

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Техническая механика»

О. Н. Шабловский, В. Ю. Гавриш

КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

**УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ
по курсу «Теоретическая механика»
для студентов технических специальностей
дневной и заочной форм обучения**

Гомель 2016

УДК 531.391.3(075.8)
ББК 22.213я73
Ш13

*Рекомендовано научно-методическим советом
машиностроительного факультета ГГТУ им. П. О. Сухого
(протокол № 3 от 09.11.2015 г.)*

Рецензент: зав. каф. «Технология машиностроения» ГГТУ им. П. О. Сухого
канд. техн. наук, доц. *М. П. Кульгейко*

Шабловский, О. Н.

Ш13 Колебания механических систем : учеб.-метод. пособие по курсу «Теоретическая механика» для студентов техн. специальностей днев. и заоч. форм обучения / О. Н. Шабловский, В. Ю. Гавриш. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2016. – 56 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: <https://elib.gstu.by>. – Загл. с титул. экрана.

Рассмотрены условия ограниченности параметрических колебаний, даны исходные понятия теории бифуркации решений. Приведены простые и наглядные примеры практического применения нелинейных задач механики.

Для студентов технических специальностей дневной и заочной форм обучения.

УДК 531.391.3(075.8)
ББК 22.213я73

© Учреждение образования «Гомельский
государственный технический университет
имени П. О. Сухого», 2016

Введение

В механике, физике и технике одно из центральных мест занимает проблема изучения колебательных и волновых явлений.

Колебания – это движение или процессы, обладающие той или иной степенью повторяемости во времени. Колебания свойственны всем явлениям природы.

Вибрации сооружений и машин, электромагнитные колебания в радиотехнике и оптике, автоколебания в системах регулирования и следящих системах, звуковые и ультразвуковые колебания, ряд сложных процессов экологии, экономики – все эти, казалось бы, различные процессы и непохожие друг на друга колебательные процессы объединяются методами математической физики в одно общее учение о колебаниях.

Одним из основных математических аппаратов, применяемых для изучения колебаний и волн, является теория дифференциальных уравнений.

Главной задачей данного пособия является изложение основ современной теории колебаний и волн в механических системах.

Рассмотрение вопросов теории и практических приложений в технике представлено таким образом, чтобы формальные математические методы не заслоняли физическое содержание основных колебательно-волновых явлений и эффектов.

Предлагаемое читателю учебно-методическое пособие содержит следующие темы: метод фазовой плоскости; колебания параметрических систем; элементы теории нелинейных колебаний; элементы теории автоколебаний. Среди использованных литературных источников отметим книги [1-12].

1 МЕТОД ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ.

Излагается сущность метода фазовой плоскости, применяющегося для изучения нелинейных механических колебаний. Большое прикладное значение этого метода иллюстрируется конкретными примерами.

Обсуждаются основные свойства колебаний механических систем,

параметры которых нестационарны – являются функциями времени.

1.1 Фазовый портрет динамической системы с одной степенью свободы

Автономная система обыкновенных дифференциальных уравнений – это система обыкновенных дифференциальных уравнений, в которую не входит явно независимое переменное t (время).

Динамическая система. Это понятие возникло как обобщение понятия механической системы, движение которой описывается дифференциальными уравнениями Ньютона. Как известно, состояние механической системы определяется совокупностью обобщенных координат и скоростей. В настоящее время понятие динамической системы является весьма широким и охватывает системы любой природы: физической, химической, биологической и экономической.

Уравнения движения автономной динамической системы с одной степенью свободы в общем случае записываются в виде двух дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y), \quad (1.1)$$

правые части которых нелинейные, вообще говоря, функции x и y . Здесь и далее точка над символом функции означает производную по времени: $\dot{x} = dx(t)/dt$, $\dot{y} = dy(t)/dt$.

Для геометрической интерпретации автономной системы (1.1) используется фазовая плоскость (частный случай фазового пространства).

Фазовой траекторией называется траектория в фазовом пространстве, изображающая, как изменяется со временем t состояние динамической системы. Когда состояние не зависит от t , фазовая траектория сводится к точке – **положению равновесия** $M_0(x^*, y^*)$.

В состоянии равновесия правые части дифференциальных уравнений (1.1) обращаются в нуль:

$$P(x^*, y^*) = 0, \quad Q(x^*, y^*) = 0.$$

В теории автономных динамических систем употребляется много синонимов этого термина: особая точка, состояние равновесия, неподвижная точка, стационарная точка, точка покоя.

Вблизи состояния равновесия M_0 поведение фазовых траекторий описывается уравнениями, которые получаются после линеаризации уравнений (1.1) в окрестности точки (x^*, y^*) :

$$\begin{cases} \dot{\xi} = a_{11}\xi + a_{12}\eta, \\ \dot{\eta} = a_{21}\xi + a_{22}\eta. \end{cases} \quad (1.2)$$

Здесь $\xi = x - x^*$, $\eta = y - y^*$ – малые величины, а коэффициенты

$$\begin{aligned} a_{11} &= (\partial P / \partial x)_0, & a_{12} &= (\partial P / \partial y)_0, \\ a_{21} &= (\partial Q / \partial x)_0, & a_{22} &= (\partial Q / \partial y)_0 \end{aligned}$$

определены при $x = x^*$, $y = y^*$.

Устойчивость по Ляпунову. Точка покоя $\xi = 0$, $\eta = 0$ устойчива в смысле Ляпунова, если для каждого $\varepsilon > 0$ можно подобрать $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из неравенства

$$\xi^2(t_0) + \eta^2(t_0) < \delta^2(\varepsilon)$$

следует

$$\xi^2(t) + \eta^2(t) < \varepsilon^2 \text{ при } t \geq t_1 \geq t_0,$$

т.е. траектория, начальная точка которой находится в δ - окрестности начала координат, при $t \geq t_1$ не выходит за пределы ε - окрестности начала координат.

Решение уравнений (1.2) берем в виде

$$\xi = \alpha_1 e^{\lambda \cdot t}, \quad \eta = \alpha_2 e^{\lambda \cdot t}$$

и тогда для определения λ получаем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

которое можно представить в виде

$$\lambda^2 + \sigma\lambda + \Delta = 0, \quad (1.3)$$

где

$$\sigma = -(a_{11} + a_{22}), \quad \Delta = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Числа α_1, α_2 определяются с точностью до постоянного множителя из одного из уравнений:

$$(a_{11} - \lambda)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 = 0; \quad a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - \lambda)\alpha_2 = 0.$$

Анализируя (1.3), получаем следующие случаи:

1. Корни характеристического уравнения (1.3) λ_1, λ_2 действительные и различные; общее решение уравнений (1.2)

$$\xi = C_1\alpha_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\beta_1 e^{\lambda_2 t}, \quad \eta = C_1\alpha_2 e^{\lambda_1 t} + C_2\beta_2 e^{\lambda_2 t},$$

где α_i, β_i соответствуют корням λ_i ; постоянные C_1, C_2 – произвольные.

