon_\ell+$$

$$\Big.+i\,\Phi_\ell(\mathrm{ch}\,\chi')\;\mathrm{tg}\,\delta_\ell^V(\chi')+i\,\Phi_\ell(\mathrm{ch}\,\chi)\;\mathrm{tg}\,\delta_\ell^V(\chi)\Big]\equiv 0\,.$$

Таким образом, условие ортогональности (4.108) для регулярного решения $\psi_\ell\,(\rho\,,\,\chi')$ при действительных значениях $\chi'\,,\,\chi$ принимает вид

$$\int\limits_0^\infty d\rho\,\psi_\ell\,(\rho\,,\,\chi')\;\psi_\ell^*\,(\rho\,,\,\chi)=\frac{\delta\,(\mathrm{ch}\,\chi'-\mathrm{ch}\,\chi)}{\cos^2\left[\delta_\ell^V\,(\chi')\right]\,d\rho_\ell(\mathrm{ch}\,\chi')/d(\mathrm{ch}\,\chi')}\,. \qquad (4.109)$$

Теперь рассмотрим случай, когда $\chi'=\chi_{tj'}$, а χ – действительное. В этом случае регулярное решение $\psi_\ell\left(\rho\,,\,\chi_{tj'}\right)$ дается выражением

$$\begin{gathered}\psi_\ell\left(\rho\,,\,\chi_{tj'}\right)=\frac{\varepsilon_\ell\,N_\ell\left(\chi_{tj'}\right)}{2}\sum_{j=1}^{n_\ell}\frac{C_{\ell j}\,\tilde V_\ell(\chi_j)\,\varphi_\ell(\rho\,,\,\chi_j)}{\mathrm{ch}\,\chi_{tj'}-\mathrm{ch}\,\chi_j}+\\ +\frac{\varepsilon_\ell\,N_\ell\left(\chi_{tj'}\right)}{2}\int\limits_0^\infty dt\,\frac{\tau_\ell\,(t)\;\tilde V_\ell\,(t)\;\varphi_\ell\,(\rho\,,\,t)}{\mathrm{ch}\,\chi_{tj'}-\mathrm{ch}\,t}\,.\end{gathered} \qquad (4.110)$$

Далее, как и в предыдущем случае, используя выражения (4.107) и (4.110), вычисляем интеграл от произведения $\psi_\ell\left(\rho\,,\,\chi_{tj'}\right)\;\psi_\ell^*\,(\rho\,,\,\chi)$ по переменной ρ в пределах от 0 до ∞, опираясь на условие ортогональности (2.61) для регулярного решения $\varphi_\ell(\rho\,,\,\chi')$ со спектральной плотностью (2.63). После взятия возникающих интегралов с помощью δ-функций, будем иметь:

$$
\begin{gathered}
\int_0^\infty d\rho\,\psi_\ell\left(\rho\,,\,\chi_{tj'}\right)\,\psi^*_\ell\left(\rho\,,\,\chi\right) = \frac{\varepsilon_\ell\,N_\ell(\chi_{tj'})\,\tilde V_\ell(\chi)\,[1 + i\,\operatorname{tg}\delta^V_\ell(\chi)]}{2\,(\operatorname{ch}\chi_{tj'} - \operatorname{ch}\chi)} + \\
+\frac{\varepsilon^2_\ell\,N_\ell(\chi_{tj'})\,N^*_\ell(\chi)}{4}\sum_{j=1}^{n_\ell}\frac{C_{\ell j}\,|\tilde V_\ell(\chi_j)|^2}{(\operatorname{ch}\chi_{tj'} - \operatorname{ch}\chi_j)(\operatorname{ch}\chi - \operatorname{ch}\chi_j)} + \\
+\frac{\varepsilon^2_\ell\,N_\ell(\chi_{tj'})\,N^*_\ell(\chi)}{4}\int_0^\infty dt\,\frac{\tau_\ell\,(t)\,\,|\tilde V_\ell\,(t)\,|^2}{(\operatorname{ch}t - \operatorname{ch}\chi_{tj'})(\operatorname{ch}t - \operatorname{ch}\chi + i\,0)} = \\
= \frac{\varepsilon_\ell\,N_\ell(\chi_{tj'})\,\tilde V_\ell(\chi)\,[1 + i\,\operatorname{tg}\delta^V_\ell(\chi)]}{2\,(\operatorname{ch}\chi_{tj'} - \operatorname{ch}\chi)} + \\
+\frac{\varepsilon^3_\ell\,N_\ell(\chi_{tj'})\,\tilde V_\ell(\chi)}{2\,\Phi_\ell(\operatorname{ch}\chi)\,(\operatorname{ch}\chi_{tj'} - \operatorname{ch}\chi)}\left[\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n_\ell}\frac{C_{\ell j}\,|\tilde V_\ell(\chi_j)|^2}{\operatorname{ch}\chi - \operatorname{ch}\chi_j} - \right. \\
-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n_\ell}\frac{C_{\ell j}\,|\tilde V_\ell(\chi_j)|^2}{\operatorname{ch}\chi_{tj'} - \operatorname{ch}\chi_j} + \frac{\varepsilon_\ell}{2}\int_0^\infty dt\,\frac{A_\ell\,(t)}{\operatorname{ch}t - \operatorname{ch}\chi_{tj'}} - \\
\left. -i\,\Phi_\ell(\operatorname{ch}\chi)\,\operatorname{tg}\delta^V_\ell(\chi) - \frac{\varepsilon_\ell}{2}\,\mathrm{P}\int_0^\infty dt\,\frac{A_\ell\,(t)}{\operatorname{ch}t - \operatorname{ch}\chi}\right] = \\
= \frac{\varepsilon_\ell\,N_\ell(\chi_{tj'})\,\tilde V_\ell(\chi)\,[1 + i\,\operatorname{tg}\delta^V_\ell(\chi)]}{2\,(\operatorname{ch}\chi_{tj'} - \operatorname{ch}\chi)} + \\
+\frac{\varepsilon^3_\ell\,N_\ell(\chi_{tj'})\,\tilde V_\ell(\chi)}{2\,\Phi_\ell(\operatorname{ch}\chi)\,(\operatorname{ch}\chi_{tj'} - \operatorname{ch}\chi)}\Big[\varepsilon_\ell - \Phi_\ell(\operatorname{ch}\chi) + \\
+\Phi_\ell(\operatorname{ch}\chi_{tj'}) - \varepsilon_\ell - i\,\Phi_\ell(\operatorname{ch}\chi)\,\operatorname{tg}\delta^V_\ell(\chi)\Big] \equiv 0\,,
\end{gathered}
\tag{4.111}
$$

где мы воспользовались формулой (4.26) и соотношениями (4.83)–(4.85), (4.92) и (4.94).

Наконец, рассмотрим случай, когда $\chi' = \chi_{tj'}\,,\ \chi = \chi_{tk'}$. Тогда, используя выражение (4.110), вычисляем интеграл от произведения $\psi_\ell\left(\rho\,,\,\chi_{tk'}\right)$ $\psi^*_\ell\left(\rho\,,\,\chi_{tj'}\right)$ по переменной ρ в пределах от 0 до ∞, также опираясь на условие ортогональности (2.61) для регулярного решения $\varphi_\ell(\rho\,,\,\chi')$ со спектральной плотностью (2.63). После вычисления возникающих интегралов с помощью δ-функций, приходим к следующему результату:

$$
\begin{gathered}
\int\limits_0^\infty d\rho\, \psi_\ell\,(\rho\,,\, \chi_{tk'})\;\psi_\ell^*\,(\rho\,,\, \chi_{tj'}) = \\
= \frac{\varepsilon_\ell^2\, N_\ell(\chi_{tk'})\, N_\ell^*(\chi_{tj'})}{4} \sum_{j=1}^{n_\ell} \frac{C_{\ell j}\,|\tilde{V}_\ell(\chi_j)|^2}{(\mathrm{ch}\,\chi_{tj'}-\mathrm{ch}\,\chi_j)(\mathrm{ch}\,\chi_{tk'}-\mathrm{ch}\,\chi_j)} + \\
+ \frac{\varepsilon_\ell^2\, N_\ell(\chi_{tk'})\, N_\ell^*(\chi_{tj'})}{4} \int\limits_0^\infty dt\, \frac{\tau_\ell\,(t)\;|\tilde{V}_\ell\,(t)\,|^2}{(\mathrm{ch}\,t-\mathrm{ch}\,\chi_{tj'})(\mathrm{ch}\,t-\mathrm{ch}\,\chi_{tk'})} = \\
= \frac{\varepsilon_\ell^2\, N_\ell(\chi_{tk'})\, N_\ell^*(\chi_{tj'})}{4\,(\mathrm{ch}\,\chi_{tj'}-\mathrm{ch}\,\chi_{tk'})} \left[\sum_{j=1}^{n_\ell} \frac{C_{\ell j}\,|\tilde{V}_\ell(\chi_j)|^2}{\mathrm{ch}\,\chi_{tk'}-\mathrm{ch}\,\chi_j} - \sum_{j=1}^{n_\ell} \frac{C_{\ell j}\,|\tilde{V}_\ell(\chi_j)|^2}{\mathrm{ch}\,\chi_{tj'}-\mathrm{ch}\,\chi_j} + \right. \\
\left. + \,\varepsilon_\ell \int\limits_0^\infty dt\, \frac{A_\ell\,(t)}{\mathrm{ch}\,\chi_{tk'}-\mathrm{ch}\,t} - \varepsilon_\ell \int\limits_0^\infty dt\, \frac{A_\ell\,(t)}{\mathrm{ch}\,\chi_{tj'}-\mathrm{ch}\,t} \right] = \\
= \frac{\varepsilon_\ell^2\, N_\ell(\chi_{tk'})\, N_\ell^*(\chi_{tj'})}{2\,(\mathrm{ch}\,\chi_{tj'}-\mathrm{ch}\,\chi_{tk'})} \Big[\varepsilon_\ell - \Phi_\ell(\mathrm{ch}\,\chi_{tk'}) + \Phi_\ell(\mathrm{ch}\,\chi_{tj'}) - \varepsilon_\ell \Big] = \\
= \begin{cases} 0\,, \ \text{при}\, \chi_{tj'} \neq \chi_{tk'}\,; \\ \dfrac{\varepsilon_\ell^2\,|N_\ell(\chi_{tj'})|^2}{2}\, \dfrac{d\Phi_\ell(\mathrm{ch}\,\chi_{tj'})}{d\,\mathrm{ch}\,\chi_{tj'}} \equiv [C_{\ell j'}^V]^{-1} \ \text{при}\, \chi_{tj'} = \chi_{tk'}\,, \end{cases}
\end{gathered}
\tag{4.112}
$$

где мы теперь воспользовались соотношениями (4.84), (4.85), (4.92) и (4.94).

Итак, условие ортогональности для регулярного решения $\psi_\ell\,(\rho\,,\,\chi')$ уравнения (4.68) для случая суперпозиции локального и сепарабельного квазипотенциалов, в соответствии с выражениями (4.109), (4.111), (4.112), запишем в виде

$$
\begin{gathered}
\int\limits_0^\infty d\rho\, \psi_\ell(\rho\,,\,\chi)\, \psi_\ell^*(\rho\,,\,\chi') = \\
= \begin{cases} \delta\,(E-E')\,[d\rho_\ell^V(E)/dE]^{-1}\,,\ E = \mathrm{ch}\,\chi \geq 1\,, \\ E' = \mathrm{ch}\,\chi' \geq 1\,; \\ \left[C_{\ell j}^V\right]^{-1}\,\delta_{jj'}\,,\ 0 \leq E_{tj} = \mathrm{ch}\,\chi_{tj} < 1\,,\ \chi = \chi_{tj} = i\,\kappa_{tj}\,, \\ 0 \leq E_{tj'} = \mathrm{ch}\,\chi_{tj'} < 1\,,\ \chi' = \chi_{tj'} = i\,\kappa_{tj'}\,, \\ 0 < \kappa_{tj}\,,\ \kappa_{tj'} \leq \pi/2\,,\ j\,,\ j' = 1, 2, ..., \sigma_\ell\,; \\ 0\,,\ E = \mathrm{ch}\,\chi \geq 1\,,\ 0 \leq E_{tj'} = \mathrm{ch}\,\chi_{tj'} < 1\,, \\ \chi' = \chi_{tj'} = i\,\kappa_{tj'}\,,\ 0 < \kappa_{tj'} \leq \pi/2\,, \end{cases}
\end{gathered}
\tag{4.113}
$$

где теперь спектральная плотность и нормировочные коэффициенты даются выражениями

$$\frac{d\rho_\ell^V(E)}{dE} = \begin{cases} \mathrm{sh}^{-1}\chi\,\tau_\ell^V(\chi)\,,\ E=\mathrm{ch}\,\chi \geq 1\,; \\ \sum\limits_{j=1}^{\sigma_\ell} C_{\ell j}^V\,\delta\,(E-E_{tj})\,,\ 0 \leq E = \mathrm{ch}\,\chi < 1\,, \chi = i\,\kappa\,, \\ 0 \leq E_{tj} = \mathrm{ch}\,\chi_{tj} < 1\,,\ \chi_{tj} = i\,\kappa_{tj}\,, \\ 0 < \kappa\,,\ \kappa_{tj} \leq \pi/2\,, \end{cases} \tag{4.114}$$

$$\begin{aligned} \left[C_{\ell j}^V\right]^{-1} = \int\limits_0^\infty d\rho\,\left|\psi_\ell(\rho\,,\,\chi_{tj})\right|^2 = \frac{\varepsilon_\ell^2\,|N_\ell(\chi_{tj'})|^2}{2}\,\frac{d\Phi_\ell(\mathrm{ch}\,\chi_{tj'})}{d\,\mathrm{ch}\,\chi_{tj'}} = \\ = -\,\frac{F_\ell(-\chi_{tj})\,\dot F_\ell(\chi_{tj})}{4\,i\,Q_\ell^2(\mathrm{cth}\,\chi_{tj})}\,, \end{aligned} \tag{4.115}$$

$$\begin{gathered} \tau_\ell^V(\chi) = \tau_\ell(\chi)\,\cos^2\delta_\ell^V(\chi)\,, \\ \dot F_\ell(\chi_{tj}) = dF_\ell(\chi_{tj})/d\chi_{tj}\,,\ j=1,2,...,\sigma_\ell\,. \end{gathered} \tag{4.116}$$

Здесь $F_\ell(\chi')$ – функция Йоста, обусловленная суперпозицией $W(\rho) + \varepsilon_\ell\,V_\ell(\rho)\,V_\ell(\rho')$, которая связана с соответствующим ей полным фазовым сдвигом $\delta_\ell(\chi')$ соотношением

$$\begin{gathered} F_\ell(\chi') = |F_\ell(\chi')|\,\exp\left[-i\,\delta_\ell(\chi')\right]\,, \\ |F_\ell(\chi')| = \left|F_\ell^W(\chi')\right|\,\cos^{-1}\delta_\ell^V(\chi')\,, \end{gathered} \tag{4.117}$$

причем $\delta_\ell(\chi') = \delta_\ell^W(\chi') + \delta_\ell^V(\chi')$, где $\delta_\ell^V(\chi')$ – приращение фазового сдвига, обусловленное сепарабельным взаимодействием $\varepsilon_\ell\,V_\ell(\rho)\,V_\ell(\rho')$.

Наконец, условия полноты для функции $\psi_\ell(\rho\,,\,\chi')$ в соответствии с (4.113)–(4.115) принимают обычный вид:

$$\begin{aligned} \int\limits_0^\infty d\rho_\ell^V(E)\,\psi_\ell(\rho\,,\,\chi)\,\psi_\ell^*(\rho'\,,\,\chi) = \\ = \sum_{j=1}^{\sigma_\ell} C_{\ell j}^V\,\psi_\ell(\rho\,,\,\chi_{tj})\,\psi_\ell^*(\rho'\,,\,\chi_{tj}) + \\ + \int\limits_0^\infty d\chi\,\tau_\ell^V(\chi)\,\psi_\ell(\rho\,,\,\chi)\,\psi_\ell^*(\rho'\,,\,\chi) = \delta\,(\rho'-\rho)\,. \end{aligned} \tag{4.118}$$

4.5. Суперпозиция локального и суммы нелокальных сепарабельных квазипотенциалов

Данный раздел посвящен изложению метода решения уравнения (4.5) в случае взаимодействия общего вида, представляющего собой суперпозицию локального и суммы нелокальных сепарабельных квазипотенциалов. Развитый в этом разделе метод решения уравнения (4.5) с граничным условием (4.8) позволяет получить выражения для приращений фазового сдвига, исследовать условия существования связанных состояний и состояний рассеяния и обобщить теорему Левинсона. При этом мы будем считать, что локальная составляющая $W(\rho)$ полного взаимодействия известна и допускает существование $\sigma_\ell^{(0)}$ связанных состояний с энергиями

$$
\begin{gathered}
0 \leq E_{tj}^{(0)} = E_{q'j}/m' = \operatorname{ch}\chi_{tj}^{(0)} < 1\,,\ \chi_{tj}^{(0)} = i\,\kappa_{tj}^{(0)}\,,\\
0 < \kappa_{tj}^{(0)} \leq \pi/2\,,\ j = 1, 2, ..., \sigma_\ell^{(0)}\,.
\end{gathered}
\tag{4.119}
$$

4.5.1. Парциальные волновые функции: метод и условие единственности решений

Решение уравнения (4.5) с граничным условием (4.8) будем рассматривать для класса потенциалов, для которых локальный $W\,(\rho)$ и компоненты $V_{\ell m}(\rho)$ сепарабельного квазипотенциалов удовлетворяют условиям

$$
\begin{gathered}
\rho\, W\,(\rho)\,\in\, L_1\,(0\,,\,\infty)\;,\;\rho\, V_{\ell m}\,(\rho)\,\in\, L_1\,(0\,,\,\infty)\;,\\
m = 1, 2, ..., M_\ell\,.
\end{gathered}
\tag{4.120}
$$

Первое требование в (4.120) вместе со свойствами (2.23) и (2.24) означает (см. раздел 2.2.3 и работу [85]), что регулярное решение $\psi_\ell^{(0)}(\rho\,,\,\chi')$ уравнения (4.5) при $\varepsilon_{\ell m} \equiv 0$ с граничным условием

$$
\psi_\ell^{(0)}(0\,,\,\chi') = 0\,,
$$

когда локальный квазипотенциал $W(\rho)$ допускает существование связанных состояний с энергиями (4.119), является единственным и удовлетворяет условиям ортогональности и полноты

$$\int\limits_0^\infty d\rho\, \psi_\ell^{(0)}(\rho\,,\,\chi)\, \psi_\ell^{(0)^*}(\rho\,,\,\chi') =$$

$$= \begin{cases} \delta\,(E-E')\,[d\rho_\ell^{(0)}(E)/dE]^{-1}\,,\; E=\mathrm{ch}\,\chi \geq 1\,, \\ E'=\mathrm{ch}\,\chi' \geq 1\,; \\ \left[C_{\ell j}^{(0)}\right]^{-1}\,\delta_{jj'}\,,\; 0\leq E_{tj}^{(0)}=\mathrm{ch}\,\chi_{tj}^{(0)}<1\,,\; \chi=\chi_{tj}^{(0)}=i\,\kappa_{tj}^{(0)}\,, \\ 0\leq E_{tj'}^{(0)}=\mathrm{ch}\,\chi_{tj'}^{(0)}<1\,,\; \chi'=\chi_{tj'}^{(0)}=i\,\kappa_{tj'}^{(0)}\,, \\ 0<\kappa_{tj}^{(0)}\,,\;\kappa_{tj'}^{(0)}\leq\pi/2\,,\; j\,,j'=1,2,...,\sigma_\ell^{(0)}\,; \\ 0\,,\; E=\mathrm{ch}\,\chi\geq 1\,,\; 0\leq E_{tj'}^{(0)}=\mathrm{ch}\,\chi_{tj'}^{(0)}<1\,, \\ \chi'=\chi_{tj'}^{(0)}=i\,\kappa_{tj'}^{(0)}\,,\; 0<\kappa_{tj'}^{(0)}\leq\pi/2\,, \end{cases} \tag{4.121}$$

$$\int\limits_0^\infty d\rho_\ell^{(0)}(E)\, \psi_\ell^{(0)}(\rho\,,\,\chi)\, \psi_\ell^{(0)^*}(\rho'\,,\,\chi) =$$

$$= \sum_{j=1}^{\sigma_\ell^{(0)}} C_{\ell j}^{(0)}\, \psi_\ell^{(0)}(\rho\,,\,\chi_{tj}^{(0)})\, \psi_\ell^{(0)^*}(\rho'\,,\,\chi_{tj}^{(0)}) + \tag{4.122}$$

$$+ \int\limits_0^\infty d\chi\, \tau_\ell^{(0)}(\chi)\, \psi_\ell^{(0)}(\rho\,,\,\chi)\, \psi_\ell^{(0)^*}(\rho'\,,\,\chi) = \delta\,(\rho'-\rho)\,,$$

где спектральная плотность и нормировочные коэффициенты даются выражениями

$$\frac{d\rho_\ell^{(0)}(E)}{dE} = \begin{cases} \mathrm{sh}^{-1}\chi\,\tau_\ell^{(0)}(\chi)\,,\;\; E=\mathrm{ch}\,\chi\geq 1\,; \\ \sum\limits_{j=1}^{\sigma_\ell^{(0)}} C_{\ell j}^{(0)}\,\delta\,(E-E_{tj}^{(0)})\,,\;\; 0\leq E=\mathrm{ch}\,\chi<1\,, \\ \chi=i\,\kappa\,,\; 0\leq E_{tj}^{(0)}=\mathrm{ch}\,\chi_{tj}^{(0)}<1\,,\; \chi_{tj}^{(0)}=i\,\kappa_{tj}^{(0)}\,, \\ 0<\kappa\,,\;\;\kappa_{tj}^{(0)}\leq\pi/2\,, \end{cases} \tag{4.123}$$

$$\tau_\ell^{(0)}(\chi) = (2/\pi)\, Q_\ell^2(\mathrm{cth}\,\chi)\, \left|\, F_\ell^W(\chi)\,\right|^{-2}\,,$$

$$
\left[C_{\ell j}^{(0)}\right]^{-1} = \int\limits_0^\infty d\rho \, \left|\psi_\ell^{(0)}(\rho\,,\,\chi_{tj}^{(0)})\right|^2 = -\frac{F_\ell^W(-\chi_{tj}^{(0)})\,\dot F_\ell^W(\chi_{tj}^{(0)})}{4\,i\,Q_\ell^2(\operatorname{cth}\chi_{tj}^{(0)})}\,,
$$
$$
\dot F_\ell^W(\chi_{tj}^{(0)}) = dF_\ell^W(\chi_{tj}^{(0)})/d\chi_{tj}^{(0)}\,,\ j = 1, 2, ..., \sigma_\ell^{(0)}\,. \tag{4.124}
$$

Здесь $Q_\ell(z)$ – функция Лежандра второго рода, а $F_\ell^W(\chi)$ есть функция Йоста для локального квазипотенциала $W(\rho)$ и связана с соответствующим ей фазовым сдвигом $\delta_\ell^W(\chi)$ соотношением (2.34).

Напомним (см. раздел 2.2.3 и работу [85]), что если значения $\chi_{tj}^{(0)}$ ($0 < \mathrm{Im}\chi_{tj}^{(0)} = \kappa_{tj}^{(0)} \le \pi/2\,,\ j = 1, 2, ..., \sigma_\ell^{(0)}$) являются нулями функции Йоста $F_\ell^W(\chi)$, то им отвечают связанные состояния с энергиями (4.119). Действительно, при $F_\ell^W(\chi_{tj}^{(0)}) = 0$ из представления

$$
\psi_\ell^{(0)}(\rho\,,\,\chi') =
$$
$$
= \frac{1}{2\,i\,Q_\ell(\operatorname{cth}\chi')}\left[F_\ell^W(-\chi')\,f_\ell^{(0)}(\rho\,,\,\chi') + e^{i\,\pi\,(\ell+1)}\,F_\ell^W(\chi')\,f_\ell^{(0)}(\rho\,,\,-\chi')\right]
$$

следует, что

$$
\psi_\ell^{(0)}(\rho\,,\,\chi_{tj}^{(0)}) = \frac{F_\ell^W(-\chi_{tj}^{(0)})\,f_\ell^{(0)}(\rho\,,\,\chi_{tj}^{(0)})}{2\,i\,Q_\ell(\operatorname{cth}\chi_{tj}^{(0)})}\,.
$$

Здесь $f_\ell^{(0)}(\rho\,,\,\chi')$ – решение Йоста уравнения (4.5) при $\varepsilon_{\ell m} \equiv 0$ с граничным условием

$$
\lim_{\rho\chi'\to\infty} \exp\left[-i\,(\rho\,\chi' - \pi\,\ell/2)\right]\,f_\ell^{(0)}(\rho\,,\,\chi') = 1\,.
$$

Это означает, что функция $\psi_\ell^{(0)}(\rho\,,\,\chi_{tj}^{(0)})$ убывает экспоненциально при $0 < \mathrm{Im}\chi_{tj}^{(0)} \le \pi/2\,,\ j = 1, 2, ..., \sigma_\ell^{(0)}$, когда $\rho \to \infty$. Следовательно, мы имеем связанные состояния с энергиями (4.119). При этом все нули функции Йоста простые и чисто мнимые, так как

$$
4\,\mathrm{sh}\,(\mathrm{Re}\chi_{tj}^{(0)})\,\sin(\mathrm{Im}\chi_{tj}^{(0)})\int\limits_0^\infty d\rho\,\left|f_\ell^{(0)}(\rho\,,\,\chi_{tj}^{(0)})\right|^2 = 0
$$

при $\mathrm{Re}\chi_{tj}^{(0)} = 0\,,\ 0 < \mathrm{Im}\chi_{tj}^{(0)} \le \pi/2\,,\ j = 1, 2, ..., \sigma_\ell^{(0)}$.

Решение уравнения (4.5) с граничным условием (4.8) будем искать методом итераций, используя интегральные преобразования волновой функции, полученной в предыдущей итерации.

1. Первый шаг итерации

На первом шаге итерации ($n = 1$) мы рассматриваем суперпозицию $W(\rho)$ и $\varepsilon_{\ell 1}\, V_{\ell 1}(\rho)\, V_{\ell 1}(\rho')$. Тем самым мы будем искать решение $\psi_\ell^{(1)}(\rho\,,\,\chi')$ уравнения (4.5) при $m = 1$, удовлетворяющее граничному условию вида (4.8). Для этого мы введем (см. раздел 4.4.1 и работы [85], [122]) релятивистские интегральные преобразования

$$\tilde{\psi}_\ell^{(1)}(\chi'\,,\,\chi) = \int_0^\infty d\rho\, \psi_\ell^{(1)}(\rho\,,\,\chi')\, \psi_\ell^{(0)^*}(\rho\,,\,\chi)\,,$$
$$\tilde{V}_{\ell 1}^{(0)}(\chi) = \int_0^\infty d\rho\, V_{\ell 1}(\rho)\, \psi_\ell^{(0)^*}(\rho\,,\,\chi)\,, \tag{4.125}$$

$$\psi_\ell^{(1)}(\rho\,,\,\chi') = \int_0^\infty d\rho_\ell^{(0)}(E)\, \tilde{\psi}_\ell^{(1)}(\chi'\,,\,\chi)\, \psi_\ell^{(0)}(\rho\,,\,\chi)\,,$$
$$V_{\ell 1}(\rho) = \int_0^\infty d\rho_\ell^{(0)}(E)\, \tilde{V}_{\ell 1}^{(0)}(\chi)\, \psi_\ell^{(0)}(\rho\,,\,\chi)\,, \tag{4.126}$$

где спектральная плотность $d\rho_\ell^{(0)}(E)/dE$ определена в (4.123), а функция $\psi_\ell^{(0)}(\rho\,,\,\chi)$ удовлетворяет условиям (4.121) и (4.122). Тогда, используя результаты раздела 4.4.2, будем иметь:

$$\psi_\ell^{(1)}(\rho\,,\,\chi') = \psi_\ell^{(0)}(\rho\,,\,\chi') + \tag{4.127}$$
$$+\frac{1}{2}\,\varepsilon_{\ell 1}\, N_{\ell 1}(\chi') \sum_{j=1}^{\sigma_\ell^{(0)}} C_{\ell j}^{(0)}\, \frac{\tilde{V}_{\ell 1}^{(0)}(\chi_{tj}^{(0)})\, \psi_\ell^{(0)}(\rho\,,\,\chi_{tj}^{(0)})}{\operatorname{ch}\chi' - \operatorname{ch}\chi_{tj}^{(0)}} +$$
$$+\frac{1}{2}\,\varepsilon_{\ell 1}\, N_{\ell 1}(\chi')\, \mathrm{P}\int_0^\infty d\chi\, \frac{\tau_\ell^{(0)}(\chi)\, \tilde{V}_{\ell 1}^{(0)}(\chi)\, \psi_\ell^{(0)}(\rho\,,\,\chi)}{\operatorname{ch}\chi' - \operatorname{ch}\chi}\,,$$
$$N_{\ell 1}(\chi') = \varepsilon_{\ell 1}\, \tilde{V}_{\ell 1}^{(0)^*}(\chi')/\Phi_{\ell 1}(\operatorname{ch}\chi')\,,$$

$$\operatorname{tg}\delta_\ell^{V_{\ell 1}}(\chi') = -(\pi/2)\operatorname{sh}^{-1}\chi'\, \varepsilon_{\ell 1}\, A_{\ell 1}(\chi')/\Phi_{\ell 1}(\operatorname{ch}\chi')\,,$$

$$A_{\ell 1}(\chi) = \varepsilon_{\ell 1}\, \tau_\ell^{(0)}(\chi)\, \left|\tilde{V}_{\ell 1}^{(0)}(\chi)\right|^2\,,$$
$$\Phi_{\ell 1}(\operatorname{ch}\chi') = \varepsilon_{\ell 1} - \tag{4.128}$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\sigma_\ell^{(0)}} C_{\ell j}^{(0)}\, \frac{\left|\tilde{V}_{\ell 1}^{(0)}(\chi_{tj}^{(0)})\right|^2}{\operatorname{ch}\chi' - \operatorname{ch}\chi_{tj}^{(0)}} - \frac{1}{2}\,\mathrm{P}\int_0^\infty d\chi\, \frac{|A_{\ell 1}(\chi)|}{\operatorname{ch}\chi' - \operatorname{ch}\chi}\,,$$

где P есть символ главного значения.

Кроме того, волновая функция $\psi_\ell^{(1)}(\rho\,,\,\chi')$ имеет асимптотику

$$\psi_\ell^{(1)}(\rho\,,\,\chi') = \frac{\left|F_\ell^{(1)}(\chi')\right|}{Q_\ell(\mathrm{cth}\,\chi')}\,\sin\left[\rho\,\chi' - \frac{\pi\,\ell}{2} + \delta_\ell^{(1)}(\chi')\right] + \\ +O\left(e^{-\pi\,\rho/4}\right)\ ,\ \rho\,\chi' \to \infty\,. \tag{4.129}$$

Здесь $\delta_\ell^{(1)}(\chi') = \delta_\ell^{W}(\chi') + \delta_\ell^{V_{\ell 1}}(\chi')$ – полный фазовый сдвиг, отвечающий первому шагу итерации, а $\delta_\ell^{V_{\ell 1}}(\chi')$ – его приращение, обусловленное компонентой $\varepsilon_{\ell 1}\,V_{\ell 1}(\rho)\,V_{\ell 1}(\rho')$ сепарабельного взаимодействия, причем функция Йоста $F_\ell^{(1)}(\chi')$ связана с соответствующим ей фазовым сдвигом $\delta_\ell^{(1)}(\chi')$ соотношением

$$F_\ell^{(1)}(\chi') = \left|F_\ell^{(1)}(\chi')\right|\,\exp\left[-i\,\delta_\ell^{(1)}(\chi')\right]\ ,\ \left|F_\ell^{(1)}(\chi')\right| = \left|F_\ell^{W}(\chi')\right|\,\cos^{-1}\delta_\ell^{V_{\ell 1}}(\chi')\,.$$

Более того, функция $\psi_\ell^{(1)}(\rho\,,\,\chi')$ удовлетворяют условиям ортогональности и полноты (см. раздел 4.4.5, формулы (4.113)–(4.118)):

$$\int\limits_0^\infty d\rho\,\psi_\ell^{(1)}(\rho\,,\,\chi)\,\psi_\ell^{(1)^*}(\rho\,,\,\chi') =$$

$$= \begin{cases} \delta\,(E-E')\,[d\rho_\ell^{(1)}(E)/dE]^{-1},\ E = \mathrm{ch}\,\chi \ge 1\,, \\ E' = \mathrm{ch}\,\chi' \ge 1\,; \\ \left[C_{\ell j}^{(1)}\right]^{-1}\,\delta_{jj'}\,,\ 0 \le E_{tj}^{(1)} = \mathrm{ch}\,\chi_{tj}^{(1)} < 1\,,\ \chi = \chi_{tj}^{(1)} = i\,\kappa_{tj}^{(1)}\,, \\ 0 \le E_{tj'}^{(1)} = \mathrm{ch}\,\chi_{tj'}^{(1)} < 1\,,\ \chi' = \chi_{tj'}^{(1)} = i\,\kappa_{tj'}^{(1)}\,, \\ 0 < \kappa_{tj}^{(1)}\,,\ \kappa_{tj'}^{(1)} \le \pi/2\,,\ j\,,\ j' = 1,2,...,\sigma_\ell^{(1)}\,; \\ 0\,,\ E = \mathrm{ch}\,\chi \ge 1\,,\ 0 \le E_{tj'}^{(1)} = \mathrm{ch}\,\chi_{tj'}^{(1)} < 1\,, \\ \chi' = \chi_{tj'}^{1)} = i\,\kappa_{tj'}^{(1)}\,,\ 0 < \kappa_{tj'}^{(1)} \le \pi/2\,, \end{cases} \tag{4.130}$$

$$\int\limits_0^\infty d\rho_\ell^{(1)}(E)\,\psi_\ell^{(1)}(\rho\,,\,\chi)\,\psi_\ell^{(1)^*}(\rho'\,,\,\chi) =$$

$$= \sum_{j=1}^{\sigma_\ell^{(1)}} C_{\ell j}^{(1)}\,\psi_\ell^{(1)}(\rho\,,\,\chi_{tj}^{(1)})\,\psi_\ell^{(1)^*}(\rho'\,,\,\chi_{tj}^{(1)}) + \tag{4.131}$$

$$+\int\limits_0^\infty d\chi\,\tau_\ell^{(1)}(\chi)\,\psi_\ell^{(1)}(\rho\,,\,\chi)\,\psi_\ell^{(1)^*}(\rho'\,,\,\chi) = \delta(\rho'-\rho)\,.$$

Но теперь спектральная плотность и нормировочные коэффициенты даются выражениями

$$\frac{d\rho_\ell^{(1)}(E)}{dE} = \begin{cases} \mathrm{sh}^{-1}\chi\, \tau_\ell^{(1)}(\chi)\,, \; E = \mathrm{ch}\,\chi \geq 1\,; \\ \sum\limits_{j=1}^{\sigma_\ell^{(1)}} C_{\ell j}^{(1)}\, \delta\,(E - E_{tj}^{(1)})\,, \; 0 \leq E = \mathrm{ch}\,\chi < 1\,, \chi = i\,\kappa\,, \\ 0 \leq E_{tj}^{(1)} = \mathrm{ch}\,\chi_{tj}^{(1)} < 1\,, \; \chi_{tj}^{(1)} = i\,\kappa_{tj}^{(1)}\,, \\ 0 < \kappa\,, \; \kappa_{tj}^{(1)} \leq \pi/2\,, \end{cases} \tag{4.132}$$

$$\left[C_{\ell j}^{(1)}\right]^{-1} = \int\limits_0^\infty d\rho \left|\psi_\ell^{(1)}(\rho\,,\,\chi_{tj}^{(1)})\right|^2 = -\frac{F_\ell^{(1)}(-\chi_{tj}^{(1)})\,\dot{F}_\ell^{(1)}(\chi_{tj}^{(1)})}{4\,i\,Q_\ell^2(\mathrm{cth}\,\chi_{tj}^{(1)})}\,, \tag{4.133}$$

где

$$\tau_\ell^{(1)}(\chi) = \tau_\ell^{(0)}(\chi)\,\cos^2\delta_\ell^{V_{\ell 1}}(\chi)\,,$$

$$\dot{F}_\ell^{(1)}(\chi_{tj}^{(1)}) = dF_\ell^{(1)}(\chi_{tj}^{(1)})/d\chi_{tj}^{(1)}\,, \; j = 1, 2, ..., \sigma_\ell^{(1)}\,.$$

Далее, опираясь на результаты разделов 4.4.3 и 4.4.4 (см. также работы [85], [122]), мы можем заключить, что значения энергий

$$\begin{gathered} 0 \leq E_{tj}^{(1)} = \mathrm{ch}\,\chi_{tj}^{(1)} < 1\,, \; \chi_{tj}^{(1)} = i\,\kappa_{tj}^{(1)}\,, \\ 0 < \kappa_{tj}^{(1)} \leq \pi/2\,, \; j = 1, 2, ..., \sigma_\ell^{(1)}\,, \end{gathered} \tag{4.134}$$

отвечающих истинным связанным состояниям, обусловлены суперпозицией $W(\rho)$ и $\varepsilon_{\ell 1}\, V_{\ell 1}(\rho)\, V_{\ell 1}(\rho')$ и находятся как корни уравнения

$$\begin{gathered} \Phi_{\ell 1}(E_{tj}^{(1)}) = 0\,, \; j = 1, 2, ..., \sigma_\ell^{(1)}\,, \\ \sigma_\ell^{(1)} = \begin{cases} \sigma_\ell^{(0)} - 1\,, \; \sigma_\ell^{(0)}\,, \; \varepsilon_{\ell 1} = 1\,, \\ \sigma_\ell^{(0)}\,, \; \sigma_\ell^{(0)} + 1\,, \; \varepsilon_{\ell 1} = -1\,. \end{cases} \end{gathered} \tag{4.135}$$

В то же время значения энергий

$$E_{fk}^{(1)} = \mathrm{ch}\chi_{fk}^{(1)} \geq 1\,, \; k = \begin{cases} 0, 1, ..., \nu_\ell^{(1)} - 1\,, \; \varepsilon_{\ell 1} = 1\,, \\ 1, 2, ..., \nu_\ell^{(1)}\,, \; \varepsilon_{\ell 1} = -1\,, \end{cases} \tag{4.136}$$

отвечающих “поддельным” связанным состояниям, обусловлены компонентой $\varepsilon_{\ell 1}\, V_{\ell 1}(\rho)\, V_{\ell 1}(\rho')$ сепарабельного взаимодействия и находятся как корни уравнений

$$\begin{cases} \Phi_{\ell 1}(E^{(1)}_{fk}) = 0\,, \\ \tilde V^{(0)}_{\ell 1}(\chi^{(1)}_{fk}) = 0\,, \end{cases} \quad k = \begin{cases} 0, 1, ..., \nu^{(1)}_\ell - 1\,,\ \varepsilon_{\ell 1} = 1\,, \\ 1, 2, ..., \nu^{(1)}_\ell\,,\ \varepsilon_{\ell 1} = -1\,. \end{cases} \tag{4.137}$$

Тем самым $\operatorname{tg}\delta^{V_{\ell 1}}_\ell(\chi)$ обращается в нуль при $\chi = \chi^{(1)}_{fk}$ и меняет знак, т.е.

$$\delta^{V_{\ell 1}}_\ell(\chi^{(1)}_{fk}) = \pi\, k\,,\ k = \begin{cases} 0, 1, ..., \nu^{(1)}_\ell - 1\,,\ \varepsilon_{\ell 1} = 1\,, \\ 1, 2, ..., \nu^{(1)}_\ell\,,\ \varepsilon_{\ell 1} = -1\,, \end{cases}$$
$$\left.\frac{d\,\delta^{V_{\ell 1}}_\ell(\chi)}{d\chi}\right|_{\chi=\chi^{(1)}_{fk}} < 0\,, \tag{4.138}$$

а теорема Левинсона имеет вид

$$\delta^{V_{\ell 1}}_\ell(0) = \pi\,(\sigma^{(1)}_\ell - \sigma^{(0)}_\ell + \nu^{(1)}_\ell)\,. \tag{4.139}$$

Здесь мы выбрали $\delta^{(1)}_\ell(\infty) = 0$ и учли обычную теорему Левинсона для локального квазипотенциала, допускающего $\sigma^{(0)}_\ell$ связанных состояний, т.е. $\delta^W_\ell(0) = \pi\,\sigma^{(0)}_\ell$.

Необходимо отметить, что условия в (4.120) при $m = 1$ обеспечивают существование решения $\psi^{(1)}_\ell(\rho\,,\chi')$ (см. раздел 4.4.3 и работы [85], [122]). Действительно, функция $\tilde V^{(0)}_{\ell 1}(\chi)$, определяемая сотношениями (4.125) и (4.126), всюду непрерывна, а функция $Q_\ell(\operatorname{cth}\chi)\,\tilde V^{(0)}_{\ell 1}(\chi)\ \big|\ F^W_\ell(\chi)\ \big|^{-1}$, а, значит, и функция $A_{\ell 1}(\chi)$, дифференцируемы при всех $\chi \ge 0$. Более того, из (4.125) следуют оценки

$$Q_\ell(\operatorname{cth}\chi)\,\tilde V^{(0)}_{\ell 1}(\chi)\ \big|\ F^W_\ell(\chi)\ \big|^{-1} = O(1)\,,\ |\chi| \to \infty\,,\ \tilde V^{(0)}_{\ell 1}(\chi) = O(1)\,,\ \chi \to 0\,,$$

если только условия (4.120) при $m = 1$ выполняются. Тем самым главные значения интегралов в правых частях формул (4.127) и (4.128) существуют и абсолютно сходятся на обоих пределах. Тогда из теорем о преобразованиях Гильберта непрерывных по Гельдеру функций следует, что преобразование Гильберта функции $A_{\ell 1}(\chi)$ также является непрерывной по Гельдеру функцией с некоторым положительным индексом. Значит, и приращение фазового сдвига $\delta^{V_{\ell 1}}_\ell(\chi')$ также обладает этим свойством, так что

$$\delta^{V_{\ell 1}}_\ell(\chi') = O\left[|\chi'|^{-\gamma}\right]\,,\ |\chi'| \to \infty\,,\ \gamma > 1\,.$$

2. n-ый шаг итерации

Соотношения (4.130) и (4.131) обеспечивают продолжение итерационного процесса. Поэтому на произвольном n-ом шаге итерации мы будем искать решение $\psi_\ell^{(n)}(\rho\,,\,\chi')$ уравнения (4.5) с взаимодействием равным суперпозиции $W(\rho)$ и $\sum\limits_{m=1}^{n} \varepsilon_{\ell m}\, V_{\ell m}(\rho)\, V_{\ell m}(\rho')(n = 1, 2, ..., M_\ell)$, удовлетворяющее граничному условию вида (4.8). При этом мы будем использовать свойства ортогональности и полноты для решения $\psi_\ell^{(n-1)}(\rho\,,\,\chi')$, полученного на $(n-1)$-ом шаге итерации. Эти свойства имеют следующий вид $(n = 1, 2, ..., M_\ell)$:

$$
\begin{gathered}
\int\limits_0^\infty d\rho\, \psi_\ell^{(n-1)}(\rho\,,\chi)\, \psi_\ell^{(n-1)^*}(\rho\,,\,\chi') = \\
= \begin{cases}
\delta\,(E-E')\,[d\rho_\ell^{(n-1)}(E)/dE]^{-1}\,,\ E = \operatorname{ch}\chi \geq 1\,, \\
E' = \operatorname{ch}\chi' \geq 1\,; \\
\left[C_{\ell j}^{(n-1)}\right]^{-1}\, \delta_{jj'}\,,\ 0 \leq E_{tj}^{(n-1)} = \operatorname{ch}\chi_{tj}^{(n-1)} < 1\,, \\
0 \leq E_{tj'}^{(n-1)} = \operatorname{ch}\chi_{tj'}^{(n-1)} < 1\,,\ \chi = \chi_{tj}^{(n-1)} = i\,\kappa_{tj}^{(n-1)}\,, \\
\chi' = \chi_{tj'}^{(n-1)} = i\,\kappa_{tj'}^{(n-1)}\,,\ 0 < \kappa_{tj}^{(n-1)}\,,\ \kappa_{tj'}^{(n-1)} \leq \pi/2\,, \\
j,\ j' = 1, 2, ..., \sigma_\ell^{(n-1)}\,; \\
0\,,\ E = \operatorname{ch}\chi \geq 1\,,\ 0 \leq E_{tj'}^{(n-1)} = \operatorname{ch}\chi_{tj'}^{(n-1)} < 1\,, \\
\chi' = \chi_{tj'}^{(n-1)} = i\,\kappa_{tj'}^{(n-1)}\,,\ 0 < \kappa_{tj'}^{(n-1)} \leq \pi/2\,,
\end{cases}
\end{gathered}
\tag{4.140}
$$

$$
\begin{gathered}
\int\limits_0^\infty d\rho_\ell^{(n-1)}(E)\, \psi_\ell^{(n-1)}(\rho\,,\,\chi)\, \psi_\ell^{(n-1)^*}(\rho'\,,\,\chi) = \\
= \sum_{j=1}^{\sigma_\ell^{(n-1)}} C_{\ell j}^{(n-1)}\, \psi_\ell^{(n-1)}(\rho\,,\,\chi_{tj}^{(n-1)})\, \psi_\ell^{(n-1)^*}(\rho'\,,\,\chi_{tj}^{(n-1)}) + \\
+ \int\limits_0^\infty d\chi\, \tau_\ell^{(n-1)}(\chi)\, \psi_\ell^{(n-1)}(\rho\,,\,\chi)\, \psi_\ell^{(n-1)^*}(\rho'\,,\,\chi) = \delta\,(\rho'-\rho)\,.
\end{gathered}
\tag{4.141}
$$

Спектральная плотность и нормировочные константы на $(n-1)$-ом шаге итерации даются выражениями

$$\frac{d\rho_\ell^{(n-1)}(E)}{dE} = \begin{cases} \mathrm{sh}^{-1}\chi\, \tau_\ell^{(n-1)}(\chi)\,,\ E = \mathrm{ch}\chi \ge 1\,; \\ \sum\limits_{j=1}^{\sigma_\ell^{(n-1)}} C_{\ell j}^{(n-1)}\, \delta\,(E - E_{tj}^{(n-1)})\,,\ 0 \le E = \mathrm{ch}\,\chi < 1\,, \\ 0 \le E_{tj}^{(n-1)} = \mathrm{ch}\,\chi_{tj}^{(n-1)} < 1\,,\ \chi = i\kappa\,, \\ \chi_{tj}^{(n-1)} = i\,\kappa_{tj}^{(n-1)}\,, 0 < \kappa\,,\ \kappa_{tj}^{(n-1)} \le \pi/2\,, \end{cases} \tag{4.142}$$

$$\begin{aligned} \left[C_{\ell j}^{(n-1)}\right]^{-1} &= \int\limits_0^\infty d\rho\,\left|\psi_\ell^{(n-1)}(\rho\,,\,\chi_{tj}^{(n-1)})\right|^2 = \\ &= -\frac{F_\ell^{(n-1)}(-\chi_{tj}^{(n-1)})\,\dot F_\ell^{(n-1)}(\chi_{tj}^{(n-1)})}{4\,i\,Q_\ell^2(\mathrm{cth}\,\chi_{tj}^{(n-1)})}\,, \end{aligned} \tag{4.143}$$

где

$$\tau_\ell^{(n-1)}(\chi) = \tau_\ell^{(0)}(\chi)\,\prod_{m=1}^{n-1}\cos^2\delta_\ell^{V_{\ell m}}(\chi)\,,$$

$$\dot F_\ell^{(n-1)}(\chi_{tj}^{(n-1)}) = dF_\ell^{(n-1)}(\chi_{tj}^{(n-1)})/d\chi_{tj}^{(n-1)}\,,$$

$$j = 1, 2, ..., \sigma_\ell^{(n-1)}\,,\ n = 1, 2, ..., M_\ell\,.$$

Здесь $\delta_\ell^{V_{\ell m}}(\chi)$ есть приращение фазового сдвига, обусловленное компонентой $\varepsilon_{\ell m}\,V_{\ell m}(\rho)\,V_{\ell m}(\rho')$ сепарабельного взаимодействия, причем функция Йоста $F_\ell^{(n)}(\chi)$, отвечающая n-ому шагу итерации, связана с соответствующим ей полным фазовым сдвигом $\delta_\ell^{(n)}(\chi)$ соотношениями

$$\begin{aligned} F_\ell^{(n)}(\chi) &= \left|F_\ell^{(n)}(\chi)\right|\,\exp\left[-i\,\delta_\ell^{(n)}(\chi)\right]\,, \\ \left|F_\ell^{(n)}(\chi)\right| &= \left|F_\ell^{W}(\chi)\right|\,\prod_{m=1}^{n}\cos^{-1}\delta_\ell^{V_{\ell m}}(\chi)\,, \end{aligned} \tag{4.144}$$

$$\delta_\ell^{(n)}(\chi) = \delta_\ell^{W}(\chi) + \sum_{m=1}^{n}\delta_\ell^{V_{\ell m}}(\chi)\,,\ n = 1, 2, ..., M_\ell\,. \tag{4.145}$$

Тем самым мы можем, опираясь на соотношения (4.140)–(4.143), ввести релятивистские интегральные преобразования

$$\begin{aligned} \tilde\psi_\ell^{(n)}(\chi'\,,\,\chi) &= \int\limits_0^\infty d\rho\,\psi_\ell^{(n)}(\rho\,,\,\chi')\,\psi_\ell^{(n-1)^*}(\rho\,,\,\chi)\,, \\ \tilde V_{\ell n}^{(n-1)}(\chi) &= \int\limits_0^\infty d\rho\,V_{\ell n}(\rho)\,\psi_\ell^{(n-1)^*}(\rho\,,\,\chi)\,, \end{aligned} \tag{4.146}$$

$$\psi_\ell^{(n)}(\rho\,,\,\chi') = \int\limits_0^\infty d\rho_\ell^{(n-1)}(E)\,\tilde{\psi}_\ell^{(n)}(\chi'\,,\,\chi)\,\psi_\ell^{(n-1)}(\rho\,,\,\chi)\,,$$
$$V_{\ell n}(\rho) = \int\limits_0^\infty d\rho_\ell^{(n-1)}(E)\,\tilde{V}_{\ell n}^{(n-1)}(\chi)\,\psi_\ell^{(n-1)}(\rho\,,\,\chi)\,. \tag{4.147}$$

Тогда, применяя преобразования (4.147) к уравнению (4.5) с таким взаимодействием, мы получим:

$$(\mathrm{ch}\,\chi' - \mathrm{ch}\,\chi_{tj}^{(n-1)})\,\tilde{\psi}_\ell^{(n)}(\chi'\,,\,\chi_{tj}^{(n-1)}) = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{\ell n}\,N_{\ell n}(\chi')\,\tilde{V}_{\ell n}^{(n-1)}(\chi_{tj}^{(n-1)})\,,$$
$$j = 1, 2, ..., \sigma_\ell^{(n-1)}\,, \tag{4.148}$$

$$(\mathrm{ch}\,\chi' - \mathrm{ch}\,\chi)\,\tilde{\psi}_\ell^{(n)}(\chi'\,,\,\chi) = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{\ell n} N_{\ell n}(\chi')\,\tilde{V}_{\ell n}^{(n-1)}(\chi)\,, \tag{4.149}$$

$$N_{\ell n}(\chi') = \int\limits_0^\infty d\rho'\,V_{\ell n}(\rho')\,\psi_\ell^{(n)}(\rho'\,,\,\chi') =$$
$$= \int\limits_0^\infty d\rho_\ell^{(n-1)}(E)\,\tilde{\psi}_\ell^{(n)}(\chi'\,,\,\chi)\,\tilde{V}_{\ell n}^{(n-1)^*}(\chi)\,,\; n = 1, 2, ..., M_\ell\,. \tag{4.150}$$

Теперь заметим, что в силу условий (4.120) имеет место асимптотика

$$\psi_\ell^{(n)}(\rho\,,\,\chi') = \frac{|F_\ell^{(n)}(\chi')|}{Q_\ell(\mathrm{cth}\,\chi')}\,\sin\left[\rho\,\chi' - \frac{\pi\,\ell}{2} + \delta_\ell^{(n)}(\chi')\right] + O\left(e^{-\pi\,\rho/4}\right)\,,$$
$$n = 1, 2, ..., M_\ell\,,\; \rho\,\chi' \to \infty\,. \tag{4.151}$$

Кроме того, функция $\tilde{V}_{\ell n}^{(n-1)}(\chi)$ всюду непрерывна, а функция $Q_\ell(\mathrm{cth}\,\chi)\,\times$ $\times\; |F_\ell^{(n-1)}(\chi)|^{-1}\,\tilde{V}_{\ell n}^{(n-1)}(\chi)$ дифференцируема при всех $\chi \geq 0$. Более того, из (4.146) для функции $\tilde{V}_{\ell n}^{(n-1)}(\chi)$ следуют оценки

$$Q_\ell(\mathrm{cth}\,\chi)\,|F_\ell^{(n-1)}(\chi)|^{-1}\,\tilde{V}_{\ell n}^{(n-1)}(\chi) = O(1)\,,\; |\chi| \to \infty\,,$$
$$\tilde{V}_{\ell n}^{(n-1)}(\chi) = O(1)\,,\; \chi \to 0\,,\; n = 1, 2, ..., M_\ell\,, \tag{4.152}$$

если только условия в (4.120) выполнены, т.е. как это имеет место и в случае одного сепарабельного члена.