(а) если $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$, то точка покоя $\xi = 0, \eta = 0$ асимптотически устойчива; при $t \rightarrow \infty, \xi \rightarrow 0, \eta \rightarrow 0$: состояние равновесия – **устойчивый узел**, рис.1.1;

(б) если $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$, то траектории такие же, как и в предыдущем случае, но точка движется по траектории в противоположном направлении, рис. 1.2, т.е. при $t > 0$ удаляется от начала координат; такая особая точка – **неустойчивый узел**;

(в) если $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$, то состояние равновесия тоже неустойчивое, потому что при движении по траектории

$$\xi = C_1\alpha_1 e^{\lambda_1 t}, \quad \eta = C_1\alpha_2 e^{\lambda_1 t},$$

т.е. $\eta = \alpha_2 \xi / \alpha_1$ при каких угодно малых значениях C_1 с ростом $t > 0$ точка выходит из окрестности начала координат; для второго характеристического корня имеем движение

$$\xi = C_2\beta_1 e^{\lambda_2 t}, \quad \eta = C_2\beta_2 e^{\lambda_2 t},$$

т.е. точки на прямой $\eta = \beta_2 \xi / \beta_1$ движутся по направлению к началу координат; такое состояние равновесия – **седло**, рис. 1.3.

2. Корни характеристического уравнения (1.2) комплексные: $\lambda_{1,2} = p \pm iq, q \neq 0$. Общее решение системы (1.2) записывается в форме

$$\xi = e^{p \cdot t}(C_1 \cos qt + C_2 \sin qt), \quad \eta = e^{p \cdot t}(\hat{C}_1 \cos qt + \hat{C}_2 \sin qt), \quad (1.4)$$

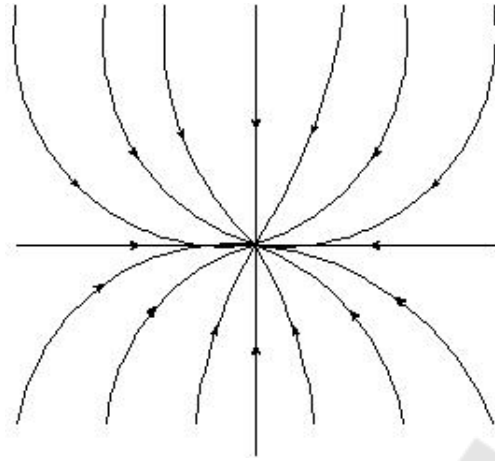


Рис. 1.1. Устойчивый узел

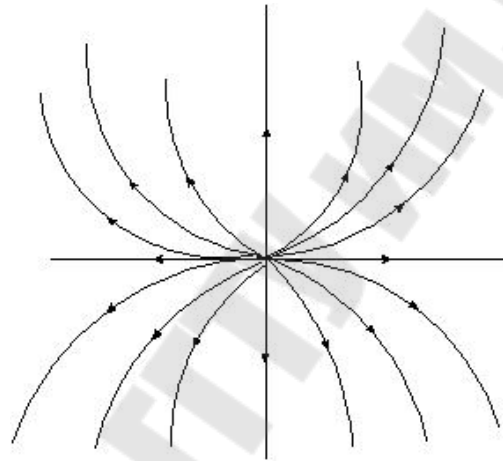


Рис. 1.2. Неустойчивый узел

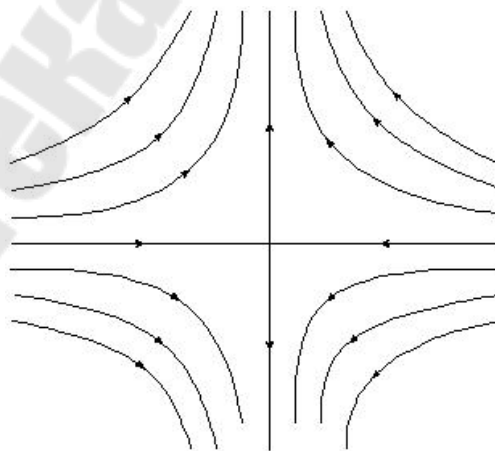


Рис. 1.3. Седло

где C_1, C_2 – произвольные постоянные, \hat{C}_1, \hat{C}_2 – некоторые линейные комбинации этих постоянных.

(а) Если $\lambda_{1,2} = p \pm iq, p < 0, q \neq 0$, то траектории представляют собой спирали, асимптотически приближающиеся при $t \rightarrow \infty$ к началу координат; состояние равновесия асимптотически устойчивое (см. (1.4)) и называется **устойчивым фокусом**, рис. 1.4.

(б) Если $\lambda_{1,2} = p \pm iq, p > 0, q \neq 0$, то траектории такие же, как и в предыдущем случае, но при $t > 0$ точка движется по ним в противоположном направлении, рис. 1.5; точка покоя – **неустойчивый фокус**.

(в) Если $\lambda_{1,2} = \pm iq, p = 0, q \neq 0$, то решение (1.4) – периодическое; траекториями являются замкнутые кривые, окружающие точку покоя $\xi = 0, \eta = 0$, рис. 1.6; это состояние равновесия – **центр**. Он является устойчивой точкой покоя, потому что можно подобрать такие малые C_1, C_2 в решение (1.4) при $P = 0$, что будет выполнено $\xi^2(t) + \eta^2(t) < \varepsilon^2$, т.е. замкнутые траектории не выходят за пределы ε – окрестности начала координат. Асимптотическая устойчивость в этом варианте отсутствует, так как $\xi(t)$ и $\eta(t)$ не стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$.

3. Корни кратны, $\lambda_1 = \lambda_2$.

(а) Если $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$, то в общем решении

$$\xi = e^{\lambda_1 t}(C_1 \alpha_1 + C_2 \beta_1), \eta = e^{\lambda_1 t}(C_1 \alpha_2 + C_2 \beta_2 t)$$

имеется множитель $e^{\lambda_1 t} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Это точка покоя – **устойчивый узел**, и она асимптотически устойчива, рис. 1.7; при $\beta_1 = \beta_2 = 0$ имеем **дискритический узел**, рис. 1.8.