Для состояний рассеяния ($E' = \operatorname{ch}\chi' \geq 1$) решения уравнений (4.148) и (4.149) имеют вид

$$\tilde{\psi}_\ell^{(n)}(\chi', \chi_{tj}^{(n-1)}) = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{\ell n}\,N_{\ell n}(\chi')\,\frac{\tilde{V}_{\ell n}^{(n-1)}(\chi_{tj}^{(n-1)})}{\operatorname{ch}\chi' - \operatorname{ch}\chi_{tj}^{(n-1)}}\,, \qquad j = 1, 2, ..., \sigma_\ell^{(n-1)}\,, \tag{4.153}$$

$$\tilde{\psi}_\ell^{(n)}(\chi', \chi) = \frac{\delta(\operatorname{ch}\chi - \operatorname{ch}\chi')}{d\rho_\ell^{(n-1)}(\operatorname{ch}\chi)/d(\operatorname{ch}\chi)} + \frac{1}{2}\,\varepsilon_{\ell n}\,N_{\ell n}(\chi')\;\mathrm{P}\,\frac{\tilde{V}_{\ell n}^{(n-1)}(\chi)}{\operatorname{ch}\chi' - \operatorname{ch}\chi}\,, \quad n = 1, 2, ..., M_\ell\,. \tag{4.154}$$

Отметим, что множитель при δ-функции мы, как и на первом шаге итерации, выбрали в соответствии с нормировкой волновой функции: на n-ом шаге итерации при $\varepsilon_{\ell n} \equiv 0$ представление (4.147) для $\psi_\ell^{(n)}(\rho, \chi')$ должно приводить к регулярному решению $\psi_\ell^{(n-1)}(\rho, \chi')$ ($n = 1, 2, ..., M_\ell$).

Подстановка решений (4.153) и (4.154) в представление (4.147) для функции $\psi_\ell^{(n)}(\rho, \chi')$ и в выражение (4.150) дает:

$$\psi_\ell^{(n)}(\rho, \chi') = \psi_\ell^{(n-1)}(\rho, \chi') + \frac{1}{2}\,\varepsilon_{\ell n}\,N_{\ell n}(\chi')\sum_{j=1}^{\sigma_\ell^{(n-1)}} C_{\ell j}^{(n-1)}\,\frac{\tilde{V}_{\ell n}^{(n-1)}(\chi_{tj}^{(n-1)})\,\psi_\ell^{(n-1)}(\rho, \chi_{tj}^{(n-1)})}{\operatorname{ch}\chi' - \operatorname{ch}\chi_{tj}^{(n-1)}} + \frac{1}{2}\,\varepsilon_{\ell n}\,N_{\ell n}(\chi')\;\mathrm{P}\int_0^\infty d\chi\,\frac{\tau_\ell^{(n-1)}(\chi)\,\tilde{V}_{\ell n}^{(n-1)}(\chi)\,\psi_\ell^{(n-1)}(\rho, \chi)}{\operatorname{ch}\chi' - \operatorname{ch}\chi}\,, \tag{4.155}$$

$$N_{\ell n}(\chi') = \varepsilon_{\ell n}\,\tilde{V}_{\ell n}^{(n-1)^*}(\chi')/\Phi_{\ell n}(\operatorname{ch}\chi')\,, \tag{4.156}$$

где

$$\Phi_{\ell n}(\operatorname{ch}\chi') = \varepsilon_{\ell n} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\sigma_\ell^{(n-1)}} C_{\ell j}^{(n-1)}\,\frac{\left|\tilde{V}_{\ell n}^{(n-1)}(\chi_{tj}^{(n-1)})\right|^2}{\operatorname{ch}\chi' - \operatorname{ch}\chi_{tj}^{(n-1)}} - \frac{1}{2}\;\mathrm{P}\int_0^\infty d\chi\,\frac{|A_{\ell n}(\chi)|}{\operatorname{ch}\chi' - \operatorname{ch}\chi}\,, \tag{4.157}$$

$$A_{\ell n}(\chi) = \varepsilon_{\ell n}\, \tau_\ell^{(n-1)}(\chi) \left|\tilde V_{\ell n}^{(n-1)}(\chi)\right|^2 ,\ n = 1, 2, ..., M_\ell\,. \tag{4.158}$$

При этом главные значения интегралов в (4.155) и (4.157) существуют, поскольку функция $\tilde V_{\ell n}^{(n-1)}(\chi)$, а, значит, и функция $A_{\ell n}(\chi)$, дифференцируемы, а в силу условий (4.152) они также сходятся и на обоих пределах. Тогда из теорем о преобразованиях Гильберта непрерывных по Гельдеру функций следует, что преобразование Гильберта функции $A_{\ell n}(\chi)$ также является непрерывной по Гельдеру функцией с некоторым положительным индексом. Значит, и приращение фазового сдвига $\delta_\ell^{V_{\ell n}}(\chi')$ также обладает этим свойством, так что

$$\delta_\ell^{V_{\ell n}}(\chi') = O\left(|\chi'|^{-\gamma}\right) ,\ |\chi'| \to \infty\,,\ \gamma > 1\,,\ n = 1, 2, ..., M_\ell\,. \tag{4.159}$$

Далее, используя асимптотику (4.151) для $\psi_\ell^{(n-1)}(\rho\,, \chi')$ и четность подынтегральной функции в выражении (4.155), представим его в виде ($\rho \to \infty$)

$$\begin{aligned}\psi_\ell^{(n)}(\rho\,, \chi') = {}& \frac{\left|F_\ell^{(n-1)}(\chi')\right|}{Q_\ell(\operatorname{cth}\chi')} \sin\left[\rho\,\chi' - \frac{\pi\,\ell}{2} + \delta_\ell^{(n-1)}(\chi')\right] + \\ &+ \frac{1}{2}\,\varepsilon_{\ell n}\, N_{\ell n}(\chi') \sum_{j=1}^{\sigma_\ell^{(n-1)}} C_{\ell j}^{(n-1)}\, \frac{\tilde V_{\ell n}^{(n-1)}(\chi_{tj}^{(n-1)})\, \psi_\ell^{(n-1)}(\rho\,, \chi_{tj}^{(n-1)})}{\operatorname{ch}\chi' - \operatorname{ch}\chi_{tj}^{(n-1)}} + \\ &+ \varepsilon_{\ell n}\, N_{\ell n}(\chi')\ \mathrm{P}\frac{1}{2\,\pi\, i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\chi\, \frac{Q_\ell(\operatorname{cth}\chi)\, \tilde V_{\ell n}^{(n-1)}(\chi)\ e^{i\,(\rho\,\chi - \pi\,\ell/2)}}{F_\ell^{(n-1)}(\chi)(\operatorname{ch}\chi' - \operatorname{ch}\chi)} + \\ &+ O\left(e^{-\pi\,\rho/4}\right)\,.\end{aligned} \tag{4.160}$$

Интеграл в последнем выражении легко вычисляется применением формулы (4.26) и основной теоремы вычетов при интегрировании по границе полосы $0 \le \mathrm{Im}\chi \le \pi/2$ при $\rho \to \infty$:

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}\,\frac{1}{2\,\pi\, i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\chi\, \frac{Q_\ell(\operatorname{cth}\chi)\, \tilde V_{\ell n}^{(n-1)}(\chi)\ \exp\left[i\,(\rho\,\chi - \pi\,\ell/2)\right]}{F_\ell^{(n-1)}(\chi)\,(\operatorname{ch}\chi' - \operatorname{ch}\chi)} = \\ &= -\,\frac{Q_\ell(\operatorname{cth}\chi')\, \tilde V_{\ell n}^{(n-1)}(\chi')}{\left|F_\ell^{(n-1)}(\chi')\right|\,\operatorname{sh}\chi'}\ \cos\left[\rho\,\chi' - \frac{\pi\,\ell}{2} + \delta_\ell^{(n-1)}(\chi')\right] + \\ &+ \sum_{j=1}^{\sigma_\ell^{(n-1)}} \frac{Q_\ell(\operatorname{cth}\chi_{tj}^{(n-1)})\, \tilde V_{\ell n}^{(n-1)}(\chi_{tj}^{(n-1)})\ \exp\left[i\,(\rho\,\chi_{tj}^{(n-1)} - \pi\,\ell/2)\right]}{\dot F_\ell^{(n-1)}(\chi_{tj}^{(n-1)})\,(\operatorname{ch}\chi' - \operatorname{ch}\chi_{tj}^{(n-1)})} + O\left(e^{-\pi\,\rho/4}\right)\,.\end{aligned}$$

Тогда, учитывая последний результат и соотношение (4.143), а так же принимая во внимание поведение функции $\psi_\ell^{(n-1)}(\rho\,,\,\chi_{tj}^{(n-1)})$, находим, что асимптотика в (4.160) дается выражением

$$\psi_\ell^{(n)}(\rho\,,\,\chi') = \frac{\left|F_\ell^{(n-1)}(\chi')\right|}{Q_\ell(\operatorname{cth}\chi')}\,\sin\left[\rho\,\chi' - \frac{\pi\,\ell}{2} + \delta_\ell^{(n-1)}(\chi')\right] -$$
$$- \frac{\varepsilon_{\ell n}\,N_{\ell n}(\chi')\,Q_\ell(\operatorname{cth}\chi')\,\tilde V_{\ell n}^{(n-1)}(\chi')}{\left|F_\ell^{(n-1)}(\chi')\right|\,\operatorname{sh}\chi'}\,\cos\left[\rho\,\chi' - \frac{\pi\,\ell}{2} + \delta_\ell^{(n-1)}(\chi')\right] + \tag{4.161}$$
$$+O\left(e^{-\pi\,\rho/4}\right)\,,\; n = 1, 2, ..., M_\ell\,,\;\; \rho\,\chi' \to \infty\,.$$

Здесь мы имели ввиду, что значениям $\chi_{tj}^{(n-1)}$ $(j = 1, 2, ..., \sigma_\ell^{(n-1)})$ соответствуют истинные связанные состояния с энергиями $E_{tj}^{(n-1)} = \operatorname{ch}\chi_{tj}^{(n-1)}$, $\chi_{tj}^{(n-1)} = i\,\kappa_{tj}^{(n-1)}$, $0 < \kappa_{tj}^{(n-1)} \le \pi/2$, а, значит, $F_\ell^{(n-1)}(\chi_{tj}^{(n-1)}) = 0$. Следовательно, при $\rho \to \infty$ получим:

$$\psi_\ell^{(n-1)}(\rho\,,\,\chi_{tj}^{(n-1)}) \approx \frac{F_\ell^{(n-1)}(-\chi_{tj}^{(n-1)})\,\exp[i\,(\rho\,\chi_{tj}^{(n-1)} - \pi\,\ell/2)]}{2\,i\,Q_\ell(\operatorname{cth}\chi_{tj}^{(n-1)})}\,, \tag{4.162}$$
$$j = 1, 2, ..., \sigma_\ell^{(n-1)}\,,\;\; n = 1, 2, ..., M_\ell\,.$$

Это приводит к сокращению вкладов в асимптотику волновой функции $\psi_\ell^{(n)}(\rho\,,\,\chi')$, обусловленных этими связанными состояниями.

Наконец, асимптотика (4.161) принимает вид (4.151), если учесть выражения (4.156), (4.158) и положить

$$\operatorname{tg}\delta_\ell^{V_{\ell n}}(\chi') = -(\pi/2)\,\varepsilon_{\ell n}\operatorname{sh}^{-1}\chi'\,A_{\ell n}(\chi')/\Phi_{\ell n}(\operatorname{ch}\chi')\,,\;\; n = 1, 2, ..., M_\ell\,. \tag{4.163}$$

4.5.3. Связанные состояния и обобщенная теорема Левинсона

Предположим, что существует хотя бы одно связанное состояние с энергией $E^{(n)} = \operatorname{ch}\chi^{(n)} \ge 0$ $(n = 1, 2, ..., M_\ell)$. Тогда решения уравнений (4.148) и (4.149) имеют вид

$$\tilde\psi_\ell^{(n)}\left(\chi^{(n)}\,,\,\chi_{tj}^{(n-1)}\right) = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{\ell n}\,N_{\ell n}\left(\chi^{(n)}\right)\,\frac{\tilde V_{\ell n}^{(n-1)}\left(\chi_{tj}^{(n-1)}\right)}{\operatorname{ch}\chi^{(n)} - \operatorname{ch}\chi_{tj}^{(n-1)}}\,, \tag{4.164}$$
$$j = 1, 2, ..., \sigma_\ell^{(n-1)}\,,$$

$$\tilde{\psi}_\ell^{(n)}\left(\chi^{(n)}\,,\,\chi\right) = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{\ell n}\,N_{\ell n}\left(\chi^{(n)}\right)\,\mathrm{P}\,\frac{\tilde{V}_{\ell n}^{(n-1)}\left(\chi\right)}{\operatorname{ch}\chi^{(n)} - \operatorname{ch}\chi}\,,\; n = 1, 2, ..., M_\ell\,. \tag{4.165}$$

Подстановка этих решений в соотношения (4.150) приводит к уравнениям на собственные значения

$$\begin{gathered}\Phi_{\ell n}\left(E^{(n)}\right) = \varepsilon_{\ell n} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\sigma_\ell^{(n-1)}} C_{\ell j}^{(n-1)}\,\frac{\left|\tilde{V}_{\ell n}^{(n-1)}(\chi_{tj}^{(n-1)})\right|^2}{E^{(n)} - E_{tj}^{(n-1)}} - \\ -\frac{1}{2}\,\mathrm{P}\int\limits_0^\infty d\chi\,\frac{\left|A_{\ell n}\left(\chi\right)\right|}{E^{(n)} - \operatorname{ch}\chi} = 0\,,\; n = 1, 2, ..., M_\ell\,,\end{gathered} \tag{4.166}$$

которые имеют решения при $\varepsilon_{\ell n} = \pm 1$. При этом значениям энергий

$$\begin{gathered}E_{fk}^{(n)} = \operatorname{ch}\chi_{fk}^{(n)} \geq 1\,, \\ k = \begin{cases} 0, 1, ..., \nu_\ell^{(n)} - 1\,,\; \varepsilon_{\ell n} = 1\,, \\ 1, 2, ..., \nu_\ell^{(n)}\,,\; \varepsilon_{\ell n} = -1\,,\; n = 1, 2, ..., M_\ell\,, \end{cases}\end{gathered} \tag{4.167}$$

обусловленных n-компонентным сепарабельным взаимодействием в каждой парциальной волне, отвечают “поддельные” связанные состояния. В то же время значениям энергий

$$\begin{gathered}0 \leq E_{tj}^{(n)} = \operatorname{ch}\chi_{tj}^{(n)} < 1\,,\; \chi_{tj}^{(n)} = i\,\kappa_{tj}^{(n)}\,,\; 0 < \kappa_{tj}^{(n)} \leq \pi/2\,, \\ j = 1, 2, ..., \sigma_\ell^{(n)}\,,\; n = 1, 2, ..., M_\ell\,,\end{gathered} \tag{4.168}$$

обусловленных полным взаимодействием, соответствуют истинные связанные состояния.

“Поддельные” связанные состояния

Для “поддельных” связанных состояний с энергиями (4.167), значения которых $E_{fk}^{(n)}$ определяются как корни уравнений (4.166), асимптотика волновой функции на каждом шаге итерации дается выражением (4.161) с опущенным первым членом, т.е.

$$\begin{gathered}\psi_\ell^{(n)}(\rho\,,\,\chi_{fk}^{(n)}) = \\ = -\frac{\varepsilon_{\ell n}\,N_{\ell n}(\chi_{fk}^{(n)})\,Q_\ell(\operatorname{cth}\chi_{fk}^{(n)})\,\tilde{V}_{\ell n}^{(n-1)}(\chi_{fk}^{(n)})}{\left|F_\ell^{(n-1)}(\chi_{fk}^{(n)})\right|\,\operatorname{sh}\chi_{fk}^{(n)}}\,\cos\left[\rho\,\chi_{fk}^{(n)} - \frac{\pi\,\ell}{2} + \delta_\ell^{(n-1)}(\chi_{fk}^{(n)})\right] + \\ +O\left(e^{-\pi\,\rho/4}\right)\,,\; n = 1, 2, ..., M_\ell\,,\; \rho \to \infty\,.\end{gathered}$$

Отсюда следует, что волновая функция $\psi_\ell^{(n)}(\rho\,,\,\chi_{fk}^{(n)})$ асимптотически стремится к нулю, если только

$$\tilde{V}_{\ell n}^{(n-1)}\left(\chi_{fk}^{(n)}\right)=0\,,$$

$$k=\begin{cases}0,1,...,\nu_\ell^{(n)}-1\,,\ \varepsilon_{\ell n}=1\,,\\[2ex] 1,2,...,\nu_\ell^{(n)}\,,\ \varepsilon_{\ell n}=-1\,,\ n=1,2,...,M_\ell\,.\end{cases} \tag{4.169}$$

При этом граничные условия вида (4.8) также выполняются. Следовательно, энергиям (4.167) отвечают “поддельные” связанные состояния, обусловленные n-компонентным сепарабельным взаимодействием, и даются общими корнями уравнений (4.166) и (4.169). Более того, при таких значениях энергий в силу условий (4.166) и (4.169) равны нулю как числитель, так и знаменатель в правой части равенств (4.163). Однако из определений (4.158) следует, что функции $A_{\ell n}\,(\chi')$ имеют в точках $\chi_{fk}^{(n)}$, по крайней мере, нуль второго порядка. В то же время знаменатель в (4.163) имеет в этих точках только простой нуль, поскольку

$$\left.\frac{d\Phi_{\ell n}\,(\mathrm{ch}\,\chi')}{d\chi'}\right|_{\chi'=\ \chi_{fk}^{(n)}}=\ \frac{\mathrm{sh}\,\chi_{fk}^{(n)}}{2}\left[\sum_{j=1}^{\sigma_\ell^{(n-1)}}C_{\ell j}^{(n-1)}\,\frac{\left|\tilde{V}_{\ell n}^{(n-1)}(\chi_{tj}^{(n-1)})\right|^2}{\left(\mathrm{ch}\,\chi_{fk}^{(n)}-\mathrm{ch}\,\chi_{tj}^{(n-1)}\right)^2}+\right.$$
$$\left.+\ \mathrm{P}\int_0^\infty d\chi\,\frac{|A_{\ell n}\,(\chi)|}{\left(\mathrm{ch}\,\chi_{fk}^{(n)}-\mathrm{ch}\,\chi\right)^2}\right]>0\,.$$

Это означает, что приращения $\delta_\ell^{V_{\ell n}}\,(\chi')$ фазы рассеяния проходят при возрастании χ' через значения $\pi\,k$, убывая, т.е.

$$\delta_\ell^{V_{\ell n}}\left(\chi_{fk}^{(n)}\right)=\pi\,k\,,\ k=\begin{cases}0,1,...,\nu_\ell^{(n)}-1\,,\ \varepsilon_{\ell n}=1\,,\\[2ex] 1,2,...,\nu_\ell^{(n)}\,,\ \varepsilon_{\ell n}=-1\,,\end{cases}$$
$$\left.\frac{d\delta_\ell^{V_{\ell n}}\,(\chi')}{d\chi'}\right|_{\chi'=\chi_{fk}^{(n)}}<0\,,\ n=1,2,...,M_\ell\,. \tag{4.170}$$

Если же знаменатель в (4.163) не обращается в нуль при $\chi'=\chi_{fk}^{(n)}$, то приращения фазового сдвига будут только касаться прямых $\delta_\ell^{V_{\ell n}}=\pi\,k$ (k – целое) сверху или снизу, но не пересекать их. Кроме того, в силу оценки (4.152) из выражений (4.163) легко находим, что

$$\operatorname{tg} \delta_\ell^{V_{\ell n}}(\infty) = 0\,.$$

Следовательно, мы можем, как обычно [85], [86], выбрать

$$\delta_\ell^{V_{\ell n}}(\infty) = 0\,,\ n = 1, 2, ..., M_\ell\,. \tag{4.171}$$

Отметим, что исследуя поведение приращений $\delta_\ell^{V_{\ell n}}(\chi')$ при возрастании χ', мы можем определить как значения энергий $E_{fk}^{(n)}$, так и знак величин $\varepsilon_{\ell n}$. При этом их знак обратен знаку приращений $\delta_\ell^{V_{\ell n}}(\chi')$ фазового сдвига при высоких энергиях ($\chi' \to +\infty$).

Истинные связанные состояния

Теперь рассмотрим условия существования истинных связанных состояний с энергиями (4.168), значения которых $E_{tj}^{(n)}$ находятся как корни уравнений (4.166). Тогда граничные условия вида (4.8) выполняются, а асимптотика волновой функции стремится к нулю при $\rho \to \infty$. Действительно, асимптотика волновой функции на каждом шаге итерации имеет вид

$$\psi_\ell^{(n)}(\rho\,, \chi_{tj}^{(n)}) = O(\exp[-\rho\, \min(\kappa_{tj}^{(n)}\,, \pi/4)])\,,\ 0 < \kappa_{tj}^{(n)} \le \pi/2\,,$$

$$j = 1, 2, ..., \sigma_\ell^{(n)}\,,\ n = 1, 2, ..., M_\ell\,,\ \rho \to \infty\,.$$

Эта асимптотика может быть легко найдена путем подстановки решений (4.164) и (4.165) в представление (4.147) для $\psi_\ell^{(n)}(\rho\,, \chi')$, использования выражения (4.143), асимптотики (4.151) для $\psi_\ell^{(n-1)}(\rho\,, \chi')$ и последующей интеграции с помощью основной теоремы вычетов по границе полосы $0 \le \mathrm{Im}\chi \le \pi/2$. Кроме того, мы приняли во внимание поведение функции $\psi_\ell^{(n-1)}(\rho\,, \chi_{tj}^{(n-1)})$, отмеченное в (4.162). При этом число $\sigma_\ell^{(n)}$ истинных связанных состояний, как и для однокомпонентного сепарабельного взаимодействия [85], определяется значениями величин $\varepsilon_{\ell n}$ и $\Phi_{\ell n}(1)$. Тем самым возможны два случая.

1) Если $\varepsilon_{\ell n} = 1$, то $\Phi_{\ell n}(0) > 1$. Это соответствует выбору верхней полы ($E_{q'} \ge 0$) массового гиперболоида $E_{q'}^2 - \boldsymbol{q}'^2 = m'^2$. При этом, если $\Phi_{\ell n}(1) > 0$, то уравнение (4.166) имеет $\sigma_\ell^{(n)} = \sigma_\ell^{(n-1)}$ корней

$E_{tj}^{(n)}$, что отвечает слабой нелокальности n-ой компоненты сепарабельного взаимодействия. Если же $\Phi_{\ell n}(1) < 0$, то уравнение (4.166) будет иметь $\sigma_\ell^{(n)} = \sigma_\ell^{(n-1)} - 1$ корней $E_{tj}^{(n)}$, что соответствует сильной нелокальности. Кроме того, значения $E_{tj}^{(n)}$ больше соответствующих значений $E_{tj}^{(n-1)}$ $(j = 1, 2, ..., \sigma_\ell^{(n-1)}\,,\ n = 1, 2, ..., M_\ell)$. Тем самым n-ая компонента сепарабельного взаимодействия является отталкивающей и в зависимости от его величины может устранить одно связанное состояние, причем значение $\Phi_{\ell n}(1)$ отвечает за величину его нелокальности.

2) Если $\varepsilon_{\ell n} = -1$, то уравнение (4.166) теперь имеет решения при условии $\Phi_{\ell n}(0) \leq 0$. При этом, если $\Phi_{\ell n}(1) < 0$, то n-ая компонента сепарабельного взаимодействия обладает слабой нелокальностью притягивающего типа. Тем самым $\sigma_\ell^{(n)} = \sigma_\ell^{(n-1)}$, однако в этом случае $E_{tj}^{(n)} < E_{tj}^{(n-1)}$. Если же $\Phi_{\ell n}(1) > 0$, то теперь n-ая компонента сепарабельного взаимодействия обладает сильной нелокальностью притягивающего типа. Это ведет не только к уменьшению значений энергий связанных состояний $E_{tj}^{(n)}$, но и, будучи сильным, способно привести к образованию еще одного связанного состояния $(\sigma_\ell^{(n)} = \sigma_\ell^{(n-1)} + 1)$ с энергией $E_{t(\sigma_\ell^{(n-1)}+1)}^{(n)} > E_{tj}^{(n-1)} > E_{tj}^{(n)}$ $(j = 1, 2, ..., \sigma_\ell^{(n-1)}\,,\ n = 1, 2, ..., M_\ell)$. Следовательно, эффективную частицу массы m' в этом случае можно считать "квазилокальной", а значение $\Phi_{\ell n}(1)$ по-прежнему будет отвечать за величину нелокальности.

До сих пор мы предполагали, что имеют место условия:

$$\tilde{V}_{\ell n}^{(n-1)}(\chi_{tj}^{(n-1)}) \neq 0\,,\ \tilde{V}_{\ell n}^{(n-1)}(\chi) \neq 0\,,\ j = 1, 2, ..., \sigma_\ell^{(n-1)}\,,\ n = 1, 2, ..., M_\ell\,.$$

Допустим, что теперь одно из $\left\{\tilde{V}_{\ell n}^{(n-1)}(\chi_{tj}^{(n-1)})\right\}$ равно нулю, например, $\tilde{V}_{\ell n}^{(n-1)}(\chi_{tk}^{(n-1)})$. Тогда функция $\Phi_{\ell n}(E)$ является непрерывной при $E = E_{tk}^{(n-1)}$, а, следовательно, значение $E_{tk}^{(n)}$ будет отсутствовать. Кроме того, собственное значение $E_{tk}^{(n)}$ в этом случае замещается значением $E_{tk}^{(n-1)}$, а собственная волновая функция $\psi_\ell^{(n)}(\rho\,,\,\chi_{tk}^{(n)})$ будет совпадать с волновой функцией $\psi_\ell^{(n-1)}(\rho\,,\,\chi_{tk}^{(n-1)})$. Тем самым компонента $V_{\ell n}(\rho)$ ортогональна волновой функции $\psi_\ell^{(n-1)}(\rho\,,\,\chi_{tk}^{(n-1)})$. Следовательно, суперпозиция n-ой компоненты сепарабельного взаимодействия $\varepsilon_{\ell n}\, V_{\ell n}(\rho)\, V_{\ell n}(\rho')$

и суммы $W(\rho)+\sum\limits_{m=1}^{n-1}\varepsilon_{\ell m}\,V_{\ell m}(\rho)\,V_{\ell m}(\rho')$ не изменяет волновой функции $\psi_\ell^{(n-1)}(\rho\,,\,\chi_{tk}^{(n-1)})$ и ее собственного значения энергии $E_{tk}^{(n-1)}$. Более того, по этой же причине собственное значение энергии $E_{t(k+1)}^{(n)}$ будет равно значению $E_{tk}^{(n-1)}$. Это означает, что при энергии $E_{tk}^{(n-1)}$ имеет место вырождение. Поэтому волновую функцию $\psi_\ell^{(n)}(\rho\,,\,\chi_{t(k+1)}^{(n)})$ мы можем выбрать ортогональной волновой функции $\psi_\ell^{(n-1)}(\rho\,,\,\chi_{tk}^{(n-1)})$, полагая

$$\tilde{\psi}_\ell^{(n)}(\chi_{t(k+1)}^{(n)}\,,\,\chi_{tk}^{(n-1)})\equiv 0\,.$$

Случаи, когда несколько значений из $\left\{\tilde{V}_{\ell n}^{(n-1)}(\chi_{tj}^{(n-1)})\right\}$ равны нулю, исследуются аналогично, причем степень вырождения для каждого значения $E_{tj}^{(n-1)}$ не может быть больше двух. Более того, хотя бы одно из $\left\{\tilde{V}_{\ell n}^{(n-1)}(\chi_{tj}^{(n-1)})\right\}$ не равно нулю, так как

$$\frac{d\,\Phi_{\ell n}(E)}{d\,E}>0\quad\text{при}\quad 0\le E\le 1\,,\;E\ne E_{tj}^{(n-1)}\,.$$

Однако это обстоятельство не будет иметь места при $\sigma_\ell^{(n-1)}=1$ и $\varepsilon_{\ell n}=$ $=-1$. В этом случае $\tilde{V}_{\ell n}^{(n-1)}(\chi_{t1}^{(n-1)})=0$ $(j=1)$, а уравнение (4.166) принимает вид

$$\Phi_{\ell n}(E^{(n)})=-1-\frac{1}{2}\,\mathrm{P}\int\limits_0^\infty d\chi\,\frac{|A_{\ell n}(\chi)|}{E^{(n)}-\operatorname{ch}\chi}=0\,,\;\;n=1,2,...,M_\ell\,,$$

причем это уравнение имеет единственный корень $E^{(n)}=E_{t1}^{(n)}=\operatorname{ch}\chi_{t1}^{(n-1)}$, если

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty d\chi\prod_{m=1}^{n-1}\cos^2\delta_\ell^{V_{\ell m}}(\chi)\,\left|\frac{\tilde{V}_{\ell n}^{(n-1)}(\chi)}{F_\ell^W(\chi)}\right|^2>1\,,\;\;n=1,2,...,M_\ell\,.$$

Последнее условие вызвано тем (см. формулы (4.41) и (4.42) в разделе 4.3.4), что для любых $\ell\,,\;\chi\ge 0$ функция $q_\ell(\chi)$ является ограниченной:

$$q_\ell(\chi)=\frac{1}{2}\,\frac{Q_\ell^2(\operatorname{cth}\chi)}{\operatorname{ch}\chi-E_{t1}^{(n)}}\le\max q_\ell(\chi)\approx$$
$$\approx\frac{\pi\,(\operatorname{th}\chi_{\max})^{2\,\ell}}{4^{\ell+1}\operatorname{ch}\chi_{\max}}\,\left[1-\frac{\ell+1}{2\,\ell+3}\operatorname{th}^2\chi_{\max}\right]<1\,.$$

Наконец, пусть теперь $\tilde{V}_{\ell n}^{(n-1)}(\chi) \equiv 0$. Тогда из условия ортогональности (4.140) и представления (4.146) для $\tilde{V}_{\ell n}^{(n-1)}(\chi) \equiv 0$ следует, что

$$V_{\ell n}(\rho) = \sum_{j=1}^{\sigma_\ell^{(n-1)}} a_{\ell j}^{(n-1)}\, \psi_\ell^{(n-1)}(\rho\,,\, \chi_{tj}^{(n-1)})\,.$$

В этом случае уравнение (4.166) принимает вид

$$\Phi_{\ell n}\left(E^{(n)}\right) = \varepsilon_{\ell n} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\sigma_\ell^{(n-1)}} C_{\ell j}^{(n-1)}\, \frac{\left|\tilde{V}_{\ell n}^{(n-1)}(\chi_{tj}^{(n-1)})\right|^2}{E^{(n)} - E_{tj}^{(n-1)}} = 0\,, \quad n = 1, 2, ..., M_\ell\,.$$

Однако оно имеет не более чем $\sigma_\ell^{(n-1)}$ корней $E_{tj}^{(n)}$, так как $\Phi_{\ell n}(0) > \varepsilon_{\ell n}$, а $\Phi_{\ell n}(1) < \varepsilon_{\ell n}$. По этой же причине волновые функции связанных состояний $\psi_\ell^{(n)}(\rho\,,\, \chi_{tj}^{(n)})$ будут являться линейными комбинациями волновых функций $\psi_\ell^{(n-1)}(\rho\,,\, \chi_{tj}^{(n-1)})$, а волновая функция состояний рассеяния $\psi_\ell^{(n)}(\rho\,,\, \chi)$ будет совпадать с волновой функцией $\psi_\ell^{(n-1)}(\rho\,,\, \chi)$. В то же время энергии связанных состояний изменяются, причем из выражения (4.163) следует $\delta_\ell^{V_{\ell n}}(\chi) \equiv 0$.

Обобщенная теорема Левинсона

Суммируя полученные результаты, мы можем заключить, что функция Йоста $F_\ell^{(n)}(\chi)$, определяемая соотношением (4.144), является аналитической в полосе $0 \le \mathrm{Im}\chi \le \pi/2$, имеет там $\sigma_\ell^{(n)}$ простых нулей (4.168) ($\sigma_\ell^{(n)} = \sigma_\ell^{(n-1)} \pm 1$ или $\sigma_\ell^{(n-1)}$), причем $F_\ell^{(n)}(\chi_{tj}^{(n)}) = 0$ ($j = 1, 2, ..., \sigma_\ell^{(n)}\,,\ n = 1, 2, ..., M_\ell$), и не имеет там полюсов. Поэтому мы можем воспользоваться подходом, изложенным в разделах 4.3.5 и 4.4.4. Тогда, учитывая вклад в вариацию фазового сдвига $\delta_\ell^{(n)}(\chi)$, определяемого соотношением (4.145), от $\nu_\ell^{(n)}$ "поддельных" связанных состояний (свойство (4.170)) и его нечетность, а также принимая во внимание условие (4.171), приходим к обобщенной теореме Левинсона

$$\delta_\ell^{V_{\ell n}}(0) = \pi\,(\sigma_\ell^{(n)} - \sigma_\ell^{(n-1)} + \nu_\ell^{(n)})\,, \tag{4.172}$$

где

$$\sigma_\ell^{(n)} = \begin{cases} \sigma_\ell^{(n-1)} - 1\,,\ \sigma_\ell^{(n-1)} \ \text{при}\ \varepsilon_{\ell n} = 1\,, \\ \sigma_\ell^{(n-1)}\,,\ \sigma_\ell^{(n-1)} + 1\,\text{при}\ \varepsilon_{\ell n} = -1\,,\ n = 1, 2, ..., M_\ell\,. \end{cases}$$

В заключение подчеркнем, что $\delta_\ell^{V_{\ell n}}(0) \geq 0$, за исключением тех случаев, когда $\delta_\ell^{V_{\ell n}}(0) = -\pi$ $(\varepsilon_{\ell n} = -1)$. А это имеет место при $\sigma_\ell^{(n-1)} \neq 0$, $\sigma_\ell^{(n)} = \sigma_\ell^{(n-1)} - 1$ и $\nu_\ell^{(n)} = 0$.

Итак, сформулируем основные результаты, полученные в данной главе.

1. В рамках РКП-подхода в квантовой теории поля развит метод решения конечно-разностного квазипотенциального уравнения с чисто нелокальным сепарабельным квазипотенциалом, описывающим взаимодействие двух релятивистских бесспиновых частиц произвольных масс m_1, m_2. Разработанный метод непосредственно связан с возможностью представить полную энергию двух релятивистских бесспиновых частиц неравных масс в с.ц.и. в виде выражения, пропорционального энергии одной эффективной релятивистской частицы массы m'.

   На основе развитого метода впервые:

а) определены условия существования и единственности решения конечно-разностного квазипотенциального уравнения с чисто нелокальным сепарабельным квазипотенциалом;

б) получено выражение для парциальной волновой функции для любого орбитального момента $\ell \geq 0$;

в) исследованы свойства регулярного решения;

г) получены условия ортогональности и полноты для регулярного решения;

д) найдено выражение для фазового сдвига;

е) определены условия существования связанных состояний и состояний рассеяния;

ж) дано обобщение теоремы Левинсона;

з) в качестве приложения полученных результатов исследованы условия существования связанных состояний и состояний рассеяния для δ-образного квазипотенциала и дано сравнение с нерелятивистским случаем. Показано, что, в отличие от нерелятивистского случая, релятивистский эффект частиц, рассеиваемых на δ-образном квазипотенциале, проявляется в образовании состояний рассеяния.

2. В рамках РКП-подхода в квантовой теории поля разработан метод решения конечно-разностного квазипотенциального уравнения для суперпозиции нелокального сепарабельного и локального квазипотенциалов и дано обобщение метода для случая суперпозиции локального и суммы нелокальных сепарабельных квазипотенциалов. При этом полное взаимодействие считается центрально-симметричным, не зависит от энергии, а его локальная составляющая предполагается известной, согласуется с экспериментальными данными при низких энергиях и допускает существование n_ℓ связанных состояний. Метод основан на свойствах ортогональности и полноты для регулярного решения конечно-разностного квазипотенциального уравнения с локальным квазипотенциалом.

   В рамках данного метода впервые:

а) определены условия существования и единственности решения конечно-разностного квазипотенциального уравнения для суперпозиции локального и нелокального однокомпонентного (многокомпонентного) сепарабельного квазипотенциалов;

б) получены выражения для парциальных волновых функций для любого орбитального момента $\ell \geq 0$, соответствующих каждому сепарабельному члену, и исследованы их свойства;

в) получены условия ортогональности и полноты для парциальных волновых функций;

г) найдены выражения для приращений фазового сдвига;

д) определены условия существования истинных и “поддельных” связанных состояний и установлены условия вырождения по энергиям связанных состояний;

е) дан вывод обобщенной теоремы Левинсона.

ГЛАВА 5

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛОКАЛЬНОГО СЕПАРАБЕЛЬНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

5.1. Введение

Существует ряд подходов к задаче восстановления потенциалов взаимодействия между элементарными частицами. Широкое распространение получил феноменологический подход (см., например, обзор [124]), основанный на использовании потенциалов, содержащих варьируемые параметры, которые подбираются из условия соответствия экспериментальным данным. Иная возможность восстановления потенциала взаимодействия основана на результатах, полученных при решении обратной задачи.

Принципиальная возможность решения обратной задачи в нерелятивистской теории была доказана И. М. Гельфандом и Б. М. Левитаном [125], [126], В. А. Марченко [125] и М. Г. Крейном [128], [129]. Полученные ими два варианта линейных интегральных уравнений, один из которых был дан Гельфандом и Левитаном, а другой – Марченко, послужили основой дальнейшего развития теории обратной задачи. В систематизированном виде эти результаты впервые были кратко изложены в обзорах З. С. Аграновича и В. А. Марченко [130] и Л. Д. Фаддеева [131], [132].

Последующим исследованием обратной задачи в различных ее постановках занимались многие авторы, а литература, посвященная этой проблеме, и приложения результатов – весьма обширны (см., например, [61], [108]–[114], [133]–[140]).

Наиболее полный обзор по теории обратной задачи дан в монографии [123]. В ней единым образом изложены методы получения информации о центрально-симметричном потенциале по данным рассеяния, зависящих как от энергии E, так и от орбитального момента ℓ при фиксированном значении энергии E. Рассмотрены обобщения теории на случай поля произвольной формы, а также решения обратной задачи на основе релятивистских уравнений Дирака и Клейна-Гордона. Большое место отводится различным приближенным методам обратной задачи и анализу возникающих при этом неоднозначностей решений.

Широкое применение получил дискретный подход к обратной задаче, опирающийся на конечно-разностное приближение к уравнению Шредингера [141]–[143]. Наиболее полно подход к обратной задаче, основанный на конечно-разностных уравнениях Шредингера (одномерных, одноканальных, многоканальных, многомерных), изложен в книге [144].

Представляет интерес и общее решение многоканальной обратной задачи рассеяния на основе многоканальной матрицы [145] в последовательном формализме релятивистской квантовой механики, предложенном С. Н. Соколовым [146].

Однако задача восстановления взаимодействия в большинстве этих и ряде других работ формулируется на основе нерелятивистского уравнения Шредингера. Тем самым остается актуальной задача восстановления взаимодействия для существенно релятивистских систем, в частности, в рамках РКП-подхода [12].

В данной главе в рамках РКП-подхода в квантовой теории поля[12] излагаются методы восстановления компонент нелокального сепарабельного квазипотенциала по фазовым сдвигам и энергиям связанных состояний в случаях, когда полное взаимодействие является чисто нелокальным сепарабельным (раздел 5.2) [117], [147]–[149] или содержит локальную составляющую (раздел 5.3) [150]–[152]. В разделе 5.4 настоящей главы дается обобщение изложенного в раздел 5.2 и 5.3 метода на случай, когда каждой парциальной волне соответствует несколько сепарабельных членов [153], [154]. В основе рассматриваемого подхода лежат выражения для фазовых сдвигов, найденных в главе 4.

5.2. Восстановление компоненты чисто нелокального сепарабельного взаимодействия

5.2.1. *Интегральное уравнение для функции $A_\ell\,(\chi')$: постановка задачи и основные предположения*

В данном разделе в рамках РКП-подхода [12] рассматривается задача восстановления компоненты $V_\ell\,(\rho)$ чисто нелокального сепарабельного квазипотенциала взаимодействия между двумя релятивистскими бесспиновыми частицами с произвольными массами $(m_{\,1}\,,\, m_{\,2})$ по фазовому сдвигу и энергиям связанных состояний. В основе рассматриваемого подхода лежит выражение для фазового сдвига (см. раздел 4.3.2, фомула (4.29)):

$$\operatorname{tg}\delta_\ell\,(\chi') = -\frac{\pi}{2}\,\mathrm{sh}^{-1}\chi'\,A_\ell\,(\chi'\,)\left[1+\mathrm{P}\,\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty d\chi\,\frac{A_\ell\,(\chi)}{\mathrm{ch}\chi-\mathrm{ch}\chi'}\right]^{-1}\,, \tag{5.1}$$

где функция $A_\ell\,(\chi')$ дается выражением (см. формулу (4.32))

$$A_\ell\,(\chi') = \frac{2}{\pi}\,\varepsilon_\ell\,Q_\ell^2\,(\mathrm{cth}\chi')\,\left|\,\tilde{V}_\ell\,(\chi')\,\right|^2\,,\quad \varepsilon_\ell = \pm 1\,. \tag{5.2}$$

Напомним, здесь $Q_\ell\,(z)$ – функция Лежандра второго рода; $E_q = E_{q'}/m' = \sqrt{1+(\,\mathbf{q}'/m')^2} = \mathrm{ch}\,\chi'\,,\; m' = \sqrt{m_{\,1}\,m_{\,2}}$.

Для того, чтобы найти компоненту $V_\ell\,(\rho)$ чисто нелокального сепарабельного квазипотенциала по фазовому сдвигу $\delta_\ell\,(\chi')$, необходимо решить интегральное уравнение (5.1) относительно функции $A_\ell\,(\chi')$. После этого из (5.2) находят функцию $\tilde{V}_\ell\,(\chi')$. Затем, выполнив релятивистское преобразование Ханкеля (см. формулу (4.13))

$$V_\ell\,(\rho) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty d\chi\,Q_\ell\,(\,\mathrm{cth}\chi)\,\tilde{V}_\ell\,(\chi)\,s_\ell\,(\rho\,,\,\chi)\,, \tag{5.3}$$

восстанавливают компоненту $V_\ell\,(\rho)$.

В частности, релятивистское преобразование Ханкеля (5.3) в случае $\ell = 0$ переходит в обычное преобразование Фурье

$$V_0\,(\rho) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty d\chi\,\chi\,\tilde{V}_0\,(\chi)\,\sin(\rho\,\chi)\,.$$

Будем предполагать, что фазовый сдвиг $\delta_\ell(\chi')$ в выражении (5.1) является непрерывной по Гельдеру функцией с некоторым положительным индексом и при $|\chi'| \to \infty$

$$\delta_\ell\,(\chi') = O\,(|\chi'|^{-\gamma})\,, \ell \geq 0\,, \gamma > 1\,. \tag{5.4}$$

Эти условия являются необходимыми и достаточными для того, чтобы квазипотенциал $V_\ell\,(\rho)$ удовлетворял условию (4.9), что обеспечивает единственность решения как прямой задачи (см. раздел 4.3), так и (как будет показано в разделах 5.2.2 и 5.2.3) обратной задачи.

Отметим, что если при возрастании χ' фазовый сдвиг пересекает прямые $\delta_\ell\,(\chi') = \pi\, k$, где k – целое, снизу, то обратная задача решения не имеет. Поэтому будем считать, что фазовый сдвиг $\delta_\ell\,(\chi')$ пересекает прямые $\delta_\ell\,(\chi') = \pi\, k\,(k = 0, 1, 2, ...)$ сверху при возрастании χ'.

5.2.2. Метод и условие единственности решения интегрального уравнения для функции $A_\ell\,(\chi')$

Пусть имеется $\nu_\ell\,(\ell \geq 0)$ связанных состояний с энергиями

$$E_{fk} = E_{q'fk}/m' = \operatorname{ch}\chi_{fk} \geq 1\,, k = 0, 1, ..., \nu_\ell - 1\,, \varepsilon_\ell = 1.$$

Тогда теорема Левинсона (4.50) принимает вид

$$\delta_\ell\,(0) = \pi\, \nu_\ell\,. \tag{5.5}$$

В этом случае фазовый сдвиг при больших значениях энергии является малой, но отрицательной величиной ($\varepsilon_\ell = 1$), а энергии связанных состояний $E_{fk} \geq 1$ находятся по тем значениям χ' при которых фазовый сдвиг $\delta_\ell\,(\chi')$ пересекает сверху прямые $\delta_\ell = \pi\, k$ при возрастании χ', т.е

$$\delta_\ell\,(\chi_{fk}) = \pi\, k\,, k = 0, 1, 2, ..., \nu_\ell - 1\,. \tag{5.6}$$

Интегральное уравнение (5.1) преобразуем к виду

$$A_\ell\,(\operatorname{arch} x)\, g_\ell^{-1}\,(x) = 1 + \frac{1}{\pi}\,\mathrm{P}\int_1^\infty dt\, \frac{\psi_\ell\,(t)\, h_\ell^*\,(t)}{t - x}\,, \tag{5.7}$$

где $x = \operatorname{ch}\chi'$ и введены следующие обозначения:

$$\psi_\ell(x) = A_\ell(\operatorname{arch} x)\, g_\ell^{-1}(x) \left[1 + (i\pi/2)\, g_\ell(x)\, \left(x^2-1\right)^{-1/2}\right],$$

$$g_\ell(x) = -(2/\pi)\, \left(x^2-1\right)^{1/2} \operatorname{tg}\Delta_\ell(x)\,, \quad \Delta_\ell(x) = \delta_\ell(\operatorname{arch} x)\,,$$

$$h_\ell(x) = (\pi/2)\, g_\ell(x)\, \left(x^2-1\right)^{-1/2} \times \tag{5.8}$$

$$\times \left[1 - (i\pi/2)\, g_\ell(x)\, \left(x^2-1\right)^{-1/2}\right]^{-1} =$$

$$= -\sin\Delta_\ell(x)\, \exp\left[-i\,\Delta_\ell(x)\right].$$

Используя представление (4.26), уравнение (5.7) приводится к виду

$$\psi_\ell(x) = 1 + \frac{1}{\pi}\int_1^\infty dt\, \frac{\psi_\ell(t)\, h_\ell^*(t)}{t - x - i0}\,. \tag{5.9}$$

Рассмотрим функцию

$$H_\ell(z) = 1 + \frac{1}{\pi}\int_1^\infty dt\, \frac{\psi_\ell(t)\, h_\ell^*(t)}{t - z}\,. \tag{5.10}$$

Если функция $\psi_\ell(x)$ непрерывна по Гельдеру и интеграл в (5.10) сходится, то функция $H_\ell(z)$ аналитична в плоскости z с разрезом от 1 до $+\infty$ и

$$\lim_{|z|\to\infty} H_\ell(z) = 1 \tag{5.11}$$

во всех направлениях. Следовательно, решение интегрального уравнения (5.9) дается выражением

$$\psi_\ell(x) = H_\ell(x_+) \equiv \lim_{\eta\to+0} H_\ell(x + i\eta)\,, \quad 1 \le x \le \infty\,. \tag{5.12}$$

Подстановка решения (5.12) в выражение для скачка функции $H_\ell(z)$ на разрезе

$$H_\ell(x_+) - H_\ell(x_-) = 2i\,\psi_\ell(x)\, h_\ell^*(x) = -2i\,\sin\Delta_\ell(x)\, \exp\left[i\,\Delta_\ell(x)\right]\, \psi_\ell(x)$$

приводит к однородному уравнению Римана–Гильберта для функции $H_\ell(z)$:

$$H_\ell(x_+)\, \exp\left[2i\,\Delta_\ell(x)\right] - H_\ell(x_-) = 0\,, \quad 1 \le x \le \infty\,. \tag{5.13}$$

Частное решение уравнения (5.13), удовлетворяющее условию (5.11), имеет вид

$$\tilde{H}_\ell\,(z) = \exp\left[\,\omega_\ell\,(z)\,\right], \tag{5.14}$$

где

$$\omega_\ell\,(z) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_1^\infty dt\,\frac{\Delta_\ell\,(t)}{t-z}\,. \tag{5.15}$$

Причем

$$\lim_{|z|\to\infty}\omega_\ell\,(z) = 0$$

во всех направлениях, что следует из предположений о поведении фазового сдвига и условия (5.4). Кроме того, функция (5.15) определена всюду на разрезе за исключением, быть может, точки $z = 1$, где ее поведение определяется выражением

$$\omega_\ell\,(z) = (1/\pi)\,\Delta_\ell\,(1)\,\ln|1-z| + \Omega_\ell\,(z)\,. \tag{5.16}$$

Здесь функция $\Omega_\ell\,(z)$ при $z \to 1$ конечна, а $\Delta_\ell\,(1) = \delta_\ell\,(0) = \pi\,\nu_\ell$ (имеется ν_ℓ связанных состояний с энергиями $E_{fk} = \operatorname{ch}\chi_{fk} \geq 1$, $k = 0, 1, ..., \nu_\ell - 1$). Тем самым функция $H_\ell\,(z)$ имеет нуль порядка ν_ℓ в точке $z = 1$.