(б) Если $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$, то состояния равновесия – **неустойчивый узел**, рис. 1.9, 1.10.

Сепаратрисной кривой называется граница областей притяжения к различным устойчивым особым траекториям. Название ”сепаратриса” связано с наблюдением, что сепаратрисы, наряду с замкнутыми траекториями, делят фазовую плоскость на области с одинаковым поведением траекторий. Сепаратрисы могут входить в состав предельных множеств траекторий.

Так, траектория может навиваться на "петлю сепаратрисы" – замкнутую кривую, образованную траекторией, стремящейся к одному и тому же седлу как при $t \rightarrow -\infty$, так и при $t \rightarrow \infty$, или на "сепаратрисный контур (цикл)" – замкнутую кривую, состоящую из нескольких сепаратрис, соединяющих седла.

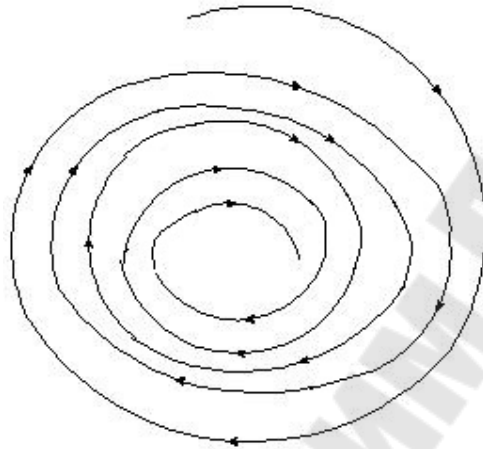


Рис. 1.4. Устойчивый фокус

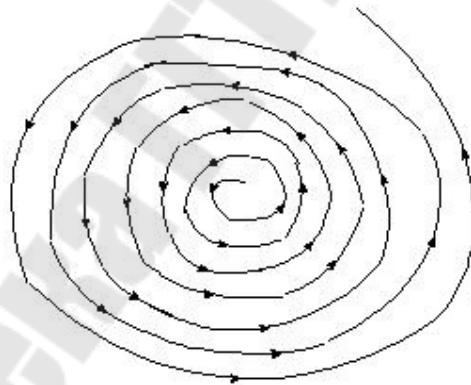


Рис. 1.5. Неустойчивый фокус

При малом возмущении из петли сепаратрисы может возникнуть предельный цикл: это один из основных типов бифуркаций на плоскости (по этому поводу см. далее п. 2.2)

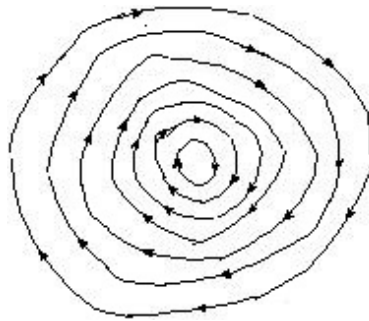


Рис. 1.6. Центр

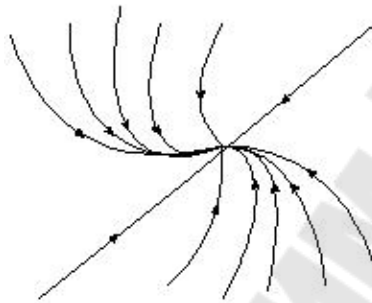


Рис. 1.7. Устойчивый узел

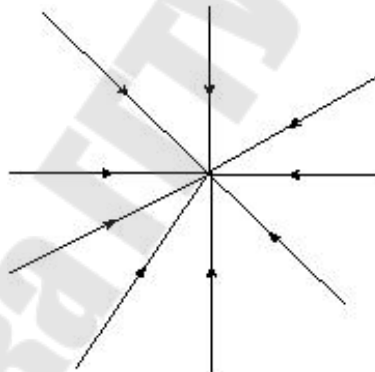


Рис. 1.8. Седловый узел

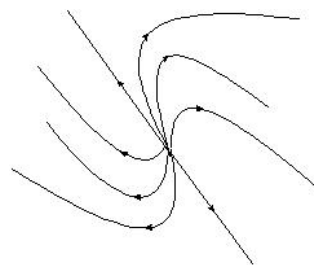


Рис. 1.9. Неустойчивый узел

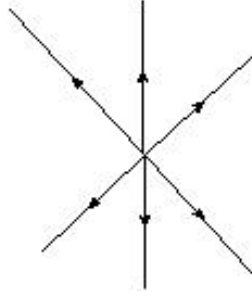


Рис. 1.10. Неустойчивый узел

1.2 Метод фазовой плоскости

Рассмотрим уравнение движения второго порядка

$$\mathfrak{L} \left(x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2} \right) = 0. \quad (1.5)$$

Введем обозначение $\dot{x} \equiv dx(t)/dt = y$ и запишем

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt} = y \frac{dy}{dx},$$

тогда (1.5) примет вид $\hat{\mathfrak{L}} \left(x, y, \frac{dy}{dx} \right) = 0$. Его общий интеграл $\psi(x, y, C) = 0$ дает в плоскости (x, y) однопараметрическое семейство кривых $y = \psi(x, C)$. Решение уравнения (1.5) $\{x(t), y(t)\}$ является изображающей точкой на фазовой плоскости (x, y) и характеризует в каждый момент времени положение и скорость точки. При $t \geq 0$ изображающая точка движется вдоль фазовой траектории $y = \psi(x, C)$, (рис.1.11). В верхней полуплоскости $\dot{x} = dx/dt > 0$, поэтому изображающая точка перемещается в сторону возрастающих значений x , а в нижней полуплоскости ($\dot{x} < 0$) - в сторону убывающих значений x . Если движение, описываемое уравнением (1.5) периодическое, то соответствующая фазовая траектория - замкнутая. Для всевозможных действительных значений параметра C получаем совокупность возможных движений, описываемых уравнением (1.5).