Таким образом, решение неоднородного интегрального уравнения (5.9), согласно выражениям (5.12), (5.14) и (5.15), имеет вид

$$\tilde{\psi}_\ell\,(x) = \exp\left[\,\alpha_\ell\,(x) - i\,\Delta_\ell\,(x)\,\right], \tag{5.17}$$

где

$$\alpha_\ell\,(x) = -\frac{1}{\pi}\,\mathrm{P}\int\limits_1^\infty dt\,\frac{\Delta_\ell\,(t)}{t-x}\,. \tag{5.18}$$

Отметим, что функция (5.17) регулярна при $x = 1$ (имеет нуль порядка ν_ℓ в этой точке), непрерывна по Гельдеру с тем же индексом, что и фазовый сдвиг, и ограничена при $x \to +\infty$, а это совпадает с априорными предположениями о ее свойствах. Наконец, функция (5.17) является решением уравнения (5.9), поскольку по теореме Коши

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_1^\infty dt\,\frac{\tilde{\psi}_\ell\,(t)\,h_\ell^*\,(t)}{t-x-i0} =$$

$$= \lim_{\eta\to+0\,,\,R\to+\infty}\frac{1}{2\,i\,\pi}\left[\,\int\limits_{C^+} dz\,\frac{\tilde{H}_\ell\,(z)}{z-x-i\,\eta} - \int\limits_{C_R^+} dz\,\frac{\tilde{H}_\ell\,(z)}{z-x-i\,\eta}\right] =$$

$$= \tilde{H}_\ell\,(x_+) - 1 = \tilde{\psi}_\ell\,(x) - 1\,.$$

Здесь C^+ – замкнутый контур, состоящий из окружности C_R^+ радиуса R с центром в точке $z = 0$, двух берегов разреза от 1 до R, проходимых в противоположных направлениях, и окружности C_η^- радиуса η с центром в точке $z = 1$. Причем вклад интеграла по окружности C_η^- стремится к нулю при $\eta \to +0$, т.к. функция $\tilde{H}_\ell\,(z)$ регулярна в точке $z = 1$.

Теперь найдем общее решение однородного уравнения

$$\psi_{\ell o}\,(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_1^\infty dt\, \frac{\psi_{\ell o}\,(t)\, h_\ell^*\,(t)}{t - x - i0}\,. \tag{5.19}$$

Для этого рассмотрим функцию

$$H_{\ell o}\,(z) = \frac{1}{\pi} \int\limits_1^\infty dt\, \frac{\psi_{\ell o}\,(t)\, h_\ell^*\,(t)}{t - z}\,, \tag{5.20}$$

аналитическую в плоскости z с разрезом от 1 до $+\infty$, причем

$$\lim_{|z| \to \infty} H_{\ell o}\,(z) = 0 \tag{5.21}$$

во всех направлениях. Тогда решение интегрального уравнения (5.19) имеет прежний вид (5.12), а функция $H_{\ell o}\,(z)$ удовлетворяет однородному уравнению Римана–Гильберта (5.13). Общее решение этого уравнения будем искать в виде

$$H_{\ell o}\,(z) = \sum_{k=1}^{m} A_{k-1}\, \frac{\exp\left[\,\omega_\ell\,(z)\,\right]}{(z-1)^k}\,. \tag{5.22}$$

После подстановки (5.22) в уравнение (5.13) и требования конечности функции $H_{\ell o}\,(z)$ при $z = 1$, находим $m = \nu_\ell$. Следовательно,

$$\psi_{\ell o}\,(x) = H_{\ell o}\,(x_+) = \sum_{k=1}^{\nu_\ell} A_{k-1}\, \frac{\exp\left[\,\alpha_\ell\,(x) - i\,\Delta_\ell\,(x)\,\right]}{(x-1)^k}\,. \tag{5.23}$$

Очевидно, как и в случае частного решения, интегрирование по контуру C^+ доказывает, что функция (5.23) является решением уравнения (5.19) и обладает всеми требуемыми свойствами.

Поэтому общее решение интегрального уравнения (5.9) имеет вид

$$\psi_\ell\,(x) = \exp\left[\,\alpha_\ell\,(x) - i\,\Delta_\ell\,(x)\,\right] \sum_{k=1}^{\nu_\ell} \left[1 + \frac{A_{k-1}}{(x-1)^k}\right]. \tag{5.24}$$

Используя обозначения (5.8) и преобразуя сумму в произведение, решение (5.24) запишем в виде

$$A_\ell\,(\chi') = -\frac{2}{\pi}\,\mathrm{sh}\,(\chi')\,\sin\,\delta_\ell\,(\chi')\,\times$$
$$\times\exp\left[\,\alpha_\ell\,(\,\mathrm{ch}\,\chi'\,)\,\right]\prod_{k=0}^{\nu_\ell-1}\left(1+\frac{B_k}{\mathrm{ch}\,\chi'-1}\right)\,, \tag{5.25}$$

$$\alpha_\ell\,(\,\mathrm{ch}\,\chi'\,) = -\frac{1}{\pi}\;\mathrm{P}\int_0^\infty d\chi\,\frac{\mathrm{sh}\,(\,\chi\,)\,\delta_\ell\,(\,\chi\,)}{\mathrm{ch}\,\chi-\mathrm{ch}\,\chi'}\,. \tag{5.26}$$

Для определения констант B_k в (5.25), заметим, что функция $A_\ell\,(\chi')$ по определению (5.2) сохраняет свой знак при всех значениях χ', а так как $\varepsilon_\ell = 1$, то она должна быть положительной. В то же время фазовый сдвиг меняет свой знак при энергиях связанного состояния $E_{fk} = \mathrm{ch}\,\chi_{fk} \geq 1$. Следовательно, функция $A_\ell\,(\chi')$ сохранит свой знак плюс, если

$$B_k = 1-\mathrm{ch}\,\chi_{fk}\,,\; k = 0, 1, ..., \nu_\ell - 1\,.$$

Тогда вместо выражения (5.25) будем иметь

$$A_\ell\,(\chi') = -\frac{2}{\pi}\,\mathrm{sh}\,(\chi')\,\sin\,\delta_\ell\,(\chi')\,\exp\left[\,\alpha_\ell\,(\mathrm{ch}\,\chi')\,\right]\times$$
$$\times\prod_{k=0}^{\nu_\ell-1}\left(1-\frac{\mathrm{ch}\,\chi_{fk}-1}{\mathrm{ch}\,\chi'-1}\right)\,. \tag{5.27}$$

Таким образом, решение (5.27) полностью определяется фазовым сдвигом, т.к. значение χ_{fk} также задается его поведением. Более того, из выражений (5.26) и (5.27) следует, что функция $A_\ell\,(\chi')$ непрерывна по Гельдеру и при $|\chi'| \to \infty$ ведет себя как

$$\mathrm{ch}\,\chi'\,|\chi'|^{-\gamma},\; \gamma > 1\,,$$

если только фазовый сдвиг удовлетворяет условию (5.4). А это означает, что квазипотенциал $V_\ell\,(\rho)$ удовлетворяет условию (4.9).

Точно так же рассматривается случай, когда $\varepsilon_\ell = -1$ и имеются ν_ℓ связанных состояний с энергиями

$$E_{fk} = \mathrm{ch}\,\chi_{fk} \geq 1\,,\; k = 1, ..., \nu_\ell\,,$$

и σ_ℓ связанных состояний с энергиями

$$0 \leq E_{tj'} = \cos \kappa_{tj'} < 1 \,, \quad \chi_{tj'} = i\,\kappa_{tj'} \,, \quad j' = 1, ..., \sigma_\ell \,, \quad \sigma_\ell = 0\,(1) \,,$$

где $\sigma_\ell = 0$, если условие в (4.40) не выполняется, и $\sigma_\ell = 1$, если это условие выполняется. При этом по теореме Левинсона (4.50)

$$\delta_\ell\,(0) = \pi\,(\nu_\ell + \sigma_\ell) \,.$$

Поэтому функция $H_\ell\,(z)$ в соответствии с выражением (5.16) имеет нуль порядка $(\nu_\ell + \sigma_\ell)$ при $z = 1$. Далее, поступая так же как и в случае $\varepsilon_\ell = 1$ и учитывая, что решение $A_\ell\,(\chi')$ теперь должно сохранять свой знак минус при всех значениях χ' ($\varepsilon_\ell = -1$), находим

$$\begin{gathered} A_\ell\,(\chi') = -\frac{2}{\pi}\,\mathrm{sh}\,(\chi')\,\sin\,\delta_\ell\,(\chi')\,\exp\left[\,\alpha_\ell\,(\mathrm{ch}\,\chi')\,\right]\times \\ \times \prod_{n=0}^{\nu_\ell - 1}\left(1 - \frac{\mathrm{ch}\,\chi_{fk} - 1}{\mathrm{ch}\,\chi' - 1}\right)\prod_{k=0}^{\sigma_\ell - 1}\left(1 + \frac{1 - \cos\,\kappa_{tj'}}{\mathrm{ch}\,\chi' - 1}\right). \end{gathered} \tag{5.28}$$

Таким образом, функция $A_\ell\,(\chi')$ полностью определяется фазовым сдвигом и связанными состояниями, а ее знак противоположен знаку фазового сдвига при $\chi' \to +\infty$.

5.2.3. Метод восстановления квазипотенциала $\tilde{V}_\ell\,(\chi')$

Для восстановления квазипотенциала $V_\ell\,(\rho)$ посредством преобразования (5.3) необходимо (в отличие от нерелятивстского случая [110], [111]) знать комплексную функцию $\tilde{V}_\ell\,(\chi')$, хотя выражение (5.2) определяет только ее модуль при $\ell > 0$. Тем не менее $\tilde{V}_\ell\,(\chi')$ полностью определяется функцией $A_\ell\,(\chi')$, поскольку она определяет все связанные состояния – нули этой функции. Причем ее нули расположены либо на действительной оси ($E_{fk} \geq 1$), либо на мнимой оси ($0 \leq E_{tj'} < 1$) в комплексной χ'-плоскости, что дает возможность ввести в рассмотрение функцию

$$\begin{gathered} \hat{V}_\ell\,(\mathrm{sh}\,(\chi'/2)) = \prod_{j'=1}^{\sigma_\ell}\left[\frac{\mathrm{sh}\,(\chi'/2) + i\,\sin\,(\kappa_{tj'}/2)}{\mathrm{sh}\,(\chi'/2) - i\,\sin\,(\kappa_{tj'}/2)}\right]\times \\ \times\left[Q_\ell\,(\mathrm{cth}\,\chi')\,\tilde{V}_\ell^{(-)}\,\,(\mathrm{sh}\,(\chi'/2))\right]^2 , \end{gathered} \tag{5.29}$$

где
$$
\begin{gathered}
|\tilde V_\ell^{(-)}\,(\mathrm{sh}\,(\chi'/2))\,| = |\tilde V_\ell\,(\chi')\,|\,,\ \ \mathrm{Re}\,\tilde V_\ell^{(-)}\,(\mathrm{sh}\,(\chi'/2)) =\ \mathrm{Re}\,\tilde V_\ell\,(\chi')\ , \\
\arg\tilde V_\ell^{(-)}\,(-\,\mathrm{sh}\,(\chi'/2)) = -\arg\tilde V_\ell^{(-)}\,(\mathrm{sh}\,(\chi'/2))\ .
\end{gathered}
\tag{5.30}
$$
Поскольку $\arg\tilde V_\ell\,(-\chi')\ =\ \arg\tilde V_\ell\,(\chi')$, то, принимая во внимание (5.30), получим
$$
\arg\tilde V_\ell\,(\chi') =\ \mathrm{sgn}\chi'\ \arg\tilde V_\ell^{(-)}\,(\mathrm{sh}\,(\chi'/2))\ . \tag{5.31}
$$
Тогда, введенная в (5.29) функция $\hat V_\ell\ (\mathrm{sh}\,(\chi'/2))$, является аналитической в области $0 <\ \mathrm{Im}\,\chi' \le \pi/2$, непрерывна при $0 \le\ \mathrm{Im}\,\chi' \le \pi/2$ и удовлетворяет условию
$$
\hat V_\ell\,(\mathrm{sh}\,(\chi'/2)\,) = O\left(\mathrm{sh}^2(\chi'/2)\right)\ , \quad |\chi'| \to \infty\,, \quad 0 \le\ \mathrm{Im}\,\chi' \le \pi/2\,, \tag{5.32}
$$
если только выполнено условие (4.9). Кроме того, функция $\hat V_\ell\,(\mathrm{sh}\,(\chi'/2)\,)$ нигде не обращается в нуль в области $0\ <\ \mathrm{Im}\,\chi'\ \le\ \pi/2$. Тем самым функция $\ln\hat V_\ell\,(\mathrm{sh}\,(\chi'/2)\,)$ аналитична в области $0 <\ \mathrm{Im}\,\chi' \le \pi/2$ и ведет себя как $\ln\mathrm{sh}^2\,(\chi'/2)$ при $|\chi'| \to \infty$ в силу оценки (5.32). Это позволяет применить интегральное преобразование Гильберта к действительной и мнимой частям функции $\ln\hat V_\ell\,(\mathrm{sh}\,(\chi'/2)\,)$. Тогда для действительных χ' имеем
$$
\begin{gathered}
\mathrm{Im}\ \ln\hat V_\ell\,(\mathrm{sh}\,(\chi'/2)\,) = \\
= -\frac{1}{\pi}\,\mathrm{P}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\,(\mathrm{sh}\,(\chi/2))\ \frac{\mathrm{Re}\ \ln\hat V_\ell\,(\mathrm{sh}\,(\chi/2)\,)}{\mathrm{sh}\,(\chi/2) - \mathrm{sh}\,(\chi'/2)} = \\
= -\frac{2\ \mathrm{sh}\,(\chi'/2)}{\pi}\ \mathrm{P}\int\limits_0^{\infty} d\chi\,\frac{\mathrm{ch}\,(\chi/2)\ \ln\left[\,\pi\,\varepsilon_\ell\,A_\ell\,(\chi)\,/2\,\right]}{\mathrm{ch}\,\chi - \mathrm{ch}\,\chi'}\,,
\end{gathered}
\tag{5.33}
$$
где учли, что
$$
\mathrm{Re}\ \ln\hat V_\ell\,(\mathrm{sh}\,(\chi'/2)) = \ln\left[\,\pi\,\varepsilon_\ell\,A_\ell\,(\chi')/2\,\right]\ .
$$
Отсюда, принимая во внимание определение (5.29), находим
$$
\begin{gathered}
\left[Q_\ell\,(\mathrm{cth}\,\chi')\,\tilde V_\ell^{(-)}\ (\mathrm{sh}\,(\chi'/2))\right]^2 = \\
= \frac{\pi}{2}\,\varepsilon_\ell\,A_\ell\,(\chi')\,\prod_{j'=1}^{\sigma_\ell}\left[\frac{\mathrm{sh}\,(\chi'/2) - i\ \sin\,(\kappa_{tj'}/2)}{\mathrm{sh}\,(\chi'/2) + i\ \sin\,(\kappa_{tj'}/2)}\right]\times \\
\times\exp\left[\frac{2\ \mathrm{sh}\,(\chi'/2)}{i\,\pi}\ \mathrm{P}\int\limits_0^{\infty} d\chi\,\frac{\mathrm{ch}\,(\chi/2)\ \ln\left[\,\pi\,\varepsilon_\ell\,A_\ell\,(\chi)\,/2\,\right]}{\mathrm{ch}\,\chi - \mathrm{ch}\,\chi'}\right]\ .
\end{gathered}
\tag{5.34}
$$

Наконец, учитывая соотношения (5.30) и (5.31), окончательно получим

$$Q_\ell\left(\operatorname{cth}\chi'\right)\,\tilde{V}_\ell\left(\chi'\right) =$$

$$= \sqrt{\pi\,\varepsilon_\ell\,A_\ell\left(\chi'\right)/2}\,\exp\left\{-\,i\,\operatorname{sgn}\chi'\left[\sum_{j'=1}^{\sigma_\ell}\operatorname{arctg}\frac{\sin\left(\kappa_{tj'}/2\right)}{\operatorname{sh}\left(\chi'/2\right)}+\right.\right. \tag{5.35}$$

$$\left.\left.+\frac{\operatorname{sh}\left(\chi'/2\right)}{\pi}\;\mathrm{P}\int_0^\infty d\chi\,\frac{\operatorname{ch}\left(\chi/2\right)\,\ln\left[\,\pi\,\varepsilon_\ell\,A_\ell\left(\chi\right)/2\,\right]}{\operatorname{ch}\chi-\operatorname{ch}\chi'}\right]\right\}.$$

Таким образом, решение релятивистской обратной задачи существует и полностью определяется заданием функции $A_\ell\left(\chi'\right)$ по фазовому сдвигу и энергиям связанных состояний для $\ell \geq 0$, если приращение фазового сдвига является непрерывной по Гельдеру функцией с некоторым положительным индексом и при $|\chi'| \to \infty$ для нее имеет место оценка (5.4).

В заключение отметим, что рассмотренный метод восстановления чисто нелокального сепарабельного квазипотенциала взаимодействия двух релятивистских бесспиновых частиц неравных масс фактически сводится к одночастичной задаче. Это обусловлено возможностью представления полной энергии двух релятивистских частиц с неравными массами в с.ц.и. в рамках РКП-подхода в квантовой теории поля в виде выражения, пропорционального энергии эффективной релятивистской частицы массы m'.

5.3. Восстановление компоненты нелокального сепарабельного взаимодействия

5.3.1. Интегральное уравнение для функции $A_\ell\left(\chi'\right)$: постановка задачи и основные предположения

В данном разделе рассматривается задача восстановления компоненты $V_\ell(\rho)$ нелокального сепарабельного квазипотенциала. Рассмотрение проведено в рамках РКП-подхода [12] в квантовой теории поля. Локальная составляющая $W(\rho)$ полного взаимодействия считается известной и допускающей существование n_ℓ связанных состояний с энергиями (2.8). Мы покажем, что компоненту $V_\ell(\rho)$ нелокальной сепарабельной составляющей полного квазипотенциала можно восстановить, если известны его локальная часть $W(\rho)$, приращение фазового сдвига $\delta_\ell^V(\chi')$ и значения энергий связанных состояний. При этом мы будем исходить из выражения для приращения фазового сдвига (см. раздел 4.4.2, формулы (4.85), (4.92)):

$$\operatorname{tg}\delta_\ell^V(\chi') = -\frac{\pi}{2}\,\operatorname{sh}^{-1}\chi'\,A_\ell(\chi')\left[1 - \frac{\varepsilon_\ell}{2}\sum_{j=1}^{n_\ell} C_{\ell j}\,\frac{\left|\tilde{V}_\ell(\chi_j)\right|^2}{\operatorname{ch}\chi' - \operatorname{ch}\chi_j} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\,\mathrm{P}\int_0^\infty d\chi\,\frac{A_\ell(\chi)}{\operatorname{ch}\chi - \operatorname{ch}\chi'}\right]^{-1}, \tag{5.36}$$

$$A_\ell(\chi') = \frac{2}{\pi}\,\varepsilon_\ell\left|\frac{Q_\ell(\operatorname{cth}\chi')\;\tilde{V}_\ell(\chi')}{F_\ell^W(\chi')}\right|^2,\ \ \varepsilon_\ell = \pm 1\,. \tag{5.37}$$

Здесь P – символ главного значения, $Q_\ell(z)$ – функция Лежандра второго рода, $\tilde{V}_\ell(\chi)$ – образ квазипотенциала $V_\ell(\rho)$, а $F_\ell^W(\chi')$ и $C_{\ell j}$ – функция Йоста и нормировочные константы, обусловленные чисто локальным квазипотенциалом $W(\rho)$.

Напомним (см. раздел 2.2.3), что функция Йоста $F_\ell^W(\chi')$ выражается через фазовый сдвиг $\delta_\ell^W(\chi')$ соотношением (2.34), а ее нули χ_j $(j = 1, 2, ..., n_\ell)$, которые определяют значения энергий (2.8) связанных состояний локального квазипотенциала $W(\rho)$, расположены на положительной части мнимой оси в комплексной плоскости быстроты χ', параметризующей в с.ц.и. энергию $E' = E'_q/m' = \operatorname{ch}\chi'$ одной эффективной релятивистской частицы массы $m' = \sqrt{m_1\, m_2}$. При этом нормировочные константы $C_{\ell j}$ для собственных функций $\varphi_\ell(\rho\,,\,\chi_j)$ этих связанных состояний также выражаются через функцию Йоста (см. формулу (2.62)).

Для того чтобы восстановить компоненту $V_\ell(\rho)$ сепарабельной части полного квазипотенциала по приращению фазового сдвига $\delta_\ell^V(\chi')$, мы решим интегральное уравнение (5.36) относительно функции $A_\ell(\chi')$. При этом мы обобщим на релятивистский случай метод, предложенный Шаданом в работе [110], [111] для решения соответствующей нерелятивистской обратной задачи. Затем, используя интегральное преобразование Гильберта, из (5.37) найдем функцию $\tilde{V}_\ell(\chi')$. Наконец, выполнив обобщенное релятивистское интегральное преобразование Ханкеля (см. раздел 4.4.1, формула (4.72))

$$V_\ell(\rho) = \int_0^\infty d\rho_\ell(\operatorname{ch}\chi)\; \tilde V_\ell(\chi)\; \varphi_\ell(\rho\,,\chi) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n_\ell} C_{\ell j}\, \tilde V_\ell(\chi_j)\, \varphi_\ell(\rho\,,\chi_j) + \int_0^\infty d\chi\, \tau_\ell(\chi)\, \tilde V_\ell(\chi)\, \varphi_\ell(\rho\,,\chi)\,, \tag{5.38}$$

$$\tau_\ell(\chi) = \frac{2}{\pi}\left|\frac{Q_\ell(\operatorname{cth}\chi)}{F_\ell^W(\chi)}\right|^2,$$

мы восстановим квазипотенциал $V_\ell(\rho)$ [18].

Для единственности решения обратной задачи будем предполагать, что приращение фазового сдвига $\delta_\ell^V(\chi')$ в выражении (5.36) является непрерывной по Гельдеру функцией с некоторым положительным индексом и при $|\chi'| \to \infty$ для него имеет место оценка

$$\delta_\ell^V(\chi') = O\left(|\chi'|^{-\gamma}\right)\,,\ \ell \ge 0\,,\ \gamma > 1\,. \tag{5.39}$$

Эти требования означают, что квазипотенциалы $W(\rho)$ и $V_\ell(\rho)$ удовлетворяют условиям (2.10) и (4.9). Кроме того, для приращения фазового сдвига справедлива теорема Левинсона (см. раздел 4.4.4, формула (4.106))

$$\delta_\ell^V(0) - \delta_\ell^V(\infty) = \delta_\ell^V(0) = \pi\,(\sigma_\ell - n_\ell + \nu_\ell)\,. \tag{5.40}$$

Здесь (см. раздел 4.4.3, формулы (4.95), (4.96)) σ_ℓ – число связанных

[18] Здесь (см. раздел 2.2.3) $\varphi_\ell(\rho\,,\chi)$ представляет собой регулярное решение конечно-разностного квазипотенциального уравнения с локальным квазипотенциалом $W(\rho)$, допускающим существование n_ℓ связанных состояний с энергиями (2.8), а

$$\frac{d\rho_\ell(\operatorname{ch}\chi)}{d(\operatorname{ch}\chi)} = \begin{cases} \operatorname{sh}^{-1}\chi\,\tau_\ell(\chi)\,,\ E = \operatorname{ch}\chi \ge 1\,; \\ \sum\limits_{j=1}^{n_\ell} C_{\ell j}\,\delta(\operatorname{ch}\chi - \operatorname{ch}\chi_j)\,,\ 0 \le E = \operatorname{ch}\chi < 1\,, \\ \chi = i\,\kappa\,,\ \chi_j = i\,\kappa_j\,,\ 0 < \kappa\,,\ \kappa_j \le \pi/2 \end{cases}$$

есть спектральная плотность, соответствующая локальному квазипотенциалу $W(\rho)$ (см. формулу (2.63)).

состояний полного квазипотенциала с энергиями

$$
\begin{gathered}
0 \le E_{tj'} = \operatorname{ch}\chi_{tj'} < 1\,,\ \chi_{tj'} = i\,\kappa_{tj'}\,,\\
0 < \kappa_{tj'} \le \pi/2\,,\ j' = 1, 2, ..., \sigma_\ell\,,\\
\sigma_\ell = \begin{cases}
n_\ell - 1\ (\Phi_\ell(1) < 0)\ , \\
n_\ell\ (\Phi_\ell(1) > 0)\ \text{ при } \varepsilon_\ell = +1\,; \\
n_\ell\ (\Phi_\ell(1) < 0)\ , \\
n_\ell + 1\ (\Phi_\ell(1) > 0)\ \text{ при } \varepsilon_\ell = -1\,,
\end{cases}
\end{gathered}
\tag{5.41}
$$

где функция $\Phi_\ell(E')$ определена в разделе 4.4.2, формула (4.84), а ν_ℓ – число “поддельных” связанных состояний с энергиями

$$
E_{fk} = \operatorname{ch}\chi_{fk} \ge 1\,,\ k = \begin{cases}
0, 1, ..., \nu_\ell - 1\,,\ \varepsilon_\ell = +1\,; \\
1, 2, ..., \nu_\ell\,,\ \varepsilon_\ell = -1\,.
\end{cases}
\tag{5.42}
$$

При этом, как было установлено в разделе 4.4.3, формула (4.94), энергии (5.41) истинных связанных состояний полного квазипотенциала являются простыми корнями уравнения

$$
\begin{gathered}
\Phi_\ell(E_{tj'}) = \varepsilon_\ell - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n_\ell}\frac{C_{\ell j}\left|\tilde V_\ell(\chi_j)\right|^2}{E_{tj'} - E_j} + \frac{\varepsilon_\ell}{2}\int\limits_0^\infty d\chi\,\frac{A_\ell(\chi)}{\operatorname{ch}\chi - E_{tj'}} = 0\,,\\
j' = 1, 2, ..., \sigma_\ell\,.
\end{gathered}
\tag{5.43}
$$

В то же время энергии (5.42) “поддельных” связанных состояний (см. раздел 4.4.3, формула (4.104)) находятся по тем значениям χ' , при которых приращение фазового сдвига пересекает прямые $\delta_\ell^V = \pi\,k$ (k – целое) сверху при возрастании χ', т.е.

$$
\delta_\ell^V(\chi_{fk}) = \pi\,k\,,\ k = \begin{cases}
0, 1, ..., \nu_\ell - 1\,,\ \varepsilon_\ell = +1\,; \\
1, 2, ..., \nu_\ell\,,\ \varepsilon_\ell = -1\,.
\end{cases}
\tag{5.44}
$$

5.3.2. Метод и условие единственности решения интегрального уравнения для функции $A_\ell(\chi')$

Сделаем замену переменных $x = \operatorname{ch}\chi'$, $t = \operatorname{ch}\chi$ и введем следующие обозначения:

$$
\begin{gathered}
\Delta_\ell^V(x) = \delta_\ell^V(\operatorname{arch} x) \ , \quad g_\ell(x) = -\frac{2}{\pi}\left(x^2-1\right)^{1/2} \operatorname{tg}\Delta_\ell^V(x) \ , \\
\psi_\ell(x) = A_\ell(\operatorname{arch} x)\ g_\ell^{-1}(x)\left[1+\frac{i\,\pi}{2}\,g_\ell(x)\left(x^2-1\right)^{-1/2}\right] , \\
h_\ell(x) = \frac{\pi}{2}\,g_\ell(x)\left(x^2-1\right)^{-1/2}\left[1-\frac{i\,\pi}{2}\,g_\ell(x)\left(x^2-1\right)^{-1/2}\right]^{-1} = \\
= -\sin\Delta_\ell^V(x)\,\exp\left[-i\,\Delta_\ell^V(x)\right] .
\end{gathered}
\tag{5.45}
$$

Тогда, используя представление (4.26), интегральное уравнение (5.36) преобразуется к виду

$$
\psi_\ell(x) = 1 - \frac{\varepsilon_\ell}{2}\sum_{j=1}^{n_\ell} C_{\ell j}\,\frac{\left|\tilde V_\ell(\chi_j)\right|^2}{x-E_j} + \frac{1}{\pi}\int\limits_1^\infty dt\,\frac{\psi_\ell(t)\ h_\ell^*(t)}{t-x-i\,0} . \tag{5.46}
$$

Интегральное уравнение (5.46) является неоднородным интегральным уравнением, как и в случае, когда локальная часть полного квазипотенциала отсутствует ($W(\rho)\equiv 0$) (см. раздел 5.2.2). Отметим, что оно по форме совпадает с соответствующим ему нерелятивистским аналогом, полученным в работе [110], [111].

Для решения интегрального уравнения (5.46) рассмотрим функцию

$$
H_\ell(z) = \mu_\ell(z) + \frac{1}{\pi}\int\limits_1^\infty dt\,\frac{\psi_\ell(t)\ h_\ell^*(t)}{t-z} , \tag{5.47}
$$

где

$$
\mu_\ell(z) = 1 - \frac{\varepsilon_\ell}{2}\sum_{j=1}^{n_\ell} C_{\ell j}\,\frac{\left|\tilde V_\ell(\chi_j)\right|^2}{z-E_j} .
$$

Очевидно, функция $H_\ell(z)$ является аналитической в комплексной плоскости переменной z с разрезом от 1 до $+\infty$, за исключением простых полюсов в точках $z = E_j$ ($0 \le E_j < 1$, $j = 1, 2, ..., n_\ell$), причем

$$
\lim_{|z|\to\infty} H_\ell(z) = 1 \tag{5.48}
$$

во всех направлениях, если только функция $\psi_\ell\,(x)$ непрерывна по Гельдеру, а интеграл в (5.47) сходится. Тогда решение интегрального уравнения (5.46) будет иметь вид

$$\psi_\ell\,(x) = H_\ell\,(x_+) \equiv \lim_{\eta\to+0} H_\ell\,(x + i\,\eta)\ \ ,\ 1 \le x \le \infty\,. \tag{5.49}$$

Функцию $H_\ell(z)$ представим в форме

$$H_\ell(z) = \mu_\ell(z) + G_\ell(z)\,\exp\left[\omega_\ell(z)\right], \tag{5.50}$$

где

$$\omega_\ell\,(z) = -\,\frac{1}{\pi}\int\limits_1^\infty dt\,\frac{\Delta_\ell^V\,(t)}{t-z}\,, \tag{5.51}$$

причем из предположений о поведении приращения фазового сдвига и условий (5.39) и (5.48) следует, что во всех направлениях

$$\lim_{|z|\to\infty}\omega_\ell\,(z) = 0\ ,\quad \lim_{|z|\to\infty} G_\ell\,(z) = 0\,. \tag{5.52}$$

Кроме того, функция $G_\ell(z)$ должна быть аналитической в комплексной плоскости переменной z с разрезом от 1 до $+\infty$, а функция (5.51) определена на разрезе всюду, кроме, быть может, точки $z = 1$, где ее поведение дается выражением

$$\omega_\ell\,(z) = (1/\pi)\,\Delta_\ell^V\,(1)\,\ln|1-z| + \Omega_\ell\,(z)\ \ ,\ z\to 1\,. \tag{5.53}$$

Здесь функция $\Omega_\ell(z)$ конечна при $z \to 1$, а $\Delta_\ell^V\,(1) = \delta_\ell^V\,(0) = \pi(\sigma_\ell - n_\ell + \nu_\ell)$ в соответствии с теоремой Левинсона (5.40). Тем самым функция $\exp\left[\omega_\ell(z)\right]$ либо конечна при $\sigma_\ell - n_\ell + \nu_\ell = 0$, либо имеет нуль порядка $\sigma_\ell - n_\ell + \nu_\ell > 0$ в точке $z = 1$ [19].

Для скачка функции $H_\ell(z)$ на разрезе имеем

$$\begin{gathered} H_\ell(x_+) - H_\ell(x_-) = \\ = G_\ell(x_+)\,\exp\left[\omega_\ell(x_+)\right] - G_\ell(x_-)\,\exp\left[\omega_\ell(x_-)\right] = \\ = -2\,i\,\sin\Delta_\ell^V(x)\,\exp\left[i\,\Delta_\ell^V(x)\right]\psi_\ell(x)\,. \end{gathered} \tag{5.54}$$

[19] В том случае, когда $\delta_\ell^V(0) = -\pi$, т.е. при $\sigma_\ell = n_\ell - 1$, $n_\ell \ne 0$ и $\nu_\ell = 0$ ($\varepsilon_\ell = +1$), функция $H_\ell(z)$, а, значит, и функция $\psi_\ell(x)$, не являются более конечными при $z = 1$. Следовательно, решение обратной задачи в этом случае требует отдельного рассмотрения.

Подставив решение (5.49) в выражение (5.54) и учитывая представление (5.50), приходим к неоднородному уравнению Римана–Гильберта для функции $G_\ell(z)$:

$$\begin{gathered} G_\ell(x_+)\,\exp\left[\omega_\ell(x_+) + 2\,i\,\Delta_\ell^V(x)\right] - G_\ell(x_-)\,\exp\left[\omega_\ell(x_-)\right] = \\ = \mu_\ell(x)\left\{1 - \exp\left[2\,i\,\Delta_\ell^V(x)\right]\right\}\,, \end{gathered} \tag{5.55}$$

где

$$\omega_\ell(x_\pm) = \lim_{\eta\to+0}\omega_\ell(x \pm i\,\eta) = \alpha_\ell(x) \mp i\,\Delta_\ell^V(x)\,, \tag{5.56}$$

$$\alpha_\ell(x) = -\frac{1}{\pi}\,\mathrm{P}\int_1^\infty dt\,\frac{\Delta_\ell^V(t)}{t - x}\,,\ 1 \le x \le \infty\,. \tag{5.57}$$

Далее, учитывая выражение (5.56), уравнение (5.55) преобразуем к виду

$$\begin{gathered} G_\ell(x_+) - G_\ell(x_-) = -\mu_\ell(x)\left\{\exp\left[-\omega_\ell(x_+)\right] - \exp\left[-\omega_\ell(x_-)\right]\right\}\,, \\ 1 \le x \le \infty\,. \end{gathered} \tag{5.58}$$

Частное решение уравнения (5.58), удовлетворяющее условиям (5.52), дается выражением

$$\tilde{G}_\ell(z) = 1 - \mu_\ell(z)\,\exp\left[-\omega_\ell(z)\right] - \frac{\varepsilon_\ell}{2}\sum_{j=1}^{n_\ell} C_{\ell j}\,\frac{\left|\tilde{V}_\ell(\chi_j)\right|^2}{z - E_j}\,\exp\left[-\omega_\ell(E_j)\right].$$

Отсюда находим, что частное решение $\tilde{\psi}_\ell(x)$ неоднородного интегрального уравнения (5.46), в соответствии с выражениями (5.49) и (5.50), имеет вид

$$\tilde{\psi}_\ell(x) = \exp\left[\omega_\ell(x_+)\right]\left\{1 - \frac{\varepsilon_\ell}{2}\sum_{j=1}^{n_\ell} C_{\ell j}\,\frac{\left|\tilde{V}_\ell(\chi_j)\right|^2}{x - E_j}\,\exp\left[-\omega_\ell(E_j)\right]\right\}. \tag{5.59}$$

При этом функция (5.59) регулярна в точке $x = 1$ (либо она конечна при $\sigma_\ell - n_\ell + \nu_\ell = 0$, либо имеет нуль порядка $\sigma_\ell - n_\ell + \nu_\ell > 0$ в этой точке), непрерывна по Гельдеру с тем же индексом, что и приращение фазового сдвига, и ограничена при $x \to +\infty$, а это совпадает с априорными предположениями о ее свойствах. Более того, функция (5.59) удовлетворяет уравнению (5.46), поскольку по теореме о вычетах мы можем записать

$$\lim_{R\to+\infty\,,\eta\to+0}\frac{1}{2\,i\,\pi}\int\limits_{C^+}dz\,\frac{\tilde H_\ell\,(z)}{z-x-i\,\eta}=\,\mathrm{res}\left[\frac{\tilde H_\ell(z)}{z-x-i\,\eta}\,,\ z=x+i\,\eta\right]\Bigg|_{\eta\to+0}+$$

$$+\sum_{j=1}^{n_\ell}\delta_{nj}\ \mathrm{res}\left[\frac{\tilde H_\ell(z)}{z-x-i\,\eta}\,,\ z=E_n\right]\Bigg|_{\eta\to+0}\,,$$

где

$$\tilde H_\ell(z)=\left\{1-\frac{\varepsilon_\ell}{2}\,\sum_{n=1}^{n_\ell}C_{\ell n}\,\frac{|\tilde V_\ell(\chi_n)|^2}{z-E_n}\,\exp\left[-\omega_\ell(E_n)\right]\right\}\,\exp[\omega_\ell(z)]\,,$$

а C^+ есть замкнутый контур, состоящий из окружностей C_R^+ радиуса R с центром в точке $z=0$, C_η^- радиуса η с центром в точке $z=1$ и двух берегов разреза от 1 до R, проходимых в противоположных направлениях. При этом вклад интеграла по окружности C_R^+, согласно асимптотике (5.52), стремится к 1 при $R\to+\infty$, а вклад интеграла по окружности C_η^- стремится к нулю при $\eta\to+0$, если исходить из оценки (5.53) и выводов, приведенных в подстрочном примечании 19. Отсюда, учитывая выражение (5.56), получим

$$1+\frac{1}{\pi}\int\limits_1^\infty dt\,\frac{\tilde\psi_\ell(t)\,h_\ell^*(t)}{t-x-i\,0}=\tilde\psi_\ell(x)+\frac{\varepsilon_\ell}{2}\,\sum_{j=1}^{n_\ell}C_{\ell j}\,\frac{|\tilde V_\ell(\chi_j)|^2}{x-E_j}\,,$$

т.е. функция $\tilde\psi_\ell(x)$, определяемая выражением (5.59), является частным решением неоднородного интегрального уравнения (5.46).

Далее, как и в случае чисто сепарабельного взаимодействия (см. раздел 5.2.2), общее решение однородного уравнения

$$\psi_{\ell o}\,(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_1^\infty dt\,\frac{\psi_{\ell o}\,(t)\ h_\ell^*\,(t)}{t-x-i\,0} \tag{5.60}$$

имеет вид

$$\psi_{\ell o}\,(x)=H_{\ell o}\,(x_+)=\lim_{\eta\to+0}H_{\ell o}(x+i\,\eta)\,,\ 1\le x\le\infty\,, \tag{5.61}$$

где функция

$$H_{\ell o}\,(z)=\frac{1}{\pi}\int\limits_1^\infty dt\,\frac{\psi_{\ell o}\,(t)\ h_\ell^*\,(t)}{t-z} \tag{5.62}$$

является аналитической в комплексной плоскости переменной z с разрезом от 1 до $+\infty$, причем во всех направлениях

$$\lim_{|z|\to\infty} H_{\ell o}(z) = 0\,. \tag{5.63}$$

Кроме того, функция (5.62) удовлетворяет однородному уравнению Римана–Гильберта

$$H_{\ell o}(x_+)\,\exp\left[2\,i\,\Delta_\ell^V(x)\right] - H_{\ell o}(x_-) = 0\ ,\ 1 \le x \le \infty\,, \tag{5.64}$$

следующему из выражения (5.54) для скачка функции $H_\ell(z) \equiv H_{\ell o}(z)$ на разрезе и представления (5.61). Поэтому общее решение уравнения (5.60) будем искать в виде (см. так же раздел 5.2.2)

$$H_{\ell o}(z) = \exp\left[\omega_\ell\,(z)\right]\,\sum_{k=0}^{m} \frac{A_k}{(z-1)^k}\,. \tag{5.65}$$

Подстановка выражения (5.65) в уравнение (5.64) и требование конечности функции $H_{\ell o}(z)$ при $z=1$ (она либо конечна при $\sigma_\ell - n_\ell + \nu_\ell = 0$, либо имеет нуль порядка $\sigma_\ell - n_\ell + \nu_\ell > 0$ в этой точке) дает

$$m = \begin{cases} \sigma_\ell - n_\ell + \nu_\ell > 0\ , \\ 0 \text{ при } \sigma_\ell - n_\ell + \nu_\ell = 0\,, \end{cases}$$

причем $A_0 = 0$ при $m = \sigma_\ell - n_\ell + \nu_\ell = 0$. Следовательно,

$$\psi_{\ell o}(x) = H_{\ell o}(x_+) =$$

$$= \exp\left[\omega_\ell(x_+)\right]\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{\sigma_\ell - n_\ell + \nu_\ell} \frac{A_k}{(x-1)^k} \text{ при } \sigma_\ell - n_\ell + \nu_\ell > 0\,, \\ 0 \text{ при } \sigma_\ell - n_\ell + \nu_\ell = 0\,. \end{cases} \tag{5.66}$$

При этом, как и в случае частного решения, в результате интегрирования по контуру C^+ приходим к выводу, что функция (5.66) является решением уравнения (5.60) и обладает всеми требуемыми свойствами.

Таким образом, общее решение интегрального уравнения (5.46), в соответствии с соотношениями (5.56), (5.57), (5.59) и (5.66), дается выражением

$$\begin{gathered} \psi_\ell(x) = \tilde{\psi}_\ell(x) + \psi_{\ell o}(x) = \exp\left[\alpha_\ell(x) - i\,\Delta_\ell^V(x)\right]\Bigg\{1 + \\ + \sum_{k=1}^{\sigma_\ell - n_\ell + \nu_\ell} \frac{A_k}{(x-1)^k} - \frac{\varepsilon_\ell}{2}\sum_{j=1}^{n_\ell} C_{\ell j}\,\frac{|\tilde{V}_\ell(\chi_j)|^2}{x - E_j}\,\exp\left[-\omega_\ell(E_j)\right]\Bigg\}\,. \end{gathered} \tag{5.67}$$

Наконец, принимая во внимание обозначения (5.45) и преобразуя сумму в произведение, решение (5.67) запишем в двух формах:

$$A_\ell(\chi') = -\frac{2}{\pi}\,\operatorname{sh}\chi'\,\sin\delta_\ell^V(\chi')\,\exp\left[\alpha_\ell(\operatorname{ch}\chi')\right]\Bigg\{1+ \\ +\sum_{k=1}^{N_\ell}\frac{A_k}{(\operatorname{ch}\chi'-1)^k}-\sum_{j=1}^{n_\ell}\frac{B_j}{\operatorname{ch}\chi'-E_j}\Bigg\}, \tag{5.68}$$

$$A_\ell(\chi') = -\frac{2}{\pi}\,\operatorname{sh}\chi'\,\sin\delta_\ell^V(\chi')\,\exp\left[\alpha_\ell(\operatorname{ch}\chi')\right]\times \\ \times\prod_{k=1-\delta}^{N_\ell-\delta}\left(1+\frac{a_k}{\operatorname{ch}\chi'-1}\right)\prod_{j=1}^{n_\ell}\left(1-\frac{b_j}{\operatorname{ch}\chi'-E_j}\right), \tag{5.69}$$

где

$$\alpha_\ell\left(\operatorname{ch}\chi'\right) = -\frac{1}{\pi}\,\mathrm{P}\int_0^\infty d\chi\,\frac{\operatorname{sh}\chi\,\delta_\ell^V(\chi)}{\operatorname{ch}\chi-\operatorname{ch}\chi'}\,, \tag{5.70}$$

$$B_j = \frac{\varepsilon_\ell}{2}\,C_{\ell j}\,|\tilde V_\ell(\chi_j)|^2\,\exp\left[-\omega_\ell(E_j)\right], \tag{5.71}$$

$$N_\ell = \sigma_\ell - n_\ell + \nu_\ell = \begin{cases} \nu_\ell - 1\,,\ \sigma_\ell = n_\ell - 1\,,\ \varepsilon_\ell = +1\,; \\ \nu_\ell\,,\ \sigma_\ell = n_\ell\,,\ \varepsilon_\ell = \pm 1\,; \\ \nu_\ell + 1\,,\ \sigma_\ell = n_\ell + 1\,,\ \varepsilon_\ell = -1\,, \end{cases} \tag{5.72}$$

$$\delta = \begin{cases} 1\,,\ \varepsilon_\ell = +1\,, \\ 0\,,\ \varepsilon_\ell = -1\,. \end{cases}$$

5.3.3. Определение параметров решения интегрального уравнения

Решения (5.68) и (5.69) зависят от $N_\ell + n_\ell = \sigma_\ell + \nu_\ell$ параметров $\{A_k\}$, $\{B_j\}$ и $\{a_k\}$, $\{b_j\}$, соответственно, причем зависимости между этими параметрами устанавливаются из соотношения

$$1+\sum_{k=1}^{N_\ell}\frac{A_k}{(\operatorname{ch}\chi'-1)^k}-\sum_{j=1}^{n_\ell}\frac{B_j}{\operatorname{ch}\chi'-E_j} = \\ = \prod_{k=1-\delta}^{N_\ell-\delta}\left(1+\frac{a_k}{\operatorname{ch}\chi'-1}\right)\prod_{j=1}^{n_\ell}\left(1-\frac{b_j}{\operatorname{ch}\chi'-E_j}\right). \tag{5.73}$$

В частности, из соотношения (5.73) легко находим

$$B_j = b_j \prod_{\substack{n=1\\ n\neq j}}^{n_\ell} \left(1 - \frac{b_n}{E_j - E_n}\right) \prod_{k=1-\delta}^{N_\ell-\delta} \left(1 - \frac{a_k}{1 - E_j}\right), \qquad j = 1, 2, ..., n_\ell\,, \tag{5.74}$$

где N_ℓ и δ определены в (5.72).

Заметим, что решение (5.68) в нерелятивистском пределе, когда $\chi' \ll 1$, совпадает с его нерелятивистским аналогом, найденным в работе [110], [111]. В то же время вопрос о единственности определения параметров нерелятивистской обратной задачи в этой работе исследован не был.

Для нахождения параметров $\{a_k\}$ и $\{b_j\}$ заметим, что функция $A_\ell(\chi')$ по определению (5.37) должна сохранять свой знак при всех значениях χ', в то время как приращение фазового сдвига при значениях энергий (5.42) "поддельных" связанных состояний удовлетворяет условию (5.44). Следовательно, при переходе через точки χ_{fk} (соотношение (5.42)) изменение знака $\sin\delta_\ell^V(\chi')$ должно совпадать с изменением знака выражения, состоящего из произведений по k и j в правой части решения (5.69). Это требование будет выполнено, если

$$b_{n_\ell} = \operatorname{ch}\chi_{f(\nu_\ell-1)} - \operatorname{ch}\chi_{n_\ell}\,,\ \sigma_\ell = n_\ell - 1\,,\ \varepsilon_\ell = +1\,;$$

$$a_k = 1 - \operatorname{ch}\chi_{fk}\,,$$

$$k = \begin{cases} 0, 1, ..., N_\ell - 1\,,\ N_\ell = \begin{cases} \nu_\ell - 1\,,\ \sigma_\ell = n_\ell - 1\,, \\ \nu_\ell\,,\ \sigma_\ell = n_\ell\,,\ \varepsilon_\ell = +1\,; \end{cases} \\ 1, 2, ..., N_\ell\,,\ N_\ell = \nu_\ell\,,\ \sigma_\ell = n_\ell\,,\ \varepsilon_\ell = -1\,; \\ 1, 2, ..., N_\ell - 1\,,\ N_\ell = \nu_\ell + 1\,,\ \sigma_\ell = n_\ell + 1\,,\ \varepsilon_\ell = -1\,. \end{cases} \tag{5.75}$$

Далее, используя σ_ℓ уравнений (5.43) для энергий (5.41), мы можем найти оставшиеся значения параметров $\{b_j\}$ и $a_{\nu_\ell+1}$. С этой целью подставим решение (5.69) в уравнения (5.43) для энергий (5.41). Тогда, учитывая соотношение (5.71), мы получим

$$1 - \sum_{j=1}^{n_\ell} \frac{B_j\, \exp\left[\omega_\ell(E_j)\right]}{E_{tj'} - E_j} - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\chi\, \frac{\operatorname{sh}\chi\, \sin\delta_\ell^V(\chi)\, \exp\left[\alpha_\ell(\operatorname{ch}\chi)\right]}{\operatorname{ch}\chi - E_{tj'}} \times \tag{5.76}$$

$$\times \prod_{k=1-\delta}^{N_\ell-\delta}\left(1+\frac{a_k}{\operatorname{ch}\chi-1}\right)\prod_{j=1}^{n_\ell}\left(1-\frac{b_j}{\operatorname{ch}\chi-E_j}\right)=0\,,$$

$$j'=1,2,...,\sigma_\ell\,.$$

Выполним в (5.76) замену переменной $x=\operatorname{ch}\chi$ и воспользуемся соотношением (5.56). Тогда вместо (5.76) будем иметь

$$1-\sum_{j=1}^{n_\ell}\frac{B_j\,\exp\left[\omega_\ell(E_j)\right]}{E_{tj'}-E_j}+\frac{1}{2\,i\,\pi}\int\limits_1^\infty dx\,\frac{\exp\left[\omega_\ell(x_+)\right]-\exp\left[\omega_\ell(x_-)\right]}{x-E_{tj'}}\times$$

$$\times \prod_{k=1-\delta}^{N_\ell-\delta}\left(1+\frac{a_k}{x-1}\right)\prod_{j=1}^{n_\ell}\left(1-\frac{b_j}{x-E_j}\right)=0\,, \tag{5.77}$$

$$j'=1,2,...,\sigma_\ell\,,$$

где N_ℓ и δ определены в (5.72).

Теперь заметим, что по теореме о вычетах мы можем записать

$$\lim_{\substack{R\to+\infty\\ \eta\to+0}}\ \frac{1}{2\,i\,\pi}\int\limits_{C^+}\frac{dz\,\exp\left[\omega_\ell(z)\right]}{z-E_{tj'}}\prod_{k=1-\delta}^{N_\ell-\delta}\left(1+\frac{a_k}{z-1}\right)\prod_{j=1}^{n_\ell}\left(1-\frac{b_j}{z-E_j}\right)=$$

$$=1+\frac{1}{2\,i\,\pi}\int\limits_1^\infty dx\,\frac{\exp\left[\omega_\ell(x_+)\right]-\exp\left[\omega_\ell(x_-)\right]}{x-E_{tj'}}\times$$

$$\times \prod_{k=1-\delta}^{N_\ell-\delta}\left(1+\frac{a_k}{x-1}\right)\prod_{j=1}^{n_\ell}\left(1-\frac{b_j}{x-E_j}\right)=$$

$$=\ \operatorname{res}\left\{\frac{\exp\left[\omega_\ell(z)\right]}{z-E_{tj'}}\prod_{k=1-\delta}^{N_\ell-\delta}\left(1+\frac{a_k}{z-1}\right)\prod_{j=1}^{n_\ell}\left(1-\frac{b_j}{z-E_j}\right),\ z=E_{tj'}\right\}+$$

$$+\sum_{j=1}^{n_\ell}\operatorname{res}\left\{\frac{\exp\left[\omega_\ell(z)\right]}{z-E_{tj'}}\prod_{k=1-\delta}^{N_\ell-\delta}\left(1+\frac{a_k}{z-1}\right)\prod_{n=1}^{n_\ell}\left(1-\frac{b_n}{z-E_n}\right),\ z=E_j\right\},$$

$$j'=1,2,...,\sigma_\ell\,.$$

Здесь C^+ – тот же замкнутый контур, что и при интегрировании функции $\tilde{H}_\ell(z)$. Кроме того, мы также учли, что вклад интеграла по окружности C_R^+, в соответствии с асимптотикой (5.52), стремится к 1 при $R\to+\infty$, а вклад интеграла по окружности C_η^- стремится к нулю при $\eta\to+0$, если следовать оценке (5.53) и выводам подстрочного примечания 19. Следовательно, уравнения (5.77), с учетом последнего результата, принимают вид

$$\exp\left[\omega_\ell(E_{tj'})\right]\prod_{k=1-\delta}^{N_\ell-\delta}\left(1-\frac{a_k}{1-E_{tj'}}\right)\prod_{j=1}^{n_\ell}\left(1-\frac{b_j}{E_{tj'}-E_j}\right)=0\,,\qquad j'=1,2,...,\sigma_\ell\,. \tag{5.78}$$

Отсюда, принимая во внимание выражение (5.75), находим:

$$a_{\nu_\ell+1}=1-\operatorname{ch}\chi_{t(n_\ell+1)}\ ,\ \sigma_\ell=n_\ell+1\ (\Phi_\ell(1)>0)\ ,\ \varepsilon_\ell=-1\,;$$

$$b_j=\operatorname{ch}\chi_{tj'}-\operatorname{ch}\chi_j\,,$$

$$j'=j=\begin{cases}1,2,...,\sigma_\ell\,,\ \sigma_\ell=\begin{cases}n_\ell-1\ (\Phi_\ell(1)<0)\,,\\ n_\ell\ (\Phi_\ell(1)>0)\,,\ \varepsilon_\ell=+1\,;\end{cases}\\[2ex] 1,2,...,n_\ell\,,\ \sigma_\ell=\begin{cases}n_\ell\ (\Phi_\ell(1)<0)\,,\\ n_\ell+1\ (\Phi_\ell(1)>0)\,,\ \varepsilon_\ell=-1\,.\end{cases}\end{cases} \tag{5.79}$$

Отметим, что уравнения (5.78) допускают и решения вида

$$b_j=E_{tj}-E_j=0\,.$$

Значит, в этом случае имеют место вырождения при энергиях E_j, причем $E_{tj}=E_{t(j+1)}=E_j$, т.е. степень вырождения для каждого E_j не может быть больше двух. Кроме того, из (5.78) также следует, что хотя бы один из параметров $\{b_j\}$ отличен от нуля (см. раздел 4.4.3).

Итак, коэффициенты $\{a_k\}$ и $\{b_j\}$ определяются однозначно. Поэтому, учитывая выражения (5.75) и (5.79), решение (5.69) представим в следующем виде:

$$A_\ell(\chi')=-\frac{2}{\pi}\operatorname{sh}\chi'\,\sin\delta_\ell^V(\chi')\,\exp\left[\alpha_\ell(\operatorname{ch}\chi')\right]\,\left[\operatorname{sh}(\chi'/2)\right]^{-2N_\ell}\times$$
$$\times\prod_{j'=1}^{\sigma_\ell}\left[\operatorname{sh}^2(\chi'/2)+\sin^2(\kappa_{tj'}/2)\right]\prod_{j=1}^{n_\ell}\left[\operatorname{sh}^2(\chi'/2)+\sin^2(\kappa_j/2)\right]^{-1}\times \tag{5.80}$$
$$\times\prod_{k=1-\delta}^{\nu_\ell-\delta}\left[\operatorname{sh}^2(\chi'/2)-\operatorname{sh}^2(\chi_{fk}/2)\right],$$

где σ_ℓ определено в (5.41), а N_ℓ и δ – в (5.72).

Таким образом, решение (5.80) однозначно определяется энергиями (2.8) и (5.41) связанных состояний локального $W(\rho)$ и полного квазипотенциалов, соответственно, и приращением фазового сдвига, так как значения χ_{fk} также задаются его поведением – условием (5.44). Кроме того, из (5.70) и (5.80) следует, что функция $A_\ell(\chi')$ непрерывна по Гельдеру и при $|\chi'| \to \infty$ она имеет асимптотику

$$\operatorname{ch}\chi' \, |\chi'|^{-\gamma}, \ \gamma > 1 \, ,$$

если только приращение фазового сдвига удовлетворяет условию (5.39), а, следовательно, квазипотенциалы $W(\rho)$ и $V_\ell(\rho)$ удовлетворяют условиям (2.10) и (4.9).

5.3.4. Метод восстановления квазипотенциала $\tilde{V}_\ell\,(\chi')$

Для восстановления компоненты $V_\ell\,(\rho)$ с помощью преобразования (5.38) необходимо, опираясь на выражение (5.80), найти (в отличие от нерелятивистского случая [110], [111]) комплексную функцию $\tilde{V}_\ell\,(\chi')$. С этой целью введем функцию

$$\begin{gathered} \hat{V}_\ell\,(\operatorname{sh}(\chi'/2)) = \prod_{j'=1}^{\sigma_\ell} \left[\frac{\operatorname{sh}(\chi'/2) + i\,\sin(\kappa_{tj'}/2)}{\operatorname{sh}(\chi'/2) - i\,\sin(\kappa_{tj'}/2)} \right] \times \\ \times \prod_{j=1}^{n_\ell} \left[\frac{\operatorname{sh}(\chi'/2) - i\,\sin(\kappa_j/2)}{\operatorname{sh}(\chi'/2) + i\,\sin(\kappa_j/2)} \right] \left| \frac{Q_\ell\,(\operatorname{cth}\chi')}{F_\ell^W\,(\chi')} \right|^2 \left[\tilde{V}_\ell^{(-)}\,(\operatorname{sh}(\chi'/2)) \right]^2 \, , \end{gathered} \tag{5.81}$$

где

$$\begin{gathered} \left| \tilde{V}_\ell^{(-)}\,(\operatorname{sh}(\chi'/2)) \right| = \left| \tilde{V}_\ell\,(\chi') \right| \, , \ \ \operatorname{Re}\tilde{V}_\ell^{(-)}\,(\operatorname{sh}(\chi'/2)) = \operatorname{Re}\tilde{V}_\ell\,(\chi') \, , \\ \arg\tilde{V}_\ell^{(-)}\,(-\operatorname{sh}(\chi'/2)) = -\arg\tilde{V}_\ell^{(-)}\,(\operatorname{sh}(\chi'/2)) \, . \end{gathered} \tag{5.82}$$

Поскольку $\arg\tilde{V}_\ell(-\chi') = \arg\tilde{V}_\ell(\chi')$, то, в силу условий (5.82), это означает, что

$$\arg\tilde{V}_\ell(\chi') = \operatorname{sgn}(\chi') \, \arg\tilde{V}_\ell^{(-)}(\operatorname{sh}(\chi'/2)) \, . \tag{5.83}$$

Тогда функция $\hat{V}_\ell\,(\operatorname{sh}(\chi'/2))$ является аналитической в области $0 < \operatorname{Im}\chi' \leq \pi/2$, непрерывна при $0 \leq \operatorname{Im}\chi' \leq \pi/2$ и для нее справедлива оценка

$$\hat{V}_\ell\,(\operatorname{sh}(\chi'/2)) = O\left(\operatorname{sh}^2(\chi'/2)\right) \, , \ \ |\chi'| \to \infty \, , \ 0 \leq \operatorname{Im}\chi' \leq \pi/2 \, , \tag{5.84}$$

если только условие (5.39) выполняется. Более того, функция $\hat{V}_\ell\,(\operatorname{sh}(\chi'/2))$ нигде не обращается в нуль в области $0 < \operatorname{Im}\chi' \leq \pi/2$. Тем самым функция $\ln\hat{V}_\ell\,(\operatorname{sh}(\chi'/2))$ является аналитической в области $0 < \operatorname{Im}\chi' \leq \pi/2$

и ведет себя как $\ln \mathrm{sh}^2\,(\chi'/2)$ при $|\chi'| \to \infty$ в силу оценки (5.84). Следовательно, мы имеем право применить интегральное преобразование Гильберта к действительной и мнимой частям функции $\ln \hat{V}_\ell\,(\mathrm{sh}\,(\chi'/2))$. Тогда для действительных χ' имеем

$$\mathrm{Im} \ln \hat{V}_\ell\,(\mathrm{sh}\,(\chi'/2)) = -\frac{1}{\pi}\,\mathrm{P}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\,(\mathrm{sh}\,(\chi/2))\;\frac{\mathrm{Re} \ln \hat{V}_\ell\,(\mathrm{sh}\,(\chi/2))}{\mathrm{sh}\,(\chi/2) - \mathrm{sh}\,(\chi'/2)} =$$

$$= -\frac{2\;\mathrm{sh}\,(\chi'/2)}{\pi}\,\mathrm{P}\int\limits_{0}^{\infty} d\chi\,\frac{\mathrm{ch}\,(\chi/2)\;\ln\left[\pi\,\varepsilon_\ell\,A_\ell\,(\chi)\,/2\right]}{\mathrm{ch}\,\chi - \mathrm{ch}\,\chi'}\,,$$

где мы учли, что

$$\mathrm{Re} \ln \hat{V}_\ell(\mathrm{sh}(\chi'/2)) = \ln\left[\pi\,\varepsilon_\ell\,A_\ell(\chi')/2\right].$$

Отсюда, принимая во внимание выражение (5.81), получим

$$\left|\frac{Q_\ell\,(\mathrm{cth}\,\chi')}{F_\ell^W\,(\chi')}\right|^2\;\left[\tilde{V}_\ell^{(-)}\,(\mathrm{sh}\,(\chi'/2))\right]^2 = \frac{\pi}{2}\,\varepsilon_\ell\,A_\ell(\chi')\times$$

$$\times \prod_{j'=1}^{\sigma_\ell}\left[\frac{\mathrm{sh}\,(\chi'/2) - i\,\sin\,(\kappa_{tj'}/2)}{\mathrm{sh}\,(\chi'/2) + i\,\sin\,(\kappa_{tj'}/2)}\right]\prod_{j=1}^{n_\ell}\left[\frac{\mathrm{sh}\,(\chi'/2) + i\,\sin\,(\kappa_j/2)}{\mathrm{sh}\,(\chi'/2) - i\,\sin\,(\kappa_j/2)}\right]\times \tag{5.85}$$

$$\times \exp\left[\frac{2\;\mathrm{sh}\,(\chi'/2)}{i\,\pi}\,\mathrm{P}\int\limits_{0}^{\infty} d\chi\,\frac{\mathrm{ch}\,(\chi/2)\;\ln\left[\pi\,\varepsilon_\ell\,A_\ell\,(\chi)\,/2\right]}{\mathrm{ch}\,\chi - \mathrm{ch}\,\chi'}\right].$$

Наконец, учитывая соотношения (5.82) и (5.83), находим

$$\left|\frac{Q_\ell\,(\mathrm{cth}\,\chi')}{F_\ell^W\,(\chi')}\right|\;\tilde{V}_\ell\,(\chi') = \sqrt{\pi\,\varepsilon_\ell\,A_\ell\,(\chi')\,/2}\,\times$$

$$\times \exp\left\{-i\;\mathrm{sgn}\chi'\left[\sum_{j'=1}^{\sigma_\ell}\mathrm{arctg}\;\frac{\sin\,(\kappa_{tj'}/2)}{\mathrm{sh}\,(\chi'/2)} - \sum_{j=1}^{n_\ell}\mathrm{arctg}\;\frac{\sin\,(\kappa_j/2)}{\mathrm{sh}\,(\chi'/2)}\,+\right.\right. \tag{5.86}$$

$$\left.\left. + \frac{\mathrm{sh}\,(\chi'/2)}{\pi}\,\mathrm{P}\int\limits_{0}^{\infty} d\chi\,\frac{\mathrm{ch}\,(\chi/2)\;\ln\left[\pi\,\varepsilon_\ell\,A_\ell\,(\chi)\,/2\right]}{\mathrm{ch}\,\chi - \mathrm{ch}\,\chi'}\right]\right\}.$$

Таким образом, в рассмотренном здесь случае решение релятивистской обратной задачи существует и однозначно определяется приращением фазового сдвига и энергиями связанных состояний локального и полного квазипотенциалов. При этом частный случай, когда $\sigma_\ell = n_\ell - 1$, $n_\ell \neq 0$, а $\nu_\ell = 0$, как и в нерелятивистском случае [110], [111], должен быть исключен, поскольку решение (5.67) уже не является более регулярным при $x = 1$.

5.4. Восстановление компонент для суммы нелокальных сепарабельных квазипотенциалов. Общий случай

5.4.1. Интегральное уравнение для функции $A_{\ell n}(\chi')$: постановка задачи и основные предположения

В данном разделе рассматривается обратная задача для взаимодействия общего вида (4.1). Мы обобщим метод, рассмотренный в разделе 5.3, для восстановления компонент $V_{\ell n}(\rho)$ $(n = 1, 2, ..., M_\ell)$ суммы нелокальных сепарабельных квазипотенциалов полного взаимодействия (4.1). Мы покажем, что компоненты $V_{\ell n}(\rho)$ суммы нелокальных сепарабельных квазипотенциалов полного взаимодействия можно восстановить, если известны его локальная часть $W(\rho)$, приращения $\delta_\ell^{V_{\ell n}}(\chi')$ фазового сдвига и значения энергий связанных состояний. При этом мы будем считать, что локальная часть $W(\rho)$ полного взаимодействия является известной и допускает существование $\sigma_\ell^{(0)}$ связанных состояний с энергиями (4.119).

В основу рассматриваемого подхода положено выражение для приращений фазового сдвига (см. раздел 4.5.2, формулы (4.158), (4.163)):

$$\begin{gathered}\operatorname{tg}\delta_\ell^{V_{\ell n}}(\chi') = -\frac{\pi}{2}\operatorname{sh}^{-1}\chi' A_{\ell n}(\chi')\Bigg[1- \\ -\frac{\varepsilon_{\ell n}}{2}\sum_{j=1}^{\sigma_\ell^{(n-1)}} C_{\ell j}^{(n-1)}\frac{\left|\tilde{V}_{\ell n}^{(n-1)}(\chi_{tj}^{(n-1)})\right|^2}{\operatorname{ch}\chi' - \operatorname{ch}\chi_{tj}^{(n-1)}} + \frac{1}{2}\,\mathrm{P}\int_0^\infty d\chi\,\frac{A_{\ell n}(\chi)}{\operatorname{ch}\chi - \operatorname{ch}\chi'}\Bigg]^{-1},\end{gathered} \tag{5.87}$$

$$\begin{gathered}A_{\ell n}(\chi) = \varepsilon_{\ell n}\,\tau_\ell^{(n-1)}(\chi)\left|\tilde{V}_{\ell n}^{(n-1)}(\chi)\right|^2,\ \varepsilon_{\ell n} = \pm 1\,, \\ \tau_\ell^{(n-1)}(\chi) = \frac{2}{\pi}\left[\frac{Q_\ell(\operatorname{cth}\chi)}{\left|F_\ell^W(\chi)\right|}\prod_{m=1}^{n-1}\cos\delta_\ell^{V_{\ell m}}(\chi)\right]^2,\ n = 1, 2, ..., M_\ell\,.\end{gathered} \tag{5.88}$$

Здесь $C_{\ell j}^{(n)}$ – нормировочные константы для собственных функций $\psi_\ell^{(n)}(\rho\,,\chi_{tj}^{(n)})$ истинных связанных состояний с энергиями $E_{tj}^{(n)} = \operatorname{ch}\chi_{tj}^{(n)}$ $(\chi_{tj}^{(n)} = i\,\kappa_{tj}^{(n)}\,,\ 0 < \kappa_{tj}^{(n)} \le \pi/2\,,\ j = 1, 2, ..., \sigma_\ell^{(n)}\,,\ n = 1, 2, ..., M_\ell)$, обусловленных суперпозицией $W(\rho)$ и $\sum\limits_{m=1}^{n}\varepsilon_{\ell m}V_{\ell m}(\rho)\,V_{\ell m}(\rho')$ (см. раздел 4.5.3, формула (4.168)). Кроме того, значения $\chi_{tj}^{(n)}$ являются нулями функции

Йоста $F_\ell^{(n)}(\chi)$, которая отвечает n-ому шагу итерации и связана с соответствующим ей полным фазовым сдвигом $\delta_\ell^{(n)}(\chi)$ соотношениями (4.144) и (4.145)), раздел 4.5.1. При этом нормировочные константы $C_{\ell j}^{(n)}$ для собственных функций $\psi_\ell^{(n)}(\rho\,,\,\chi_{tj}^{(n)})$ этих связанных состояний также выражаются через функцию Йоста $F_\ell^{(n)}(\chi)$ (см. раздел 4.5.1, формула (4.143)). В то же время функция $F_\ell^W(\chi)$ является функцией Йоста для локального квазипотенциала $W(\rho)$, а ее нули $\chi_{tj}^{(0)}$ $(j = 1, 2, ..., \sigma_\ell^{(0)})$ определяют значения энергий (4.119) связанных состояний, обусловленных локальным квазипотенциалом $W(\rho)$. Так же напомним, что функции $\tilde{V}_{\ell n}^{(n-1)}(\chi)$ и $V_{\ell n}(\rho)$, отвечающие n-ому шагу итерации, связаны релятивистскими интегральными преобразованиями (4.146) и (4.147), раздел 4.5.1.

Для восстановления компонент $V_{\ell n}(\rho)$ по приращениям $\delta_\ell^{V_{\ell n}}(\chi')$ фазового сдвига и энергиям связанных состояний необходимо решить интегральные уравнения (5.87) относительно функций $A_{\ell n}(\chi)$. При этом мы воспользуемся подходом, изложенным в разделе 5.3. После этого, используя интегральное преобразование Гильберта, из (5.88) найти функции $\tilde{V}_{\ell n}^{(n-1)}(\chi)$. Наконец, выполнив обобщенные релятивистские интегральные преобразования Ханкеля (см. раздел 4.5.1, формула(4.147))

$$V_{\ell n}(\rho) = \int_0^\infty d\rho_\ell^{(n-1)}(\operatorname{ch}\chi)\,\tilde{V}_{\ell n}^{(n-1)}(\chi)\,\psi_\ell^{(n-1)}(\rho\,,\,\chi)\ ,\ n = 1, 2, ..., M_\ell\ , \tag{5.89}$$

восстанавливают компоненты $V_{\ell n}(\rho)$. Здесь $\psi_\ell^{(n-1)}(\rho\,,\,\chi)$ – решение конечно-разностного квазипотенциального уравнения с квазипотенциалом, соответствующим суперпозиции локального $W(\rho)$ и $(n-1)$-компонентного нелокального сепарабельного $\sum\limits_{m=1}^{n-1}\varepsilon_{\ell m}\,V_{\ell m}(\rho)\,V_{\ell m}(\rho')$ квазипотенциалов. Этому решению отвечает спектральная плотность (см. раздел 4.5.1, формула (4.142))

$$\frac{d\rho_\ell^{(n-1)}(E)}{dE} = \begin{cases} \operatorname{sh}^{-1}\chi\ \tau_\ell^{(n-1)}(\chi)\ ,\ E = \operatorname{ch}\chi \geq 1\ ; \\ \sum\limits_{j=1}^{\sigma_\ell^{(n-1)}} C_{\ell j}^{(n-1)}\,\delta\,(E - E_{tj}^{(n-1)})\ , \\ 0 \leq E = \operatorname{ch}\chi < 1\ ,\ \chi = i\,\kappa, \\ 0 \leq E_{tj}^{(n-1)} = \operatorname{ch}\chi_{tj}^{(n-1)} < 1\ ,\ \chi_{tj}^{(n-1)} = i\,\kappa_{tj}^{(n-1)}\ , \\ 0 < \kappa\ ,\ \kappa_{tj}^{(n-1)} \leq \pi/2\ ,\ n = 1, 2, ..., M_\ell\,. \end{cases} \tag{5.90}$$

В соответствии с результатами раздела 4.5.2, будем считать, что приращения $\delta_\ell^{V_{\ell n}}(\chi')$ фазового сдвига в выражении (5.87) являются непрерывными по Гельдеру функциями с некоторым положительным индексом и при $|\chi|' \to \infty$ для них имеют место оценки (см. раздел 4.5.2, формула (4.159))

$$\delta_\ell^{V_{\ell n}}(\chi') = O\left(|\chi'|^{-\gamma}\right) \ , \ \ell \geq 0 \ , \ \gamma > 1 \ , \ n = 1, 2, ..., M_\ell \, . \tag{5.91}$$

Эти требования являются необходимыми и достаточными, если мы хотим найти компоненты $V_{\ell n}(\rho)$ сепарабельной составляющей полного взаимодействия, удовлетворяющие совместно с локальной компонентой $W(\rho)$ условиям (см. раздел 4.5.1, формула (4.120))

$$\rho \, W\,(\rho) \ , \ \rho \, V_{\ell n}\,(\rho) \, \in \, L_1\,(0\,,\,\infty) \ , n = 1, 2, ..., M_\ell \, , \tag{5.92}$$

что и обеспечивает единственность решения обратной задачи. При этом для приращений фазового сдвига выполняется теорема Левинсона (см. раздел 4.5.3, формула (4.172))

$$\delta_\ell^{V_{\ell n}}(0) - \delta_\ell^{V_{\ell n}}(\infty) = \delta_\ell^{V_{\ell n}}(0) = \pi\,(\sigma_\ell^{(n)} - \sigma_\ell^{(n-1)} + \nu_\ell^{(n)}) \ , n = 1, 2, ..., M_\ell \ , \tag{5.93}$$

причем

$$\delta_\ell^{W}(0) - \delta_\ell^{W}(\infty) = \delta_\ell^{W}(0) = \pi \, \sigma_\ell^{(0)} \ .$$

Здесь $\nu_\ell^{(n)}$ – число “поддельных” связанных состояний, обусловленных n-ой компонентой нелокальной сепарабельной составляющей полного взаимодействия в каждой парциальной волне, с энергиями (см. раздел 4.5.3, формула (4.167))

$$E_{fk}^{(n)} = \mathrm{ch}\, \chi_{fk}^{(n)} \geq 1 \ , \ k = \begin{cases} 0, 1, ..., \nu_\ell^{(n)} - 1 \ , \ \varepsilon_{\ell n} = 1 \ ; \\ 1, 2, ..., \nu_\ell^{(n)} \ , \ \varepsilon_{\ell n} = -1 \ ; \\ n = 1, 2, ..., M_\ell \ , \end{cases} \tag{5.94}$$

а $\sigma_\ell^{(n)}$ – число истинных связанных состояний, обусловленных суперпозицией локального $W(\rho)$ и n-компонентного нелокального сепарабельного $\sum\limits_{m=1}^{n} \varepsilon_{\ell m} \, V_{\ell m}(\rho) \, V_{\ell m}(\rho')$ квазипотенциалов, с энергиями (см. раздел 4.5.3, формула (4.168))

$$0 \le E_{tj'}^{(n)} = \operatorname{ch} \chi_{tj'}^{(n)} < 1 \ , \ \chi_{tj'}^{(n)} = i\, \kappa_{tj'}^{(n)} \ ,$$

$$0 < \kappa_{tj'}^{(n)} \le \pi/2 \ , \ j' = 1, 2, ..., \sigma_\ell^{(n)} \ ,$$

$$\sigma_\ell^{(n)} = \begin{cases} \begin{cases} \sigma_\ell^{(n-1)} - 1 \ (\Phi_{\ell n}(1) < 0) \ , \\ \sigma_\ell^{(n-1)} \ (\Phi_{\ell n}(1) > 0) \ \text{при} \ \varepsilon_{\ell n} = 1 \ ; \end{cases} \\ \begin{cases} \sigma_\ell^{(n-1)} \ (\Phi_{\ell n}(1) < 0) \ , \\ \sigma_\ell^{(n-1)} + 1 \ (\Phi_{\ell n}(1) > 0) \ \text{при} \ \varepsilon_{\ell n} = -1 \ ; \end{cases} \\ n = 1, 2, ..., M_\ell \ , \end{cases} \tag{5.95}$$

где функция $\Phi_{\ell n}(E)$ определена в (4.157), раздел 4.5.2.

При этом важно, что значения энергий (5.94) “поддельных” связанных состояний определяются по тем значениям χ' (см. раздел 4.5.3, формула (4.170)), при которых приращения фазового сдвига пересекают прямые $\delta_\ell^{V_{\ell n}} = \pi\, k$ (k – целое) сверху при возрастании χ', т.е.

$$\delta_\ell^{V_{\ell n}} \left(\chi_{fk}^{(n)} \right) = \pi\, k \ , \ k = \begin{cases} 0, 1, ..., \nu_\ell^{(n)} - 1 \ , \ \varepsilon_{\ell n} = 1 \ ; \\ 1, 2, ..., \nu_\ell^{(n)} \ , \ \varepsilon_{\ell n} = -1 \ ; \\ n = 1, 2, ..., M_\ell \, . \end{cases} \tag{5.96}$$

В то же время значения энергий (5.95) истинных связанных состояний полного взаимодействия являются простыми корнями уравнений (см. раздел 4.5.3, формула (4.166))

$$\Phi_{\ell n} \left(E_{tj'}^{(n)} \right) = \varepsilon_{\ell n} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\sigma_\ell^{(n-1)}} C_{\ell j}^{(n-1)} \frac{\left| \tilde{V}_{\ell n}^{(n-1)} \left(\chi_{tj}^{(n-1)} \right) \right|^2}{E_{tj'}^{(n)} - E_{tj}^{(n-1)}} + \\ + \frac{1}{2} \int_0^\infty d\chi \, \frac{|A_{\ell n}(\chi)|}{\operatorname{ch} \chi - E_{tj'}^{(n)}} = 0 \ , \\ j' = 1, 2, ..., \sigma_\ell^{(n)} \ , \ n = 1, 2, ..., M_\ell \, . \tag{5.97}$$

5.4.2. *Метод и условие единственности решения интегрального уравнения для функции $A_{\ell n}(\chi')$*

Для того чтобы решить интегральные уравнения (5.87), выполним замену переменных $x = \mathrm{ch}\chi'$, $t = \mathrm{ch}\chi$ и введем следующие обозначения:

$$\Delta_\ell^{V_{\ell n}}(x) = \delta_\ell^{V_{\ell n}}(\mathrm{arch}\, x)\ ,\ g_{\ell n}(x) = -\frac{2}{\pi}(x^2-1)^{1/2}\ \mathrm{tg}\,\Delta_\ell^{V_{\ell n}}(x)\ ,$$

$$h_{\ell n}(x) = -\sin\Delta_\ell^{V_{\ell n}}(x)\,\exp\left[-i\,\Delta_\ell^{V_{\ell n}}(x)\right]\ , \tag{5.98}$$

$$\psi_{\ell n}(x) = A_{\ell n}(\mathrm{arch}\, x)\, g_{\ell n}^{-1}(x)\left[1+\frac{i\,\pi}{2}\,g_{\ell n}(x)\,(x^2-1)^{-1/2}\right].$$

Тогда, используя представление (4.26), уравнения (5.87) преобразуются к виду

$$\begin{gathered}\psi_{\ell n}(x) = 1 - \frac{\varepsilon_{\ell n}}{2}\sum_{j=1}^{\sigma_\ell^{(n-1)}} C_{\ell j}^{(n-1)}\frac{\left|\tilde V_{\ell n}^{(n-1)}\left(\chi_{tj}^{(n-1)}\right)\right|^2}{x-E_{tj}^{(n-1)}} + \\ +\frac{1}{\pi}\int\limits_1^\infty dt\,\frac{\psi_{\ell n}(t)\,h_{\ell n}^*(t)}{t-x-i\,0}\ ,\quad n=1,2,...,M_\ell\,.\end{gathered} \tag{5.99}$$

Решения уравнений (5.99), как и в случае однокомпонентного сепарабельного квазипотенциала (см. раздел 5.3.2, формула (5.49)), имеют вид

$$\begin{gathered}\psi_{\ell n}(x) = H_{\ell n}(x_+) \equiv \lim_{\eta\to+0} H_{\ell n}(x+i\,\eta)\ ,\\ 1\le x\le\infty\ ,\ n=1,2,...,M_\ell\,.\end{gathered} \tag{5.100}$$

Здесь функции

$$H_{\ell n}(z) = \mu_{\ell n}(z) + \frac{1}{\pi}\int\limits_1^\infty dt\,\frac{\psi_{\ell n}(t)\,h_{\ell n}^*(t)}{t-z}\ , \tag{5.101}$$

где

$$\mu_{\ell n}(z) = 1 - \frac{\varepsilon_{\ell n}}{2}\sum_{j=1}^{\sigma_\ell^{(n-1)}} C_{\ell j}^{(n-1)}\frac{\left|\tilde V_{\ell n}^{(n-1)}\left(\chi_{tj}^{(n-1)}\right)\right|^2}{z-E_{tj}^{(n-1)}}\ ,\ n=1,2,...,M_\ell\ ,$$

являются аналитическими в комплексной плоскости переменной z с разрезом от 1 до $+\infty$, за исключением простых полюсов в точках $z = E_{tj}^{(n-1)}$ $(0 \le E_{tj}^{(n-1)} < 1\ ,\ j=1,2,...,\sigma_\ell^{(n-1)}\ ,\ n=1,2,...,M_\ell)$, причем

$$\lim_{|z|\to\infty} H_{\ell n}(z) = 1\ ,\ n=1,2,...,M_\ell\ , \tag{5.102}$$

во всех направлениях, если только предположить априори, что функции $\psi_{\ell n}(x)$ непрерывны по Гельдеру, а интеграл в (5.101) сходится. Далее, представим функции $H_{\ell n}(z)$ в виде

$$H_{\ell n}(z) = \mu_{\ell n}(z) + G_{\ell n}(z)\, \exp\left[\omega_{\ell n}(z)\right]\ , \tag{5.103}$$

где

$$\omega_{\ell n}(z) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{1}^{\infty} dt\, \frac{\Delta_{\ell}^{V_{\ell n}}(t)}{t-z}\ ,\ n = 1, 2, ..., M_{\ell}\ , \tag{5.104}$$

и подставим решения (5.100) в выражение для их скачка на разрезе (см. раздел 5.3.2, формула (5.54))

$$\begin{gathered} H_{\ell n}(x_+) - H_{\ell n}(x_-) = \\ = G_{\ell n}(x_+)\, \exp\left[\omega_{\ell n}(x_+)\right] - G_{\ell n}(x_-)\, \exp\left[\omega_{\ell n}(x_-)\right] = \\ = -2\, i\, \sin\Delta_{\ell}^{V_{\ell n}}(x)\, \exp\left[i\,\Delta_{\ell}^{V_{\ell n}}(x)\right]\, \psi_{\ell n}(x)\ ,\ n = 1, 2, ..., M_{\ell}\,. \end{gathered} \tag{5.105}$$

В результате приходим к неоднородным уравнениям Римана–Гильберта для функций $G_{\ell n}(z)$ в форме

$$\begin{gathered} G_{\ell n}(x_+) - G_{\ell n}(x_-) = \\ = -\mu_{\ell n}(x)\left\{\exp\left[-\omega_{\ell n}(x_+)\right] - \exp\left[-\omega_{\ell n}(x_-)\right]\right\}\ , \\ 1 \le x \le \infty\ ,\ n = 1, 2, ..., M_{\ell}\ , \end{gathered} \tag{5.106}$$

причем

$$\begin{gathered} \omega_{\ell n}(x_\pm) = \lim_{\eta\to+0}\omega_{\ell n}(x \pm i\,\eta) = \alpha_{\ell n}(x) \mp i\,\Delta_{\ell}^{V_{\ell n}}(x)\ , \\ \alpha_{\ell n}(x) = -\frac{1}{\pi}\,\mathrm{P}\int\limits_{1}^{\infty} dt\, \frac{\Delta_{\ell}^{V_{\ell n}}(t)}{t-x}\ . \end{gathered} \tag{5.107}$$

Теперь заметим, что из представлений (5.103), (5.104) и введенных нами требований о поведении приращений фазового сдвига и условий (5.91), (5.102) следует, что во всех направлениях

$$\lim_{|z|\to\infty} G_{\ell n}(z) = 0\ ,\quad \lim_{|z|\to\infty}\omega_{\ell n}(z) = 0\ ,\ n = 1, 2, ..., M_{\ell}\,. \tag{5.108}$$

Более того, функции $G_{\ell n}(z)$ являются аналитическими в комплексной плоскости переменной z с разрезом от 1 до $+\infty$, а функции (5.104) определены на разрезе всюду, кроме, быть может, точки $z=1$, где их поведение имеет вид

$$\omega_{\ell n}(z) = (1/\pi)\,\Delta_\ell^{V_{\ell n}}(1)\,\ln|1-z| + \Omega_{\ell n}(z)\;,\;\; z\to 1\;, \qquad n = 1,2,...,M_\ell\,. \tag{5.109}$$

Здесь функции $\Omega_{\ell n}(z)$ конечны при $z\to 1$, а $\Delta_\ell^{V_{\ell n}}(1) = \delta_\ell^{V_{\ell n}}(0) = \pi\,(\sigma_\ell^{(n)} - \sigma_\ell^{(n-1)} + \nu_\ell^{(n)}) \geq 0$ в силу теоремы Левинсона (5.93). Следовательно, функции $\exp\left[\omega_{\ell n}(z)\right]$ либо конечны при $\sigma_\ell^{(n)} - \sigma_\ell^{(n-1)} + \nu_\ell^{(n)} = 0$, либо имеют нуль порядка $\sigma_\ell^{(n)} - \sigma_\ell^{(n-1)} + \nu_\ell^{(n)} > 0$ в точке $z=1$ [20]. Тем самым частные решения неоднородных уравнений (5.106), удовлетворяющих условиям (5.108), существуют и даются выражениями

$$\tilde{G}_{\ell n}(z) = 1 - \mu_{\ell n}(z)\,\exp[-\omega_{\ell n}(z)] - $$

$$-\frac{\varepsilon_{\ell n}}{2}\sum_{j=1}^{\sigma_\ell^{(n-1)}} C_{\ell j}^{(n-1)}\,\frac{\left|\tilde{V}_{\ell n}^{(n-1)}\left(\chi_{tj}^{(n-1)}\right)\right|^2\,\exp\left[-\omega_{\ell n}\left(E_{tj}^{(n-1)}\right)\right]}{z - E_{tj}^{(n-1)}}\;,$$

$$n = 1,2,...,M_\ell\,.$$

Тогда частные решения $\tilde{\psi}_{\ell n}(x)$ неоднородных интегральных уравнений (5.99) в силу выражений (5.100) и (5.103) принимают вид

$$\tilde{\psi}_{\ell n}(x) = \exp\left[\omega_{\ell n}(x_+)\right]\Bigg\{1 - \frac{\varepsilon_{\ell n}}{2}\sum_{j=1}^{\sigma_\ell^{(n-1)}} C_{\ell j}^{(n-1)}\,\frac{\left|\tilde{V}_{\ell n}^{(n-1)}\left(\chi_{tj}^{(n-1)}\right)\right|^2\,\exp\left[-\omega_{\ell n}\left(E_{tj}^{(n-1)}\right)\right]}{x - E_{tj}^{(n-1)}}\Bigg\}\;, \qquad n = 1,2,...,M_\ell\,. \tag{5.110}$$

Отметим, что функции (5.110) регулярны при $x=1$ (они либо конечны при $\sigma_\ell^{(n)} - \sigma_\ell^{(n-1)} + \nu_\ell^{(n)} = 0$, либо имеют нуль порядка $\sigma_\ell^{(n)} - \sigma_\ell^{(n-1)} + \nu_\ell^{(n)} >$

[20] В тех случаях, когда $\delta_\ell^{V_{\ell n}}(0) = -\pi$, т.е. при $\sigma_\ell^{(n)} = \sigma_\ell^{(n-1)} - 1$, $\sigma_\ell^{(n-1)} \neq 0$ и $\nu_\ell^{(n)} = 0$ ($\varepsilon_{\ell n} = +1$, $n = 1,2,...,M_\ell$), функции $H_{\ell n}(z)$, а, значит, и функции $\psi_{\ell n}(x)$, не являются более конечными при $z=1$. В этих случаях решение обратной задачи требует отдельного рассмотрения.

0 в этой точке), непрерывны по Гельдеру с тем же индексом, что и приращения фазового сдвига, и ограничены при $x \to +\infty$, а это совпадает с априорными предположениями об их свойствах. Более того, легко показать, что функции (5.110) удовлетворяют уравнениям (5.99), поскольку по теореме о вычетах имеем

$$\lim_{\substack{R\to+\infty \\ \eta\to+0}} \frac{1}{2\,i\,\pi} \int\limits_{C^+} dz\, \frac{\tilde{H}_{\ell n}(z)}{z-x-i\,\eta} = \mathrm{res}\left[\frac{\tilde{H}_{\ell n}(z)}{z-x-i\,\eta}\ ,\ z = x+i\,\eta\right]\Bigg|_{\eta\to+0} +$$

$$+\sum_{j=1}^{\sigma_\ell^{(n-1)}} \delta_{jj'}\ \mathrm{res}\left[\frac{\tilde{H}_{\ell n}(z)}{z-x-i\,\eta}\ ,\ z = E_{tj'}^{(n-1)}\right]\Bigg|_{\eta\to+0} ,$$

где

$$\tilde{H}_{\ell n}(z) = \exp\left[\omega_{\ell n}(z)\right]\Bigg\{1-$$

$$-\frac{\varepsilon_{\ell n}}{2}\sum_{j=1}^{\sigma_\ell^{(n-1)}} C_{\ell j}^{(n-1)}\,\frac{\left|\tilde{V}_{\ell n}^{(n-1)}\left(\chi_{tj}^{(n-1)}\right)\right|^2\,\exp\left[-\omega_{\ell n}\left(E_{tj}^{(n-1)}\right)\right]}{z-E_{tj}^{(n-1)}}\Bigg\} ,$$

а C^+ есть замкнутый контур, состоящий из окружностей C_η^- радиуса η с центром в точке $z = 1$, C_R^+ радиуса R с центром в точке $z = 0$ и двух берегов разреза от 1 до R , проходимых в противоположных направлениях. При этом вклад интеграла по окружности C_η^-, в силу оценки (5.109), стремится к нулю при $\eta \to +0$, а его вклад по окружности C_R^+, согласно асимптотике (5.102), стремится к 1 при $R \to +\infty$. Отсюда, принимая во внимание выражение (5.107), мы и заключаем, что функции (5.110) являются частными решениями неоднородных интегральных уравнений (5.99).

Теперь рассмотрим функции

$$H_{\ell n o}(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_1^\infty dt\,\frac{\psi_{\ell n o}(t)\,h_{\ell n}^*(t)}{t-z}\ ,\ n = 1,2,...,M_\ell\,. \tag{5.111}$$

Очевидно, эти функции являются аналитическими в комплексной плоскости переменной z с разрезом от 1 до $+\infty$, причем во всех направлениях

$$\lim_{|z|\to\infty} H_{\ell n o}(z) = 0\ ,\ n = 1,2,...,M_\ell\,,$$

если только предположить априори, что функции $\psi_{\ell no}(t)$ непрерывны по Гельдеру, а интеграл в (5.111) сходится. При этих предположениях общие решения однородных интегральных уравнений

$$\psi_{\ell no}(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_1^\infty dt \, \frac{\psi_{\ell no}(t) \, h^*_{\ell n}(t)}{t - x - i\,0} \ , \ n = 1, 2, ..., M_\ell \ , \tag{5.112}$$

имеют вид (см. так же раздел 5.3.2, формула (5.61))

$$\begin{gathered} \psi_{\ell no}\,(x) = H_{\ell no}\,(x_+) \equiv \lim_{\eta \to +0} H_{\ell no}(x + i\,\eta) \ , \\ 1 \le x \le \infty \ , \ n = 1, 2, ..., M_\ell \,. \end{gathered} \tag{5.113}$$

При этом функции (5.111) удовлетворяют однородным уравнениям Римана–Гильберта

$$\begin{gathered} H_{\ell no}(x_+) \, \exp\left[2\,i\,\Delta^{V_{\ell n}}_\ell(x)\right] - H_{\ell no}(x_-) = 0 \ , \\ 1 \le x \le \infty \ , \ n = 1, 2, ..., M_\ell \ , \end{gathered} \tag{5.114}$$

если исходить из выражения (5.105) для скачка функций $H_{\ell n}(z) \equiv H_{\ell no}(z)$ на разрезе и представления (5.113). Поэтому общие решения уравнений (5.112) будем искать, как и в раздел 5.3.2, в виде

$$H_{\ell no}(z) = \exp\left[\omega_{\ell n}\,(z)\right] \sum_{k=1}^{N^{(n)}_\ell} \frac{A^{(n)}_k}{(z-1)^k} \ , \ n = 1, 2, ..., M_\ell \ ,$$

подстановка которых в уравнения (5.114) и требование их конечности при $z = 1$ (функции $H_{\ell no}(z)$ либо конечны при $\sigma^{(n)}_\ell - \sigma^{(n-1)}_\ell + \nu^{(n)}_\ell = 0$, либо имеют нуль порядка $\sigma^{(n)}_\ell - \sigma^{(n-1)}_\ell + \nu^{(n)}_\ell > 0$ в этой точке) дает

$$N^{(n)}_\ell = \begin{cases} \sigma^{(n)}_\ell - \sigma^{(n-1)}_\ell + \nu^{(n)}_\ell > 0 \ , \\ 0 \ , \ \sigma^{(n)}_\ell - \sigma^{(n-1)}_\ell + \nu^{(n)}_\ell = 0 \ , \ n = 1, 2, ..., M_\ell \,. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{gathered} \psi_{\ell no}(x) = H_{\ell no}\,(x_+) = \\ = \exp\left[\omega_{\ell n}(x_+)\right] \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{N^{(n)}_\ell} \frac{A^{(n)}_k}{(x-1)^k} \ , \\ N^{(n)}_\ell = \sigma^{(n)}_\ell - \sigma^{(n-1)}_\ell + \nu^{(n)}_\ell > 0 \ ; \\ 0 \ , \ N^{(n)}_\ell = \sigma^{(n)}_\ell - \sigma^{(n-1)}_\ell + \nu^{(n)}_\ell = 0 \ ; \\ n = 1, 2, ..., M_\ell \,. \end{cases} \end{gathered} \tag{5.115}$$

Далее, как и в случае частных решений, интегрированием по контуру C^+ убеждаемся, что функции (5.115) являются решениями уравнений (5.112) и обладают всеми требуемыми свойствами: функции (5.115) регулярны при $x = 1$ (они либо конечны при $\sigma_\ell^{(n)} - \sigma_\ell^{(n-1)} + \nu_\ell^{(n)} = 0$, либо имеют нуль порядка $\sigma_\ell^{(n)} - \sigma_\ell^{(n-1)} + \nu_\ell^{(n)} > 0$ в этой точке), непрерывны по Гельдеру с тем же индексом, что и приращения фазового сдвига, и ограничены при $x \to +\infty$, а это совпадает с априорными предположениями об их свойствах.

Итак, согласно соотношениям (5.110) и (5.115), общие решения интегральных уравнений (5.99), даются выражениями

$$\begin{gathered}\psi_{\ell n}(x) = \tilde{\psi}_{\ell n}(x) + \psi_{\ell n o}(x) = \\ = \exp\left[\omega_{\ell n}(x_+)\right]\left\{1 + \sum_{k=1}^{N_\ell^{(n)}} \frac{A_k^{(n)}}{(x-1)^k} - \right. \\ \left. - \frac{\varepsilon_{\ell n}}{2} \sum_{j=1}^{\sigma_\ell^{(n-1)}} C_{\ell j}^{(n-1)} \frac{\left|\tilde{V}_{\ell n}^{(n-1)}\left(\chi_{tj}^{(n-1)}\right)\right|^2 \exp\left[-\omega_{\ell n}\left(E_{tj}^{(n-1)}\right)\right]}{x - E_{tj}^{(n-1)}}\right\}, \\ n = 1, 2, ..., M_\ell\,.\end{gathered} \tag{5.116}$$

Возвращаясь к прежним обозначениям (5.98) и преобразуя сумму в произведение, решения (5.116) представим в двух формах:

$$\begin{gathered}A_{\ell n}(\chi') = -\frac{2}{\pi}\,\mathrm{sh}(\chi')\,\sin\delta_\ell^{V_{\ell n}}(\chi')\,\exp\left[\alpha_{\ell n}(\mathrm{ch}\,\chi')\right] \times \\ \times \left\{1 + \sum_{k=1}^{N_\ell^{(n)}} \frac{A_k^{(n)}}{(\mathrm{ch}\,\chi' - 1)^k} - \sum_{j=1}^{\sigma_\ell^{(n-1)}} \frac{B_j^{(n)}}{\mathrm{ch}\,\chi' - E_{tj}^{(n-1)}}\right\},\end{gathered} \tag{5.117}$$

$$\begin{gathered}A_{\ell n}(\chi') = -\frac{2}{\pi}\,\mathrm{sh}(\chi')\,\sin\delta_\ell^{V_{\ell n}}(\chi')\,\exp\left[\alpha_{\ell n}(\mathrm{ch}\,\chi')\right] \times \\ \times \prod_{k=1-\delta}^{N_\ell^{(n)}-\delta}\left(1 + \frac{a_k^{(n)}}{\mathrm{ch}\,\chi' - 1}\right) \prod_{j=1}^{\sigma_\ell^{(n-1)}}\left(1 - \frac{b_j^{(n)}}{\mathrm{ch}\,\chi' - E_{tj}^{(n-1)}}\right),\end{gathered} \tag{5.118}$$

где

$$\alpha_{\ell n}\left(\mathrm{ch}\,\chi'\right) = -\frac{1}{\pi}\,\mathrm{P}\int_0^\infty d\chi\,\frac{\mathrm{sh}(\chi)\,\delta_\ell^{V_{\ell n}}(\chi)}{\mathrm{ch}\,\chi - \mathrm{ch}\,\chi'}\,, \tag{5.119}$$

$$B_j^{(n)} = \frac{\varepsilon_{\ell n}}{2} C_{\ell j}^{(n-1)} \left| \tilde{V}_{\ell n}^{(n-1)}(\chi_{tj}^{(n-1)}) \right|^2 \exp\left[-\omega_{\ell n} \left(E_{tj}^{(n-1)} \right) \right] \; , \tag{5.120}$$

$$N_\ell^{(n)} = \sigma_\ell^{(n)} - \sigma_\ell^{(n-1)} + \nu_\ell^{(n)} = \begin{cases} \nu_\ell^{(n)} - 1 \; , \; \nu_\ell^{(n)} \text{ при } \varepsilon_{\ell n} = 1 \; ; \\ \nu_\ell^{(n)} \; , \; \nu_\ell^{(n)} + 1 \text{ при } \varepsilon_{\ell n} = -1 \; , \end{cases}$$
$$\delta = \begin{cases} 1 \; , \; \varepsilon_{\ell n} = 1 \; , \\ 0 \; , \; \varepsilon_{\ell n} = -1 \; , \; n = 1, 2, ..., M_\ell \, . \end{cases} \tag{5.121}$$

5.4.3. Определение параметров решений интегральных уравнений

Заметим, что решения (5.117), так же как и решения (5.118), зависят от $N_\ell^{(n)} + \sigma_\ell^{(n-1)} = \sigma_\ell^{(n)} + \nu_\ell^{(n)}$ параметров, а именно $\{A_k^{(n)}\}$, $\{B_j^{(n)}\}$ и $\{a_k^{(n)}\}$, $\{b_j^{(n)}\}$ соответственно, причем зависимости между ними определяются из соотношений

$$1 + \sum_{k=1}^{N_\ell^{(n)}} \frac{A_k^{(n)}}{(\operatorname{ch}\chi' - 1)^k} - \sum_{j=1}^{\sigma_\ell^{(n-1)}} \frac{B_j^{(n)}}{\operatorname{ch}\chi' - E_{tj}^{(n-1)}} =$$
$$= \prod_{k=1-\delta}^{N_\ell^{(n)}-\delta} \left(1 + \frac{a_k^{(n)}}{\operatorname{ch}\chi' - 1} \right) \prod_{j=1}^{\sigma_\ell^{(n-1)}} \left(1 - \frac{b_j^{(n)}}{\operatorname{ch}\chi' - E_{tj}^{(n-1)}} \right) \; ,$$
$$n = 1, 2, ..., M_\ell \, .$$

Отсюда, в частности, легко находим

$$B_j^{(n)} = b_j^{(n)} \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^{\sigma_\ell^{(n-1)}} \left(1 - \frac{b_m^{(n)}}{E_{tj}^{(n-1)} - E_{tm}^{(n-1)}} \right) \prod_{k=1-\delta}^{N_\ell^{(n)}-\delta} \left(1 - \frac{a_k^{(n)}}{1 - E_{tj}^{(n-1)}} \right) \; ,$$
$$j = 1, 2, ..., \sigma_\ell^{(n-1)} \; , \; n = 1, 2, ..., M_\ell \, .$$

Для определения параметров $\{a_k^{(n)}\}$ и $\{b_j^{(n)}\}$ воспользуемся тем, что функции $A_{\ell n}(\chi')$ согласно (5.88) сохраняют свой знак при всех значениях χ' , в то время как приращения фазового сдвига при значениях энергий (5.94) “поддельных” связанных состояний удовлетворяют условиям (5.96). Значит, правая часть решений (5.118) сохранит свой знак при переходе через точки $\chi' = \chi_{fk}^{(n)}$, если

$$a_k^{(n)} = 1 - \operatorname{ch}\chi_{fk}^{(n)} \ ,$$

$$k = \begin{cases} 0, 1, ..., N_\ell^{(n)} - 1 \ , \ N_\ell^{(n)} = \begin{cases} \nu_\ell^{(n)} - 1 \, , \, \sigma_\ell^{(n)} = \sigma_\ell^{(n-1)} - 1 \, , \\ \nu_\ell^{(n)} \, , \, \sigma_\ell^{(n)} = \sigma_\ell^{(n-1)} \, , \, \varepsilon_{\ell n} = 1 \, ; \end{cases} \\ \\ 1, 2, ..., N_\ell^{(n)} \, , \ N_\ell^{(n)} = \begin{cases} \nu_\ell^{(n)} + 1 \, , \, \sigma_\ell^{(n)} = \sigma_\ell^{(n-1)} + 1 \, , \\ \nu_\ell^{(n)} \, , \, \sigma_\ell^{(n)} = \sigma_\ell^{(n-1)} \, , \, \varepsilon_{\ell n} = -1 \, ; \end{cases} \end{cases} \tag{5.122}$$

$$b_{\sigma_\ell^{(n-1)}}^{(n)} = \operatorname{ch}\chi_{f(\nu_\ell^{(n)}-1)}^{(n)} - \operatorname{ch}\chi_{t\sigma_\ell^{(n-1)}}^{(n-1)} \, , \, \sigma_\ell^{(n)} = \sigma_\ell^{(n-1)} - 1 \, , \, \varepsilon_{\ell n} = 1 \ ,$$

$$n = 1, 2, ..., M_\ell \, .$$

Оставшиеся значения параметров $a_{\nu_\ell^{(n)}+1}^{(n)}$ и $\left\{b_j^{(n)}\right\}$ находятся путем подстановки решений (5.118) в уравнения (5.97) для энергий (5.95) и последующего использования теоремы о вычетах (см. раздел 5.3.3). Это приводит, учитывая соотношения (5.120), к уравнениям

$$\begin{gathered} \exp\left[\omega_{\ell n}\left(E_{tj'}^{(n)}\right)\right] \prod_{k=1-\delta}^{N_\ell^{(n)}-\delta} \left(1 - \frac{a_k^{(n)}}{1 - E_{tj'}^{(n)}}\right) \times \\ \times \prod_{j=1}^{\sigma_\ell^{(n-1)}} \left(1 - \frac{b_j^{(n)}}{E_{tj'}^{(n)} - E_{tj}^{(n-1)}}\right) = 0 \, , \\ j' = 1, 2, ..., \sigma_\ell^{(n)} \ , \ n = 1, 2, ..., M_\ell \, . \end{gathered} \tag{5.123}$$

Отсюда находим оставшиеся значения параметров:

$$\begin{gathered} a_{\nu_\ell^{(n)}+1}^{(n)} = 1 - \operatorname{ch}\chi_{t(\sigma_\ell^{(n-1)}+1)}^{(n)} \ , \\ \sigma_\ell^{(n)} = \sigma_\ell^{(n-1)} + 1 \ (\Phi_{\ell n}(1) > 0) \ , \ \varepsilon_{\ell n} = -1 \ ; \\ b_j^{(n)} = \operatorname{ch}\chi_{tj'}^{(n)} - \operatorname{ch}\chi_{tj}^{(n-1)} \ , \end{gathered} \tag{5.124}$$

$$
j' = j = \begin{cases} 1, 2, ..., \sigma_\ell^{(n)} \ , \quad \sigma_\ell^{(n)} = \begin{cases} \sigma_\ell^{(n-1)} - 1 \, (\Phi_{\ell n}(1) < 0) \, , \\ \sigma_\ell^{(n-1)} \, (\Phi_{\ell n}(1) > 0) \, , \\ \varepsilon_{\ell n} = 1 \, ; \end{cases} \\ \\ 1, 2, ..., \sigma_\ell^{(n-1)} \, , \, \sigma_\ell^{(n)} = \begin{cases} \sigma_\ell^{(n-1)} + 1 \, (\Phi_{\ell n}(1) > 0) \, , \\ \sigma_\ell^{(n-1)} \, (\Phi_{\ell n}(1) < 0) \, , \\ \varepsilon_{\ell n} = -1 \, ; \end{cases} \end{cases}
$$

$$
n = 1, 2, ..., M_\ell \ .
$$

В то же время уравнения (5.123) допускают и решения вида

$$
b_j^{(n)} = E_{tj}^{(n)} - E_{tj}^{(n-1)} = 0 \, .
$$

Это означает, что в этих случаях имеются вырожденные состояния при энергиях $E_{tj}^{(n-1)}$, причем $E_{tj}^{(n)} = E_{t(j+1)}^{(n)} = E_{tj}^{(n-1)}$, т.е. степень вырождения для каждого $E_{tj}^{(n-1)}$ не может быть больше двух. Кроме того, из (5.123) также следует, что хотя бы один из параметров $\{b_j^{(n)}\}$ отличен от нуля.