Проиллюстрируем этот общий алгоритм примером. Рассмотрим сначала хорошо известное уравнение свободных колебаний

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \quad (1.6)$$

Умножим (1.6) на \dot{x} и проинтегрировав, найдем интеграл энергии

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\omega^2 x^2}{2} = C, \quad (1.7)$$

где C – постоянная энергии. Без ограничения общности примем далее, что либо $x(0) = 0$ и тогда $C = T(0) = \frac{1}{2}(\dot{x}(0))^2$ либо $\dot{x}(0) = 0$ и тогда $C = \Pi(0) = \frac{1}{2}\omega^2 x^2(0)$. Из (1.7) находим

$$\dot{x} = \pm [2C - F(x)]^{\frac{1}{2}}, \quad F(x) = \omega^2 x^2 \quad (1.7^*)$$

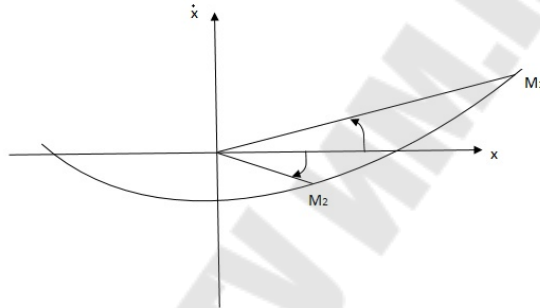


Рис. 1.11. Движение точки вдоль фазовой траектории

Здесь T – кинетическая энергия, Π – потенциальная энергия. Фазовые траектории уравнения (1.6) определяется из (1.7). В плоскости (F, x) построим кривую $F = F(x)$ и проведем прямую $F = 2C$. Ясно, что разность $2C - F(x)$ дает \dot{x}^2 . Порядок построений этих кривых указан на рис.1.12. Каждой паре значений $x, y = \dot{x}$ соответствует единственное значение постоянной C , поэтому фазовые траектории являются замкнутыми кривыми. Значит, все решения уравнения (1.6) – периодические. Это видно непосредственно из решения $x = A \sin(\omega t + \beta)$. Двигаясь вдоль фазовой траектории, изображающая точка через некоторое время вернется в начальное состояние $x = x_0, \dot{x} = y_0$. Уравнение (1.6) не содержит явно аргумент t , поэтому начальные условия будут порождать то же движение, которое только что закончилось в этой точке. Вдоль фазовой траектории изображающая точка движется в направлении, указанном стрелкой (рис. 1.12): в сторону возрастания значений x в верхней полуплоскости, в сторону убывающих x – в нижней полуплоскости.

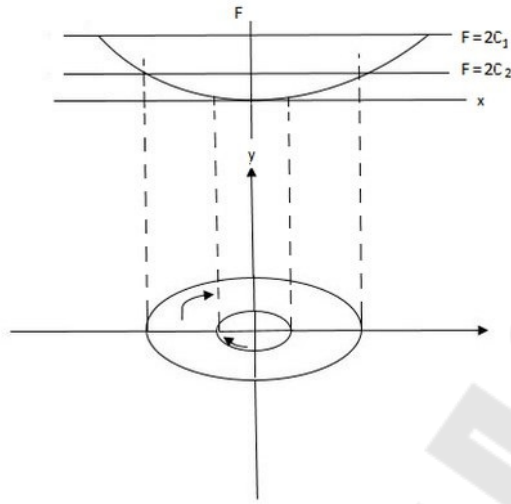


Рис. 1.12. Порядок построения кривых, соответствующих интегралу (1.7*)

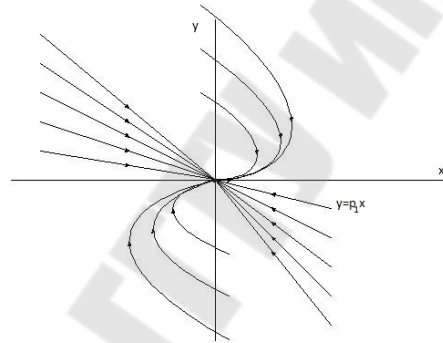


Рис. 1.13. Деформированные параболы

Представим уравнение (1.6) в виде динамической системы (1.1):

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\omega^2 x.$$

Точка $x = 0$, $y = 0$ определяет положение равновесия. Имеем:

$$a_{11} = 0, \quad a_{12} = -1, \quad a_{21} = -\omega^2, \quad a_{22} = 0.$$

Характеристическое уравнение (1.2) выглядит так:

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0,$$

т.е. имеем случай 2 из п.1.1. Эта особая точка – центр.

Если учитывать сопротивление при движении системы с одной степенью свободы, то получим дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega^2 x = 0. \quad (1.8)$$

Соответствующая динамическая система имеет вид

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -2ny - \omega^2 x$$

и ее фазовый портрет качественно отличается от варианта (1.6). Предоставляем читателю самостоятельно получить следующие результаты: 1) на плоскости x, y фазовые траектории представляют собой при $n < \omega$ спирали, скручивающиеся к началу координат, рис. 1.4; 2) двигаясь по любой из этих фазовых траекторий, изображающая точка асимптотически (при $t \rightarrow \infty$) приближается к началу координат, где находится особая точка – устойчивый фокус.

Если коэффициент вязкого сопротивления достаточно велик $n > \omega$, то при любых начальных условиях движение затухает по экспоненциальному закону. В самом деле, общее решение в этом случае имеет вид:

$$x = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t}, \quad p_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - \omega^2} < 0.$$

Семейство интегральных кривых

$$y - p_1 x = C(y - p_2 x)^{p_2/p_1}$$

представляет собой на плоскости x, y деформированные параболы, касающиеся прямой $y = p_1 x$ в начале координат, рис. 1.13, где стрелками отмечено направление движения изображающей точки. Особая точка этого семейства – в начале координат и представляет собой устойчивый узел.

Если $n = \omega$, то имеем семейство интегральных кривых параболического типа: $x = e^{-nt}(C_1 t + C_2)$, $y = \dot{x}$; в начале координат – устойчивой точкой покоя типа узла.

Вывод: при любых значениях физических параметров в области положительного трения $n > 0$ система, описываемая уравнением (1.8), обладает единственным глобально устойчивым состоянием равновесия; при любых начальных условиях система совершает затухающие (периодические или аperiodические) движения.

1.3 Системы с переменными параметрами

Рассмотрим маятник, точка подвеса которого гармонически колеблется относительно инерциальной системы отсчета $O_1 X_1 Z_1$. Обсудим два варианта: горизонтальное и вертикальное колебания точки подвеса.