Таким образом, коэффициенты $\{a_k^{(n)}\}$ и $\{b_j^{(n)}\}$ определяются однозначно выражениями (5.122) и (5.124). Тем самым функции $A_{\ell n}(\chi')$ полностью определяются приращениями фазового сдвига и энергиями связанных состояний, а их выражения (5.118) принимают вид

$$
\begin{gathered}
A_{\ell n}(\chi') = -\frac{2}{\pi} \, \mathrm{sh}(\chi') \, \sin \delta_\ell^{V_{\ell n}}(\chi') \, \exp\left[\alpha_{\ell n}(\mathrm{ch}\, \chi')\right] \times \\
\times \left[\mathrm{sh}(\chi'/2)\right]^{-2\, N_\ell^{(n)}} \prod_{j'=1}^{\sigma_\ell^{(n)}} \left[\mathrm{sh}^2(\chi'/2) + \sin^2\left(\kappa_{tj'}^{(n)}/2\right)\right] \times \\
\times \prod_{j=1}^{\sigma_\ell^{(n-1)}} \left[\mathrm{sh}^2(\chi'/2) + \sin^2\left(\kappa_{tj}^{(n-1)}/2\right)\right]^{-1} \times \\
\times \prod_{k=1-\delta}^{\nu_\ell^{(n)}-\delta} \left[\mathrm{sh}^2(\chi'/2) - \mathrm{sh}^2\left(\chi_{fk}^{(n)}/2\right)\right] \, , \; n = 1, 2, ..., M_\ell \, .
\end{gathered}
\tag{5.125}
$$

При этом, как видно из выражений (5.119) и (5.125), функции $A_{\ell n}(\chi')$ непрерывны по Гельдеру, а при $|\chi'| \to \infty$ они ведут себя как

$$
\mathrm{ch}\, \chi' \, |\chi'|^{-\gamma} \ , \ \gamma > 1 \ , \ n = 1, 2, ..., M_\ell \ ,
$$

если только приращения фазового сдвига удовлетворяют условиям (5.91). Но это означает, что компоненты $V_{\ell n}(\rho)$ удовлетворяют условиям (5.92).

5.4.4. Метод восстановления компонент $\tilde{V}_{\ell n}(\chi')$

Чтобы восстановить компоненты $V_{\ell n}(\rho)$ посредством преобразований (5.89), введем функции

$$\hat{V}_{\ell n}(\mathrm{sh}(\chi'/2)) = \prod_{j'=1}^{\sigma_\ell^{(n)}} \left[\frac{\mathrm{sh}(\chi'/2) + i \sin\left(\kappa_{tj'}^{(n)}/2\right)}{\mathrm{sh}(\chi'/2) - i \sin\left(\kappa_{tj'}^{(n)}/2\right)} \right] \times$$
$$\times \prod_{j=1}^{\sigma_\ell^{(n-1)}} \left[\frac{\mathrm{sh}(\chi'/2) - i \sin\left(\kappa_{tj}^{(n-1)}/2\right)}{\mathrm{sh}(\chi'/2) + i \sin\left(\kappa_{tj}^{(n-1)}/2\right)} \right] \times \tag{5.126}$$
$$\times \left[\frac{Q_\ell(\mathrm{cth}\,\chi')\, \tilde{V}_{\ell n}^{(-)}(\mathrm{sh}(\chi'/2))}{\left|F_\ell^W(\chi')\right|} \prod_{m=1}^{n-1} \cos \delta_\ell^{V_{\ell m}}(\chi') \right]^2 ,$$
$$n = 1, 2, ..., M_\ell ,$$

где

$$\left|\tilde{V}_{\ell n}^{(-)}(\mathrm{sh}(\chi'/2))\right| = \left|\tilde{V}_{\ell n}^{(n-1)}(\chi')\right| ,$$
$$\mathrm{Re}\,\tilde{V}_{\ell n}^{(-)}(\mathrm{sh}(\chi'/2)) = \mathrm{Re}\,\tilde{V}_{\ell n}^{(n-1)}(\chi') ,$$
$$\arg \tilde{V}_{\ell n}^{(-)}(-\mathrm{sh}(\chi'/2)) = -\arg \tilde{V}_{\ell n}^{(-)}(\mathrm{sh}(\chi'/2)) , \tag{5.127}$$
$$\arg \tilde{V}_{\ell n}^{(n-1)}(\chi') = \mathrm{sgn}(\chi')\, \arg \tilde{V}_{\ell n}^{(-)}(\mathrm{sh}(\chi'/2)) .$$

Очевидно, что введенные функции являются аналитическими в области $0 < \mathrm{Im}\,\chi' \le \pi/2$, непрерывны при $0 \le \mathrm{Im}\,\chi' \le \pi/2$ и для них справедливы оценки

$$\hat{V}_{\ell n}(\mathrm{sh}(\chi'/2)) = O\left(\mathrm{sh}^2(\chi'/2)\right) ,$$
$$|\chi'| \to \infty\ ,\ 0 \le \mathrm{Im}\,\chi' \le \pi/2\ ,\ n = 1, 2, ..., M_\ell , \tag{5.128}$$

если только условия (5.91) выполняются. Кроме того, функции (5.126) нигде не обращаются в нуль в области $0 < \mathrm{Im}\,\chi' \le \pi/2$. Следовательно, функции $\ln \hat{V}_{\ell n}(\mathrm{sh}(\chi'/2))$ являются аналитическими в области $0 <$

$\operatorname{Im}\chi' \le \pi/2$, а при $|\chi'| \to \infty$ ведут себя как $\ln \operatorname{sh}^2(\chi'/2)$ в силу оценок (5.128). Поэтому мы можем применить интегральное преобразование Гильберта к действительной и мнимой частям функций $\ln \hat{V}_{\ell n}(\operatorname{sh}(\chi'/2))$. Тогда для действительных χ' находим

$$\operatorname{Im}\,\ln \hat{V}_{\ell n}(\operatorname{sh}(\chi'/2)) = -\frac{1}{\pi}\,\mathrm{P}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\,(\operatorname{sh}(\chi/2))\;\frac{\operatorname{Re}\,\ln \hat{V}_{\ell n}(\operatorname{sh}(\chi/2))}{\operatorname{sh}(\chi/2)-\operatorname{sh}(\chi'/2)} =$$
$$= -\,\frac{2\,\operatorname{sh}(\chi'/2)}{\pi}\,\mathrm{P}\int\limits_{0}^{\infty} d\chi\,\frac{\operatorname{ch}(\chi/2)\,\ln\left[\pi\,\varepsilon_{\ell n}\,A_{\ell n}(\chi)/2\right]}{\operatorname{ch}\chi-\operatorname{ch}\chi'}\;,$$

где мы учли, что

$$\operatorname{Re}\,\ln \hat{V}_{\ell n}(\operatorname{sh}(\chi'/2)) = \ln\left[\pi\,\varepsilon_{\ell n}\,A_{\ell n}(\chi)/2\right],\; n=1,2,...,M_\ell\,.$$

Отсюда, принимая во внимание выражения (5.126) и (5.127), окончательно получим

$$\begin{gathered}\frac{Q_\ell(\operatorname{cth}\chi')}{\left|F^W_\ell(\chi')\right|}\prod_{m=1}^{n-1}\cos\delta_\ell^{V_{\ell m}}(\chi')\,\tilde{V}_{\ell n}^{(n-1)}(\chi') = \\ = \sqrt{\pi\,\varepsilon_{\ell n}\,A_{\ell n}(\chi')/2}\,\exp\left\{-i\,\operatorname{sgn}(\chi')\left[\sum_{j'=1}^{\sigma_\ell^{(n)}}\operatorname{arctg}\frac{\sin\left(\kappa_{tj'}^{(n)}/2\right)}{\operatorname{sh}(\chi'/2)}-\right.\right. \\ -\sum_{j=1}^{\sigma_\ell^{(n-1)}}\operatorname{arctg}\frac{\sin\left(\kappa_{tj}^{(n-1)}/2\right)}{\operatorname{sh}(\chi'/2)}+ \\ \left.\left.+\frac{\operatorname{sh}(\chi'/2)}{\pi}\,\mathrm{P}\int\limits_0^\infty d\chi\,\frac{\operatorname{ch}(\chi/2)\,\ln\left[\pi\,\varepsilon_{\ell n}\,A_{\ell n}(\chi)/2\right]}{\operatorname{ch}\chi-\operatorname{ch}\chi'}\right]\right\}, \\ n=1,2,...,M_\ell\,.\end{gathered}\tag{5.129}$$

Итак, общее решение релятивистской обратной задачи существует и полностью определяется приращениями фазового сдвига и энергиями истинных связанных состояний, если приращения фазового сдвига являются непрерывными по Гельдеру функциями с некоторым положительным индексом и при $\chi' \to +\infty$ для них имеют место оценки (5.91). При этом частные случаи, когда $\sigma_\ell^{(n)} = \sigma_\ell^{(n-1)} - 1$, $\sigma_\ell^{(n-1)} \neq 0$, а $\nu_\ell^{(n)} = 0$ ($\varepsilon_{\ell n} = 1$, $n = 1, 2, ..., M_\ell$), как и в нерелятивистском случае [110], [111], должны быть исключены, т.к. в этих случаях решения (5.116) уже не являются более регулярными при $x = 1$.

Итак, сформулируем основные результаты и выводы настоящей главы.

1. В рамках РКП-подхода в квантовой теории поля разработан метод восстановления чисто нелокальной сепарабельной составляющей полного квазипотенциала, описывающего взаимодействие двух релятивистских бесспиновых частиц произвольных масс m_1, m_2.

   На основе развитого метода впервые:

а) определены условия существования и единственности решения релятивистской обратной задачи с чисто нелокальным сепарабельным квазипотенциалом;

б) получены выражения для параметров обратной задачи как в случае притягивающего ($\boldsymbol{\varepsilon}_\ell = -1$), так и в случае отталкивающего ($\boldsymbol{\varepsilon}_\ell = 1$) сепарабельного квазипотенциала;

в) показано, что параметры обратной задачи определяются однозначно фазовым сдвигом и энергиями связанных состояний для любого орбитального момента $\ell \geq 0$;

2. В рамках РКП-подхода в квантовой теории поля разработан метод восстановления компоненты нелокальной сепарабельной составляющей полного квазипотенциала, описывающего взаимодействие двух релятивистских бесспиновых частиц произвольных масс m_1, m_2, и дано обобщение метода для случая суммы нелокальных сепарабельных квазипотенциалов. При этом полное взаимодействие считается центрально-симметричным, не зависит от энергии, а его локальная составляющая предполагается известной, согласуется с экспериментальными данными при низких энергиях и допускает существование связанных состояний.

   В рамках данного метода впервые:

а) определены условия существования и единственности решения релятивистской обратной задачи для любого орбитального момента $\ell \geq 0$ как в случае однокомпонентного, так и многокомпонентного нелокального сепарабельного квазипотенциала;

б) получены выражения для параметров обратной задачи как в случае притягивающего ($\boldsymbol{\varepsilon}_{\ell n} = -1$), так и в случае отталкивающего ($\boldsymbol{\varepsilon}_{\ell n} = 1$) однокомпонентного (многокомпонентного) нелокального сепарабельного квазипотенциала и установлены условия вырождения по энергиям связанных состояний;

в) показано, что параметры обратной задачи определяются однозначно приращением фазового сдвига для однокомпонентного нелокального сепарабельного квазипотенциала (или приращениями фазового сдвига для многокомпонентного) и энергиями связанных состояний локального и полного квазипотенциалов для любого орбитального момента $\ell \geq 0$.

Подчеркнем, что разработанный метод непосредственно связан с возможностью в рамках РКП-подхода в квантовой теории поля представить полную энергию двух релятивистских бесспиновых частиц неравных масс в с.ц.и. в виде выражения, пропорционального энергии одной эффективной релятивистской частицы массы m'.

ГЛАВА 6

РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ПОРОГОВЫЕ РЕСУММИРУЮЩИЕ ФАКТОРЫ

6.1. Вводная часть

В релятивистской теории нерелятивистский кулоновский L-фактор в выражении (3) должен быть модифицирован. Во введении был выполнен обзор, касающийся релятивистской модификации S-фактора (4) в КХД для случая взаимодействия двух релятивистских частиц равных масс ($m_1 = m_2 = m$) (см. работы [65]–[70]) и произвольных масс ($m_1\,, m_2$) (см. работу [71]). Следует также обратить внимание на работу [155], в которой на основе уравнения Бете–Солпитера получено явное выражение для S-фактора при малых скоростях v. Полученное в [155] выражение совпадает с фактором (5) при малых значениях скорости v (формула (1)), поскольку, очевидно, что $X(v) \to \pi\alpha/v$ при $v \to 0$. Однако, как подчеркнуто в самой работе [155], авторам не удалось найти явное выражение их кулоновского фактора в ультрарелятивистском пределе при $v \to 1$.

Изложению метода решения интегрального квазипотенциального уравнения с кулоновоподобным квазипотенциалом, описывающим взаимодействие двух релятивистских бесспиновых частиц равных масс с целью нахождения релятивистских пороговых ресуммирующих факторов для произвольного орбитального момента $\ell \geq 0$ были посвящены работы [77], [78], [92], [104].

В настоящей главе (раздел 6.4) в рамках РКП-подхода в квантовой теории поля [12] излагается [156]–[160] метод решения интегрального квазипотенциального уравнения с кулоновоподобным квазипотенциалом, описывающим взаимодействие двух релятивистских бесспиновых частиц произвольных масс $m_1\,, m_2$, с целью нахождения релятивистских пороговых кулоновоподобных ресуммирующих факторов для произвольного орбитального момента $\ell \geq 0$.

В разделе 6.5, опираясь на рассматриваемый РКП-подход, вводится [157]–[160] понятие относительной скорости эффективной релятивистской частицы, выступающей в качестве двухчастичной системы. Это позволило релятивистские пороговые кулоновоподобные ресуммирующие факторы, полученные в разделе 6.4, выразить в терминах относительной скорости эффективной релятивистской частицы, и тем самым придать им релятивистски инвариантную форму.

Раздел 6.6 настоящей главы посвящен изучению [157], [159], [160] свойств новых релятивистских ресуммирующих факторов и сравнению их с факторами, которые рассматривались в работах [65]–[71].

6.2. Кулоновский потенциал в РКП-подходе

Напомним, что в РКП-подходе, введенная в (2.66) новая безразмерная переменная, модуль радиуса-вектора $\boldsymbol{\rho}$, является релятивистским инвариантом [83], а выражение для кулоновского потенциала (2) ($Z_1 = Z_2 = 1$) в принятых обозначениях принимает вид

$$V(\rho) = -\frac{\alpha\, m'}{\rho}\,. \tag{6.1}$$

Более того, применение ξ-преобразования (1.16) к кулоновскому потенциалу (6.1) при $\ell = 0$, учитывая сферическую симметрию и обозначения (2.66), дает следующее выражение для потенциала в пространстве моментов [21]:

$$\begin{aligned} \widetilde{V}(\boldsymbol{\Delta}) = \int \frac{d\boldsymbol{\rho}}{m'^3}\, \xi^*(\boldsymbol{\Delta}\,, \boldsymbol{\rho}) \left(-\frac{\alpha\, m'}{\rho}\right)\Bigg|_{\ell=0} = -\frac{4\pi\,\alpha}{m'^2} \int\limits_0^\infty d\rho\, \rho\, \frac{\sin(\rho\, \chi_\Delta)}{\rho\, \mathrm{sh}\, \chi_\Delta} = \\ = -\frac{4\pi\,\alpha}{m'^2\, \chi_\Delta\, \mathrm{sh}\, \chi_\Delta}\, \mathrm{Im} \int\limits_0^\infty dx\, e^{ix} = -\frac{4\pi\,\alpha}{m'^2\, \chi_\Delta\, \mathrm{sh}\, \chi_\Delta}\,, \end{aligned} \tag{6.2}$$

где относительная быстрота χ_Δ соответствует $\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{p}(-)\,\mathbf{k}$ и определяется квадратом переданного импульса $Q^2 = -(p-k)^2 = 2\,(\mathrm{ch}\,\chi_\Delta - 1)$.

[21] Интеграл по переменной x в правой части выражения (6.2) может быть вычислен как предел при $R \to +\infty$ с помощью теоремы Коши вдоль контура, состоящего из отрезка $[0; R]$ действительной оси, отрезка $[iR; i0]$ мнимой оси и части дуги окружности C_R^+ радиуса R с центром в начале координат, находящейся в первой четверти и соединяющей данные отрезки.

При больших Q^2 потенциал $\widetilde{V}(\mathbf{\Delta})$ ведет себя как $(Q^2 \ln Q^2)^{-1}$, что воспроизводит главное поведение потенциала в КХД, который в лидирующем порядке пропорционален $\bar{\alpha}_S(Q^2)/Q^2$, где $\bar{\alpha}_S(Q^2)$ – инвариантный заряд. Такое КХД-подобное поведение потенциала (6.1) в РКП-подходе впервые было отмечено в [74].

6.3. Амплитуда Бете–Солпитера и ее связь с волновой РКП-функцией

Ресуммирующие факторы появляются в параметризации мнимой части соответствующих кварковых токовых корреляторов, в отношении Дрелла $R(s)$. В двухчастичном приближении отношение Дрелла $R(s)$ может быть апроксимировано амплитудой Бете–Солпитера двух заряженных частиц $\chi_{\mathrm{BS}}(x)$ при $x = 0$ [63]. В РКП-подходе амплитуда Бете–Солпитера, которая параметризует физическую величину $R(s)$ и берется при $x = 0$, а, следовательно, при относительном времени $\tau = 0$, может быть выражена через волновую РКП-функцию $\Psi_q(\mathbf{p})$ соотношением

$$\chi_{\mathrm{BS}}(x = 0) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\,\Omega_{\mathbf{p}}\, \Psi_q(\mathbf{p})\,, \tag{6.3}$$

где $d\,\Omega_{\mathbf{p}} = d\,\mathbf{p}/E_p$ – релятивистский трехмерный элемент объема в пространстве Лобачевского, которое реализуется на верхней полé массового гиперболоида $E_p^2 - \mathbf{p}^2 = 1$, а волновая РКП-функция $\Psi_q(\mathbf{p})$ и энергия E_p определены в (2.66).

Тогда, принимая во внимание выражение для релятивистских плоских волн (1.12), преобразования (1.16) и обозначения (2.66), из соотношения (6.3) находим связь амплитуды Бете–Солпитера с волновой РКП-функцией $\psi_q(\boldsymbol{\rho})$:

$$\chi_{\mathrm{BS}}(x = 0) = \psi_q(\boldsymbol{\rho})|_{\rho = i}\,. \tag{6.4}$$

Отметим, что в случае, когда взаимодействие выключено, $V(\lambda'\,\boldsymbol{\rho}\,;\,E_q) \equiv 0$, решение $\varphi_\ell(\rho\,,\chi')$ должно воспроизводить известную свободную волновую функцию

$$\lim_{\alpha\to 0} \varphi_\ell(\rho\,,\chi') = \rho\, p_\ell(\rho\,,\operatorname{ch}\chi') \xrightarrow[\rho\to\infty]{} \frac{\sin(\rho\,\chi' - \pi\,\ell/2)}{\operatorname{sh}\chi'}\,, \tag{6.5}$$

где функция $p_\ell(\rho\,,\operatorname{ch}\chi')$ определена в (2.70).

6.4. Метод решения квазипотенциального уравнения и пороговые факторы

Впервые решение уравнения (2.72) с кулоновским потенциалом (6.1) для случая взаимодействия двух релятивистских частиц равных масс при $\ell = 0$, не содержащее i-периодических констант, было получено в [72]. Этот подход приводит к релятивистскому S-фактору (5).

Для того, чтобы найти решение РКП-уравнения (2.72) с кулоновоподобным квазипотенциалом (6.1), обобщим метод, предложенный в [72] (см. также [20], [92], [160]). Следуя этому методу, решение РКП-уравнения (2.72) с квазипотенциалом (6.1) будем искать в виде

$$\varphi_\ell(\rho\,,\chi') = \frac{(-\rho)^{(\ell+1)}}{\rho}\int\limits_{\alpha_-}^{\alpha_+} d\zeta\, e^{i\,\rho\,\zeta}\, R_\ell(\zeta\,,\chi')\,, \tag{6.6}$$

где обобщенная степень $(-\rho)^{(\ell+1)}$ определена в (2.7), а ζ-интегрирование выполняется в комплексной плоскости вдоль контура с концевыми точками α_- и α_+ (см. рис. 1).

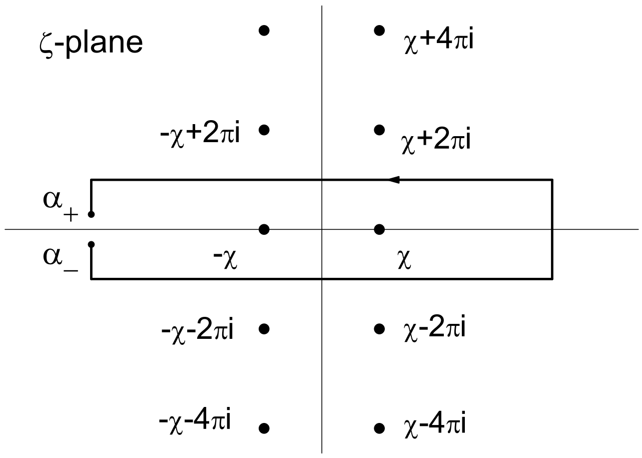

Рис. 1. *Контур интегрирования в решении (6.6) и сингулярности функции (6.11) в комплексной ζ-плоскости.*

Подставляя (6.6) в (2.72) и принимая во внимание, что [22)]

$$\frac{1}{i\,\pi}\int\limits_0^\infty d\rho'\,\sin(\rho'\,\chi)\,e^{i\,\rho'\,\zeta} = \frac{1}{i\,\pi}\frac{\chi}{\chi^2-\zeta^2}\,,$$

приходим к уравнению

$$\begin{gathered}(-1)^\ell\int\limits_{\alpha_-}^{\alpha_+} d\zeta\,R_\ell(\zeta\,,\,\chi')\left(\frac{d}{d\,\mathrm{ch}\,\zeta}\right)^\ell\Bigg[(\mathrm{sh}\,\zeta)^{2\,\ell+1}\;(2\,\mathrm{ch}\,\chi'-2\,\mathrm{ch}\,\zeta)\times\\ \times\left(\frac{d}{d\,\mathrm{ch}\,\zeta}\right)^\ell\left(\frac{e^{i\,\rho\,\zeta}}{\mathrm{sh}\,\zeta}\right)\Bigg] = -\frac{2\,\mu\,\alpha}{m'\,\rho}\prod_{n=1}^{\ell}(\rho^2+n^2)\int\limits_{\alpha_-}^{\alpha_+} d\zeta\,e^{i\,\rho\,\zeta}\,R_\ell(\zeta\,,\,\chi')\,.\end{gathered}\tag{6.7}$$

Следует отметить, что решения этого уравнения, а, значит, и уравнения (2.72), уже не содержат i-периодических констант, которые появляются в решениях уравнения (1.20) из-за конечно-разностной природы гамильтониана (1.15). Также напомним, что квазипотенциал $V(\lambda'\,\rho\,;\,E_q)$, входящий в правую часть уравнения (2.72), зависит параметрически от энергии $E_q = \mathrm{ch}\,\chi'$ эффективной релятивистской частицы массы m' (или от ее быстроты χ'). Следовательно, параметр α в уравнении (6.7) также является функцией быстроты χ'.

6.4.1. $\mathbf{S}$*-фактор* *(*$\ell = 0$*)*

При $\ell = 0$ уравнение (6.7) принимает вид

$$\int\limits_{\alpha_-}^{\alpha_+} d\zeta\,R_0(\zeta\,,\,\chi')\;(2\,\mathrm{ch}\,\chi'-2\,\mathrm{ch}\,\zeta)\;e^{i\,\rho\,\zeta} = -\frac{2\,\mu\,\alpha}{m'\,\rho}\int\limits_{\alpha_-}^{\alpha_+} d\zeta\,e^{i\,\rho\,\zeta}\,R_0(\zeta\,,\,\chi')\,.\tag{6.8}$$

[22)] Интеграл по переменной ρ' может быть вычислен как предел при $R\to+\infty$:

$$\begin{gathered}\frac{1}{i\pi}\int\limits_0^\infty d\rho'\,\sin(\rho'\,\chi)\,e^{i\,\rho'\,\zeta} = \frac{1}{i\,\pi}\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{2\,i}\int\limits_0^R d\rho'\,\left[e^{i\,\rho'\,(\zeta+\chi)} - e^{i\,\rho'\,(\zeta-\chi}\right] = \\ = \frac{1}{i\,\pi}\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{2\,i}\left[\frac{e^{i\,\rho'\,(\zeta+\chi)}}{i\,(\zeta+\chi)} - \frac{e^{i\,\rho'\,(\zeta-\chi}}{i\,(\zeta-\chi)}\right]\Bigg|_0^R = \\ = \frac{1}{2\,i\,\pi}\left[\frac{1}{\zeta+\chi} - \frac{1}{\zeta-\chi}\right] = \frac{1}{i\pi}\,\frac{\chi}{\chi^2-\zeta^2}\,,\;\mathrm{Im}\,\zeta>0\,.\end{gathered}$$

Проинтегрировав по частям левую часть уравнения (6.8), получим

$$\frac{e^{i\rho\zeta}}{i\rho}\,(2\,\mathrm{ch}\,\chi' - 2\,\mathrm{ch}\,\zeta)\;R_0(\zeta\,,\,\chi')\Big|_{\zeta=\alpha_-}^{\zeta=\alpha_+} -$$
$$-\int\limits_{\alpha_-}^{\alpha_+} d\zeta\,\frac{d}{d\,\zeta}\,[(2\,\mathrm{ch}\,\chi' - 2\,\mathrm{ch}\,\zeta)\;R_0(\zeta\,,\,\chi')]\;\frac{e^{i\rho\zeta}}{i\rho} = -\frac{2\,\mu\,\alpha}{m'\,\rho}\int\limits_{\alpha_-}^{\alpha_+} d\zeta\,e^{i\rho\zeta}\,R_0(\zeta\,,\,\chi')\,.$$

Отсюда для функции $R_0(\zeta\,,\,\chi')$ находим дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{d\,\zeta}\Big[\,(\mathrm{ch}\,\chi' - \mathrm{ch}\,\zeta)\,R_0(\zeta\,,\,\chi')\Big] - \frac{i\,\alpha\,\mu}{m'}\,R_0(\zeta\,,\,\chi') = 0\,, \tag{6.9}$$

решение которого должно удовлетворять граничному условию

$$e^{i\rho\zeta}\,(\mathrm{ch}\,\chi' - \mathrm{ch}\,\zeta)\,R_0(\zeta\,,\,\chi')\Big|_{\zeta=\alpha_-}^{\zeta=\alpha_+} = 0\,. \tag{6.10}$$

Решение уравнения (6.9) с граничным условием (6.10) дается выражением

$$R_0(\zeta\,,\,\chi') = -C_0(\chi')\,\frac{e^{\zeta}}{(e^{\zeta} - e^{\chi'})^2}\Big[\frac{e^{\zeta} - e^{-\chi'}}{e^{\zeta} - e^{\chi'}}\Big]^{-1+i\,A}\,, \tag{6.11}$$

где

$$A = \frac{\alpha\,\mu}{m'\,\mathrm{sh}\,\chi'}\,, \tag{6.12}$$

а $C_0(\chi')$ – произвольная функция от χ'.

Значения $\zeta = \pm\chi' + 2\,\pi\,n\,i\,(n = 0, \pm1, \pm2, ...)$ являются точками ветвления функции (6.11) (см. рис. 1). Контур интегрирования в представлении (6.6) не должен пересекать разрезы, которые проводятся от $-\infty + 2\,\pi\,n\,i$ до $\pm\chi' + 2\,\pi\,n\,i$. В случае, когда взаимодействие выключено, $\alpha \to 0$, решение $\varphi_0(\rho\,,\,\chi')$ должно воспроизводить известную свободную волновую функцию $\sin(\rho\,\chi')/\mathrm{sh}\,\chi'$, т.е. удовлетворять при $\ell = 0$ граничному условию (6.5)

Принимая во внимание эти замечания и граничное условие (6.10), выбираем: $\alpha_- = -R - i\,\varepsilon\,, \alpha_+ = -R + i\,\varepsilon$ с $R \to +\infty\,, \varepsilon \to +0$. Вертикальная часть контура интегрирования в правой части представления (6.6) выбрана в виде отрезка прямой $\mathrm{Re}\,\zeta = R$ от точки $\zeta = R - i\,\pi$ до точки $\zeta = R + i\,\pi$. Горизонтальную же часть контура интегрирования нам удобно выбрать в виде прямых $\mathrm{Im}\,\zeta = \pm\pi$, которые проходятся в противоположных направлениях от точки $\zeta = -R - i\,\pi$ до точки $\zeta = R - i\,\pi$

и от точки $\zeta = R + i\pi$ до точки $\zeta = -R + i\pi$ (см. рис. 1). Такой выбор контура интегрирования позволит полученное нами решение в итоге выразить через гипергеометрическую функцию.

Подставляя решение (6.11) в представление (6.6) при $\ell = 0$, получим следующее выражение для парциальной волновой РКП-функции:

$$\varphi_0(\rho\,,\chi') =$$

$$= C_0(\chi')\,\frac{(-\rho)^{(1)}}{\rho}\,\lim_{\substack{R\to+\infty\,,\\ \varepsilon\to+0}}\,\int\limits_{\alpha_-}^{\alpha_+} d\zeta\,\frac{e^{(1+i\,\rho)\zeta}}{(e^{\zeta}-e^{\chi'})^2}\,\left[\frac{e^{\zeta}-e^{-\chi'}}{e^{\zeta}-e^{\chi'}}\right]^{-1+i\,A}\,. \tag{6.13}$$

Для того чтобы выполнить в (6.13) ζ-интегрирование в комплексной плоскости вдоль контура с концевыми точками α_- и α_+, запишем правую часть этого выражения в виде

$$\varphi_0(\rho\,,\chi') =$$

$$\begin{aligned}
= -C_0(\chi')\,\frac{(-\rho)^{(1)}}{\rho}\,\lim_{\substack{R\to+\infty\,,\\ \varepsilon\to+0}}\,&\left\{\int\limits_{-R-i\varepsilon}^{-R-i\pi} d\zeta\,\frac{e^{(1+i\rho)\zeta}}{(e^{\zeta}-e^{\chi'})^2}\,\left[\frac{e^{\zeta}-e^{-\chi'}}{e^{\zeta}-e^{\chi'}}\right]^{-1+iA}\Bigg|_{\zeta=-R+ix}+\right.\\
&+\int\limits_{-R-i\pi}^{R-i\pi} d\zeta\,\frac{e^{(1+i\rho)\zeta}}{(e^{\zeta}-e^{\chi'})^2}\,\left[\frac{e^{\zeta}-e^{-\chi'}}{e^{\zeta}-e^{\chi'}}\right]^{-1+iA}\Bigg|_{\zeta=x-i\pi}+\\
&+\int\limits_{R-i\pi}^{R+i\pi} d\zeta\,\frac{e^{(1+i\rho)\zeta}}{(e^{\zeta}-e^{\chi'})^2}\,\left[\frac{e^{\zeta}-e^{-\chi'}}{e^{\zeta}-e^{\chi'}}\right]^{-1+iA}\Bigg|_{\zeta=R+ix}+\\
&+\int\limits_{R+i\pi}^{-R+i\pi} d\zeta\,\frac{e^{(1+i\rho)\zeta}}{(e^{\zeta}-e^{\chi'})^2}\,\left[\frac{e^{\zeta}-e^{-\chi'}}{e^{\zeta}-e^{\chi'}}\right]^{-1+iA}\Bigg|_{\zeta=x+i\pi}+\\
&\left.+\int\limits_{-R+i\pi}^{-R+i\varepsilon} d\zeta\,\frac{e^{(1+i\rho)\zeta}}{(e^{\zeta}-e^{\chi'})^2}\,\left[\frac{e^{\zeta}-e^{-\chi'}}{e^{\zeta}-e^{\chi'}}\right]^{-1+iA}\Bigg|_{\zeta=-R+ix}\right\}.
\end{aligned}$$

Сделаем в каждом из интегралов в правой части последнего выражения указанную при них замену переменной интегрирования ζ, а затем выполним предельный переход при $R\to+\infty\,,\varepsilon\to+0$. В результате получим решение, не содержащее i-периодических констант, в форме

$$\varphi_0(\rho\,,\chi') =$$

$$= 2\,C_0(\chi')\,\frac{(-\rho)^{(1)}\,\mathrm{sh}(\pi\,\rho)}{\rho}\,\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\frac{e^{(1+i\rho)x}}{(e^{x}+e^{\chi'})^2}\left[\frac{e^{x}+e^{-\chi'}}{e^{x}+e^{\chi'}}\right]^{-1+iA}\,. \tag{6.14}$$

В решении (6.14) сделаем замену переменной

$$t = \frac{e^{\chi'}}{e^{x} + e^{\chi'}}\,.$$

Тогда, принимая во внимание интегральное представление для гипергеометрической функции [105]

$$F\,(a\,,b\,;c\,;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\,\Gamma(c-b)}\int\limits_0^1 dt\,t^{b-1}\,(1-t)^{c-b-1}\,(1-t\,z)^{-a}\,,$$
$$\mathrm{Re}\,c > \mathrm{Re}\,b > 0\,,$$

решение (6.14) может быть выражено через гипергеометрическую функцию:

$$\varphi_0(\rho\,,\chi') = \\ = -N_0(\chi')\,(-\rho)^{(1)}\,e^{i\rho\,\chi' + iA\,\chi'}\,F\left(1 - iA\,,1 - i\rho\,;2\,;1 - e^{-2\chi'}\right)\,. \tag{6.15}$$

Здесь $N_0(\chi') = -2\,\pi\,C_0(\chi')\,e^{-\chi' - iA\,\chi'}$ – вещественный нормировочный множитель. Действительно, для вещественных $\chi'\,,\rho$ из условия сопряжения для парциальной волновой РКП-функции

$$\varphi_0^*\,(\rho\,,\chi') = \varphi_0\,(\rho\,,\chi')$$

и формул (2.7) и [105]

$$F\,\,(a\,,b\,;c\,;z) = (1-z)^{c-a-b}\,\,F\,\,(a-c\,,b-c\,;c\,;z)\,\,, \tag{6.16}$$

имеем:

$$\varphi_0^*\,(\rho\,,\chi') = -N_0^*(\chi')(-\rho)^{(1)}\,e^{-i\rho\,\chi' - iA\,\chi'}\,F\left(1 + iA\,,1 + i\rho\,;2\,;1 - e^{-2\chi'}\right) =$$

$$= -N_0^*(\chi')(-\rho)^{(1)}\,e^{i\rho\,\chi' + iA\,\chi'}\,F\left(1 - iA\,,1 - i\rho\,;2\,;1 - e^{-2\chi'}\right) =$$

$$= -N_0(\chi')(-\rho)^{(1)}\,e^{i\rho\,\chi' + iA\,\chi'}\,F\left(1 - iA\,,1 - i\rho\,;2\,;1 - e^{-2\chi'}\right)\,.$$

Отсюда следует, что $N_0^*(\chi') = N_0(\chi')$.

Нормировочный множитель $N_0(\chi')$ находится (также, как в [72]) из условия (6.5) при $\ell = 0$, если воспользоваться асимптотическим выражением для гипергеометрической функции (3.9) (вывод дан в приложении

А, формула (А.7)). В результате получим:

$$\varphi_0(\rho\,,\chi') \xrightarrow[\rho\to\infty]{} \frac{N_0(\chi')\,e^{\chi'-\pi A/2}}{\operatorname{sh}\chi'\,2i}\left\{\frac{\exp\left[i\Big(\rho\,\chi'+A\ln(2\rho\,\operatorname{sh}\chi')\Big)\right]}{\Gamma(1+iA)}-\right.$$
$$\left.-\frac{\exp\left[-i\Big(\rho\,\chi'+A\ln(2\rho\,\operatorname{sh}\chi')\Big)\right]}{\Gamma(1-iA)}\right\} \xrightarrow[\alpha\to 0]{} \frac{\sin(\rho\,\chi')}{\operatorname{sh}\chi'}\,.$$

Отсюда находим выражение для нормировочного множителя:

$$\Big(N_0(\chi')e^{\chi'}\Big)^2 = e^{\pi A}|\Gamma(1-iA)|^2 = \frac{X_{\,\mathrm{uneq}}(\chi')}{1-\exp\left[-X_{\,\mathrm{uneq}}(\chi')\right]}\,, \qquad (6.17)$$

где

$$X_{\,\mathrm{uneq}}(\chi') = \frac{2\,\pi\,\alpha\,\mu}{m'\operatorname{sh}\chi'}\,, \qquad (6.18)$$

а быстрота χ' связана с полной энергией $\sqrt{s}$ соотношением

$$({m'}^2/\mu)\operatorname{ch}\chi' = \sqrt{s}\,. \qquad (6.19)$$

Теперь заметим, что при $\rho = i$ все обобщенные степени (2.7) при $\ell \neq 0$ в представлении (6.6) обращаются в нуль. Значит, в разложении (2.3) для волновой функции $\psi_q(\boldsymbol{\rho})$ остается только s-волна, т.е. когда $\ell = 0$. Следовательно, используя соотношения (6.15), (6.17) и формулу [105]

$$F\,(a\,,b\,;b\,;z) = (1-z)^{-a}\,, \qquad (6.20)$$

вычисляем $|\psi_q(i)|^2$. Это приводит к следующему выражению для релятивистского S-фактора для случая взаимодействия двух релятивистских частиц произвольных масс:

$$S_{\,\mathrm{uneq}}(\chi') = \lim_{\rho\to i}\left|\frac{\varphi_0(\rho\,,\chi')}{\rho}\right|^2 = \frac{X_{\,\mathrm{uneq}}(\chi')}{1-\exp\left[-X_{\,\mathrm{uneq}}(\chi')\right]}\,, \qquad (6.21)$$

где $X_{\,\mathrm{uneq}}(\chi')$ определена в (6.18).

6.4.2. **P**-*фактор* ($\ell = 1$)

Релятивистский S-фактор, который входит в отношение Дрелла $R(s)$, связан с коррелятором векторного кваркового тока. Но для того, чтобы выполнить пороговое ресуммирование в случае аксиально-векторного тока, необходимо использовать релятивистский P-фактор, отвечающий $\ell = 1$ состоянию. Поскольку при $\rho = i$ в разложении (2.3) для волновой функции $\psi_q(\boldsymbol{\rho})$ остается только s-волна, т.е. когда $\ell = 0$, то для p-волны релятивистский ресуммирующий P-фактор будет определяться через конечно-разностную производную от квазипотенциальной парциальной волновой функции $\varphi_1(\rho\,,\chi')$ при $\rho = i$ соотношением [104]

$$P_{\text{uneq}}(\chi') = \lim_{\rho\to i}\left|\frac{3}{\operatorname{sh}\chi'}\Delta^*\left(\frac{\varphi_1(\rho\,,\chi')}{\rho}\right)\right|^2\,, \tag{6.22}$$

где конечно-разностная производная дается выражением [73]

$$\Delta^* = \frac{1}{i}\left[\exp\left(i\frac{d}{d\,\rho}\right) - 1\right]. \tag{6.23}$$

Рассмотрим уравнение (6.7) при $\ell = 1$, в котором (как и в случае $\ell = 0$) выполним в его обеих частях интегрирования по частям так, чтобы при $1/\rho$ остались только интегральные члены. Тогда получим:

$$\begin{gathered}
i\rho\, e^{i\rho\,\zeta}\,(2\operatorname{ch}\chi' - 2\operatorname{ch}\zeta)\,R_1(\zeta\,,\chi')\Big|_{\zeta=\alpha_-}^{\zeta=\alpha_+} - \\
-e^{i\rho\,\zeta}\,(2\operatorname{ch}\chi' - 2\operatorname{ch}\zeta)\left[\frac{\operatorname{ch}\zeta}{\operatorname{sh}\zeta}R_1(\zeta\,,\chi') + \operatorname{sh}\zeta\,\frac{d}{d\,\zeta}\left(\frac{R_1(\zeta\,,\chi')}{\operatorname{sh}\zeta}\right)\right]\Big|_{\zeta=\alpha_-}^{\zeta=\alpha_+} + \\
+\frac{2\,i\alpha\,\mu}{m'}\,e^{i\rho\,\zeta}\,R_1(\zeta\,,\chi')\Big|_{\zeta=\alpha_-}^{\zeta=\alpha_+} - \\
-\frac{i}{\rho}\,\frac{e^{i\rho\,\zeta}}{\operatorname{sh}\zeta}\,\frac{d}{d\,\zeta}\left[(\operatorname{sh}\zeta)^2\,\,(2\operatorname{ch}\chi' - 2\operatorname{ch}\zeta)\,\frac{d}{d\,\zeta}\left(\frac{R_1(\zeta\,,\chi')}{\operatorname{sh}\zeta}\right)\right]\Big|_{\zeta=\alpha_-}^{\zeta=\alpha_+} - \\
-\frac{1}{\rho}\,\frac{2\,\alpha\,\mu}{m'}\,e^{i\rho\,\zeta}\,\frac{d}{d\,\zeta}\,R_1(\zeta\,,\chi')\Big|_{\zeta=\alpha_-}^{\zeta=\alpha_+} + \\
+\frac{1}{\rho}\int\limits_{\alpha_-}^{\alpha_+} d\zeta\,e^{i\rho\,\zeta}\left\{i\frac{d}{d\,\zeta}\left\{\frac{1}{\operatorname{sh}\zeta}\,\frac{d}{d\,\zeta}\left[(\operatorname{sh}\zeta)^2\,(2\operatorname{ch}\chi' - 2\operatorname{ch}\zeta)\,\frac{d}{d\,\zeta}\left(\frac{R_1(\zeta\,,\chi')}{\operatorname{sh}\zeta}\right)\right]\right\} + \right. \\
\left. +\frac{2\,\alpha\,\mu}{m'}\left[\frac{d^2}{d\,\zeta^2}\,R_1(\zeta\,,\chi') - R_1(\zeta\,,\chi')\right]\right\} = 0\,.
\end{gathered}$$

Отсюда для функции $R_1(\zeta\,,\chi')$ следует дифференциальное уравнение

$$\begin{gathered}
\frac{d}{d\,\zeta}\left\{\frac{1}{\operatorname{sh}\zeta}\frac{d}{d\,\zeta}\left[(\operatorname{sh}\zeta)^2\,(\operatorname{ch}\chi' - \operatorname{ch}\zeta)\,\frac{d}{d\,\zeta}\,\left(\frac{R_1(\zeta\,,\chi')}{\operatorname{sh}\zeta}\right)\right]\right\} - \\
-\frac{i\alpha\,\mu}{m'}\left[\frac{d^2}{d\,\zeta^2}\,R_1(\zeta\,,\chi') - R_1(\zeta\,,\chi')\right] = 0\,,
\end{gathered} \tag{6.24}$$

решение которого должно удовлетворять граничным условиям

$$
\begin{gathered}
e^{i\rho\zeta}\,(\operatorname{ch}\chi' - \operatorname{ch}\zeta)\,R_1(\zeta\,,\chi')\Big|_{\zeta=\alpha_-}^{\zeta=\alpha_+} = 0\,,\\
-\,e^{i\rho\zeta}(\operatorname{ch}\chi' - \operatorname{ch}\zeta)\left[\frac{\operatorname{ch}\zeta}{\operatorname{sh}\zeta}R_1(\zeta\,,\chi') + \operatorname{sh}\zeta\frac{d}{d\,\zeta}\left(\frac{R_1(\zeta\,,\chi')}{\operatorname{sh}\zeta}\right)\right] + \\
+\,\frac{i\alpha\,\mu}{m'}\,e^{i\rho\zeta}\,R_1(\zeta\,,\chi')\Big|_{\zeta=\alpha_-}^{\zeta=\alpha_+} = 0\,,
\end{gathered}
\tag{6.25}
$$

$$
\begin{gathered}
\frac{e^{i\rho\zeta}}{\operatorname{sh}\zeta}\frac{d}{d\,\zeta}\left[(\operatorname{sh}\zeta)^2\,(\operatorname{ch}\chi' - \operatorname{ch}\zeta)\,\frac{d}{d\,\zeta}\left(\frac{R_1(\zeta\,,\chi')}{\operatorname{sh}\zeta}\right)\right] - \\
-\,\frac{i\alpha\,\mu}{m'}\,e^{i\rho\zeta}\frac{d}{d\,\zeta}\,R_1(\zeta\,,\chi')\Big|_{\zeta=\alpha_-}^{\zeta=\alpha_+} = 0\,.
\end{gathered}
\tag{6.26}
$$

Уравнение (6.24) преобразуется к виду

$$
\begin{gathered}
\frac{d}{d\,\zeta}\left\{(\operatorname{ch}\chi' - \operatorname{ch}\zeta)\left[\frac{d^2}{d\,\zeta^2}\,R_1(\zeta\,,\chi') - R_1(\zeta\,,\chi')\right]\right\} - \\
-\,\left(\operatorname{sh}\zeta + \frac{i\alpha\,\mu}{m'}\right)\left[\frac{d^2}{d\,\zeta^2}\,R_1(\zeta\,,\chi') - R_1(\zeta\,,\chi')\right] = 0\,,
\end{gathered}
$$

откуда, разделяя переменные и интегрируя, приходим к уравнению

$$
\frac{d^2}{d\,\zeta^2}\,R_1(\zeta\,,\chi') - R_1(\zeta\,,\chi') = C_1(\chi')\,\frac{e^{2\,\zeta}\,\left(e^{\zeta} - e^{-\chi'}\right)^{-2+iA}}{\left(e^{\zeta} - e^{\chi'}\right)^{2+iA}}\,,
\tag{6.27}
$$

где $C_1(\chi')$ – произвольная функция от χ'.

Общее решение уравнения (6.27) с граничными условиями (6.25) и (6.26) находим методом вариации произвольных постоянных. Это решение дается выражением

$$
\begin{gathered}
R_1(\zeta\,,\chi') = \,B_1(\chi')\,e^{\zeta} + B_2(\chi')\,e^{-\zeta} - \\
-\frac{C_1(\chi')}{2^{\,4}\,\operatorname{sh}^3\chi'}\left\{e^{\zeta}\Big[\,\frac{1}{1+iA}\Big(\frac{e^{\zeta} - e^{-\chi'}}{e^{\zeta} - e^{\chi'}}\Big)^{1+iA} - \frac{2}{iA}\Big(\frac{e^{\zeta} - e^{-\chi'}}{e^{\zeta} - e^{\chi'}}\Big)^{iA} + \right.\\
+\frac{1}{-1+iA}\Big(\frac{e^{\zeta} - e^{-\chi'}}{e^{\zeta} - e^{\chi'}}\Big)^{-1+iA}\Big] - e^{2\,\chi'-\zeta}\Big[\,\frac{1}{1+iA}\Big(\frac{e^{\zeta} - e^{-\chi'}}{e^{\zeta} - e^{\chi'}}\Big)^{1+iA} - \\
\left. -\frac{2\,e^{-2\,\chi'}}{iA}\Big(\frac{e^{\zeta} - e^{-\chi'}}{e^{\zeta} - e^{\chi'}}\Big)^{iA} + \frac{e^{-4\,\chi'}}{-1+iA}\Big(\frac{e^{\zeta} - e^{-\chi'}}{e^{\zeta} - e^{\chi'}}\Big)^{-1+iA}\Big]\right\},
\end{gathered}
\tag{6.28}
$$

где $B_1(\chi')$, $B_2(\chi')$ – произвольные функции от χ', а параметр A определен в (6.12).

Подставим решение (6.28) в представление (6.6) при $\ell = 1$ и выполним необходимые интегрирования по переменной ζ и предельный переход при $R \to +\infty$, $\varepsilon \to +0$, принимая во внимание граничные условия (6.25) и (6.26). Тогда получим следующее выражение для парциальной волновой РКП-функции $\varphi_1(\rho\,,\chi')$:

$$\varphi_1(\rho\,,\chi') = \,-C_1(\chi')\frac{\rho}{\rho^{(2)}}\int\limits_{\alpha_-}^{\alpha_+} d\zeta\,\frac{e^{(2+i\rho)\,\zeta}}{(e^{\zeta}-e^{\chi'})^4}\,\left[\frac{e^{\zeta}-e^{-\chi'}}{e^{\zeta}-e^{\chi'}}\right]^{-2+iA}\,, \tag{6.29}$$

где функция $\rho^{(2)}$ определена в (2.7).

Далее, выполняя в (6.29) ζ-интегрирование в комплексной плоскости вдоль контура с концевыми точками α_- и α_+ (т.е. также, как и в случае s-волны), получим решение, не содержащее i-периодических констант, в форме

$$\varphi_1(\rho\,,\chi') = \,-2\,C_1(\chi')\frac{\rho\,\mathrm{sh}(\pi\,\rho)}{\rho^{(2)}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\frac{e^{(2+i\rho)x}}{(e^{x}+e^{\chi'})^4}\left[\frac{e^{x}+e^{-\chi'}}{e^{x}+e^{\chi'}}\right]^{-2+iA}\,. \tag{6.30}$$

Решение (6.30) также, как и в случае s-волны, может быть представлено через гипергеометрическую функцию:

$$\varphi_1(\rho\,,\chi') = N_1(\chi')(-\rho)^{(2)}\,e^{i\rho\,\chi'+iA\,\chi'}\,F\left(2-iA\,,2-i\rho\,;4\,;1-e^{-2\,\chi'}\right)\,, \tag{6.31}$$

где действительный нормировочный множитель $N_1(\chi') = -(\pi/3)\,C_1(\chi')\times$ $\times\,e^{-2\,\chi'-iA\,\chi'}$ находится из условия (6.5) при $\ell = 1$, а обобщенная степень $(-\rho)^{(2)}$ определена в (2.7).

Наконец, используя определения (6.22) и (6.23), решение (6.31) и условие (6.5), находим следующее выражение для релятивистского P-фактора для случая взаимодействия двух релятивистских частиц произвольных масс:

$$P_{\mathrm{uneq}}(\chi') = \left[1+\left(\frac{\alpha\,\mu}{m'\,\mathrm{sh}\,\chi'}\right)^2\right]\,S_{\mathrm{uneq}}(\chi')\,, \tag{6.32}$$

где релятивистский S-фактор $S_{\mathrm{uneq}}(\chi')$ дается выражением (6.21).

6.4.3. **D**-*фактор* ($\ell = 2$)

Для d-волны ($\ell = 2$) релятивистский ресуммирующий пороговый D-фактор будет определяться через конечно-разностную производную (6.23) от квазипотенциальной парциальной волновой функции $\varphi_2(\rho\,,\chi')$ при $\rho = i$ соотношением

$$D_{\text{uneq}}(\chi') = \lim_{\rho\to i}\left|\frac{\Gamma(6)}{(2\,\text{sh}\,\chi')^2\,\Gamma^2(3)}(\Delta^*)^2\left[\frac{\varphi_2(\rho\,,\chi')}{\rho}\right]\right|^2. \tag{6.33}$$

Для того чтобы найти парциальную волновую функцию $\varphi_2(\rho\,,\chi')$, рассмотрим уравнение (6.7) при $\ell = 2$, в котором (как и в случае $\ell = 0,1$) выполним в его обеих частях интегрирования по частям так, чтобы при $1/\rho$ остались только интегральные члены. Тогда для функции $R_2(\zeta\,,\chi')$ получим дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned}&\left(\frac{d}{d\;\text{ch}\,\zeta}\right)^3\left[(\,\text{sh}\,\zeta)^5\,(\,\text{ch}\,\chi'-\,\text{ch}\,\zeta)\left(\frac{d}{d\;\text{ch}\,\zeta}\right)^2\left(\frac{R_2(\zeta\,,\chi')}{\text{sh}\,\zeta}\right)\right]=\\&=\frac{i\alpha\,\mu}{m'\;\text{sh}\,\zeta}\left[\frac{d^4}{d\,\zeta^4}R_2(\zeta\,,\chi')-5\,\frac{d^2}{d\,\zeta^2}R_2(\zeta\,,\chi')+4\,R_2(\zeta\,,\chi')\right]=0\,,\end{aligned} \tag{6.34}$$

решение которого должно удовлетворять граничным условиям

$$\begin{aligned}&e^{i\rho\,\zeta}\,(\,\text{ch}\,\chi'-\,\text{ch}\,\zeta)\,R_2(\zeta\,,\chi')\Big|_{\zeta=\alpha_-}^{\zeta=\alpha_+}=0\,,\\&\frac{e^{i\rho\,\zeta}}{(\,\text{sh}\,\zeta)^5}\Bigg\{\Big\{6\,(\,\text{sh}\,\zeta)^4\;\text{ch}\,\zeta\;(\,\text{ch}\,\chi'-\,\text{ch}\,\zeta)-\\&-\frac{d}{d\,\zeta}\left[(\,\text{sh}\,\zeta)^5\,(\,\text{ch}\,\chi'-\,\text{ch}\,\zeta)\right]-\frac{i\alpha\,\mu}{m'}(\,\text{sh}\,\zeta)^5\Big\}\,R_2(\zeta\,,\chi')+\\&+(\,\text{sh}\,\zeta)^6\,(\,\text{ch}\,\chi'-\,\text{ch}\,\zeta)\,\frac{d}{d\,\zeta}\left(\frac{R_2(\zeta\,,\chi')}{\text{sh}\,\zeta}\right)\Bigg\}\Bigg|_{\zeta=\alpha_-}^{\zeta=\alpha_+}=0\,,\\&e^{i\rho\,\zeta}\Bigg\{-i\left(\frac{d}{d\;\text{ch}\,\zeta}\right)^2\left[(\,\text{sh}\,\zeta)^5\,(\,\text{ch}\,\chi'-\,\text{ch}\,\zeta)\left(\frac{d}{d\;\text{ch}\,\zeta}\right)\left(\frac{R_2(\zeta\,,\chi')}{\text{sh}\,\zeta}\right)\right]+\\&+\frac{\alpha\,\mu}{m'}\left[5\,\frac{d}{d\,\zeta}R_2(\zeta\,,\chi')-\frac{d^3}{d\,\zeta^3}R_2(\zeta\,,\chi')\right]\Bigg\}\Bigg|_{\zeta=\alpha_-}^{\zeta=\alpha_+}=0\,,\end{aligned} \tag{6.35}$$

$$
\frac{e^{i\rho\zeta}}{(\operatorname{sh}\zeta)^6}\Bigg\{\Big\{i\,(\operatorname{sh}\zeta)^4\,\left[15\,(\operatorname{ch}\zeta)^2-4\,(\operatorname{sh}\zeta)^2\right]\,(\operatorname{ch}\chi'-\operatorname{ch}\zeta)-
$$

$$
-3i\,\operatorname{ch}\zeta\,\frac{d}{d\,\zeta}\,\left[(\operatorname{sh}\zeta)^5\,(\operatorname{ch}\chi'-\operatorname{ch}\zeta)\right]\Big\}\,R_2(\zeta\,,\chi')+
$$

$$
+3i\,(\operatorname{sh}\zeta)^6\,\operatorname{ch}\zeta\,(\operatorname{ch}\chi'-\operatorname{ch}\zeta)\,\frac{d}{d\,\zeta}\left(\frac{R_2(\zeta\,,\chi')}{\operatorname{sh}\zeta}\right)+
$$

$$
+i\,(\operatorname{sh}\zeta)^9\,(\operatorname{ch}\chi'-\operatorname{ch}\zeta)\left(\frac{d}{d\,\operatorname{ch}\zeta}\right)^2\left(\frac{R_2(\zeta\,,\chi')}{\operatorname{sh}\zeta}\right)+
$$

$$
+\frac{\alpha\,\mu}{m'}\,(\operatorname{sh}\zeta)^6\,\frac{d}{d\,\zeta}\,R_2(\zeta\,,\chi')\Bigg\}\Bigg|_{\zeta=\alpha_-}^{\zeta=\alpha_+}=0\,,
$$

$$
\frac{e^{i\rho\zeta}}{(\operatorname{sh}\zeta)^7}\Bigg\{\Big\{3\,(\operatorname{sh}\zeta)^4\,\operatorname{ch}\zeta\,\left[3\,(\operatorname{sh}\zeta)^2-5\,(\operatorname{ch}\zeta)^2\right]\,(\operatorname{ch}\chi'-\operatorname{ch}\zeta)+
$$

$$
+\left[3\,(\operatorname{ch}\zeta)^2-(\operatorname{sh}\zeta)^2\right]\,\frac{d}{d\,\zeta}\,\left[(\operatorname{sh}\zeta)^5\,(\operatorname{ch}\chi'-\operatorname{ch}\zeta)\right]-
$$

$$
-\frac{5i\,\alpha\,\mu}{m'}\,(\operatorname{sh}\zeta)^7\Big\}\,R_2(\zeta\,,\chi')- \tag{6.36}
$$

$$
-(\operatorname{sh}\zeta)^6\,\left[3\,(\operatorname{ch}\zeta)^2-(\operatorname{sh}\zeta)^2\right]\,(\operatorname{ch}\chi'-\operatorname{ch}\zeta)\,\frac{d}{d\,\zeta}\left(\frac{R_2(\zeta\,,\chi')}{\operatorname{sh}\zeta}\right)-
$$

$$
-(\operatorname{sh}\zeta)^9\,\operatorname{ch}\zeta\,(\operatorname{ch}\chi'-\operatorname{ch}\zeta)\left(\frac{d}{d\,\operatorname{ch}\zeta}\right)^2\left(\frac{R_2(\zeta\,,\chi')}{\operatorname{sh}\zeta}\right)-
$$

$$
-(\operatorname{sh}\zeta)^6\,\frac{d}{d\,\operatorname{ch}\zeta}\,\left[(\operatorname{sh}\zeta)^5\,(\operatorname{ch}\chi'-\operatorname{ch}\zeta)\left(\frac{d}{d\,\operatorname{ch}\zeta}\right)^2\left(\frac{R_2(\zeta\,,\chi')}{\operatorname{sh}\zeta}\right)\right]+
$$

$$
+\frac{i\alpha\,\mu}{m'}\,(\operatorname{sh}\zeta)^7\,\frac{d^2}{d\,\zeta^2}\,R_2(\zeta\,,\chi')\Bigg\}\Bigg|_{\zeta=\alpha_-}^{\zeta=\alpha_+}=0\,.
$$

Уравнение (6.34) преобразуется к виду

$$
\frac{d}{d\,\zeta}\left\{(\operatorname{ch}\chi'-\operatorname{ch}\zeta)\left[\frac{d^4}{d\,\zeta^4}\,R_2(\zeta\,,\chi')-5\,\frac{d^2}{d\,\zeta^2}\,R_2(\zeta\,,\chi')+4\,R_2(\zeta\,,\chi')\right]\right\}=
$$

$$
=\left(2\,\operatorname{sh}\zeta+\frac{i\alpha\,\mu}{m'}\right)\left[\frac{d^4}{d\,\zeta^4}\,R_2(\zeta\,,\chi')-5\,\frac{d^2}{d\,\zeta^2}\,R_2(\zeta\,,\chi')+4\,R_2(\zeta\,,\chi')\right]=0\,,
$$

откуда, разделяя переменные и интегрируя, приходим к уравнению

$$\begin{aligned} &\frac{d^4}{d\zeta^4} R_2(\zeta,\chi') - 5\,\frac{d^2}{d\zeta^2} R_2(\zeta,\chi') + 4\,R_2(\zeta,\chi') = \\ &\qquad = -C_2(\chi')\,\frac{e^{3\zeta}\left(e^{\zeta}-e^{-\chi'}\right)^{-3+iA}}{\left(e^{\zeta}-e^{\chi'}\right)^{3+iA}}\,, \end{aligned} \tag{6.37}$$

где $C_2(\chi')$ – произвольная функция от χ'.

Общее решение уравнения (6.37) с граничными условиями (6.35) и (6.36) находим методом вариации произвольных постоянных. Это решение имеет вид

$$\begin{aligned} R_2(\zeta,\chi') = {} & B_1(\chi')\,e^{\zeta} + B_2(\chi')\,e^{-\zeta} + B_3(\chi')\,e^{2\zeta} + B_4(\chi')\,e^{-2\zeta} - \\ & -\frac{C_2(\chi')}{3\cdot 2^6\,\mathrm{sh}^5\chi'}\Bigg\{ e^{\chi'+\zeta}\Big[\frac{2}{1+iA}\Big(\frac{e^{\zeta}-e^{-\chi'}}{e^{\zeta}-e^{\chi'}}\Big)^{2+iA} + \frac{3}{iA}\Big(\frac{e^{\zeta}-e^{-\chi'}}{e^{\zeta}-e^{\chi'}}\Big)^{iA} - \\ & -\frac{3}{1+iA}\Big(\frac{e^{\zeta}-e^{-\chi'}}{e^{\zeta}-e^{\chi'}}\Big)^{1+iA} - \frac{1}{-1+iA}\Big(\frac{e^{\zeta}-e^{-\chi'}}{e^{\zeta}-e^{\chi'}}\Big)^{-1+iA}\Big] - \\ & - e^{\zeta-\chi'}\Big[\frac{1}{1+iA}\Big(\frac{e^{\zeta}-e^{-\chi'}}{e^{\zeta}-e^{\chi'}}\Big)^{1+iA} + \frac{3}{-1+iA}\Big(\frac{e^{\zeta}-e^{-\chi'}}{e^{\zeta}-e^{\chi'}}\Big)^{-1+iA} - \\ & -\frac{3}{iA}\Big(\frac{e^{\zeta}-e^{-\chi'}}{e^{\zeta}-e^{\chi'}}\Big)^{iA} - \frac{1}{-2+iA}\Big(\frac{e^{\zeta}-e^{-\chi'}}{e^{\zeta}-e^{\chi'}}\Big)^{-2+iA}\Big] - \\ & -e^{3\chi'-\zeta}\Big[\frac{1}{2+iA}\Big(\frac{e^{\zeta}-e^{-\chi'}}{e^{\zeta}-e^{\chi'}}\Big)^{2+iA} - \frac{1}{1+iA}\Big(\frac{e^{\zeta}-e^{-\chi'}}{e^{\zeta}-e^{\chi'}}\Big)^{1+iA}\Big] + \\ & +3\,e^{\chi'-\zeta}\Big[\frac{1}{1+iA}\Big(\frac{e^{\zeta}-e^{-\chi'}}{e^{\zeta}-e^{\chi'}}\Big)^{1+iA} - \frac{1}{iA}\Big(\frac{e^{\zeta}-e^{-\chi'}}{e^{\zeta}-e^{\chi'}}\Big)^{iA}\Big] - \\ & -3\,e^{-\chi'-\zeta}\Big[\frac{1}{iA}\Big(\frac{e^{\zeta}-e^{-\chi'}}{e^{\zeta}-e^{\chi'}}\Big)^{iA} - \frac{1}{-1+iA}\Big(\frac{e^{\zeta}-e^{-\chi'}}{e^{\zeta}-e^{\chi'}}\Big)^{-1+iA}\Big] + \\ & +e^{-3\chi'-\zeta}\Big[\frac{1}{-1+iA}\Big(\frac{e^{\zeta}-e^{-\chi'}}{e^{\zeta}-e^{\chi'}}\Big)^{-1+iA} - \frac{1}{-2+iA}\Big(\frac{e^{\zeta}-e^{-\chi'}}{e^{\zeta}-e^{\chi'}}\Big)^{-2+iA}\Big] - \\ & -\frac{e^{2\zeta}}{2}\Big[\frac{1}{2+iA}\Big(\frac{e^{\zeta}-e^{-\chi'}}{e^{\zeta}-e^{\chi'}}\Big)^{2+iA} - \frac{4}{1+iA}\Big(\frac{e^{\zeta}-e^{-\chi'}}{e^{\zeta}-e^{\chi'}}\Big)^{1+iA} + \\ & +\frac{6}{iA}\Big(\frac{e^{\zeta}-e^{-\chi'}}{e^{\zeta}-e^{\chi'}}\Big)^{iA} - \frac{4}{-1+iA}\Big(\frac{e^{\zeta}-e^{-\chi'}}{e^{\zeta}-e^{\chi'}}\Big)^{-1+iA} + \end{aligned} \tag{6.38}$$

$$+\frac{1}{-2+iA}\Big(\frac{e^{\zeta}-e^{-\chi'}}{e^{\zeta}-e^{\chi'}}\Big)^{-2+iA}\Big]+\frac{e^{4\chi'-2\zeta}}{2\,(2+iA)}\Big(\frac{e^{\zeta}-e^{-\chi'}}{e^{\zeta}-e^{\chi'}}\Big)^{2+iA}-$$

$$-\frac{2\,e^{2\chi'-2\zeta}}{1+iA}\Big(\frac{e^{\zeta}-e^{-\chi'}}{e^{\zeta}-e^{\chi'}}\Big)^{1+iA}+\frac{3\,e^{-2\zeta}}{iA}\Big(\frac{e^{\zeta}-e^{-\chi'}}{e^{\zeta}-e^{\chi'}}\Big)^{iA}-$$

$$-\frac{2\,e^{-2\chi'-2\zeta}}{-1+iA}\Big(\frac{e^{\zeta}-e^{-\chi'}}{e^{\zeta}-e^{\chi'}}\Big)^{-1+iA}+\frac{e^{-4\chi'-2\zeta}}{2\,(-2+iA)}\Big(\frac{e^{\zeta}-e^{-\chi'}}{e^{\zeta}-e^{\chi'}}\Big)^{-2+iA}\Bigg\}\,,$$

где $B_1(\chi')$–$B_4(\chi')$ – произвольные функции от χ', а параметр A определен в (6.12).

Далее, как и в случае p-волны, подставляя решение (6.38) в представление (6.6) при $\ell=2$ и принимая во внимание граничные условия (6.35) и (6.36), выполним необходимые интегрирования по переменной ζ и предельный переход при $R\to+\infty\,,\varepsilon\to+0$. В результате приходим к следующему выражению для парциальной волновой РКП-функции $\varphi_2(\rho\,,\chi')$:

$$\varphi_2(\rho\,,\chi')=\;-C_2(\chi')\frac{\rho}{(-1)^3\,\rho^{(3)}}\int\limits_{\alpha_-}^{\alpha_+}d\zeta\,\frac{e^{(3+i\rho)\,\zeta}}{(e^{\zeta}-e^{\chi'})^6}\,\left[\frac{e^{\zeta}-e^{-\chi'}}{e^{\zeta}-e^{\chi'}}\right]^{-3+iA}\,,\quad(6.39)$$

где функция $\rho^{(3)}$ определена в (2.7).

Теперь, выполняя в (6.39) ζ-интегрирование в комплексной плоскости вдоль контура с концевыми точками α_- и α_+ (т.е. также, как и в случае s- и p-волн), получим решение, не содержащее i-периодических констант, в форме

$$\varphi_2(\rho\,,\chi')=\;-2\,C_2(\chi')\frac{\rho\,\mathrm{sh}(\pi\,\rho)}{\rho^{(3)}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}dx\frac{e^{(3+i\rho)x}}{(e^{x}+e^{\chi'})^6}\left[\frac{e^{x}+e^{-\chi'}}{e^{x}+e^{\chi'}}\right]^{-3+iA}\,.\qquad(6.40)$$

Решение (6.40), также, как и в случае s- и p-волн, может быть выражено через гипергеометрическую функцию:

$$\begin{gathered}\varphi_2(\rho\,,\chi')=\\=-N_2(\chi')(-\rho)^{(3)}\,e^{i\rho\chi'+iA\chi'}\,F\left(3-iA\,,3-i\rho\,;6\,;1-e^{-2\chi'}\right)\,.\end{gathered}\qquad(6.41)$$

Действительный нормировочный множитель $N_2(\chi')=-(2\,\pi/\Gamma(6))\,C_2(\chi')\times\times\,e^{-3\chi'-iA\chi'}$ находится из условия (6.5) при $\ell=2$, а функция $(-\rho)^{(3)}$ определена в (2.7). Наконец, используя соотношения (6.23), (6.33) и (6.41), находим искомое выражение для релятивистского D-фактора:

$$D_{\text{uneq}}(\chi') = \prod_{n=1}^{2} \left[1 + \left(\frac{\alpha\,\mu}{n\,m'\,\operatorname{sh}\chi'} \right)^2 \right] S_{\text{uneq}}(\chi')\,, \tag{6.42}$$

где релятивистский S-фактор $S_{\text{uneq}}(\chi')$ дается выражением (6.21).

6.4.4. $\mathbf{L}$*-фактор* $(\ell \geq 0)$

Проведенное выше изложение метода вывода новых S-, P и D-факторов позволяет, решив уравнение (6.7), найти выражение, не содержащее i-периодических констант, для парциальной волновой функции $\varphi_\ell(\rho\,,\chi')$ и затем выразить его через гипергеометрическую функцию:

$$\begin{gathered} \varphi_\ell(\rho\,,\chi') = N_\ell(\chi')\,(-\rho)^{(\ell+1)}\,e^{i\rho\,\chi' + iA\,\chi' + i\pi\,(\ell+1)} \times \\ \times F\left(\ell+1-iA\,,\ell+1-i\rho\,;2\,\ell+2\,;1-e^{-2\,\chi'}\right)\,, \end{gathered} \tag{6.43}$$

где обобщенная степень $(-\rho)^{(\ell+1)}$ и параметр A, как и ранее, определяются выражениями (2.7) и (6.12), соответственно. Нормировочный множитель $N_\ell(\chi')$ является вещественным, поскольку для вещественных $\chi'\,,\rho\,,\ell$ из условия сопряжения для парциальной волновой РКП-функции

$$\begin{gathered} \varphi^*_\ell\;(\rho\,,\chi') = \nu_\ell(\rho)\,\varphi_\ell\,(\rho\,,\chi')\;, \\ \nu_\ell(\rho) = (-1)^{\ell+1}\,\frac{\rho^{(\ell+1)}}{(-\rho)^{(\ell+1)}}\,, \end{gathered} \tag{6.44}$$

и формул (2.7) и (6.16) имеем:

$$\begin{gathered} \varphi^*_\ell\;(\rho\,,\chi') == N^*_\ell(\chi')\,e^{-i\pi\,(\ell+1)}\,\rho^{(\ell+1)}\,e^{-i\rho\,\chi' - iA\,\chi' - i\pi\,(\ell+1)} \times \\ \times F\left(\ell+1+iA\,,\ell+1+i\rho\,;2\,\ell+2\,;1-e^{-2\,\chi'}\right) = \\ = N^*_\ell(\chi')\,\nu_\ell(\rho)\,(-\rho)^{(\ell+1)}\,e^{i\rho\,\chi' + iA\,\chi' + i\pi\,(\ell+1)} \times \\ \times F\left(\ell+1-iA\,,\ell+1-i\rho\,;2\,\ell+2\,;1-e^{-2\,\chi'}\right) = \\ = N_\ell(\chi')\,\nu_\ell(\rho)\,(-\rho)^{(\ell+1)}\,e^{i\rho\,\chi' + iA\,\chi' + i\pi\,(\ell+1)} \times \\ \times F\left(\ell+1-iA\,,\ell+1-i\rho\,;2\,\ell+2\,;1-e^{-2\chi'}\right)\,. \end{gathered}$$

Отсюда следует, что $N_\ell^*(\chi') = N_\ell(\chi')$.

Нормировочный множитель $N_\ell(\chi')$ находится из условия (6.5), если воспользоваться асимптотическим выражением для гипергеометрической функции (3.9). Это приводит к условию:

$$\varphi_\ell(\rho\,,\chi') \xrightarrow[\rho\to\infty]{} \frac{2\,N_\ell(\chi')\,\Gamma(2\,\ell+2)\,e^{(\ell+1)\,\chi'-\pi\,A/2}}{(2\,\mathrm{sh}\,\chi')^{\ell+1}\,2i} \times$$
$$\times\left\{\frac{\exp\left[i\left(\rho\,\chi' + A\ln(2\rho\,\mathrm{sh}\,\chi') - \pi\,\ell/2\right)\right]}{\Gamma(\ell+1+iA)} - \right.$$
$$\left. - \frac{\exp\left[-i\left(\rho\,\chi' + A\ln(2\rho\,\mathrm{sh}\,\chi') - \pi\,\ell/2\right)\right]}{\Gamma(\ell+1-iA)}\right\} \xrightarrow[\alpha\to 0]{} \frac{\sin(\rho\,\chi' - \pi\,\ell/2)}{\mathrm{sh}\,\chi'}\,.$$

Отсюда находим соотношение для нормировочного множителя:

$$\begin{aligned}\left(\frac{N_\ell(\chi')\,\Gamma(2\,\ell+2)\,e^{(\ell+1)\,\chi'}}{(2\,\mathrm{sh}\,\chi')^{\ell}\,\Gamma(\ell+1)}\right)^2 &= \frac{e^{\pi\,A}|\Gamma(\ell+1-iA)|^2}{\Gamma^2(\ell+1)} = \\ &= \frac{X_{\,\mathrm{uneq}}(\chi')}{1-\exp\left[-X_{\,\mathrm{uneq}}(\chi')\right]}\,\prod_{n=1}^{\ell}\left[1+\left(\frac{\alpha\,\mu}{n\,m'\,\mathrm{sh}\,\chi'}\right)^2\right]\,,\end{aligned}\qquad(6.45)$$

где $X_{\,\mathrm{uneq}}(\chi')$ определено в (6.18).

Релятивистский ресуммирующий пороговый фактор для произвольного орбитального момента $\ell \geq 0$ определяется через конечно-разностную производную (6.23) выражением [77], [78], [92]

$$L_{\,\mathrm{uneq}}(\chi') = \lim_{\rho\to i}\left|\frac{\Gamma(2\,\ell+2)}{(2\,\mathrm{sh}\,\chi')^{\ell}\,\Gamma^2(\ell+1)}\,(\Delta^*)^{\ell}\,\left[\frac{\varphi_\ell(\rho\,,\chi')}{\rho}\right]\right|^2\,. \qquad (6.46)$$

Оператор $(\Delta^*)^\ell$ можно представить в виде

$$(\Delta^*)^\ell = \left\{\frac{1}{i}\,\left[\exp\left(i\,\frac{d}{d\,\rho}\right)-1\right]\right\}^\ell = i^\ell\,\sum_{n=0}^{\ell} C_\ell^n\,(-1)^n\,\exp\left(i\,n\,\frac{d}{d\,\rho}\right), \quad (6.47)$$

где C_ℓ^n – биномиальный коффициент.

Тогда, применяя представление (6.47) к решению (6.43) и принимая во внимание определение обобщенной степени (2.7) и формулу (6.20), проводим следующие вычисления:

$$\lim_{\rho\to i}(\Delta^*)^\ell\left[\frac{\varphi_\ell(\rho\,,\chi')}{\rho}\right] = N_\ell(\chi')\,\lim_{\rho\to i}(\Delta^*)^\ell\left[\frac{(-\rho)^{(\ell+1)}\,e^{i\rho\chi'+iA\chi'+i\pi(\ell+1)}}{\rho}\times\right.$$
$$\left.\times F\left(\ell+1-iA\,,\ell+1-i\rho\,;2\,\ell+2\,;1-e^{-2\chi'}\right)\right] =$$
$$= N_\ell(\chi')\,\lim_{\rho\to i}\sum_{n=0}^{\ell}C_\ell^n\,(-1)^n\,\exp\left(i\,n\,\frac{d}{d\,\rho}\right)\Big[(\ell+i\rho)(\ell-1+i\rho)\cdots(1+i\rho)\times$$
$$\times\, e^{i\rho\chi'+iA\chi'}\,F\left(\ell+1-iA\,,\ell+1-i\rho\,;2\,\ell+2\,;1-e^{-2\chi'}\right)\Big] =$$
$$= N_\ell(\chi')\,\sum_{n=0}^{\ell}C_\ell^n\,(-1)^n\,(\ell-n-1)(\ell-n-2)\cdots(-n)\times$$
$$\times\, e^{-(n+1)\chi'+iA\chi'}\,F\left(\ell+1-iA\,,\ell+n+2\,;2\,\ell+2\,;1-e^{-2\chi'}\right) =$$
$$= N_\ell(\chi')\,\Gamma(\ell+1)\,e^{-(\ell+1)\chi'+iA\chi'}\,F\left(\ell+1-iA\,,2\,\ell+2\,;2\,\ell+2\,;1-e^{-2\chi'}\right) =$$
$$= N_\ell(\chi')\,\Gamma(\ell+1)\,e^{(\ell+1)\chi'-iA\chi'}\,.$$

Отсюда, используя определение (6.46) и соотношение (6.45) для нормировочного множителя, получаем выражение для релятивистского L-фактора для произвольного орбитального момента $\ell\geq 1$ в случае кулоноподобного взаимодействия двух релятивистских частиц произвольных масс:

$$L_{\,\mathrm{uneq}}(\chi') = \prod_{n=1}^{\ell}\left[1+\left(\frac{\alpha\,\mu}{n\,m'\,\mathrm{sh}\,\chi'}\right)^2\right]S_{\mathrm{uneq}}(\chi')\,, \tag{6.48}$$

где быстрота χ' связана с полной энергией $\sqrt{s}$ соотношением (6.19), а релятивистский S-фактор $S_{\,\mathrm{uneq}}(\chi')$ дается выражением (6.21).

6.5. Относительная скорость эффективной релятивистской частицы

Полная энергия взаимодействующих частиц в с.ц.и. $\sqrt{s}$ связана с быстротой χ' соотношением (6.19). Отсюда следует, что

$$\mathrm{sh}^2\,\chi' = \frac{s-(m_1-m_2)^2}{(m_1+m_2)^2}\left(1-\frac{4\,m'^2}{s-(m_1-m_2)^2}\right) = \left(\frac{2\,\mu}{m'}\right)^2\,\frac{u^2}{1-u^2}\,,$$

где скорость u определяется соотношением

$$u = \sqrt{1-\frac{4\,m'^2}{s-(m_1-m_2)^2}}\,. \tag{6.49}$$

Тогда функция $X_{\text{uneq}}(\chi')$ в (6.18) может быть выражена в терминах скорости u в виде

$$X_{\text{uneq}}(u) = \frac{\pi\,\alpha\,\sqrt{1-u^2}}{u}\,. \tag{6.50}$$

Квадрат относительного 3-импульса $\mathbf{k}'$ эффективной релятивистской частицы, имеющей массу m' и выступающей в качестве двухчастичной системы, связан с полной энергией взаимодействующих частиц в с.ц.и. $\sqrt{s}$ и с релятивистской относительной скоростью $\mathbf{v}$ взаимодействующих частиц выражениями (1.6) и (1.7). И, обратно, из соотношений (1.6) и (1.7) следует, что релятивистская относительная скорость $\mathbf{v}$ взаимодействующих частиц выражается через их полную энергию в с.ц.и. $\sqrt{s}$ соотношением (1.10). Отсюда, принимая во внимание определение скорости (6.49), находим

$$|\,\mathbf{v}| = \frac{2\,u}{1+u^2}\,. \tag{6.51}$$

Тогда из выражений (1.6) и (6.51) следует

$$\mathbf{k'}^2 = \mu^2\,({u_{\text{rel}}}')^2\,, \tag{6.52}$$

где μ – приведенная масса, а относительная скорость ${u_{\text{rel}}}'$ эффективной релятивистской частицы массы m', выступающей в качестве двухчастичной системы, определяется выражением

$${u_{\text{rel}}}' = \frac{2\,u}{\sqrt{1-u^2}}\,. \tag{6.53}$$

Этот результат отражает физический смысл уравнения (1.9), которое является релятивистским обобщением уравнения Шредингера в духе геометрии Лобачевского. Подчеркнем, что как 3-импульс $\mathbf{k}'$, так и скорость (6.53) эффективной релятивистской частицы, в силу выражений (1.6) и (6.52), являются инвариантами преобразований Лоренца. Тем самым функция $X_{\text{uneq}}(u)$ в (6.50) выражается в терминах относительной скорости ${u_{\text{rel}}}'$ эффективной релятивистской частицы, определяемой формулой (6.53), соотношением

$$X_{\text{uneq}}({u_{\text{rel}}}') = \frac{2\,\pi\,\alpha}{{u_{\text{rel}}}'}\,. \tag{6.54}$$

Таким образом, в терминах относительной скорости эффективной релятивистской частицы релятивистский S-фактор (6.21) и L-фактор (6.48)

($\ell \geq 1$) даются выражениями

$$S_{\text{uneq}}({u_{\text{rel}}}') = \frac{X_{\text{uneq}}({u_{\text{rel}}}')}{1 - \exp\left[-X_{\text{uneq}}({u_{\text{rel}}}')\right]}\,, \tag{6.55}$$

$$L_{\text{uneq}}({u_{\text{rel}}}') = \prod_{n=1}^{\ell}\left[1 + \left(\frac{\alpha}{n\,{u_{\text{rel}}}'}\right)^2\right] S_{\text{uneq}}({u_{\text{rel}}}')\,. \tag{6.56}$$

6.6. Свойства новых релятивистских факторов

Фактор (6.56) лишь формально имеет ту же форму, что и нерелятивистский фактор (3). Тем не менее, фактор (6.56) имеет явно выраженный релятивистский характер, поскольку как аргумент r (модуль радиуса-вектора $\mathbf{r}$) в кулоновском потенциале (2), так и релятивистская относительная скорость $\mathbf{v}$ взаимодействующих частиц (см. [83]) являются релятивистскими инвариантами. Значит, в силу соотношений (1.6) и (6.52), и скорость эффективной релятивистской частицы (6.53) также обладает этим свойством.

Релятивистские пороговые ресуммирующие факторы (6.55) и (6.56) имеют следующие важные свойства.

• В нерелятивистском пределе, $u \ll 1$, они воспроизводят известные нерелятивистские результаты.

• В релятивистском пределе, $u \to 1$, факторы (6.55) и (6.56) стремятся к единице.

• Для случая взаимодействия двух релятивистских частиц равных масс факторы (6.55) и (6.56) совпадают с S- и L-факторами (5) и (7).

• Случай, когда одна из частиц покоится, означает, что $m_1 \to \infty$. Это дает следующее предельное выражение для скорости u:

$$u \xrightarrow[m_1 \to \infty]{} \frac{|\,\mathbf{k}|}{\sqrt{{m_2}^2 + \,\mathbf{k}^2} + m_2}\,.$$

• В ультрарелятивистском пределе, как это было аргументировано в [161], [162], спектр связанных состояний исчезает, когда масса $m' \to 0$, так как масса частицы является единственным размерным параметром. Эта особенность отражает существенное различие между потенциальными моделями и квантовой теорией поля, где появляется дополнительный размерный параметр Λ. Поэтому можно заключить, что S- и L-факторы, которые соответствуют непрерывному спектру, должны стремиться к 1 при $m' \to 0$. Тем самым, в отличие от нерелятивистского случая, релятивистские пороговые ресуммирующие S- и L-факторы (6.55) и (6.56) воспроизводят как известный нерелятивистский, так и ожидаемый ультрарелятивистский предел: $S\,, L \to 1$.

Таким образом, проведенный выше анализ показывает, что релятивистские S- и L-факторы (6.55) и (6.56), как и следовало ожидать, по форме совпадают с их нерелятивистскими аналогами. Однако роль параметра скорости в них теперь играет не релятивистская относительная скорость $\mathbf{v}$ взаимодействующих частиц, а скорость (6.53) эффективной релятивистской частицы, выступающей в качестве двухчастичной системы.

Для того чтобы более детально проиллюстрировать различия между факторами (6.55) и (6.56), на рис. 2 показано поведение этих факторов как функций u при различных значениях параметра α (числа у кривых). Сплошная линия соответствует релятивистскому S-фактору

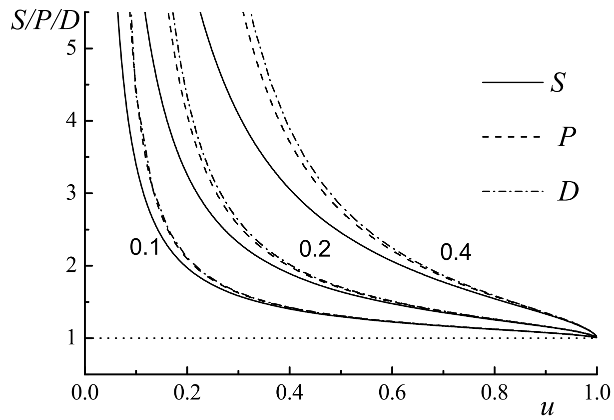

Рис. 2. *Поведение релятивистских S-, P- и D-факторов как функций переменной u при различных значениях α (числа у кривых). S-фактору (6.55) соответствует сплошная линия, а штриховая и штрих-пунктирная линии – P- и D-факторам (формула (6.56) при $\ell = 1$ и $\ell = 2$, соответственно); линия из точек соответствует $\alpha = 0$.*

(6.55), а штриховая и штрих-пунктирная линии – релятивистским P- и D-факторам (формула (6.56) при $\ell = 1$ и $\ell = 2$). Рис. 2 демонстрирует, что в области вблизи порога рождения кварковой пары (при нерелятивистских значениях $u \leq 0.2$) влияние этих факторов наиболее сильное и зависит от значения α. С ростом же значений u зависимость от α ослабевает и все кривые приближаются к единице.

Рис. 3 и 4 демонстрируют различия в поведении релятивистских и нерелятивистских S- и P-факторов, как функций переменной u при различных значениях α (числа у кривых). Релятивистским S- и P-факторам

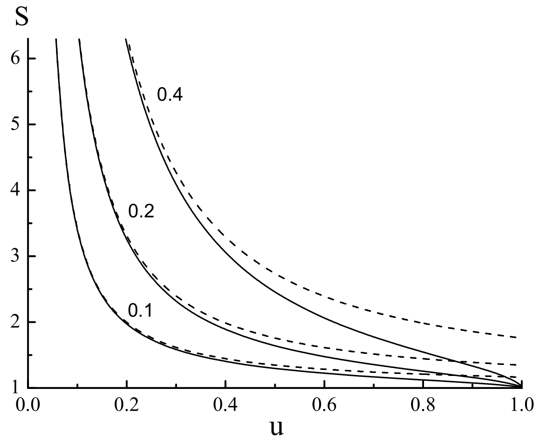

Рис. 3. *Поведение S-фактора при различных значениях α (числа у кривых). Сплошная кривая – релятивистской S-фактор (6.55), штриховая кривая – нерелятивистский S-фактор (4).*

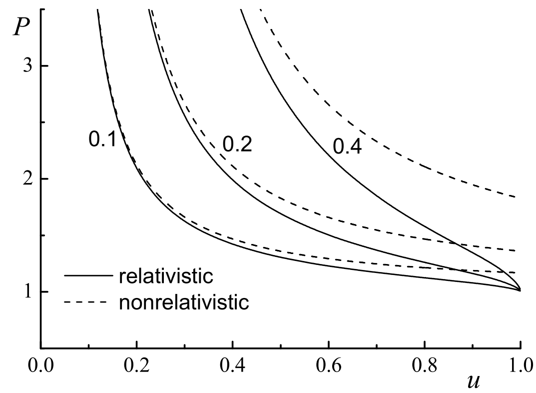

Рис. 4. *Поведение P-фактора как функции переменной u при различных значениях α (числа у кривых). Сплошные линии соответствуют релятивистскому выражению (6.56) ($\ell = 1$), а штриховые линии – нерелятивистскому (3), взятому при $\ell = 1$.*

(6.55) и (6.56), взятому при $\ell = 1$, соответствуют сплошные линии, а штриховые линии – поведению нерелятивистских S- и P-факторов (4) и (3), взятому при $\ell = 1$, с заменой $v_{\rm nr} \to u$, т.е. подобно тому, как это делалось в работах [65]–[67]. При этом поведение релятивистского и нерелятивистского D-фактора как функций переменной u при различных значениях α имеет тот же характер, что и поведение релятивистских и нерелятивистских S- и P-факторов. Рис. 3 и 4 показывают, что полученные здесь релятивистские S- и L-факторы в области нерелятивистских значений $u \leq 0.2$, где их влияние велико, фактически совпадают с их нерелятивистскими аналогами. Однако с увеличением значения u различия в поведении релятивистских и нерелятивистских S- и L-факторов становятся все более существенными, особенно, при значениях u близких к единице.

Следует подчеркнуть, что S-фактор (6.55) отличается от S-фактора для случая взаимодействия двух релятивистских частиц неравных масс

$$S_{\rm A}(|\mathbf{v}|) = \frac{X_{\rm A}(|\mathbf{v}|)}{1 - \exp\left[-X_{\rm A}(|\mathbf{v}|)\right]}\,, \qquad X_{\rm A}(|\mathbf{v}|) = \frac{2\,\pi\,\alpha}{|\mathbf{v}|}\,, \tag{6.57}$$

который был получен в работе Арбузова [71], по смыслу параметра скорости, где модуль релятивистской относительной скорости $\mathbf{v}$ взаимодействующих частиц дается выражением (1.10). В случае же взаимодействия двух релятивистских частиц равных масс ($m_1 = m_2 = m$) полученный нами S-фактор (6.55) также отличается от S-фактора:

$$\begin{gathered} S_{\rm H}(v_{\rm H}) = \frac{X_{\rm H}(v_{\rm H})}{1 - \exp\left[-X_{\rm H}(v_{\rm H})\right]}\,, \\ X_{\rm H}(v_{\rm H}) = \frac{2\,\pi\,\alpha}{v_{\rm H}}\,,\ v_{\rm H} = \frac{2\,\beta}{1+\beta^2}\,,\ \beta = \sqrt{1 - \frac{4\,m^2}{s}}\,, \end{gathered} \tag{6.58}$$

который был предложен в работе Хонга [68] [23].

Из приведенных выражений следует, что факторы (6.55), (6.57) и (6.58) по форме, и в нерелятивистском пределе ($|\mathbf{v}|\,, v_{\rm H}\,, u \to 0$) совпадают, однако в релятивистском пределе ($|\mathbf{v}|\,, v_{\rm H} \to 1$) факторы (6.57) и (6.58) существенно отличаются от полученного нами фактора (6.55), равного в релятивистского пределе ($u \to 1$), единице (см. также рис. 5).

[23] Такое же выражение можно найти в более ранних работах [65]–[67].

В работе [69], [70] также был приведен S-фактор для двух релятивистских частиц равных масс, обозначенный как K-фактор,

$$K = G(\eta)\,\kappa\,, \tag{6.59}$$

где

$$G(\eta) = \frac{2\pi\eta}{1 - \exp(-2\pi\eta)}\,. \tag{6.60}$$

Очевидно, что функция $G(\eta)$ – это нерелятивистский S-фактор (4) с параметром Зоммерфельда $\eta = \alpha/v$. Поправочная функция κ в выражении (6.59) включает в себя в виде сомножителей ряды и бесконечные произведения и имеет весьма громоздкий вид (см. [69], [70]). Ниже мы продемонстрируем, что S-фактор (6.55) и фактор (6.59) различаются не только по форме, но также имеют и различное поведение в нерелятивистской и релятивистской областях (см. рис. 5), хотя в пределе $v\,, u \to 1$ оба этих фактора равны единице.

Для того чтобы показать различия между выше приведенными факторами, были построены графики – рис. 5 и 6. Рисунок 5 демонстрирует

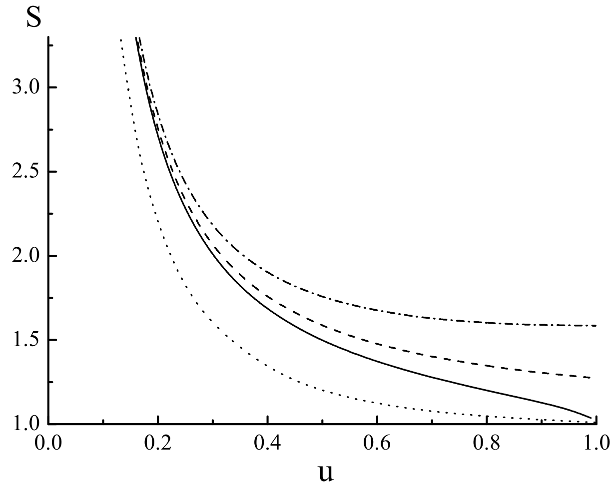

Рис. 5. *Поведение S-фактора как функции переменной u при $\alpha = 0.16$. Кривые: сплошная – релятивистский S-фактор (6.55), штриховая – нерелятивистский S-фактор (4), штрихпунктирная – S-фактор (6.57), точечная – фактор (6.59) (взята из работы [69], [70]).*

поведение нерелятивистского фактора (4) и релятивистских S-факторов (6.55), (6.57) и (6.59) при значении $\alpha = 0.16$. Релятивистский S-фактор

(6.55) показан сплошной кривой, а нерелятивистский фактор (4) – штриховой, фактор (6.57) показан штрихпунктирной кривой, фактор (6.59) – точечной. Из рис. 5 видно, что рассматриваемые релятивистские S-факторы имеют разное поведение, причем не только если u приближается к единице, но и при промежуточных значениях.

Более детальное сравнение релятивистских факторов (6.55) и (6.59) дано на рис. 6. На этом рисунке показано поведение функции $N(\eta)$, равной отношению релятивистского фактора (6.55) (или (6.59)) к нерелятивистскому S-фактору (6.60), при различных значениях параметра α (числа у кривых). Сплошная кривая соответствует отношению полученного нами S-фактора (6.55) к нерелятивистскому S-фактору (6.60); штриховые кривые, взятые из работы [69], [70], соответствуют отношению фактора (6.59) к нерелятивистскому фактору (6.60). Как видно из рис. 6, в нерелятивистском пределе, когда η растет (или $v \to 0$), полученный S-фактор (6.55) воспроизводит нерелятивистский предел, т.е. $N(\eta)$ стремится к единице. В то же время для релятивистского фактора (6.59) $N(\eta)$ стремится к единице только при малых значениях α (см. рис. 4 и 7 из работ [69], [70]).

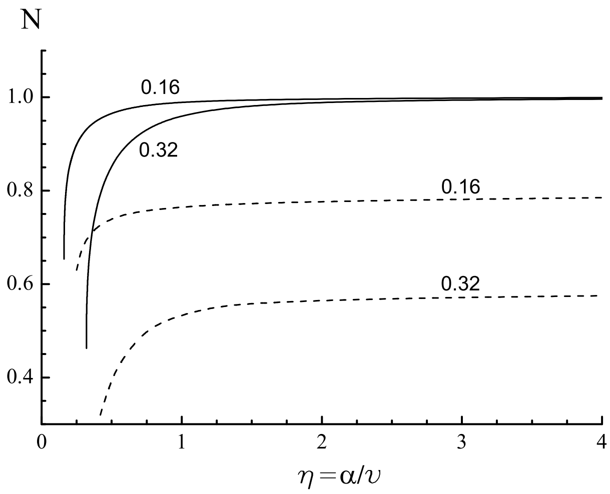

Рис. 6. *Поведение отношения $N(\eta)$ релятивистского фактора к нерелятивистскому при различных значениях α (числа у кривых). Сплошные кривые – отношение полученного нами S-фактора (6.55) к нерелятивистскому фактору (6.60), штриховые кривые – отношение фактора (6.59) (взяты из работы [69], [70]) к нерелятивистскому фактору (6.60).*

Таким образом, релятивистские S- и L-факторы (6.55) и (6.56) по форме совпадают с рассмотренными выше их нерелятивистскими и релятивистскими аналогами. Однако роль параметра скорости в новых S- и L-факторах теперь играет не релятивистская относительная скорость $\mathbf{v}$ взаимодействующих частиц, а относительная скорость $u_{\rm rel}{}'$ (6.53) эффективной релятивистской частицы, выступающей в качестве двухчастичной системы.

В заключение сформулируем основные результаты, полученные в данной главе.

В рамках полностью ковариантного РКП-подхода в квантовой теории поля излагается метод решения интегрального квазипотенциального уравнения с кулоновоподобным квазипотенциалом, описывающим взаимодействие двух релятивистских бесспиновых частиц произвольных масс $m_1\,, m_2$, с целью нахождения релятивистских пороговых кулоновоподобных ресуммирующих факторов для произвольного орбитального момента $\ell \geq 0$.

На основе развитого метода впервые:

а) получено выражение для парциальной волновой функции для любого орбитального момента $\ell \geq 0$, соответствующее кулоновоподобному квазипотенциалу и не содержащее i-периодических констант;

б) найдены релятивистские пороговые кулоновоподобные ресуммирующие факторы для произвольного орбитального момента $\ell \geq 0$;

в) показано, что в рамках рассматриваемого полностью ковариантного РКП-подхода в квантовой теории поля можно ввести относительную скорость эффективной релятивистской частицы, выступающей в качестве двухчастичной системы;

г) полученные релятивистские ресуммирующие факторы выражены в терминах относительной скорости эффективной релятивистской частицы, что позволило придать им релятивистски инвариантную форму;

д) исследованы свойства найденных релятивистских пороговых ресуммирующих факторов;

e) проведено сравнение найденного релятивистского ресуммирующего S-фактора с нерелятивистским S-фактором и с релятивистскими S-факторами, полученными другими авторами.