Горизонтальное колебание точки подвеса (рис. I.7): $x_0 = b \cos pt$. Воспользуемся неинерциальной системой отсчета OXZ , в которой точка подвеса маятника покоится:

$$J\ddot{\varphi} = -mgl \sin \varphi - m\ddot{x}_0 \ell \cos \varphi, \quad (1.9)$$

где $J = m\ell^2$ – момент инерции маятника, φ – угол отклонения от вертикали, $(-m\ddot{x}_0)$ – сила инерции, m – масса, ℓ – длина маятника. При малых колебаниях вблизи значения $\varphi = 0$ приближенно имеем $\sin \varphi \cong \varphi$, $\cos \varphi \cong 1$, и уравнение (1.9) принимает вид:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell} \varphi = -\frac{bp^2}{\ell} \cos pt. \quad (1.10)$$

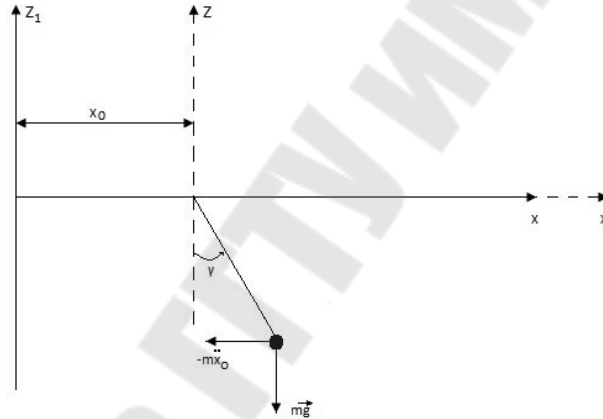


Рис. 1.14. Горизонтальное колебание точки подвеса

Ясно, что это обычное уравнение вынужденных колебаний, происходящих под действием заданной гармонической внешней силы.

Вертикальное колебание точки подвеса (1.15): $z_0 = b \cos pt$. Уравнение движения в неинерциальной системе отсчета OXZ с учетом силы инерции $(-m\ddot{z}_0)$ представляется в форме:

$$J\ddot{\varphi} = -mgl \sin \varphi - m\ddot{z}_0 \ell \sin \varphi.$$

При малых колебаниях имеем приближенное уравнение:

$$\ddot{\varphi} + \left(\frac{g + \ddot{z}_0}{\ell} \right) \varphi = 0, \quad \ddot{z}_0 = -bp^2 \cos pt,$$

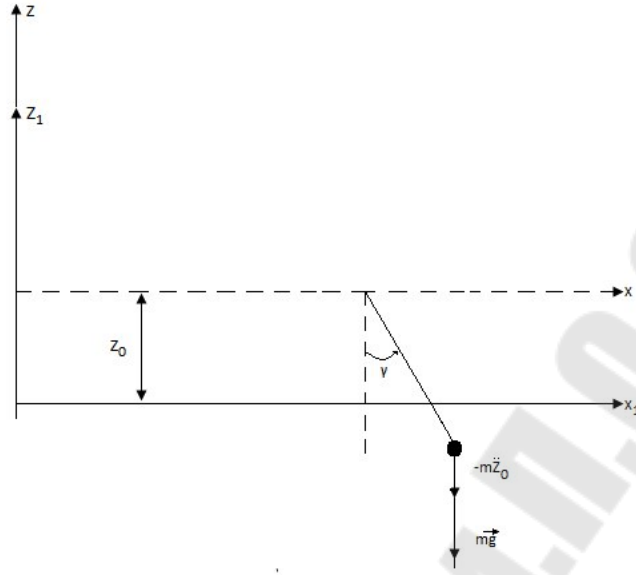


Рис. 1.15. Вертикальное колебание точки подвеса

$$\ddot{\varphi} + (g - bp^2 \cos pt) \frac{\varphi}{\ell} = 0. \quad (1.11)$$

Это уравнение существенно отличается от (1.10): в правой части нет периодической внешней силы, и от времени зависит коэффициент при неизвестной функции $\varphi(t)$. Таким образом, здесь внешнее воздействие изменяет параметры механической системы.

Возникновение колебательного процесса вследствие изменения параметров называется параметрическим возбуждением колебаний, а сами колебания называются **параметрическими**.

Дадим еще пример параметрических колебаний. Пусть у математического маятника длина ℓ меняется по гармоническому закону (рис.1.16): $\ell = \ell_0 + b \cos pt$. Уравнения движения имеют вид:

$$\frac{d}{dt}(J\dot{\varphi}) = -mg\ell \sin \varphi, \quad J = m\ell^2(t).$$

Для малых колебаний получаем линейное уравнение с периодическими коэффициентами:

$$\ddot{\varphi} + \frac{(-2)}{\ell} bp \sin pt \cdot \dot{\varphi} + \frac{g}{\ell} \varphi = 0. \quad (1.12)$$

Обсудим некоторые специфические свойства колебаний системы с переменными параметрами. Пусть колебания системы с одной степенью

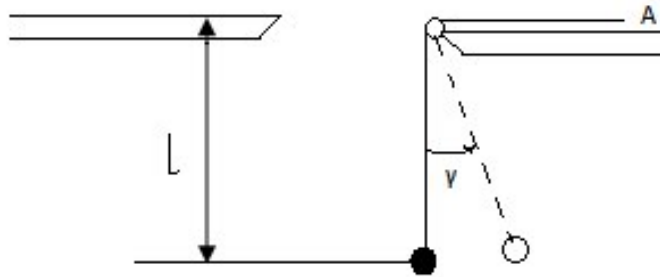


Рис. 1.16. Пример параметрических колебаний

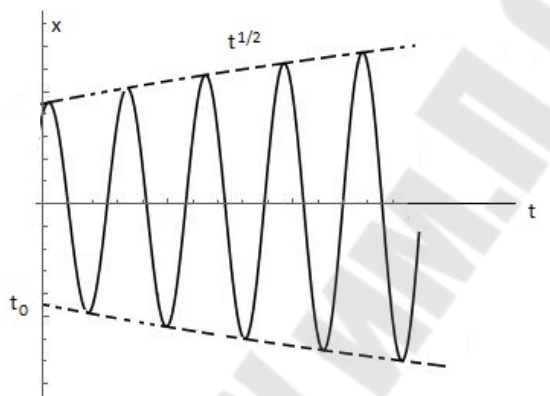


Рис. 1.17. Решение уравнения (1.13)