ГЛАВА 7
СУММИРОВАНИЕ ПОРОГОВЫХ СИНГУЛЯРНОСТЕЙ

7.1. Вводная часть

Квантовая теория поля, как и любая другая теория, требует проверки ее основных теоретических положений путем сравнения ее теоретических результатов с экспериментальными данными. При этом естественно использовать такие “простейшие” объекты, которые позволяют проверить прямые следствия квантовой теории поля, не прибегая к модельным предположениям. Тем самым появляется возможность убедиться в справедливости основных теоретических положений квантовой теории поля и сделать выводы о полноте и эффективности использованных теоретических положений и методов. В качестве такого “простейшего” объекта, который имеет простую связь с экспериментально измеренными величинами и играет исключительно важную роль в физике сильных взаимодействий, может быть использовано отношение Дрелла $R(s)$. Это обусловлено тем, что функция $R(s)$ входит как фактор в подынтегральное выражение, например, при описании инклюзивного τ распада [47], сглаженных (smearing) функций [48], D-функции Адлера [49], адронного вклада в g-фактор мюона [50] и в постоянную тонкой структуры (см., например, [51]).

Напомним, что отношение Дрелла $R(s)$ определяется мнимой частью коррелятора векторного или аксиально-векторного кваркового тока, а ресуммирующие факторы параметризуют мнимую часть соответствующих кварковых токовых корреляторов. Особо важное значение при этом имеет кулоновский ресуммирующий фактор [52], поскольку в области вблизи порога рождения кварковой пары ($v \to 0$) нельзя ограничиться конечным порядком теории возмущений, даже если параметр разложения α_s мал [48], [53], [54]. Причина состоит в том, что в около пороговой области реально параметром разложения является не просто параметр α_s, а присутствуют также сингулярные факторы вида $(1/v)^n$, где

$v = \sqrt{1 - 4\,m^2/s}$, а m – масса кварков. Эта проблема хорошо известна из квантовой электродинамики. Такие пороговые сингулярности в форме $(\alpha/v)^n$ должны быть просуммированы (см., например, работы [65]–[67], [163]–[167]). В нерелятивистском случае такое пересуммирование выполняет известный кулоновский S-фактор Сахарова–Гамова–Зоммерфельда (4) [56]–[58]. В релятивистской же случае для такого пересуммирования необходимо использовать релятивистский кулоновский S-фактор. Обычно, в качестве релятивистского кулоновского S-фактора в КХД используют релятивистскую модификацию S-фактора (4), которая заключается в замене $v_{\rm nr} \to v$ (см., например, работы [65]-[67], [164]–[166]).

Таким образом, учет пороговых сингулярностей приводит к модификации выражения для функции $R(s)$ путем параметризации мнимых частей соответствующих кварковых токовых корреляторов ресуммирующими факторами. Поэтому поведение ресуммирующих факторов, в частности, S-фактора, оказывается важным при всех значениях скорости v [64].

Новое модельное выражение для отношения Дрелла $R(s)$ в случае двух релятивистских частиц равных масс было предложено в работе [104], в которой пороговые сингулярности для векторного и аксиально-векторного токов были просуммированы в основной потенциальный вклад.

В настоящей главе (разделы 7.2 – 7.4) в рамках рассматриваемого РКП-подхода в квантовой теории поля [12] в случае двух релятивистских частиц произвольных масс $m_1\,, m_2$ рассмотрено и исследовано [156], [159], [160] модифицированное выражение для отношения Дрелла $R(s)$, в котором пороговые сингулярности для векторного и аксиально-векторного токов были просуммированы в основной потенциальный вклад и КХД-поправку к нему.

7.2. Отношение Дрелла для случая векторного тока

Учет пороговых сингулярностей в случае векторного тока, возникающего для двух кварков неравных масс, приводит к следующей модификации выражения для функции $R(s)$ [24]

$$R(s) \to R_V(s) = R_V^{(0)}(s) + R_V^{(1)}(s)\,, \tag{7.1}$$

где функция $R_V^{(0)}(s)$ описывает основной "потенциальный" вклад, а следующий член $R_V^{(1)}(s)$ связан с КХД поправкой. Оба слагаемых в (7.1) выражаются через мнимые части кварковых токовых корреляторов формулами

$$R_V^{(0)}(s) = 4\pi\, \mathrm{Im}\, \Pi_{V0}^{(1)}(s)\, S(\chi)\,, \tag{7.2}$$

$$R_V^{(1)}(s) = 4\pi\, \mathrm{Im}\, \Pi_{V1}^{(1)}(s) - \frac{1}{2}\, X(\chi)\, 4\pi\, \mathrm{Im}\, \Pi_{V0}^{(1)}(s)\,. \tag{7.3}$$

Отметим, что КХД поправка в (7.3) строилась таким образом, чтобы избежать двойного учета и не дублировать "потенциальный" вклад, определяемый функцией $R_V^{(0)}(s)$ в (7.2).

Мнимые части кварковых токовых корреляторов даются выражениями

$$4\pi\, \mathrm{Im}\, \Pi_{V0}^{(1)}(s) = \left(\frac{\bar{s}}{s}\right)^2 \left[\frac{u\,(3-u^2)}{2} + \frac{(m_1-m_2)^2 u^3}{2\,s}\right], \tag{7.4}$$

$$\begin{aligned}
4\pi\, \mathrm{Im}\, \Pi_{V1}^{(1)}(s) = \frac{2\alpha_s}{\pi}\left(\frac{\bar{s}}{s}\right)^2 \Bigg\{ &\frac{3-u^2}{3}\left[B(u\,,\,u_1\,,\,u_2) - \ln\frac{1+u}{1-u}\right] + \\
&+\frac{u\,(5-3\,u^2)}{4} + \frac{33+22\,u^2-7\,u^4}{24}\,\ln\frac{1+u}{1-u} + \\
&+\frac{(m_1-m_2)^2\,u^2}{3\,s}\left[B(u\,,\,u_1\,,\,u_2) - \ln\frac{1+u}{1-u}\right] + \\
+\frac{(m_1-m_2)^2}{3\,s}\Bigg[&-\frac{u\,(3-29\,u^2)}{8} + \frac{3+34\,u^2-13\,u^4}{16}\,\ln\frac{1+u}{1-u} - \\
-\frac{2\,us}{\bar{s}} - 2\,u^3 + &\left(-2\,u^2(1-u^2) + \frac{s(1-u^2)}{\bar{s}} + 2\left(\frac{s}{\bar{s}}\right)^2\right)\ln\frac{1+u}{1-u}\Bigg] + \\
&+\frac{m_1^2-m_2^2}{3\,s}\left(\frac{3}{4}\,u\,\ln\frac{m_1^2}{m_2^2} - 2\left(\frac{s}{\bar{s}}\right)^2\ln\frac{a+u}{a-u}\right)\Bigg\}\,,
\end{aligned} \tag{7.5}$$

[24] Соответствующее выражение в случае $S=1$ можно найти в обзоре [168].

где

$$\bar{s} = s - (m_1 - m_2)^2 \ , \ u_1 = \frac{\bar{s}\, u}{s + m_1^2 - m_2^2} \, ,$$

$$u_2 = \frac{\bar{s}\, u}{s - m_1^2 + m_2^2} \, , \ a = \frac{m_1 + m_2}{m_1 - m_2} \, ,$$

$$\begin{gathered} B(u\,,\, u_1\,,\, u_2) = \left(1 + u^2\right)\left\{\frac{\pi^2}{6} + \ln\frac{1+u}{1-u}\ln\frac{1+u}{2} + \right. \\ +2\, l\left(\frac{1-u}{1+u}\right) + l\left(\frac{1+u}{2}\right) - l\left(\frac{1-u}{2}\right) + \\ \left. + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\left[l\left(\frac{1+u_i}{2}\right) - l\left(\frac{1-u_i}{2}\right) - 4\, l\left(u_i\right) + l\left(u_i^2\right)\right]\right\} + \\ +3\, u \ln\frac{1-u^2}{4} - 4\, u \ln u + 2\, u \ln\frac{s}{\bar{s}} + \\ + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\frac{u}{u_i}\ln\frac{1+u_i}{1-u_i} - \frac{1+u^2}{2}\sum_{i=1}^{2}\ln\frac{u}{u_i}\ln\frac{1+u_i}{1-u_i} \, , \end{gathered} \tag{7.6}$$

а функция

$$l(x) = \int\limits_0^x \frac{dt}{t}\ln\frac{1}{1-t}$$

– интеграл Спенса (или дилогарифм Эйлера).

Выражение для (7.5) может быть преобразовано к виду

$$\begin{gathered} 4\pi\, \mathrm{Im}\, \Pi_{V1}^{(1)}(s) = 4\pi\, \mathrm{Im}\, \Pi_{V0}^{(1)}(s)\frac{\alpha_s}{\pi}\left\{\frac{4}{3\, u}\left[B(u, u_1, u_2) - \ln\frac{1+u}{1-u}\right] + \right. \\ + \left[3 - u^2 + \frac{(m_1 - m_2)^2 u^2}{s}\right]^{-1}\left[5 - 3u^2 + \frac{33 + 22u^2 - 7u^4}{6\, u}\ln\frac{1+u}{1-u} - \right. \\ - \frac{(m_1 - m_2)^2}{6\, s}\left\{3 - 13\, u^2 + \frac{16\, s}{\bar{s}} - \frac{1}{2\, u}\left[3 + 2\, u^2 + 19\, u^4 + \frac{16\, s\,(1 - u^2)}{\bar{s}} + \right.\right. \\ \left.\left.\left.\left. +32\left(\frac{s}{\bar{s}}\right)^2\right]\ln\frac{1+u}{1-u}\right\} + \frac{m_1^2 - m_2^2}{3\, s}\left[3\, \ln\frac{m_1^2}{m_2^2} - \frac{8}{u}\left(\frac{s}{\bar{s}}\right)^2 \ln\frac{a+u}{a-u}\right]\right]\right\}. \end{gathered}$$

Тогда, принимая во внимание соотношения (7.2) и (7.3), выражение (7.1) запишем в виде

$$R_V(s) = R_V^{(0)}(s)\left[1 + \delta_V(s)\right] \, , \tag{7.7}$$

где

$$\delta_V(s) = \frac{\alpha_s}{\pi S(\chi)}\left\{\frac{4}{3u}\left[B(u,u_1,u_2) - \ln\frac{1+u}{1-u}\right] + \right.$$
$$+\left[3 - u^2 + \frac{(m_1-m_2)^2u^2}{s}\right]^{-1}\left[5 - 3u^2 + \right.$$
$$+\frac{33+22u^2-7u^4}{6u}\ln\frac{1+u}{1-u} - \frac{(m_1-m_2)^2}{6s}\left\{3 - 13u^2 + \frac{16s}{\bar{s}} - \right. \tag{7.8}$$
$$\left. -\frac{1}{2u}\left[3 + 2u^2 + 19u^4 + \frac{16s(1-u^2)}{\bar{s}} + 32\left(\frac{s}{\bar{s}}\right)^2\right]\ln\frac{1+u}{1-u}\right\} +$$
$$\left.\left. +\frac{m_1^2-m_2^2}{3s}\left[3\ln\frac{m_1^2}{m_2^2} - \frac{8}{u}\left(\frac{s}{\bar{s}}\right)^2\ln\frac{a+u}{a-u}\right]\right]\right\} - \frac{X(\chi)}{2S(\chi)}$$

– относительная поправка.

7.3. Отношение Дрелла для случая аксиально-векторного тока

В случае аксиально-векторного тока, возникающего для двух кварков неравных масс, учет пороговых сингулярностей приводит к следующей модификации выражения для основного “потенциального” вклада и КХД-поправки к нему в функцию $R(s)$:

$$R(s) \to R_A(s) = R_A^{(0)}(s) + R_A^{(1)}(s)\,, \tag{7.9}$$

где функции $R_A^{(0)}(s)$ и $R_A^{(1)}(s)$ описывают основной “потенциальный” вклад и КХД-поправку к нему. Оба слагаемых в (7.9) также выражаются через соответствующие мнимые части кварковых токовых корреляторов формулами

$$R_A^{(0)}(s) = 4\pi\,\mathrm{Im}\,\Pi_{A0}^{(1)}(s)\,P(\chi)\,, \tag{7.10}$$

$$R_A^{(1)}(s) = 4\pi\,\mathrm{Im}\,\Pi_{A1}^{(1)}(s) - \frac{1}{2}\,X(\chi)\,4\pi\,\mathrm{Im}\,\Pi_{A0}^{(1)}(s)\,, \tag{7.11}$$

где второе слагаемое в (7.11), также, как и в случае векторного тока, введено для того, чтобы избежать двойного учета и не дублировать “потенциальный” вклад, определяемый выражением (7.10). Мнимые части кварковых токовых корреляторов в аксиально-векторном случае даются выражениями

$$4\pi\,\mathrm{Im}\,\Pi^{(1)}_{A0}(s) = \left(\frac{\bar{s}}{s}\right)^2\left[\frac{u\,(3\,u^2-1)}{2}+\frac{(m_1+m_2)^2\,u}{2\,s}\right], \tag{7.12}$$

$$\begin{aligned}4\pi\,\mathrm{Im}\,\Pi^{(1)}_{A1}(s) = {} & \frac{2\alpha_s}{\pi}\left(\frac{\bar{s}}{s}\right)^2\left\{\frac{3u^2-1}{3}\left[B(u,u_1,u_2)-u^2\ln\frac{1+u}{1-u}\right]+\right.\\ & +\frac{u\,(5\,u^2-3)}{4}+\frac{33\,u^4+22\,u^2-7}{24}\ln\frac{1+u}{1-u}+\\ & +\frac{(m_1+m_2)^2}{3\,s}\left[B(u\,,\,u_1\,,\,u_2)-u^2\ln\frac{1+u}{1-u}\right]+\\ & +\frac{(m_1+m_2)^2}{3\,s}\left[-\frac{u\,(3\,u^2-29)}{8}+\frac{3\,u^4+34\,u^2-13}{16}\ln\frac{1+u}{1-u}-\right.\\ & \left.-\frac{2\,us}{\bar{s}}-2\,u+\left(-2\,(u^2-1)+\frac{s(u^2-1)}{\bar{s}}+2\left(\frac{s}{\bar{s}}\right)^2\right)\ln\frac{1+u}{1-u}\right]+\\ & \left.+\frac{m_1^2-m_2^2}{3\,s}\left(\frac{3}{4}\,u^3\ln\frac{m_1^2}{m_2^2}-2\left(\frac{s}{\bar{s}}\right)^2\ln\frac{a+u}{a-u}\right)\right\}.\end{aligned} \tag{7.13}$$

Также, как и в случае векторного тока, выражение для (7.13) может быть преобразовано к виду

$$\begin{aligned}4\pi\,\mathrm{Im}\,\Pi^{(1)}_{A1}(s) = {} & 4\pi\,\mathrm{Im}\,\Pi^{(1)}_{A0}(s)\frac{\alpha_s}{\pi}\left\{\frac{4}{3\,u}\left[B(u,u_1,u_2)-\ln\frac{1+u}{1-u}\right]+\right.\\ & +\frac{4\,(1-u^2)}{3\,u}\ln\frac{1+u}{1-u}+\left[3\,u^2-1+\frac{(m_1+m_2)^2}{s}\right]^{-1}\left[5\,u^2-3+\right.\\ & +\frac{33\,u^4+22\,u^2-7}{6\,u}\ln\frac{1+u}{1-u}+\frac{(m_1+m_2)^2}{6\,s}\left\{13-3\,u^2-\frac{16\,s}{\bar{s}}+\right.\\ & \left.+\frac{1}{2\,u}\left[3\,u^4+2\,u^2+19+\frac{16\,s\,(u^2-1)}{\bar{s}}+32\left(\frac{s}{\bar{s}}\right)^2\right]\ln\frac{1+u}{1-u}\right\}+\\ & \left.\left.+\frac{m_1^2-m_2^2}{3\,s}\left[3\,u^2\ln\frac{m_1^2}{m_2^2}-\frac{8}{u}\left(\frac{s}{\bar{s}}\right)^2\ln\frac{a+u}{a-u}\right]\right]\right\}.\end{aligned}$$

Тогда, принимая во внимание соотношения (7.10) и (7.11), выражение (7.9) запишем в виде

$$R_A(s) = R^{(0)}_A(s)\,[1+\delta_A(s)]\;, \tag{7.14}$$

где относительная поправка в аксиально-векторном случае дается выражением

$$
\begin{aligned}
\delta_A(s) = \frac{\alpha_{\mathrm{s}}}{\pi\, P(\chi)}\Biggl\{ & \frac{4}{3\,u}\left[B(u,u_1,u_2) - \ln\frac{1+u}{1-u}\right] + \\
& + \frac{4\,(1-u^2)}{3\,u}\ln\frac{1+u}{1-u} + \left[3\,u^2 - 1 + \frac{(m_1+m_2)^2}{s}\right]^{-1}\Biggl[5\,u^2 - 3 + \\
& + \frac{33\,u^4 + 22\,u^2 - 7}{6\,u}\ln\frac{1+u}{1-u} + \frac{(m_1+m_2)^2}{6\,s}\Biggl\{13 - 3\,u^2 - \frac{16\,s}{\bar{s}} + \\
& + \frac{1}{2\,u}\left[3\,u^4 + 2\,u^2 + 19 + \frac{16\,s\,(u^2-1)}{\bar{s}} + 32\left(\frac{s}{\bar{s}}\right)^2\right]\ln\frac{1+u}{1-u}\Biggr\} + \\
& + \frac{m_1^2 - m_2^2}{3\,s}\left[3\,u^2\ln\frac{m_1^2}{m_2^2} - \frac{8}{u}\left(\frac{s}{\bar{s}}\right)^2\ln\frac{a+u}{a-u}\right]\Biggr]\Biggr\} - \frac{X(\chi)}{2\,P(\chi)}\,.
\end{aligned}
\tag{7.15}
$$

7.4. Анализ поведения отношения Дрелла

Отметим, что в ультрарелятивистском пределе ($m' \to 0$) ресуммирующие S- и P-факторы стремятся к 1, а, следовательно, относительные векторная и аксиально-векторная поправки становятся асимптотически равными, $\delta_V(s) \sim \delta_A(s) \to \alpha_{\mathrm{s}}/\pi$, и выражения (7.7), (7.14) воспроизводят известную безмассовую формулу

$$R_{V/A} \to 1 + \alpha_{\mathrm{s}}/\pi\,.$$

Полученные здесь выражения (7.1)–(7.15) можно использовать и в области малых значений u. Также подчеркнем, что при построении функции $R(s)$ во всей области изменения пременной s, а также при анализе адронных процессов в различных энергетических областях, следует учитывать зависимость теоретических результатов от числа активных кварков f.

Для того чтобы показать различия между приведенными в разделе 6 S-факторами, были построены графики – рис. 7 и 8, где, согласно (6.49), квадрат полной энергии s выражается через переменную u следующим образом

$$s = \frac{(m_1+m_2)^2 - (m_1-m_2)^2\,u^2}{1-u^2}\,.$$

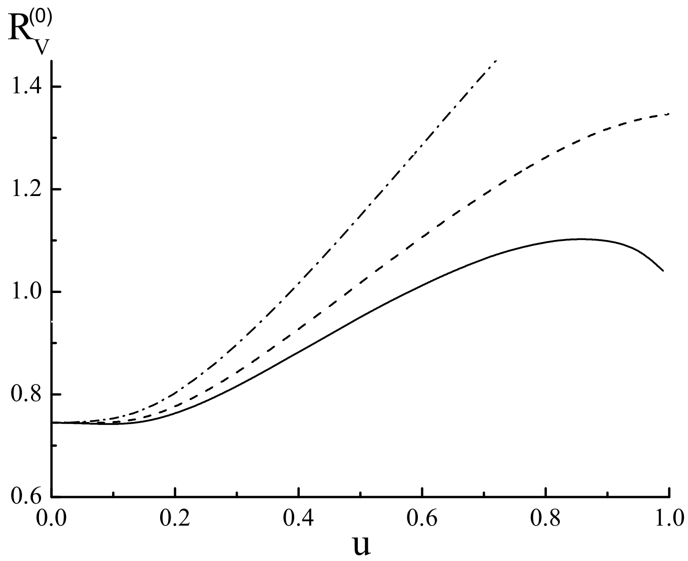

Рис. 7. *Поведение $R_V^{(0)}(s)$ как функции переменной u при $\alpha = 0,16$. Релятивистскому S-фактору (6.55) соответствует сплошная линия, нерелятивистскому S-фактору – штриховая линия, релятивистскому S-фактору (6.57) – штрих-пунктирная линия.*

Рис. 7 демонстрирует различие в поведении функции $R_V^{(0)}(s)$, которое возникает при использовании в выражении (7.2) обсуждаемых в разделе 6 S-факторов. Релятивистскому S-фактору (6.55) соответствует сплошная линия, нерелятивистскому S-фактору – штриховая линия, релятивистскому фактору (6.57) – штрих-пунктирная линия. Приведенные кривые построены при значениях $m_1 = 250$ МэВ и $m_2 = 500$ МэВ, т.е. близких к значениям эффективных масс u- и s-кварков (см. [51], [64]). Как и ранее, мы положили $\alpha = 0,16$. Рис. 7 показывает, что рассматриваемые S-факторы приводят к существенно разному поведению функции $R_V^{(0)}(s)$, особенно, при значениях u близких к единице.

В тоже время на рис. 8 показано поведение функции $R_V^{(0)}(s)$ как функции безразмерной переменной $\sqrt{s}/(m_1 + m_2)$ для полученного нами S-фактора (6.55) при различных значениях α (числа у кривых). Штриховая линия соответствует поведению $R_V^{(0)}$ без S-фактора, т.е. при $\alpha = 0$, поскольку в этом случае $S(\alpha = 0) = 1$. Из рис. 8 видно, что вблизи порога рождения кварковой пары влияние S-фактора наиболее сильное и зависит от значения α. С ростом же энергии $\sqrt{s}$ зависимость от α ослабевает и все кривые приближаются к единице.

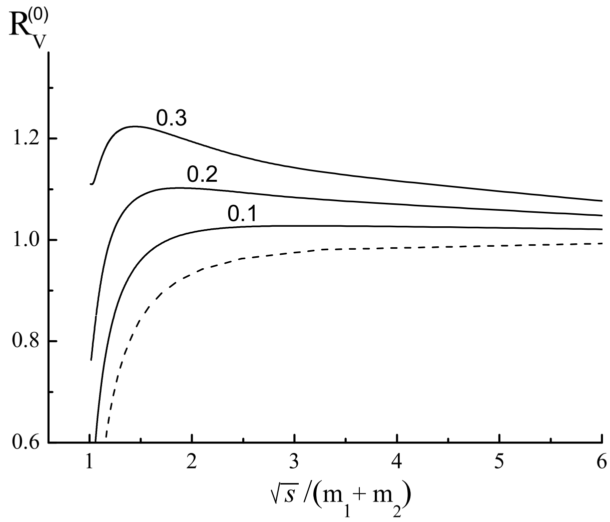

Рис. 8. *Поведение функции $R_V^{(0)}$ как функции безразмерной переменной $\sqrt{s}/(m_1+m_2)$ с использованием полученного нами S-фактора (6.55) при различных значениях α (числа у кривых). Штриховая линия соответствует поведению $R_V^{(0)}$ без S-фактора, т.е. при $\alpha = 0$ ($S(\alpha=0)=1$).*

Для того чтобы более детально проиллюстрировать различия в поведении относительных векторной и аксиально-векторной поправок, были построены их графики – рис. 9. Кривые были получены для $\alpha = 0,35$,

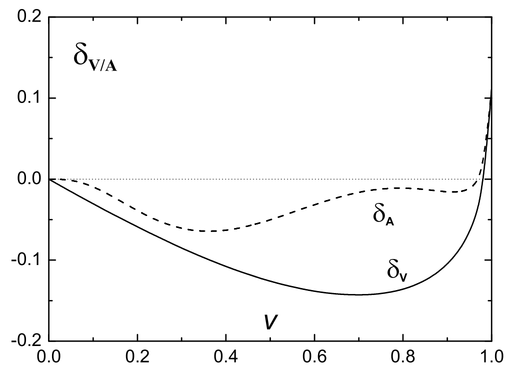

Рис. 9.. *Относительные поправки $\delta_{V/A}$ как функции переменной u.*

которые соответствуют значению сильной константы связи, выделенной из данных по τ-распаду (см. [169]). Рис. 9 демонстрирует, что относительные поправки к основному "потенциальному" вкладу малы для широкого интервала энергий: $|\delta(s)| \lesssim 15\%$.

Итак, сформулируем основные результаты и выводы настоящей главы.

В рамках рассматриваемого РКП-подхода в квантовой теории поля в случае двух релятивистских частиц произвольных масс $m_1\,, m_2$ предложено и исследовано для векторного и аксиально-векторного токов модифицированное выражение для отношения Дрелла $R(s)$, в котором пороговые сингулярности были просуммированы в основной потенциальный вклад и КХД-поправку к нему.

На основе развитого метода впервые:

а) получено модифицированное выражение для отношения Дрелла $R(s)$ в случае векторного и аксиально-векторного токов, включающее в себя основной "потенциальный" вклад и КХД-поправку к нему;

б) показано, что в ультрарелятивистском пределе ($m' \to 0$), где ресуммирующие S- и P-факторы стремятся к 1, относительные векторная и аксиально-векторная поправки становятся асимптотически равными, $\delta_V(s) \sim \delta_A(s) \to \alpha_\mathsf{s}/\pi$, и выражения (7.7), (7.14) воспроизводят известную безмассовую формулу $R_{V/A} \to 1 + \alpha_\mathsf{s}/\pi$;

в) выполнен детальный анализ поведения отношения Дрелла. Установлено, что рассматриваемые в этой монографии нерелятивистские и релятивистские S-факторы приводят к существенно различному поведению функции $R_V^{(0)}(s)$, особенно, при значениях u близких к единице.

г) установлено, что вблизи порога рождения кварковой пары влияние полученных здесь S- и P-факторов (6.55) и (6.56) на поведение функции $R_{V/A}^{(0)}(s)$, как функции безразмерной переменной $\sqrt{s}/(m_1+m_2)$ и параметризованной этими факторами, наиболее сильное и зависит от значения α. С ростом же энергии $\sqrt{s}$ зависимость от α ослабевает и все кривые приближаются к единице;

д) выявлено, что относительные поправки к основному "потенциальному" вкладу малы для широкого интервала энергий: $|\delta(s)| \lesssim 15\%$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной монографии в рамках полностью ковариантного РКП-подхода в квантовой теории поля последовательно изложены методы решения релятивистской прямой и обратной задач и применения полученных результатов к исследованию свойств двухчастичных систем. Значительное внимание уделено условиям существования и единственности решений рассматриваемых задач. Разработанные здесь методы непосредственно связаны с возможностью представить полную энергию двух релятивистских бесспиновых частиц неравных масс в с.ц.и. в виде выражения, пропорционального энергии одной эффективной релятивистской частицы массы m'. Основные результаты монографии и выводы, сделанные на их основе, состоят в следующем.

1. В рамках рассматриваемого РКП-подхода в квантовой теории поля предложен метод изучения свойств решений конечно-разностного квазипотенциального уравнения с локальным квазипотенциалом, описывающим взаимодействие двух релятивистских бесспиновых частиц произвольных масс m_1 , m_2. На основе развитого метода впервые:

– определены граничные условия для существования и единственности решений конечно-разностного квазипотенциального уравнения с локальным квазипотенциалом;

– подробно изучены свойства регулярного решения, решений и функций Йоста;

– установлено, что нули функции Йоста простые и чисто мнимые и соответствуют связанным состояниям и дан вывод теоремы Левинсона;

– доказаны условия ортогональности и полноты для регулярного решения и найдены выражения для спектральной плотности и нормировочные константы.

2. На примере кулоновского квазипотенциала, описывающего взаимодействие двух релятивистских бесспиновых частиц произвольных масс m_1 , m_2, изложен метод решения конечно-разностного квазипотенциального уравнения и найден аналитический вид регулярного решения и решений Йоста. Детально исследованы свойства регулярного решения, ре-

шений и функций Йоста. Показано, что нули функции Йоста простые и чисто мнимые и соответствуют связанным состояниям и найден явный вид для энергий этих состояний.

3. В рамках того же РКП-подхода в квантовой теории поля разработан метод решения интегрального квазипотенциального уравнения в конфигурационном представлении для случая s-волны ($\ell = 0$) с линейным квазипотенциалом, описывающим связанное состояние двух релятивистских бесспиновых частиц произвольных масс m_1 , m_2. Найден аналитический вид регулярного решения, аналогов решений и функций Йоста и получено точное уравнение для определения энергий связанных состояний. Проведено исследование поведения регулярного решения в случае больших значений параметра $\tilde{\beta}$ (малых β) в различных областях изменения релятивистской относительной координаты ρ. В этом приближении найдены выражение для аналога фазового сдвига, условие квантования уровней энергии связанных состояний и установлено, что существует три различные области поведения регулярного решения:

– классически доступная область $0 \leq \rho < \tilde{\beta}\,(\operatorname{ch}\chi' - 1)$ (область I), где поведение регулярного решения имеет осциллирующий характер и, следовательно, оно обращается в нуль n раз;

– промежуточная область $0 < |\rho - \tilde{\beta}\operatorname{ch}\chi'| < \tilde{\beta}$ (область II), где поведение регулярного решения носит затухающий характер;

– область рождения пар $\rho > \tilde{\beta}\,(\operatorname{ch}\chi' + 1)$ (область III), где регулярное решение, осциллируя, убывает к нулю.

4. Для конечно-разностного квазипотенциального уравнения с чисто нелокальным сепарабельным квазипотенциалом, отвечающим взаимодействию двух релятивистских бесспиновых частиц произвольных масс m_1 , m_2, развит метод нахождения его регулярного решения и определены условия существования и единственности этого решения. В основу метода положены условия ортогональности и полноты для релятивистских плоских волн. Найдено выражение для парциальной волновой функции для любого орбитального момента $\ell \geq 0$ и исследованы ее свойства. Установлены условия ортогональности и полноты для регулярного решения. Получено выражение для фазового сдвига. Определены условия существования связанных состояний и состояний рассеяния и дано

обобщение теоремы Левинсона. В качестве приложения полученных результатов исследованы условия существования связанных состояний и состояний рассеяния для δ-образного квазипотенциала и дано сравнение с нерелятивистским случаем. Показано, что, в отличие от нерелятивистского случая, релятивистский эффект частиц, рассеиваемых на δ-образном квазипотенциале, проявляется в образовании состояний рассеяния.

5. Предложен и реализован метод решения конечно-разностного квазипотенциального уравнения для широкого класса взаимодействий, представляющих собой суперпозицию нелокального сепарабельного и локального квазипотенциалов и дано обобщение этого метода для случая суперпозиции локального и суммы нелокальных сепарабельных квазипотенциалов. Рассмотрение проведено для класса центрально-симметричных взаимодействий, не зависящих от энергии, причем его локальная составляющая предполагается известной, согласуется с экспериментальными данными при низких энергиях и допускает существование n_ℓ связанных состояний. В основу метода положены условия ортогональности и полноты для регулярного решения конечно-разностного квазипотенциального уравнения с локальным квазипотенциалом. На основе развитого метода впервые установлены:

– условия существования и единственности решения конечно-разностного квазипотенциального уравнения для суперпозиции локального и нелокального однокомпонентного (многокомпонентного) сепарабельного квазипотенциалов;

– выражения для парциальных волновых функций для любого орбитального момента $\ell \geq 0$, соответствующих каждому сепарабельному члену, и исследованы их свойства;

– условия ортогональности и полноты для парциальных волновых функций;

– выражения для приращений фазового сдвига;

– условия существования истинных и “поддельных” связанных состояний, выполнен их детальный анализ и выявлены условия вырождения истинных связанных состояний по их энергиям;

– обобщенная теорема Левинсона.

6. Опираясь на результаты Главы 4, разработаны методы восстановления:

– компоненты чисто нелокальной сепарабельной составляющей (локальная компонента отсутствует);

– компоненты нелокальной сепарабельной составляющей при наличии локального квазипотенциала;

- компонент многокомпонентного нелокального сепарабельного квазипотенциалов при наличии локального квазипотенциала.

На основе развитого метода определены условия существования и единственности решения релятивистской обратной задачи для любого орбитального момента $\ell \geq 0$ как в случае чисто нелокального сепарабельного квазипотенциала, так и однокомпонентного, и многокомпонентного нелокального сепарабельного квазипотенциалов. Найдены выражения для параметров обратной задачи как в случае притягивающего ($\boldsymbol{\varepsilon}_{\ell n} = -1\,, n = 1, 2, \ldots, M_\ell$), так и в случае отталкивающего ($\boldsymbol{\varepsilon}_{\ell n} = 1\,, n = 1, 2, \ldots, M_\ell$) однокомпонентного (многокомпонентного) нелокального сепарабельного квазипотенциала и установлены условия вырождения связанных состояний по их энергиям. Показано, что параметры обратной задачи определяются однозначно приращением фазового сдвига для однокомпонентного нелокального сепарабельного квазипотенциала (или приращениями фазового сдвига для многокомпонентного) и энергиями связанных состояний локального и полного квазипотенциалов для любого орбитального момента $\ell \geq 0$.

7. Для интегрального квазипотенциального уравнения в конфигурационном представлении с кулоноподобным квазипотенциалом, описывающим в РКП-подходе взаимодействие двух релятивистских бесспиновых частиц произвольных масс $m_1\,, m_2$, изложен метод нахождения его регулярного решения для произвольного орбитального момента $\ell \geq 0$. На основе развитого метода впервые получено аналитическое выражение для парциальной волновой функции для любого орбитального момента $\ell \geq 0$, соответствующее кулоноподобному взаимодействию двух релятивистских бесспиновых частиц произвольных масс и не содержащее i-периодических констант. Найденные решения были использованы для нахождения релятивистских пороговых кулоноподобных ресумми-

рующих факторов для произвольного орбитального момента $\ell \geq 0$. Показано, что в рамках рассматриваемого полностью ковариантного РКП-подхода в квантовой теории поля можно ввести относительную скорость эффективной релятивистской частицы массы m', выступающей в качестве двухчастичной системы и несущей относительный 3-импульс $\mathbf{k}'$ и полную энергию взаимодействующих частиц в с.ц.и. $\sqrt{s}$, пропорциональную ее энергии $E_{k'}$. Это позволило полученные релятивистские пороговые ресуммирующие факторы выразить в терминах относительной скорости эффективной релятивистской частицы и придать им релятивистски инвариантную форму. Подробно исследованы свойства найденных релятивистских пороговых ресуммирующих факторов и проведено сравнение найденного релятивистского ресуммирующего S-фактора с его нерелятивистским аналогом и с релятивистскими S-факторами, полученными другими авторами. Установлено, что:

– фактор (6.56) лишь по форме совпадает с его нерелятивистским аналогом (3), но, в отличие от последнего, имеет явно выраженный релятивистский характер, поскольку как аргумент r (модуль радиуса-вектора $\mathbf{r}$) в кулоновском потенциале (2), так и относительная скорость эффективной релятивистской частицы (6.53) являются релятивистскими инвариантами;

– в нерелятивистском пределе, $u \ll 1$, факторы (6.55) и (6.56) воспроизводят известные нерелятивистские результаты;

– в релятивистском пределе, $u \to 1$, факторы (6.55) и (6.56) стремятся к единице;

– для случая взаимодействия двух релятивистских частиц равных масс факторы (6.55) и (6.56) совпадают с S- и L-факторами (5) и (7);

– в ультрарелятивистском пределе спектр связанных состояний исчезает, когда масса $m' \to 0$, так как масса частицы является единственным размерным параметром. Эта особенность отражает существенное различие между потенциальными моделями и квантовой теорией поля, где появляется дополнительный размерный параметр Λ;

– S- и L-факторы, которые соответствуют непрерывному спектру, должны стремиться к 1 при $m' \to 0$;

– в отличие от нерелятивистского случая и S-факторов других авторов, рассмотренных в этой монографии, релятивистские пороговые ресуммирующие S- и L-факторы (6.55) и (6.56) воспроизводят как известный нерелятивистский, так и ожидаемый ультрарелятивистский предел: $S\,, L \to 1$.

8. Для случая двух релятивистских частиц произвольных масс $m_1\,, m_2$ предложено и исследовано для векторного и аксиально-векторного токов модифицированное выражение для отношения Дрелла $R(s)$, включающее в себя основной "потенциальный" вклад и КХД-поправку к нему. Выполнен подробный анализ поведения отношения Дрелла, параметризованного различными S-факторами. Установлено, что:

– рассмотренные в этой монографии нерелятивистские и релятивистские S-факторы приводят к существенно различному поведению функции $R_V^{(0)}(s)$, особенно, при значениях u близких к единице;

– вблизи порога рождения кварковой пары влияние полученных здесь S- и P-факторов (6.55) и (6.56) на поведение функции $R_{V/A}^{(0)}(s)$, как функции безразмерной переменной $\sqrt{s}/(m_1+m_2)$ и параметризованной этими факторами, наиболее сильное и зависит от значения α. С ростом же энергии $\sqrt{s}$ зависимость от α ослабевает и все кривые приближаются к единице;

– в ультрарелятивистском пределе ($m' \to 0$), где ресуммирующие S- и P-факторы стремятся к 1, относительные векторная и аксиально-векторная поправки становятся асимптотически равными, $\delta_V(s) \sim \delta_A(s) \to \alpha_s/\pi$, и выражения для отношения Дрелла для векторного и аксиально-векторного токов воспроизводят известную безмассовую формулу $R_{V/A} \to 1+\alpha_s/\pi$;

– относительные поправки к основному "потенциальному" вкладу малы для широкого интервала энергий: $|\delta(s)| \lesssim 15\%$.

ПРИЛОЖЕНИЯ

А. Асимптотика для гипергеометрической функции

В данном приложении будет изложен метод нахождения асимптотического выражения для гипергеометрической функции $F(a\,,\,b\,;\,c\,;\,z)$ при $|b|\to\infty$. Отправной точкой будет служить представление для гипергеометрической функции $F(a\,,\,b\,;\,c\,;\,z)$ в виде ряда [105]

$$F(a\,,\,b\,;\,c\,;\,z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\,\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)}\,\frac{z^n}{n!}\,. \tag{A.1}$$

Используя представления Эйлера для гамма-функции [105]

$$\Gamma(z)=\int\limits_0^{\infty}d\,t\,e^{-t}\,t^{z-1}\,,\ \mathrm{Re}\,z>0\,, \tag{A.2}$$

находим:

$$F(a\,,\,b\,;\,c\,;\,z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}\int\limits_0^{\infty}d\,t\,e^{-t}\,t^{b-1}\,\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(c+n)}\,\frac{(t\,z)^n}{n!}\,. \tag{A.3}$$

Далее, для вырожденной гипергеометрической функции $\Phi(a\,;\,c\,;\,z)$ (функции Куммера) воспользуемся ее представлением в виде ряда [105]

$$\Phi(a\,;\,c\,;\,z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(c+n)}\,\frac{z^n}{n!}\,. \tag{A.4}$$

Следовательно, вместо (A.3) получим

$$F(a\,,\,b\,;\,c\,;\,z)=\frac{1}{\Gamma(b)}\int\limits_0^{\infty}d\,t\,e^{-t}\,t^{b-1}\,\Phi(a\,;\,c\,;\,t\,z)\,. \tag{A.5}$$

Для того чтобы найти асимптотическое выражение для гипергеометрической функции $F(a\,,\,b\,;\,c\,;\,z)$ при $|b|\to\infty$, подставим в (A.5) асимптотическое разложение для функции Куммера при $|z|\to\infty$

$$\Phi(a\,;\,c\,;\,z)=\frac{\Gamma(c)\,e^{\pm i\,\pi\,a}\,z^{-a}}{\Gamma(c-a)}\left\{\sum_{n=0}^{N-1}\frac{\Gamma(a+n)\,\Gamma(1+a-c+n)}{\Gamma(a)\Gamma(1+a-c)\,n!}\,(-z)^{-n}+\right.$$
$$\left.+O\left(|z|^{-R}\right)\right\}+\frac{\Gamma(c)\,e^{z}\,z^{a-c}}{\Gamma(a)}\left\{\sum_{n=0}^{M-1}\frac{\Gamma(c-a+n)\,\Gamma(1-a+n)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(1-a)\,n!}\,z^{-n}+\right.$$
$$\left.+O\left(|z|^{-S}\right)\right\},$$

где знак $(+)$ берется при $-\dfrac{\pi}{2} < \arg z < \dfrac{3\pi}{2}$, а знак $(-)$ – при $-\dfrac{3\pi}{2} < \arg z \le -\dfrac{\pi}{2}$. Тогда, выполнив почленное интегрирование по пременной t и принимая во внимание формулы (3.25) и (A.2), выражение (A.5) преобразуется к виду

$$\begin{gathered}
F(a\,,\,b\,;\,c\,;\,z) = \frac{\Gamma(c)\,e^{\pm i\,\pi\,a}}{\Gamma(a)\,\Gamma(c-a)\,\Gamma(1+a-c)\,\Gamma(b)}\times \\
\times\sum_{n=0}^{N-1}\frac{\Gamma(a+n)\,\Gamma(1+a-c+n)\,\Gamma(b-a-n)\,(-1)^n\,z^{-a-n}}{n!}+ \\
+O\left[\frac{|z|^{-a-N}\,\Gamma(b-a-N)}{\Gamma(b)}\right]+\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\,\Gamma(c-a)\,\Gamma(1-a)\,\Gamma(b)}\times \\
\times\sum_{n=0}^{M-1}\frac{\Gamma(c-a+n)\,\Gamma(1-a+n)\Gamma(a+b-c-n)\,z^{a-c-n}}{n!\,(1-z)^{a+b-c-n}}+ \\
+O\left[\frac{|z|^{a-c-M}\,\Gamma(a+b-c-M)}{\Gamma(b)\,(1-z)^{a+b-c-M}}\right]= \\
=\frac{\Gamma(c)\,e^{\pm i\,\pi\,a}}{\Gamma(a)\,\Gamma(c-a)\,\Gamma(1+a-c)}\times \\
\times\sum_{n=0}^{N-1}\frac{\Gamma(a+n)\,\Gamma(1+a-c+n)\,(-1)^n\,(b\,z)^{-a-n}}{n!}+ \\
+O\left(|b\,z|^{-a-N}\right)+\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\,\Gamma(c-a)\,\Gamma(1-a)}\times \\
\times\sum_{n=0}^{M-1}\frac{\Gamma(c-a+n)\,\Gamma(1-a+n)\,(b\,z)^{a-c-n}}{n!\,(1-z)^{a+b-c-n}}+ \\
+O\left[\frac{|b\,z|^{a-c-M}}{(1-z)^{a+b-c-M}}\right]\,,\ |b|\to\infty\,.
\end{gathered}\tag{A.6}$$

Отсюда, оставляя только главные члены (т.е. $N=1\,,M=1$) при $|b|\to\infty$ приходим к асимптотической формуле для гипергеометрической функции:

$$\begin{gathered}
F(a\,,\,b\,;\,c\,;\,z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)}\left(\frac{e^{\pm i\,\pi}}{b\,z}\right)^a + \frac{\Gamma(c)\,(b\,z)^{a-c}}{\Gamma(a)\,(1-z)^{a+b-c}}+ \\
+O\left(|b\,z|^{-a-1}\right)+O\left[\frac{|b\,z|^{a-c-1}}{(1-z)^{a+b-c-1}}\right]\,,\ |b|\to\infty\,,
\end{gathered}\tag{A.7}$$

где верхний знак берется при $-\dfrac{\pi}{2} < \arg z < \dfrac{3\pi}{2}$, а нижний знак – при $-\dfrac{3\pi}{2} < \arg z \le -\dfrac{\pi}{2}$.

B. Асимптотика для регулярного и нерегулярного решений

В данном приложении будут найдены асимптотические выражения для регулярного $\varphi_0^R(\rho\,,\,\chi')$ и нерегулярного $\varphi_0^{(+)}(\rho\,,\,\chi')$ решений в случае больших значений параметра $\tilde{\beta}$ (малых β). Асимптотические выражения для этих решений связаны с их представлениями в (3.66) и (3.67) через функции Ханкеля и Бесселя.

B1. Регулярное решение

Для того чтобы найти асимптотическое выражение для регулярного решения $\varphi_0^R(\rho\,,\,\chi')$, воспользуемся его интегральным представлением в (3.66), которое запишем в виде

$$\varphi_0^R(\rho\,,\,\chi') = \frac{C_0(\chi')}{2}\int\limits_{-\infty+i\pi/2}^{\infty+i\pi/2} d\zeta\, e^{i\,\rho\,\zeta+\tilde{\beta}\,h(\zeta)}\,, \tag{B.1}$$

где $h(\zeta) = i\,(\operatorname{sh}\zeta - \operatorname{ch}\chi'\,\zeta)$.

Эффективным методом построения асимптотических разложений для интегралов с большим параметром по контурам, концевые точки которых располагаются в двух различных "ложбинах", является метод перевала (наискорейшего спуска), развитый Риманом и Дебаем. В соответствии с этим методом деформируем контур интегрирования в выражении (B.1), т.е. прямую $(-\infty + i\pi/2\,;\,\infty + i\pi/2)$, в новый контур γ' с теми же концевыми точками $\mp\infty + i\pi/2$, но проходящий через седловые точки функции $h(\zeta)$, т.е. нули ее производной $h'(\zeta)$, где $h(\zeta) = i\,(\operatorname{sh}\zeta - \operatorname{ch}\chi'\,\zeta)$. При этом мнимая часть функции $h(\zeta)$ на контуре γ' должна быть постоянной, а сам контур γ' представляет собой кривую наискорейшего спуска. Для реализации метода перевала, находим нули функции $h'(\zeta)$:

$$h'(\zeta) = i\,(\operatorname{ch}\zeta - \operatorname{ch}\chi') = 0\,,\ 0 \le\ \zeta \le \pi/2\,, \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \zeta_n^{(\pm)} = \pm\chi' + 2\,i\,\pi\,n\,, n = 0, \pm1, \ldots \text{при}\, 0 \le\ \zeta \le \pi/2\,, \Rightarrow \zeta_0^{(\pm)} = \pm\chi'\,.$$

Обе седловые точки $\zeta_0^{(\pm)} = \pm\chi'$ дают вклад в асимптотику интеграла в выражении (В.1). В седловых точках $\zeta_0^{(\pm)} = \pm\chi'$ имеем:

$$h(\pm\chi') = i\,(\pm\operatorname{sh}\chi' \mp \chi' \operatorname{ch}\chi')\,,\; h''(\pm\chi') = \pm i\,\operatorname{sh}\chi'\,, \tag{B.2}$$

а, следовательно, в окрестности этих седловых точек справедливо разложение Тейлора

$$h(\zeta) = h\left(\zeta_0^{(\pm)}\right) + \frac{h''\left(\zeta_0^{(\pm)}\right)}{2}\left(\zeta - \zeta_0^{(\pm)}\right)^2 + \dots\,. \tag{B.3}$$

Полагая $\zeta = x + iy$, представим $h(\zeta)$ и $\zeta - \zeta_0^{(\pm)}$ в виде

$$h(\zeta) = \operatorname{Re} h(\zeta) + i\operatorname{Im} h(\zeta)\,,$$

$$\begin{gathered}\operatorname{Re} h(\zeta) = -\operatorname{ch} x \sin y + y\operatorname{ch}\chi'\,,\; \operatorname{Im} h(\zeta) = \operatorname{sh} x\cos y - x\operatorname{ch}\chi'\,;\\ \zeta - \zeta_0^{(\pm)} = x \mp \chi' + iy = r\,e^{i\,\theta}\,,\\ r = \sqrt{(x\mp\chi')^2 + y^2}\,,\; \operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x\mp\chi'}\,.\end{gathered} \tag{B.4}$$

Из выражений (В.2)–(В.4) следует, что в окрестности седловых точек $\zeta_0^{(\pm)} = \pm\chi'$ справедливо представление

$$\begin{gathered}\operatorname{Re} h(\zeta) = \frac{r^2\operatorname{sh}\chi'}{2}\cos\left(2\,\theta \pm \frac{\pi}{2}\right)\,,\\ \operatorname{Im} h(\zeta) = \pm\operatorname{sh}\chi' \mp \chi'\operatorname{ch}\chi' + \frac{r^2\operatorname{sh}\chi'}{2}\sin\left(2\,\theta \pm \frac{\pi}{2}\right)\,.\end{gathered} \tag{B.5}$$

Отсюда находим, что линии уровня $\operatorname{Re} h(\zeta) = 0$, проходящие через седловые точки $\zeta_0^{(\pm)} = \pm\chi'$, приближенно описываются уравнением

$$\cos\left(2\,\theta \pm \frac{\pi}{2}\right) = 0\,, \Rightarrow 2\,\theta^{(\pm)} = \left\{\begin{array}{c} 0 \\ \pi \end{array}\right\} + \pi\,k\,,\; k = 1,2,3,4\,. \tag{B.6}$$

Уравнение (В.6) дает четыре линии уровня функции $\operatorname{Re} h(\zeta)$, задаваемых аргументами:

$$\theta^{(\pm)} = \left\{\begin{array}{c} 0 \\ \pi/2 \end{array}\right\} + \frac{\pi\,k}{2}\,,\; k = 1,2,3,4\,.$$

Эти линии уровня делят окрестность седловых точек $\zeta_0^{(\pm)} = \pm\chi'$ на два “холма” и две “ложбины”.

Точно также из второго уравнения в (B.5) находим, что линии постоянной фазы $\operatorname{Im} h(\zeta) = \pm \operatorname{sh}\chi' \mp \chi' \operatorname{ch}\chi'$, проходящие через седловые точки $\zeta_0^{(\pm)} = \pm\chi'$, приближенно задаются уравнением

$$\begin{gathered}\sin\left(2\,\theta \pm \frac{\pi}{2}\right) = 0\,, \Rightarrow 2\,\theta^{(\pm)} = \mp\frac{\pi}{2} + \pi\,k\,,\ k = 1, 2, 3, 4\,, \Rightarrow \\ \Rightarrow \theta^{(\pm)} = \mp\frac{\pi}{4} + \frac{\pi\,k}{2}\,,\ k = 1, 2, 3, 4\,.\end{gathered} \tag{B.7}$$

Уравнение (B.7) описывает четыре кривые, две из которых являются линиями наискорейшего спуска, а две другие – линиями наискорейшего подъема.

В связи с изложенным интеграл в выражении (B.1) трансформируется к виду

$$\begin{gathered}I_0^R = \int\limits_{-\infty+i\pi/2}^{\infty+i\pi/2} d\zeta\, e^{i\,\rho\,\zeta+\tilde\beta\,h(\zeta)} = \int\limits_{\gamma'} d\zeta\, e^{i\,\rho\,\zeta+\tilde\beta\,h(\zeta)}\Big|_{\tilde\beta\to\infty} \sim \\ \sim \int\limits_{\gamma_0^{(-)}} d\zeta \exp\left[i\,\rho\,\zeta_0^{(-)} + i\,\rho\left(\zeta - \zeta_0^{(-)}\right) + \tilde\beta\,h\left(\zeta_0^{(-)}\right) + \right. \\ \left. + \frac{\tilde\beta}{2}\,h''\left(\zeta_0^{(-)}\right)\left(\zeta - \zeta_0^{(-)}\right)^2\right] + \int\limits_{\gamma_0^{(+)}} d\zeta\, \exp\left[i\,\rho\,\zeta_0^{(+)} + \right. \\ \left. + i\,\rho\left(\zeta - \zeta_0^{(+)}\right) + \tilde\beta\,h\left(\zeta_0^{(+)}\right) + \frac{\tilde\beta}{2}\,h''\left(\zeta_0^{(+)}\right)\left(\zeta - \zeta_0^{(+)}\right)^2\right],\end{gathered} \tag{B.8}$$

где контуры $\gamma_0^{(\pm)}$ представляют собой кривые наискорейшего спуска (линии постоянной фазы), которые проходят через седловые точки $\zeta_0^{(\pm)} = \pm\chi'$ и в соответствии с (B.7) задаются соотношением

$$\zeta = \zeta_0^{(\pm)} + r\,e^{\mp 3\,i\,\pi/4}\,. \tag{B.9}$$

В интегралах по контурам $\gamma_0^{(\pm)}$ в выражении (B.8) сделаем замену переменной, полагая

$$\frac{\tilde\beta}{2}\,h''\left(\zeta_0^{(\pm)}\right)\left(\zeta - \zeta_0^{(\pm)}\right)^2 = -\tau^2\,. \tag{B.10}$$

Отсюда, принимая во внимание (B.2), находим

$$\zeta - \zeta_0^{(\pm)} = \sqrt{\frac{2}{\tilde{\beta}\,\mathrm{sh}\,\chi'}}\, e^{\mp 3\,i\,\pi/4}\,\tau\,,\ -\infty \le \tau \le \infty\,;$$

$$\begin{gathered} i\,\rho\,\zeta_0^{(\pm)} + i\,\rho\left(\zeta - \zeta_0^{(\pm)}\right) + \tilde{\beta}\,h\left(\zeta_0^{(\pm)}\right) = \\ = \pm\, i\,\rho\,\chi' + i\,\tilde{\beta}\,(\pm\,\mathrm{sh}\,\chi' \mp \chi'\,\mathrm{ch}\,\chi') + i\,\rho\sqrt{\frac{2}{\tilde{\beta}\,\mathrm{sh}\,\chi'}}\, e^{\mp 3\,i\,\pi/4}\,\tau\,, \end{gathered} \tag{B.11}$$

$$d\zeta = \sqrt{\frac{2}{\tilde{\beta}\,\mathrm{sh}\,\chi'}}\, e^{\mp 3\,i\,\pi/4}\,d\tau\,.$$

Тогда для интеграла в (B.8) получим асимптотическое выражение

$$\begin{gathered} I_0^R \sim \sqrt{\frac{2\,\pi}{\tilde{\beta}\,\mathrm{sh}\,\chi'}}\left\{\exp\left[-\,i\left(\rho\chi' + \tilde{\beta}\,(\mathrm{sh}\,\chi' - \chi'\,\mathrm{ch}\,\chi') - \frac{\rho^2}{2\,\tilde{\beta}\,\mathrm{sh}\,\chi'} - \right.\right.\right. \\ \left.\left. - \frac{3\pi}{4}\right)\right] + \exp\left[i\left(\rho\chi' + \tilde{\beta}\,(\mathrm{sh}\,\chi' - \chi'\,\mathrm{ch}\,\chi') - \frac{\rho^2}{2\,\tilde{\beta}\,\mathrm{sh}\,\chi'} - \frac{3\pi}{4}\right)\right]\right\} = \\ = 2\sqrt{\frac{2\,\pi}{\tilde{\beta}\,\mathrm{sh}\,\chi'}}\,\sin\left[\rho\chi' + \tilde{\beta}\,(\mathrm{sh}\,\chi' - \chi'\,\mathrm{ch}\,\chi') - \frac{\pi}{4} - \frac{\rho^2}{2\,\tilde{\beta}\,\mathrm{sh}\,\chi'}\right]\,, \end{gathered} \tag{B.12}$$

справедливое при $\rho \ll \tilde{\beta}\,\mathrm{ch}\,\chi'$, где при вычислении интеграла по τ воспользовались формулой

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\tau\, e^{-\tau^2} = \sqrt{\pi}\,. \tag{B.13}$$

Наконец, из выражений (B.1) и (B.12) находим асимптотическое выражение для регулярного решения $\varphi_0^R\,(\rho\,,\,\chi')$ в случае больших значений параметра $\tilde{\beta}$ (малых β):

$$\begin{gathered} \varphi_0^R(\rho\,,\,\chi) \sim \\ \sim C_0(\chi')\sqrt{\frac{2\,\pi}{\tilde{\beta}\,\mathrm{sh}\,\chi'}}\,\sin\left[\rho\chi' + \tilde{\beta}\,(\mathrm{sh}\,\chi' - \chi'\,\mathrm{ch}\,\chi') - \frac{\pi}{4} - \frac{\rho^2}{2\,\tilde{\beta}\,\mathrm{sh}\,\chi'}\right]\,, \end{gathered} \tag{B.14}$$

справедливое при $\rho \ll \tilde{\beta}\,\mathrm{ch}\,\chi'$.

B2. Нерегулярное решение

Асимптотическое выражение для нерегулярного решения $\varphi_0^{(+)}(\rho\,,\,\chi')$, связанного с функцией Бесселя, найдем, воспользовавшись его интегральным представлением в (3.67), которое запишем в виде

$$\varphi_0^{(+)}(\rho\,,\,\chi') = \frac{C_0^{(+)}(\chi')}{2i\pi} \int\limits_{\infty-3i\pi/2}^{\infty+i\pi/2} d\zeta\, e^{i\,\rho\,\zeta+\tilde{\beta}\,h(\zeta)}\,, \tag{B.15}$$

где функция $h(\zeta)$ определена в (B.1), а, следовательно, она имеет те же самые седловые точки $\zeta_0^{(\pm)} = \pm\chi'$ – нули функции $h'(\zeta)$.

Заметим, что теперь контур интегрирования в выражении (B.15) представляет собой кривую с концевыми точками $\infty - 3i\pi/2$ и $\infty + i\pi/2$, лежащую в правой полуплоскости $\operatorname{Re}\zeta \geq 0$ и содержащую единственную седловую точку $\zeta_0^{(+)} = \chi'$. Поэтому, в соответствии с методом перевала, деформируем контур интегрирования $(\infty - 3i\pi/2\,;\,\infty + i\pi/2)$ в новый контур γ'' с теми же концевыми точками $\infty - 3i\pi/2$ и $\infty + i\pi/2$, но проходящий через седловую точку $\zeta_0^{(+)} = \chi'$ функции $h(\zeta)$. При этом мнимая часть функции $h(\zeta)$ на контуре γ'' будет постоянной, а сам контур γ'' представляет собой кривую наискорейшего спуска. Следовательно, интеграл в выражении (B.15) трансформируется к виду

$$\begin{aligned}\varphi_0^{(+)}(\rho\,,\,\chi') &= \frac{C_0^{(+)}(\chi')}{2i\pi} \int\limits_{\gamma''} d\zeta\, e^{i\,\rho\,\zeta+\tilde{\beta}\,h(\zeta)}\Big|_{\tilde{\beta}\to\infty} \sim \\ &\sim \frac{C_0^{(+)}(\chi')}{2i\pi} \int\limits_{\gamma_0^{(+)}} d\zeta\, \exp\Big[i\,\rho\,\zeta_0^{(+)} + i\,\rho\left(\zeta - \zeta_0^{(+)}\right) + \\ &+ \tilde{\beta}\,h\left(\zeta_0^{(+)}\right) + \frac{\tilde{\beta}}{2}\,h''\left(\zeta_0^{(+)}\right)\left(\zeta - \zeta_0^{(+)}\right)^2\Big]\,,\end{aligned} \tag{B.16}$$

где контур $\gamma_0^{(+)}$ представляет собой кривую наискорейшего спуска (линию постоянной фазы), которая проходит через седловую точку $\zeta_0^{(+)} = \chi'$ и задается соотношением (B.9).

В интегралах по контуру $\gamma_0^{(+)}$ в выражении (B.16) сделаем замену переменной как в (B.10) и (B.11) (выбираем верхний знак плюс). Тогда для решения $\varphi_0^{(+)}(\rho\,,\,\chi')$ в (B.16) получим асимптотическое выражение (второе слагаемое в (В.12))

$$\varphi_0^{(+)}(\rho\,,\,\chi') \sim \frac{C_0^{(+)}(\chi')}{\sqrt{2\,\pi\,\tilde{\beta}\,\mathrm{sh}\,\chi'}}\left\{\exp\left[i\left(\rho\chi' + \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. +\tilde{\beta}\,(\mathrm{sh}\,\chi' - \chi'\,\mathrm{ch}\,\chi') + \frac{3\pi}{4} - \frac{\rho^2}{2\tilde{\beta}\,\mathrm{sh}\,\chi'}\right)\right]\right\}, \tag{В.17}$$

где при вычислении интеграла по τ также воспользовались формулой (В.13), причем полученное асимптотическое выражение также справедливо при $\rho \ll \tilde{\beta}\,\mathrm{ch}\,\chi'$.

Литература

1. Logunov, A. A. Quasi-Optical Approach in Quantum Field Theory / A. A. Logunov, A. N. Tavkhelidze // Nuov. Cim. - 1963. - V. 29. - N. 2. - P. 380-399.

2. Одновременное уравнение для системы двух частиц в квантовой теории поля / А. А. Логунов [и др.] // ТМФ. - 1971. - Т. 6. - № 2. - С. 157-165.

3. Logunov, A. A. Quasipotential Character of the Mandelstam Representation / A. A. Logunov, A. N. Tavkhelidze, O. A. Khrustalev // Phys. Lett. - 1963. - V. 4. - P. 325-326.

4. Квазиоптическая модель и асимптотика амплитуды рассеяния / Б. А. Арбузов [и др.] // ЖЭТФ. - 1963. - Т. 44. - Вып. 4. - С. 1409-1411.

5. Кадышевский, В. Г. Квазипотенциальный метод в релятивистской задаче двух тел / В. Г. Кадышевский, А. Н. Тавхелидзе // Проблемы теоретической физики : сборник, посвященный 60-летию Н. Н. Боголюбова / Наука. - Москва, 1969. - С. 261-277.

6. Фаустов, Р. Н. Квазипотенциальный метод в задаче о связанных состояниях / Р. Н. Фаустов // ТМФ. - 1970. - Т. 3. - № 2. - С. 240-254.

7. Фаустов, Р. Н. Уровни энергии и электромагнитные свойства водородоподобных атомов / Р. Н. Фаустов // ЭЧАЯ. - 1972. - Т. 3. - Вып. 1. - С. 238-268.

8. Faustov, R. N. Relativistic Wavefunction and Form Factors of the Bound System / R. N. Faustov // Ann. Phys. - 1973. - V. 78. - P. 176-189.

9. Боголюбов, П. Н. Квазипотенциальные уравнения для спиновых частиц с разными массами / П. Н. Боголюбов // ТМФ. - 1970. - Т. 5. - № 2. - С. 244-252.

10. Одновременное уравнение для системы двух частиц в квантовой теории поля / А. А. Логунов [и др.] // ТМФ. - 1971. - Т. 6. - № 2. - С. 157-165.

11. Релятивистские форм-факторы составных частиц / В. Р. Гарсеванишвили [и др.] // ТМФ. - 1975. - Т. 23. - № 3. - С. 310-321.

12. Kadyshevsky, V. G. Quasi-Potential Type Equation for the Relativistic Scattering Amplitude / V. G. Kadyshevsky // Nucl. Phys. B. - 1968. - V. 6. - N. 2. - P. 125-148.

13. Kadyshevsky, V. G. On a Relativistic Equation in the Case of Particles with Spin / V. G. Kadyshevsky, M. D. Mateev // Nuov. Cim. A. - 1968. - V. 55. - N. 2. - P. 275-300.

14. Кадышевский, В. Г. Релятивистское уравнение для S-матрицы в p-представлении. I. Условия унитарности и причинности / В. Г. Кадышевский // ЖЭТФ. - 1964. - Т. 46. - Вып. 2. - С. 654-662.

15. Кадышевский, В. Г. Релятивистское уравнение для S-матрицы. II. Теория возмущений / В. Г. Кадышевский // ЖЭТФ. - 1964. - Т. 46. - Вып. 3. - С. 872-883.

16. Кадышевский, В. Г. К вопросу о спектре масс и фундаментальной длине в теории поля / В. Г. Кадышевский // Докл. АН СССР. - 1965. - Т. 160. - № 3. - С. 573-574.

17. Скачков, Н. Б. Формфакторы мезонов и ковариантная трехмерная формулировка составной модели / Н. Б. Скачков, И. Л. Соловцов // ЯФ. - 1979. - Т. 30. - Вып. 4. - С. 1079-1088.

18. Скачков, Н. Б. Описание спектра масс и траектории редже мезонов на основе релятивистского двухчастичного квазипотенциального уравнения / Н. Б. Скачков, И. Л. Соловцов // ЯФ. - 1980. - Т. 31. - Вып. 5. - С. 1332-1341.

19. Скачков, Н. Б. Описание форм-фактора релятивистской двухчастичной системы в ковариантной гамильтоновой формулировке квантовой теории поля / Н. Б. Скачков, И. Л. Соловцов // ТМФ. - 1980. - Т. 43. - № 3. - С. 330-342.

20. Скачков, Н. Б. Релятивистские волновые функции системы двух спиновых кварков в модели с хромодинамическим взаимодействием / Н. Б. Скачков, И. Л. Соловцов // ТМФ. - 1983. - Т. 54. - № 2. - С. 183-192.

21. Kapshay, V. N. Covariant Three-Dimensional Equations for Bound States of Quarks and the Structure Functions of Hadrons / V. N. Kapshay, A. D. Linkevich, N. B. Skachkov / Nuov. Cim. A. - 1981. - V. 66. - N. 1. - P. 45-62.

22. Линкевич, А. Д. Структурные функции релятивистских систем, составленных из двух частиц со спинами 1/2 / А. Д. Линкевич, В. И. Саврин, Н. Б. Скачков // ТМФ. - 1982. - Т. 53. - № 1. - С. 20-31.

23. Линкевич, А. Д. Дикварки и структурные функции нуклонов / А. Д. Линкевич, В. И. Саврин, Н. Б. Скачков // ЯФ. - 1983. - Т. 37. - Вып. 2. - С. 391-399.

24. Структурные функции нуклонов в составной кварк-дикварковой модели // А. Д. Линкевич [и др.] // ЯФ. - 1983. - Т. 37. Вып. 4. - С. 959-965.

25. Мартыненко, А. П. Релятивистская приведенная масса и квазипотенциальное уравнение / А. П. Мартыненко, Р. Н. Фаустов // ТМФ. - 1985. - Т. 64. - № 2. - С. 179-185.

26. Мартыненко, А. П. Релятивистский спектр энергии связанной системы двух частиц и локальное квазипотенциальное уравнение / А. П. Мартыненко, Р. Н. Фаустов // ТМФ. - 1986. - Т. 66. - № 3. - С. 399-408.

27. Релятивистский кулоновский квазипотенциал и новые узкие резонансы в системах заряженных частиц / Б. А. Арбузов [и др.] // ТМФ. - 1990. - Т. 83. - № 2. - С. 175-185.

28. Саврин, В. И. Динамические уравнения в квантовой теории поля и релятивистская теория связанных состояний. Специальный курс лекций / В. И. Саврин. - Москва : Издательство МГУ, 1996. - 80 с.

29. Релятивистские кварковые модели в квазипотециальном подходе / В. А. Матвеев [и др.] // ТМФ. - 2002. - Т. 132. - № 2. - С. 267-287.

30. Мартыненко, А. П. Расчет сверхтонкой структуры мюонного водорода / А. П. Мартыненко, Р. Н. Фаустов // ЯФ. - 1998. - Т. 61. - № 3. - С. 534-539.

31. Мартыненко, А. П. Поляризуемость протона и Лэмбовский сдвиг в атоме мюонного водорода / А. П. Мартыненко, Р. Н. Фаустов // ЯФ. - 2000. - Т. 63. - № 5. - С. 915-919.

32. Мартыненко, А. П. Эффекты поляризации вакуума и поляризуемости протона в Лэмбовском сдвиге мюонного водорода / А. П. Мартыненко, Р. Н. Фаустов // ЯФ. - 2001. - Т. 64. - № 7. - С. 1358-1363.

33. Kapshai, V. N. Relativistic Two Particle One-Dimensional Scattering Problem for Superposition of Delta Potentials / V. N. Kapshai, T. A. Alferova // J. Phys. A. : Math. Gen. - 1999. - V. 32. - P. 5329-5334.

34. Бойкова, Н. А. Новые вклады в тонкий сдвиг s-уровней энергии в атоме мюония, обусловленные эффектами отдачи / Н. А. Бойкова, Ю. Н. Тюхтяев, Р. Н. Фаустов // ЯФ. - 2001. - V. 64. - № 5. - P. 986-989.

35. Саврин, В. И. Метод квазипотенциала в теории связанных состояний / В. И. Саврин. - Самара : Издательство "Самарский университет", 2006. - 134 с.

36. Ebert, D. Mass Spectrum of Orbitally and Radially Excited Heavy-Light Mesons in the Relativistic Quark Model / D. Ebert, V. O. Galkin, R. N. Faustov // Phys. Rev. D. - 1998. - V. 57. N. 9. - P. 5663-5670.

37. Ebert, D. Quark-Antiquark Potential with Retardation and Radiative Contributions and the Heavy Quarkonium Mass Spectra / D. Ebert, R. N. Faustov, V. O. Galkin // Phys. Rev. D. - 2000. - V. 62. - N. 3. - Art. 034014(11).

38. Ebert, D. Analysis of Semileptonic B Decays in the Relativistic Quark Model / D. Ebert, R. N. Faustov, V. O. Galkin // Phys. Rev. D. - 2007. - V. 75. - N. 7. - Art. 074008(15).

39. Ebert, D. Masses of Excited Heavy Baryons in the Relativistic QuarkЏDiquark Picture / D. Ebert, R. N. Faustov, V. O. Galkin // Phys. Lett. B. - 2008. - V. 659. - P. 612-620.

40. Mass of X(3872) in the Relativistic Quark Model / X. Chen [et. al.] // Phys. Rev. D. - 2009. - V. 79. - N. 11. - Art. 114006(6).

41. Атакишиев, Н. М. Квазипотенциальные модели релятивистского осциллятора / Н. М. Атакишиев, Р. М. Мир-Касимов, Ш. М. Нагиев // ТМФ. - 1980. - Т. 44. - № 1. - С. 47-62.

42. Дей, Е. А. Точное решение квазипотенциальных уравнений общего вида с хромодинамическим взаимодействием / Е. А. Дей, В. Н. Капшай, Н. Б. Скачков // ТМФ. - 1986. - Т. 69. - № 1. - С. 55-68.

43. Боос, Э. Э., Точное решение квазипотенциального уравнения методом контурного интегрирования / Э. Э. Боос, В. И. Саврин, Е. М. Шаблыгин // ТМФ. - 1987. - Т. 72. - № 2. - С. 197-203.

44. Боос, Э. Э. Особенности спектра релятивистской связанной системы в квазипотенциальной яме с барьером / Э. Э. Боос, В. И. Саврин, С. А. Шичанинн // ТМФ. - 1988. - Т. 77. - № 2. - С. 247-252.

45. Дей, Е. А. Точные решения класса квазипотенциальных уравнений для суперпозиции квазипотенциалов однобозонного обмена / Е. А. Дей, В. Н. Капшай, Н. Б. Скачков // ТМФ. - 1990. - Т. 82. - № 2. - С. 188-198.

46. Milton, K. A. Timelike and Spacelike QCD Characteristics of the $e^+ e^-$ Annihilation Process / K. A. Milton, I. L. Solovtsov, O. P. Solovtsova // Eur. Phys. J. C. - 2000. - V. 13. - P. 497-502.

47. Tsai, Y. S. Decay Corrections of Heavy Leptons in $e^+ + e^- \to l^+ + l^-$ / Y. S. Tsai // Phys. Rev. D. - 1974. - V. 4. - N. 9. - P. 2821-2837.

48. Poggio, E. C. Smearing Method in the Quark Model / E. C. Poggio, H. R. Quinn, S. Weinberg // Phys. Rev. D. - 1976. - V. 13. - P. 1958-1968.

49. Adler, S. L. Some Simple Vacuum-Polarization Phenomenology: $e^+e^- \to$ Hadrons; the Muonic-Atom x-Ray Discrepancy and $g_\mu - 2$ / S. L. Adler // Phys. Rev. D. - 1974. - V. 10. - N. 11. - P. 3714-3728.

50. Jegerlehner, F. The Muon g-2 / F. Jegerlehner, A. Nyffeler // Phys. Rep. - 2009. - V. 477. - P. 1-110.

51. Ширков, Д. В. Десятилетие аналитической теории возмущений в КХД / Д. В. Ширков, И. Л. Соловцов // ТМФ. - 2007. - Т. 150. - № 1. - С. 152-176.

52. Schwinger, J. Particales, Sources, and Fields / J. Schwinger. - New York : Addison-Wesley Publ. Comp., 1973. - V. 2. - 539 p.

53. Appelquist, T. Orthocharmonium and $e^+ e^-$ Annihilation / T. Appelquist, H. D. Politzer // Phys. Rev. D. - 1975. - V. 12. - P. 1404-1414.

54. Appelquist, T. Heavy Quarks and $e^+ e^-$ Annihilation / T. Appelquist, H. D. Politzer // Phys. Rev. Lett. - 1975. - V. 34. - N. 1. - P. 43-45.

55. Блохинцев, Л. Д. Кулоновские эффекты в ядерных реакциях с заряженными частицами / Л. Д. Блохинцев, А. М. Мухамеджанов, А. Н. Сафронов // ЭЧАЯ. - 1984. - Т. 15. - Вып. 6. - С. 1296-1337.

56. Сахаров, А. Д. Взаимодействие электрона и позитрона при рождении пар / А. Д. Сахаров // ЖЭТФ. - 1948. - Т. 18. - Вып. 7. - С. 631-635.

57. Gamov, G. Zur Quantentheorie des Atomkernes / G. Gamov // Zeit. Phys. - 1928. - V. 51. - P. 204-212.

58. Зоммерфельд, А. Строение атома и спектры / А. Зоммерфельд. - Москва : Гостехиздат, 1956. - Т. 2. - 695 с.

59. Adel, K. Production of Heavy Quarks Close to Threshold // K. Adel, F. J. Yndurain / Phys. Rev. D. - 1995. - V. 52. - N. 11. - P. 6577-6594.

60. Гольбергер, М. Теория рассеяния / М. Гольбергер, К. Ватсон. - Москва : Мир, 1967. - 598 с.

61. Ньютон, Р. Теория рассеяния волн и частиц Р. Ньютон. - Москва : Мир, 1969. - 608 с.

62. Байер, В. Н. Кулоновское взаимодействие в конечном состоянии / В. Н. Байер, В. С. Фадин // ЖЭТФ. - 1969. - Т. 57. - Вып. 1(7). - С. 225-231.

63. Barbieri, R. Vacuum Polarization and Positronium-Ground-State Splitting / R. Barbieri, P. Christillin, E. Remiddi // Phys. Rev. A. - 1973. - V. 8. - N. 5. - P. 2266-2271.

64. Milton, K. A. An Analytic Method of Describing R-Related Quantities in QCD / K. A. Milton, I. L. Solovtsov, O. P. Solovtsova // Mod. Phys. Lett. A. - 2006. - V. 21. - P. 1355-1368.

65. Фадин, В. С. Об образовании пары тяжелых кварков при $e^+ e^-$-аннигиляции в околопороговой области / В. С. Фадин, В. А. Хозе // ЯФ. - 1988. - Т. 48. - Вып. 2. - С. 487-493.

66. Fadin, V. On the Threshold Behaviour of Heavy Top Production / V. Fadin, V. Khoze, T. Sjöstrand // Z. Physik. C. - Particles and Fields. - 1990. - V. 48. - P. 613-621.

67. Coulomb Effects in W^+W^- Production / V. S. Fadin [et. al.] // Phys. Rev. D. - 1995. - V. 52. - N. 3. - P. 1377-1385.

68. Hoang, A. H. Two-Loop Corrections to the Electromagnetic Vertex for Energies Close to Threshold / A. H. Hoang // Phys. Rev. D. - V. 56. - N. 11. - P. 7276-7283.

69. Yoon, J.-H. Relativistic Modification of the Gamov Factor / J.-H. Yoon, Ch.-Y. Wong // Phys. Rev. C. - 2000. - V. 61. N. 4. - Art. 044905(10).

70. Yoon, J.-H. Relativistic Genaralization of the Gamov Factor for Fermion Pair Production or Annihilation / J.-H. Yoon, Ch.-Y. Wong // J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. - 2005. - V. 31. - P. 149-160.

71. Arbuzov, A. B. On a Novel Relativistic Quasi-Potential Equation for Two Scalar Particles / A. B. Arbuzov // Nuov. Cim. A. - 1994. - V. 107. - N. 8. - P. 1263-1273.

72. Milton, K. A. Relativistic Coulomb Resummation in QCD / K. A. Milton, I. L. Solovtsov // Mod. Phys. Lett. A. - 2001. - V. 16. - P. 2213-2219.

73. Kadyshevsky, V. G. Quasipotential Approach and the Expansion in Relativistic Spherical Functions / V. G. Kadyshevsky, R. M. Mir-Kasimov, N. B. Skachkov // Nuov. Cim. A. - 1968. - V. - 55. - N. 2. - P. 233-257.

74. Savrin, V. I. Relativistic Potential with QCD Large-Q^2 Branching and the Decay Form Factors of Mesons / V. I. Savrin, N. B. Skachkov // Lett. Nuov. Cim. - 1980. - V. 29. - Ser. 2. - N. 11. - P. 363-369.

75. Freeman, M. On a Relativistic Quasipotential Equation with Local Interaction / M. Freeman, M. D. Mateev, R. M. Mir-Kasimov // Nucl. Phys. B. - 1969. - V. 12. - N. 1. - P. 197-215.

76. Капшай, В. Н. Точные решения квазипотенциальных уравнений для кулоновского и линейного запирающего потенциалов / В. Н. Капшай, Н. Б. Скачков // ТМФ. - 1983. - Т. 55. - № 2. - С. 236-245.

77. Соловцов, И. Л. Релятивистские ресуммирующие факторы в квазипотенциальном подходе / И. Л. Соловцов, Ю. Д. Черниченко // Известия НАН Беларуси. Серия Физ.-мат. наук. - 2007. - № 2. - С. 103-107.

78. Solovtsov, I. L. Relativistic Generalization of the Threshold Resummation Factors in the Quasipotential Approach / I. L. Solovtsov, Yu. D. Chernichenko // Actual Problems of Microword Physics: Proceedings of the IX International School-Seminar, Gomel, Belarus, Juli 23 - August 3, 2007 : in 2 v. / JINR. - Dubna, 2008. - V. 2. - P. 33-45.

79. Milton, K. A. Adler Function for Light Quarks in Analytic Perturbation Theory / K. A. Milton, I. L. Solovtsov, O. P. Solovtsova // Phys. Rev. D. - 2001. - V. 64. - Art. 016005(6).

80. Solovtsov, I. L. Non-Perturbative Expansion Technique and Threshold Resummation for the Inclusive τ-Decay and $e^+ e^-$ Annihilation into Hadrons Processes / I. L. Solovtsov, O. P. Solovtsova // Nonlinear Phenomena in Complex Systems : Proceedings of the X Annual Seminar Nonlinear Phenomena in Complex Systems, Minsk, Belarus, May 15-18, 2001 / Editors L. F. Babichev, V. I Kuvshinov. - Minsk, 2002. - V. 5. - № 1. - P. 51-58.

81. Milton, K. A. Coulomb Resummation and Monopole Masses / K. A. Milton // Int. Sem. on Contemporary Probl. of Elem. Part. Phys., Dedicated to the Memory of I. L. Solovtsov : proceedings of the International Sem., Dubna, Jan. 17-18, 2008 / JINR. - Dubna, 2008. - P. 82-92.

82. Кадышевский, В. Г. О трехмерных релятивистских уравнениях для системы двух частиц с неравными массами / В. Г. Кадышевский, М. Д. Матеев, Р. М. Мир-Касимов // ЯФ. - 1970. - Т. 11. - Вып. 3. - С. 692-700.

83. Кадышевский, В. Г. Трехмерная формулировка релятивистской проблемы двух тел / В. Г. Кадышевский, Р. М. Мир-Касимов, Н. Б. Скачков // ЭЧАЯ. - 1972. - Т. 2. - Вып. 3. - С. 635-690.

84. Капшай, В. Н. О зависимости квазипотенциала от полной энергии двухчастичной системы / В. Н. Капшай, В. И. Саврин, Н. Б. Скачков // ТМФ. - 1986. - Т. 69. - № 3. - С. 400-410.

85. Черниченко, Ю. Д. Решение релятивистского квазипотенциального уравнения для суперпозиции нелокального сепарабельного и локального квазипотенциалов / Ю. Д. Черниченко // ЯФ. - 2004. - Т. 67. - № 2. - С. 433-442.

86. Черниченко, Ю. Д. Решение релятивистского квазипотенциального уравнения для нелокального сепарабельного взаимодействия / Ю. Д. Черниченко // ЯФ. - 2000. - Т. 63. - № 11. - С. 2068-2074.

87. Скачков, Н. Б. Ковариантная трехмерная формулировка кварковой модели мезонов / Н. Б. Скачков, И. Л. Соловцов // ТМФ. - 1979. - V. 41. - № 2. - С. 205-219.

88. Амирханов, И. В. Квазипотенциальное уравнение в терминах быстрот и его применение к релятивистским проблемам рассеяния и связанных состояний / И. В. Амирханов, Г. В. Груша, Р. М. Мир-Касимов // Физика элементарных частиц и атомного ядра. - 1981. - Т. 12. - Вып. 3. - С. 651-691.

89. Кадышевский, В. Г. Релятивистская проблема двух тел и исчисление конечных разностей / В. Г. Кадышевский, Р. М. Мир-Касимов, Н. Б. Скачков // ЯФ. - 1969. - Т. 9. - Вып. 1. - С. 212-223.

90. Кадышевский, В. Г. Разностное уравнение Шредингера для двух релятивистских частиц в простейших случаях / В. Г. Кадышевский, Р. М. Мир-Касимов, Н. Б. Скачков // ЯФ. - 1969. - Т. 9. - Вып. 2. - С. 462-471.

91. Балашов, В. В. Курс квантовой механики : учеб. пособие / В. В. Балашов, В. К. Долинов ; под ред. В. Б. Беляева. - Москва : Изд-во Московского ун-та, 1982. - 280 с.

92. Соловцов, И. Л. Пороговые пересуммирующие факторы в релятивистском квазипотенциальном подходе / И. Л. Соловцов, Ю. Д. Черниченко // Междун. семин. по современным вопросам физики элемен. частиц, посвященный памяти И. Л. Соловцова : труды семинара, Дубна, 17-18 января, 2008 / ОИЯИ. - Дубна, 2008. - С. 73-81.

93. Гогохия, В. Ш. Квазипотенциальное кулоновское рассеяние скалярных частиц / В. Ш. Гогохия // ТМФ. - 1983. - Т. 54. - № 3. - С. 416-428.

94. Капшай, В. Н. Точное решение ковариантного двухчастичного одновременного уранения с суперпозицией квазипотенциалов однобозонного обмена / В. Н. Капшай, Н. Б. Скачков// ТМФ. - 1982. - Т. 53. - № 1. - С. 32-42.

95. Капшай, В. Н. Ковариантные двухчастичные волновые функции для модельных квазипотенциалов, допускающих точные решения I. Решения в импульсном пространстве / В. Н. Капшай, Н. Б. Скачков // ТМФ. - 1983. - Т. 54. - № 3. - С. 406-415.

96. Капшай, В. Н. Ковариантные двухчастичные волновые функции для модельных квазипотенциалов, допускающих точные решения II. Решения в релятивистском конфигурационном представлении / В. Н. Капшай, Н. Б. Скачков // ТМФ. - 1983. - Т. 55. - № 1. - С. 26-38.

97. Кадышевский, В. Г. Разностные гипергеометрические уравнение и релятивистская кулонова проблема / В. Г. Кадышевский, Р. М. Мир-Касимов, М. Фриман // ЯФ. - 1969. - Т. 9. - Вып. 3. - С. 646-652.

98. Квазипотенциальное уравнение для релятивистского гармонического осциллятора / А. Д. Донков [и др.] // ТМФ. - 1971. - Т. 8. - № 1. - С. 61-72.

99. Голоскоков, С. В. О спектре масс мезонов в квазипотенциальном подходе / С. В. Голоскоков, С. П. Кулешов, А. В. Сидоров // Письма в ЖЭТФ. - 1980. - Т. 31. - Вып. 2. - С. 154-156.

100. Капшай, В. Н. Точные решения квазипотенциальных уранений для некоторых аналогов потенцилов запирания / В. Н. Капшай, С. П. Кулешов, Н. Б. Скачков // ЯФ. - 1983. - Т. 37. - Вып. 5. - С. 1292-1296.

101. Капшай, В. Н. Об одном классе точных решений квазипотенциальных уранений / В. Н. Капшай, С. П. Кулешов, Н. Б. Скачков // ТМФ. - 1983. - Т. 55. - № 3. - С. 349-360.

102. Капшай, В. Н. Одномерные релятивистские задачи о связанных состояниях и рассеянии для суперпозиции двух δ-потенциалов / В. Н. Капшай, Т. А. Алфчрова // Изв. вузов. - Физика. - 2002. - № 1. - С. 3-10.

103. Капшай, В. Н. Релятивистские уравнения с некоторыми точечными потенциалами // В. Н. Капшай, Ю. А. Гришечкин / Изв. вузов. - Физика. - 2009. - Т. 52. - № 6. - С. 9-15.

104. Solovtsov, I. L. Relativistic Resummation of Threshold Singularities in the Quasipotential Approach / I. L. Solovtsov, O. P. Solovtsova, Yu. D. Chernichenko // Письма в ЭЧАЯ. - 2005. - Т. 2. - № 4. - С. 17-23.

105. Справочник по специальным функциям / М. Абрамовиц [и др.] ; под редакцией М. Абрамовица и И. Стиган. - Москва : Наука, 1979. - 832 с.

106. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции : в 3 т. / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. - 2-е изд., стереотипное. - Москва : Наука, 1973. - Т. 1 : Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра : справочная математическая библиотека. - 296 с.

107. Янке, Е. Специальные функции Формулы, графики, таблицы / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Лчш ; под ред. Л. И. Седова. - Москва : Наука, 1977. - 344 с.

108. Gourdin, M. Interaction non Locate Separable of Matrice de Collision / M. Gourdin, A. Martin // Nuov. Cim. - 1957. - V. 6. - N. 4. - P. 757-779.

109. Gourdin, M. Exacte Determination of a Phenomenological Separable Interaction / M. Gourdin, A. Martin // Nuov. Cim. - 1958. - V. 8. - N. 4. - P. 699-707.

110. Chadan, Kh. On the Connection between the S-Matrix and a Class of Non-Local Interactions - I / Kh. Chadan // Nuov. Cim. - 1958. - V. 10. - N. 5. - P. 892-908.

111. Chadan, Kh. On a Class of Completely Transparent Nonlocal Two-Body Potentials / K. Chadan // Nuov. Cim. A. - 1967. - V. 157. - N. 3. - P. 510-525.

112. Bolsterli, M. Determination of Separable Potential from Phase Shift / M. Bolsterli, J. MacKenzie // Physics. - 1965. - V. 2. - N. 3. - P. 141-149.

113. Tabakin, Fr. Inverse Scattering Problem for Separable Potentials / Fr. Tabakin // Phys. Rev. - 1969. - V. 177. - N. 4. - P. 1443-1451.

114. Mills, R. L. Inverse Problem with Separable Potentials / R. L. Mills, J. F. Reading // J. Math. Phys. - 1969. - V. 10. - N. 2. - P. 321-331.

115. Mesons Masses and Widths in a Gauge Theory with Linear Binding Potential / R. Barbieri [et. al.] // Nucl. Phys. B. - 1976. - V. 105. - N. 1. - P. 125-138.

116. McClary, R. Relativistic Effects in Heavy-Quarkonium Spectroscopy / R. McClary, N. Byers // Phys. Rev. D. - 1983. - V. 28. - N. 7. - P. 1692-1705.

117. Chernichenko, Yu. D. Non-Local Separable Interaction and Relativistic Finite-Difference Quasipotential Equation / Yu. D. Chernichenko // High Energy Physics and Quantum Field Theory : Proceedings of the XV International Workshop, Tver, Russia, September 7-13, 2000 / Institute of Nuclear Physics, Moscow State University ; editors : M. Dubinin, V. Savrin. - Moscow, 2001. - P. 331-333.

118. Chernichenko, Yu. D. Relativistic Finite-Difference Quasipotential Equation with Non-Local Separable Interaction / Yu. D. Chernichenko // Nonlinear Dynamics and Applications : Proceedings of the X Annual Seminar Nonlinear Phenomena in Complex Systems, Minsk, Belarus, May 15-18, 2001 / Editors L. F. Babichev, V. I Kuvshinov. - Minsk, 2002. - V. 10. - P. 102-108.

119. Черниченко, Ю. Д. Решение релятивистского квазипотенциального уравнения с нелокальным сепарабельным взаимодействием / Ю. Д. Черниченко // Известия НАН Беларуси. Серия Физ.-мат. наук. - 2004. - № 2. - С. 72-80.

120. Chernichenko, Yu. D. Solving a Relativistic Quasipotential Equation for the Superposition of a Non-Local Separable Interaction and a Local Quasipotential not Admiting Bound States / Yu. D. Chernichenko // High Energy Physics and Quantum Field Theory : Proceedings of the XVII International Workshop, Samara-Saratov, Russia, September 4-11, 2003 / Institute of Nuclear Physics, Moscow State University ; editors : M. Dubinin, V. Savrin. - Moscow, 2003. - P. 233-241.

121. Черниченко, Ю. Д. Решение релятивистского квазипотенциального уравнения для суммы нелокальных сепарабельных квазипотенциалов / Ю. Д. Черниченко // Известия НАН Беларуси. Серия Физ.-мат. Наук. - 2005. - № 3. - С. 73-80.

122. Chernichenko, Yu. D. Solving a Relativistic Quasipotential Equation for a Sum of a Nonlocal Separable Interactions / Yu. D. Chernichenko // Nonlinear Dynamics and Applications : Proceedings of the XIII Annual Seminar Nonlinear Phenomena in Complex Systems, Minsk, Belarus, May 16-19, 2006 / Editors L. F. Babichev, V. I Kuvshinov. - Minsk, 2007. - V. 13. - P. 37-46.

123. Шадан, К. Обратные задачи в квантовой теории рассеяния / К. Шадан, П. Сабатье ; под ред. Б. Н. Захарьева. - Москва : Мир, 1980. - 408 с.

124. Базь, А. И. Свойства легчайших ядер и проблема нуклон-нуклонных потенциалов / А. И. Базь, В. Ф. Демин, М. В. Жуков // ЭЧАЯ. - 1975. - Т. 6. - Вып. 2. - С. 515-563.

125. Гельфанд, И. М. Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции / И. М. Гельфанд, Б. М. Левитан // Доклады АН СССР. - 1951. - Т. 77. - № 4. - С. 557-560.

126. Гельфанд, И. М. Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции / И. М. Гельфанд, Б. М. Левитан // Изв. АН СССР. Сер. мат. - 1951. - Т. 15. - № 4. - С. 309-360.

127. Марченко, В. А. Восстановление потенциальной энергии по фазам рассеянных волн / В. А. Марченко // Доклады АН СССР. - 1955. - Т. 104. - № 5. - С. 695-698.

128. Крейн, М. Г. Решение обратной задачи Штурма–Лиувилля / М. Г. Крейн // Доклады АН СССР. - 1951. - Т. 76. - № 1. - С. 21-24.

129. Крейн, М. Г. Определение плотности неоднородной симметричной струны по спектру ее частот / М. Г. Крейн // Доклады АН СССР. - 1951. - Т. 76. - № 3. - С. 345-348.

130. Агранович, З. С. Обратная задача рассеяния / З. С. Агранович, В. А. Марченко // Харьков: изд. ХГУ, 1960, 260 с.

131. Фаддеев, Л. Д. Обратная задача квантовой теории рассеяния / Л. Д. Фаддеев // УМН. - 1959. - Т. 14. - № 4. - С. 57-119.

132. Фаддеев, Л. Д. Свойства S-матрицы одномерного уравнения Шредингера / Л. Д. Фаддеев // Тр. мат. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова. - 1964. - Т. 73. - С. 314-336.

133. Маляров, В. В. Обратная задача теории рассеяния в комплексной λ-плоскости при наличии кулоновского поля с учетом поглощения / В. В. Маляров, И. В. Поплавский, М. Н. Попушой // ЖЭТФ. - 1975. - Т. 68. - Вып. 2. - С. 432-436.

134. Маляров, В. В. Алгебраический метод построения потенциала взаимодействия двух α-частиц по фазовым сдвигам при фиксированном значении энергии в отсутствие поглощения / В. В. Маляров, И. В. Поплавский, М. Н. Попушой // ЯФ. - 1975. - Т. 22. - Вып. 4. - С. 860-863.

135. Маляров, В. В. Востановление потенциала взаимодействия двух α-частиц по экспериментальным данным при фиксированном значении орбитального момента / В. В. Маляров, И. В. Поплавский, М. Н. Попушой // ЯФ. - 1975. - Т. 22. - Вып. 5. - С. 987-991.

136. Маляров, В. В. Синглетные четные нуклон-нуклонные потенциалы, полученные алгебраическим методом обратной задачи теории рассеяния / В. В. Маляров, И. В. Поплавский, М. Н. Попушой // ЯФ. - 1977. - Т. 25. - Вып. 1. - С. 72-75.

137. Thacker, H. B. Inverse Scattering Problem for Quarkonium Systems. 1. One-Dimensonel Formalism and Methodology. 2. Applications to Ψ and Υ Families / H. B. Thacker, C. Quigg, J. L. Rosner // Phys. Rev. D. - 1978. - V. 18. - N. 1. - P. 274-295.

138. Quigg, C. Quantum Mechanics with Applications to Quarkonium / C. Quigg, J. L. Rosner // Phys. Rep. - 1979. - V. 56. - N. 4. - P. 167-235.

139. Quigg, C. Further Evidence for Flavor Independence of the Quark-Antiquark Potential / C. Quigg, J. L. Rosner // Phys. Rev. D. - 1981. - V. 23. - N. 11. - P. 2625-2637.

140. Moxhay, P. Beyond Υ: Heavier Quarkonia and the Interquark Force / P. Moxhay, C. Quigg, J. L. Rosner // Phys. Rev. D. - 1981. - V. 23. - N. 11. - P. 2638-2646.

141. Захарьев, Б. Н. Приближенные методы в обратной задаче теории ядра / Б. Н. Захарьев, С. А. Ниязгулов, А. А. Сузько // ЯФ. - 1974. - Т. 20. - Вып. 6. - С. 1273-1281.

142. Обратная задача рассеяния (конечно-разностный подход) / Б. Н. Захарьев [и др.] // ЭЧАЯ. - 1977. - Т. 8. - Вып. 2. - С. 290-329.

143. Точно решаемые квантовые модели (потенциалы баргмановского типа) / Б. Н. Захарьев [и др.] // ЭЧАЯ. - 1982.- Т. 13. - Вып. 6. - С. 1284-1335.

144. Захарьев, Б. Н. Потенциалы и квантовое рассеяние : Прямая и обратная задачи / Б. Н. Захарьев, А. А. Сузько. Москва : Энергоатомиздат, 1985. - 224 с.

145. Соколов, С. Н. Общее решение многоканальной обратной задачи рассеяния / С. Н. Соколов // Препринт ИФВЭ ОТФ 79-139. - Серпухов. - 1979. - 15 с.

146. Соколов, С. Н. Релятивистское сложение прямых взаимодействий в точечной форме динамики / С. Н. Соколов // ТМФ. - 1978. - Т. 36. - № 2. - С. 193-207.

147. Черниченко, Ю. Д. Восстановление сепарабельного взаимодействия в релятивистском квазипотенциальном подходе / Ю. Д. Черниченко // ЯФ. - 2000. - Т. 63. - № 11. - С. 2075-2079.

148. Chernichenko, Yu. D. Reconstructing a Non-local Separable Interaction in the Framework of the Relativistic Quasipotential Model / Yu. D. Chernichenko // Actual Problems of Partical Physics : Proceedings of the VI International School-Seminar, Gomel, Belarus, August 7-16, 2001 : in 2 v. / JINR. - Dubna, 2002. - V. 2. - P. 182-192.

149. Chernichenko, Yu. D. Relativistic Inverse Problem for a Non-local Separable Quasipotential / Yu. D. Chernichenko // High Energy Physics and Quantum Field Theory : Proceedings of the XVIth International Workshop, Moscow, Russia, September 6-12, 2001 / Institute of Nuclear Physics, Moscow State University ; editors : M. N. Dubinin, V. I. Savrin. - Moscow, 2002. - P. 343-349.

150. Chernichenko, Yu. D. Relativistic Inverse Problem for the Superposition of a Non-local Separable Interaction and a Local Quasipotential not Admiting Bound States / Yu. D. Chernichenko // Actual Problems of Microword Physics : Proceedings of the VII International School-Seminar, Gomel, Belarus, Juli 28 - August 8, 2003 : in 2 v. / JINR. - Dubna, 2004. - V. 2. - P. 140-149.

151. Черниченко, Ю. Д. Релятивистская обратная задача для суперпозиции нелокального сепарабельного взаимодействия и локального квазипотенциала, не допускающего связанных состояний / Ю. Д. Черниченко // Известия НАН Беларуси. Серия Физ.-мат. наук. - 2004. - № 1. - С. 84-89.

152. Черниченко, Ю. Д. Релятивистская обратная задача для суперпозиции нелокального сепарабельного и локального квазипотенциалов / Ю. Д. Черниченко // ЯФ. - 2005. - Т. 68. - № 1. - С. 43-50.

153. Черниченко, Ю. Д. Релятивистская обратная задача для суммы нелокальных сепарабельных квазипотенциалов / Ю. Д. Черниченко // Известия НАН Беларуси. Серия Физ.-мат. наук. - 2006. - № 1. - С. 66-72.

154. Chernichenko, Yu. D. Relativistic Inverse Scattering for a Sum of a Non-local Separable Quasipotential / Yu. D. Chernichenko // Actual Problems of Microword Physics: Proceedings of the IX International School-Seminar, Gomel, Belarus, Juli 23 - August 3, 2007 : in 2 v. / JINR. - Dubna, 2008. - V. 2. - P. 9-20.

155. Durand, B. Analytic Solution of the Relativistic Coulomb Problem for a Spinless Salpeter Equation / B. Durand, L. Durand // Phys. Rev. D. - 1983. - V. 28. - N. 2. - P. 396-406.

156. Solovtsova, O. P. Threshold Resummation S-factor in the Relativistic Quasipotential Approach: the Case of Unequal Masses / O. P. Solovtsova, Yu. D. Chernichenko // Nonlinear Phenomena in Complex Systems : Proceedings XVth Annual Seminar Nonlinear Phenomena in Complex Systems, Minsk, Belarus, May 20-23, 2008 / Editors L. F. Babichev, V. I Kuvshinov. - Minsk, 2009. - V. 12. - № 2. - P. 141-149.

157. Chernichenko, Yu. D. Threshold Resummation Factors in the Relativistic Quasipotential Approach in the Case of Unequal Masses / Yu. D. Chernichenko // Nonlinear Dunamics and Applications: Proceedings of the XVI Annual Seminar NPCS'09, Minsk, Belarus, May 19-22, 2009 / Editors L. F. Babichev, V. I Kuvshinov. - Minsk, 2010. - V. 16. - P. 26-34.

158. Черниченко, Ю. Д. Пороговые ресуммирующие факторы в КХД: случай неравных масс / Ю. Д. Черниченко // Известия НАН Беларуси. Серия Физ.-мат. наук. - 2009. - № 4. - С. 81-89.

159. Solovtsova, O. P. Threshold Resummation S-factor in QCD: the Case of Unequal Masses / O. P. Solovtsova, Yu. D. Chernichenko // E-Print Archive : arXiv : 0904.0754v1. - 16 p.

160. Соловцова, О. П. Пороговый ресуммирующий S-фактор в КХД: случай неравных масс / О. П. Соловцова, Ю. Д. Черниченко // ЯФ. - 2010. - Т. 73. - № 9. - С. 1658-1667.

161. Lucha, W. Relativistic Virial Theorem / W. Lucha, F. F. Schöberl // Phys. Rev. Lett. - 1990. - V. 64. - N. 23. - P. 2733-2735.

162. Lucha, W. Relativistic Coulomb Problem: Lowest-Lying Energy Levels at the Critical Coupling Constant Analytically / W. Lucha, F. F. Schöberl // Phys. Lett. B. - 1996. - V. 387. - N. 3. - P. 573-576.

163. Bell, J. S. Testing Q^2 Duality with Non-Relativistic Potentials / J. S. Bell, R. A. Bertlmann // Z. Physik. C - Particles and Fields. - 1980. - V. 4. - P. 11-15.

164. Tainov, E. A. Duality in $e^+ e^-$ Annihilation / E. A. Tainov // Z. Physik. C - Particles and Fields. - 1981. - V. 10. - P. 87-93.

165. Angular Distributions of Massive Quarks and Leptons Close to Threshold / S. J. Brodsky [et. al.] // Phys. Lett. B. - 1995. - V. 359. - P. 355-361.

166. Voloshin, M. B. The Onset of $e^+ e^- \to \tau^+ \tau^-$ at Threshold Revisited / M. B. Voloshin // Phys. Lett. B. - 2003. - V. 556. - P. 153-162.

167. Durand, B. Connection of Relativistic and Nonrelativistic Wawe Functions in the Calculation of Leptonic Widths / B. Durand, L. Durand // Phys. Rev. D. - 1984. - V. 28. - N. 9. - P. 1904-1915.

168. Reinders, L. J. Hadron Properties from QCD Sum Rules / L. J. Reinders, H. R. Rubinstein, S. Yazaki // Phys. Rep. - 1985. - V. 127. - N. 1. - P. 1-97.

169. Particle Data Group / K. Hagiwara [et. al.] // Phys. Rev. D. - 2002. - V. 66. - Art. 010001(250); S. Eidelman [et. al.] // Phys. Lett. B. - 2004. - V. 592. P. 1-263; S. Eidelman [et. al.] // J.Phys. G. - 2010. - V. 37. - Art. 075021(278).

Научное издание

Черниченко Юрий Дмитриевич

РЕЛЯТИВИСТСКИЙ КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНЫЙ ПОДХОД В ЗАДАЧАХ РАССЕЯНИЯ

Монография

Редактор *Н. Г. Мансурова*

Компьютерная верстка *М. В. Аникеенко*

Подписано в печать 15.06.11.

Формат 60x84/$_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Ризография. Усл. печ. л. 13,95. Уч.-изд. л. 13,53.
Тираж 100 экз. Заказ № /91.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Издательский центр
учреждения образования «Гомельский государственный
технический университет имени П. О. Сухого».
ЛИ № 02330/0549424 от 08.04.2009 г.
246746, г. Гомель, пр. Октября, 48