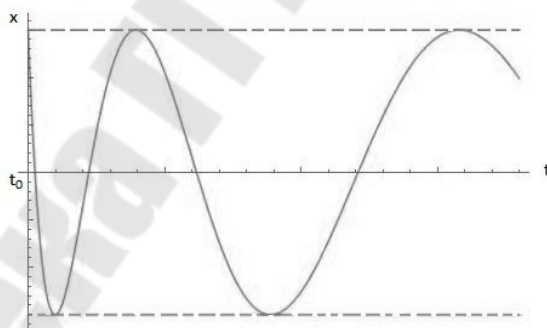


Рис. 1.18. Решение уравнения (1.14)

свободы описываются линейным уравнением

$$\ddot{x} + f(t)x = 0, f(t) \geq 0,$$

где $f(t)$ – заданная функция времени. Естественно, что это уравнение моделирует колебания груза на пружине, жесткость которой изменяется со временем. Рассуждая по аналогии с линейными колебаниями, можно было

бы ввести понятие мгновенной частоты

$$\omega(t) = [f(t)]^{\frac{1}{2}}$$

и утверждать, что в каждый момент времени такой маятник гармонически колеблется с частотой $\omega(t)$. Этот упрощенный подход называется принципом "замораживания" коэффициентов.

Суть дела в том, что анализировать свойства системы с переменными параметрами, опираясь на свойства системы с "замороженными" коэффициентами в общем случае нельзя. Покажем, что это может привести не только к количественным, но и к грубым качественным ошибкам.

Допустим, что маятник колеблется под действием восстанавливающей силы (аналог силы упругости), обратно пропорциональной квадрату времени, $F \sim (-x/t^2)$; тогда уравнение движения такое:

$$\ddot{x} + \frac{x}{t^2} = 0. \quad (1.13)$$

Решение ищем в виде степенной функции $x = t^\lambda$ и после подстановки в (1.13) получаем характеристическое уравнение $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$, откуда

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{3}.$$

Два линейно независимых решения уравнения (1.13) можно теперь представить в форме

$$x_1 = C_1 \exp(\lambda_1 \ln t), \quad x_2 = C_2 \exp(\lambda_2 \ln t); \quad C_1, C_2 - \text{const.}$$

Переходя по формулам Эйлера к действительным величинам, получаем

$$\tilde{x}_1 = B_1 t^{\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln t\right), \quad \tilde{x}_2 = B_2 t^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln t\right); \quad B_1, B_2 - \text{const.}$$

Значит, колебательное движение, описываемое уравнением (1.13), представляется в виде

$$x(t) = \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 = t^{\frac{1}{2}} \left[B_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln t\right) + B_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln t\right) \right]. \quad (1.14)$$

Зависимость (1.14) показана на (1.17) Видно, что амплитуда колебаний пропорциональна $t^{\frac{1}{2}}$, т.е. неограниченно возрастает при $t \geq 0$. Мгновенная частота $\omega = \sqrt{3} \ln t / 2t$ с ростом времени уменьшается, $\omega \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$.

И это несмотря на то, что восстанавливающая сила всегда отрицательна, т.е. противодействует отклонению точки от положения равновесия.

Следовательно, применяя "замороженные" коэффициенты и действуя по аналогии с системами, имеющими постоянные параметры, мы получили бы совершенно неверный результат.

Допустим далее, что на маятник (1.13) действует диссипативная сила (сила сопротивления) $R \sim (-\dot{x}/t)$:

$$\ddot{x} + \frac{\dot{x}}{t} + \frac{x}{t^2} = 0. \quad (1.15)$$

Решение строим, как и в предыдущем случае, в виде $x = t^\lambda$, где $\lambda^2 + 1 = 0$, а в итоге общее решение уравнения (1.15) получается таким:

$$x = A_1 \cos \ln t + A_2 \sin \ln t.$$

Этот вариант колебаний показан на (рис.1.18) Оказывается, что несмотря на действие диссипативной силы, колебание происходит с постоянной амплитудой, а не затухает, в отличие от системы с постоянными параметрами. Мгновенная частота колебаний с ростом времени убывает до нуля: $(\ln t)/t \rightarrow \infty$.

Итак, колебания системы с переменными параметрами требуют самостоятельного изучения.

1.4 Параметрические колебания

Следуя А.А. Андронову и Л.И. Мандельштаму, рассмотрим математический подход к линейным уравнениям вида

$$\ddot{x} + g(t)\dot{x} + \omega^2(t)x = 0, \quad (1.16)$$

где $g(t)$, $\omega^2(t)$ – периодические функции, τ – период:

$$g(t + \tau) = g(t), \quad \omega^2(t + \tau) = \omega^2(t).$$

Ранее полученные уравнения (1.11), (1.12) – частные случаи уравнения (1.16). Предлагаем далее, что для (1.16) существует единственное решение, удовлетворяющее начальным условиям $t = 0$: $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$. Известно, что общее решение можно записать в виде

$$x = C_1 x_1 + C_2 x_2,$$

где $x_1(t)$, $x_2(t)$ – линейно-независимые частные решения исходного уравнения (1.16), C_1, C_2 – произвольные постоянные. Два частных решения $\varphi(t), \psi(t)$ уравнения (1.16), которые удовлетворяют начальным условиям вида

$$\begin{cases} \varphi(0) = 1, \psi(0) = 0, \\ \dot{\varphi}(0) = 1, \dot{\psi}(0) = 1, \end{cases} \quad (1.17)$$

являются линейно-независимыми, т.е. образуют фундаментальную систему. В самом деле, определитель Вронского отличен от нуля:

$$W = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \dot{x}_1 & \dot{x}_2 \end{vmatrix} = W(0) \exp \left[- \int_0^t g(t) dt \right] \neq 0, \quad W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Значит, выполнено необходимое и достаточное условие линейной независимости функций $\varphi(t)$, $\psi(t)$.

Теперь докажем, что существует такое решение $x_1(t)$ уравнения (1.16), для которого

$$x_1(t + \tau) = s x_1(t), \quad s = \text{const}. \quad (1.18)$$

Если (1.18) верно, то

$$x_1(t + n\tau) = s^n x_1(t).$$

Пусть $\varphi(t), \psi(t)$ – решения уравнения (1.16). Периодичность коэффициентов этого уравнения гарантирует, что функции $\varphi(t + \tau)$, $\psi(t + \tau)$ тоже являются решениями, которые, естественно, можно выразить линейно через фундаментальную систему $\varphi(t), \psi(t)$:

$$\begin{cases} \varphi(t + \tau) = a\varphi(t) + b\psi(t), \\ \psi(t + \tau) = c\varphi(t) + d\psi(t), \end{cases} \quad a, b, c, d - \text{const}. \quad (1.19)$$

Записав эти формулы, а также выражения производных $\dot{\varphi}(t + \tau)$, $\dot{\psi}(t + \tau)$ при $t = 0$, с учетом (1.17) находим

$$a = \varphi(\tau), \quad b = \dot{\varphi}(\tau), \quad c = \psi(\tau), \quad d = \dot{\psi}(\tau).$$

Возьмем решение

$$x = A\varphi(t) + B\psi(t) \quad (1.20)$$

и подберем постоянные A и B так, чтобы (1.18) было выполнено. Добавляя (1.20) в (1.18), имеем:

$$A\varphi(t + \tau) + B\psi(t + \tau) = s [A\varphi(t) + B\psi(t)]$$

или, с учетом (1.19),

$$[A(a - s) + Bc] \varphi(t) + [Ab + B(d - s)] \psi(t) = 0, \quad t \geq 0.$$

Условия равенства нулю коэффициентов при линейно независимых функциях φ , ψ дают линейную однородную алгебраическую систему для A и B :

$$A(a - s) + Bc = 0, \quad Ab + B(d - s) = 0.$$

Отсюда найдем нетривиальное решение в том и только в том случае, когда определитель этой системы равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a - s & c \\ b & d - s \end{vmatrix} = 0, \quad s^2 - ps + q = 0, \quad p = a + d, \quad q = ad - bc.$$

Пусть s_1 , s_2 – корни этого квадратного уравнения, тогда находим

$$\frac{A}{B} = \frac{(-c)}{(a - s_1)}, \quad \frac{A}{B} = \frac{(-c)}{(a - s_2)}.$$

Именно при таких значениях A/B решение (1.20) удовлетворяет условию (1.18). Если $s_1 \neq s_2$, то существуют два линейно независимых решения $x_1(t)$, $x_2(t)$, удовлетворяющих свойству (1.18):

$$x_1(t + \tau) = s_1 x_1(t), \quad x_2(t + \tau) = s_2 x_2(t).$$

Займемся теперь изучением структуры общего решения исходного уравнения (1.16). Вместо корней s_1 , s_2 (вообще говоря комплексных) введем характеристические показатели λ_1 , λ_2 :

$$s_1 = \exp(\lambda_1 \tau), \quad s_2 = \exp(\lambda_2 \tau).$$

Применяя форму записи

$$s = a_1 + ib_1, \quad \lambda = \alpha + i\beta, \quad x = \xi + i\eta$$

получаем

$$s = \exp(\alpha\tau) \cdot \exp(i\beta\tau), \quad x(t + \tau) = x(t) \exp(\alpha\tau) \cdot \exp(i\beta\tau).$$

Последняя формула означает, что в плоскости ξ , η вектор $x(t)$ за время τ поворачивается на угол $\beta\tau$, а длина его при $\alpha > 0$ увеличивается,

при $\alpha < 0$ – уменьшается; при $\alpha = 0$ вектор за время τ поворачивается, а длина его не изменяется. Замечая, что $\alpha = (\ln |s|)/\tau$, делаем вывод: при $\alpha > 0$ будет $|s| > 1$, имеем возрастающее со временем решение; при $\alpha < 0$ будет $|s| < 1$, т.е. решение с ростом t убывает; при $\alpha = 0$, $|s| = 1$, т.е. решение периодическое.

Итак, если $|s_1| < 1$, $|s_2| < 1$, то все решения уравнения (1.16) затухают к состоянию равновесия $x = 0$, $\dot{x} = 0$. Если же хоть один из модулей $|s_1|$ либо $|s_2|$ превосходит единицу, существует нарастающее решение, т.е. состояние равновесия неустойчивое.

Функция

$$\Phi(t) = x(t) \exp(-\lambda t)$$

является периодической с периодом τ , если выполнено условие (1.18):

$$x_1(t + \tau) = \exp(\lambda \tau)x(t).$$

Убедимся в этом непосредственными вычислениями:

$$\begin{aligned} \Phi(t + \tau) &= x(t + \tau) \exp(-\lambda(t + \tau)) = \\ &= x(t + \tau) \exp(-\lambda \tau) \exp(-\lambda t) = x(t) \exp(-\lambda t) = \Phi(t). \end{aligned}$$

Значит, фундаментальная система решений имеет вид

$$x_1(t) = \Phi_1(t) \exp(\lambda_1 t), \quad x_2(t) = \Phi_2(t) \exp(\lambda_2 t),$$

где $\Phi_1(t)$, $\Phi_2(t)$ – периодические функции с периодом τ .

Вывод: если $s_1 \neq s_2$, то общее решение уравнения (1.16) дается выражением

$$x(t) = C_1 \Phi_1(t) \exp(\lambda_1 t) + C_2 \Phi_2(t) \exp(\lambda_2 t). \quad (1.21)$$

Если $s_1 = s_2$, то общее решение такое:

$$x(t) = (C_1 + tC_2) \exp(\lambda t) \Phi(t).$$

Проанализируем решение (1.21). Имеем:

$$\lambda_1 = \alpha_1 + i\beta_1, \quad \lambda_2 = \alpha_2 + i\beta_2.$$

Таким образом, поведение решения (1.21) зависит от α_1 , α_2 . Если за начальные условия взято положение равновесия: $t = 0$, $x = 0$, $\dot{x} = 0$, то

$C_1 = 0, C_2 = 0$, и тогда $x(t) \equiv 0, t \geq 0$. Это значит, что параметры системы периодически меняются во времени, но система остается в положении равновесия. Допустим теперь, что система выведена из положения равновесия.

Если $\alpha_1 < 0, \alpha_2 < 0$, то функция $x(t)$ в (1.21) с ростом времени убывает за счет экспоненциальных множителей $\exp(\alpha_{1,2}t)$, положение равновесия – устойчивое. Если $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, то решение – периодическое. Если $\alpha_1 > 0, C_1 \neq 0$, то амплитуда решения (1.21) неограниченно возрастает, положение равновесия – неустойчивое; возникает **параметрический резонанс**. В этом случае, система, которую вывели из положения равновесия, автоматически себя раскачивает: колебания с каждым новым периодом увеличиваются. Отметим, что условие $\alpha = 0$ характеризует связь между некоторыми постоянными параметрами, характеризующими конкретную механическую систему, поэтому следует говорить о наличии областей параметрического резонанса, а не отдельных точках; ясно, что можно указать бесконечно много таких областей. Например, в уравнении (1.11) постоянными параметрами являются $\omega^2 = g/l, \varepsilon = -bp^2/l$, а также частота p вертикальных колебаний точки подвеса маятника. При фиксированном ω существует бесконечное (счетное) число областей параметрического резонанса в плоскости (ε, p) . Каждая точка такой области характеризует соотношение между ε, p, ω , при котором колебания происходят с неограниченно возрастающей амплитудой.

1.5 Условия ограниченности параметрических колебаний

При анализе решения уравнения (1.13), когда на маятник действует возвращающая сила, стремящаяся к нулю с ростом времени, было обнаружено неограниченное возрастание амплитуды. В только что рассмотренном примере с уравнением (1.11), когда возрастающая сила характеризуется функцией ограниченной и периодической, также имеются области, в которых колебания неустойчивы.

Рассмотрим достаточные условия устойчивости для некоторых типов параметрических колебаний [2]. Поясним сущность проблемы. Возьмем уравнение движения маятника

$$\ddot{x} + (1 + \varphi(t))x = 0. \quad (1.22)$$

Оказывается, что даже если функция $\varphi(t)$ удовлетворяет следующим весьма сильным требованиям:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d^k \varphi}{dt^k} = 0, \quad k \geq 1,$$

то и тогда решение уравнения (1.22) может сделаться неограниченным.

В самом деле, пусть

$$\varphi = 3g \sin t - \dot{g} \cos t - g^2 \cos^2 t,$$

функция $g(t)$ произвольна. Нетрудно проверить, что уравнению (1.22) удовлетворяет решение вида

$$x = A(t) \cos t; \quad A(t) = \exp \int_0^t g(z) \cos z dz.$$

Возьмем здесь $g(t) = t^{-1} \cos t$, и для амплитуды получим выражение

$$A(t) = \exp \int_0^t z^{-1} \cos^2 z dz,$$

которое дает неустойчивость: $A \rightarrow \infty$, $t \rightarrow \infty$.

Займемся теперь достаточными условиями ограниченности колебаний. Пусть движение маятника описывается уравнением (1.16):

$$\ddot{x} + g(t)\dot{x} + \omega^2(t)x = 0,$$

в котором функция $\omega(t) > 0$ монотонная. Перейдем от аргумента t к аргументу τ :

$$\frac{d\tau}{dt} = \omega(t), \quad \frac{d}{dt} = \omega(t) \frac{d}{d\tau}, \quad \frac{d^2}{dt^2} = \omega \frac{d}{d\tau} \left(\omega \frac{d}{d\tau} \right),$$

где $\tau = \tau(t)$ — монотонно возрастающая функция времени. Тогда (1.16) записывается в виде:

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + \left(\frac{d\omega}{d\tau} + g \right) \omega^{-1} \frac{dx}{d\tau} + x = 0. \quad (1.23)$$

Введем в рассмотрение функцию

$$E = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 + x^2 \right].$$

Если $E(\tau)$ является ограниченной, то и каждая из функций x и $dx/d\tau$ остается ограниченной при $t \rightarrow \infty$. Подсчитываем производную $dE/d\tau$, взяв выражение для $d^2x/d\tau^2$ из (1.23) :

$$\frac{dE}{d\tau} = \frac{dx}{d\tau} \cdot \frac{d^2x}{d\tau^2} + x \frac{dx}{d\tau} = - \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 \omega^{-1} \left(\frac{d\omega}{d\tau} + g \right),$$

$$\omega > 0, \quad \frac{d\omega}{d\tau} = \omega^{-1} \frac{d\omega}{dt} = \frac{d \ln \omega}{dt}.$$

Следовательно, получим не возрастающую функцию $E(\tau)$, т.е. $dE/d\tau \leq 0$, если $g + (d\omega/d\tau) \geq 0$.

Полученный результат означает: для ограниченности решений уравнения (1.16) достаточно, чтобы для любого момента времени коэффициенты этого уравнения удовлетворяли неравенству

$$\frac{1}{\omega} \frac{d\omega}{dt} + g \geq 0. \quad (1.24)$$

Например, в уравнении (1.15): $g = 1/t$, $\omega = 1/t$, т.е. $g + \omega^{-1}(d\omega/d\tau) = 0$, и условие (1.24) выполнено, рис. 1.18.

Теперь изучим класс движения, описываемый уравнением (1.22). Найдем условия для функции $\varphi(t)$, обеспечивающие ограниченность этих колебаний.

Лемма. Если $u(t)$, $v(t)$ – неотрицательные функции, и для произвольного $t \geq 0$ выполняется неравенство

$$u(t) \leq C + \int_0^t uv dt, \quad C \equiv \text{const}, \quad (1.25)$$

то верна оценка:

$$u(t) \leq C \exp V, \quad V = \int_0^t v(t) dt. \quad (1.26)$$

Доказательство. Умножим неравенство (1.25) на v и запишем его в виде

$$\frac{uv}{w} \leq v, \quad w = C + \int_0^t uv dt.$$

Для этого неравенства применим такую форму записи:

$$\frac{dw/dt}{w} \leq v.$$

Отсюда, после интегрирования, имеем:

$$\int_0^t \frac{dw/dt}{w} dt \leq V(t), [\ln w - \ln w(0)] \leq V(t), \quad C = w(0).$$

Потенцирование дает: $w \leq C \exp V$, тогда с учетом (1.25) получаем

$$u \leq C + \int_0^t uv dt \leq C \exp V,$$

т.е. (1.26) – верно. Лемма доказана.

Теорема. Для ограниченности решения уравнения (1.22) достаточно, чтобы интеграл

$$\int_0^t |\dot{\varphi}| dt$$

сходился.

Доказательство. Пусть $|\dot{\varphi}(t)| < 1$. Умножим уравнение (1.22) на \dot{x} , проинтегрируем его

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{x}^2 + x^2}{2} \right) &= -\varphi x \dot{x}, \\ \left(\frac{\dot{x}^2 + x^2}{2} \right)_0^t &= - \frac{\varphi x^2}{2} \Big|_0^t + \frac{1}{2} \int_0^t \dot{\varphi} x^2 dt \end{aligned}$$

и найдем первый интеграл:

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{x^2}{2}(1 + \varphi) = C + \frac{1}{2} \int_0^t \dot{\varphi} x^2 dt, \quad C = \left[\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{x^2}{2}(1 + \varphi) \right]_{t=0} > 0.$$

Отсюда видно, что

$$\frac{x^2}{2}(1 + \varphi) \leq C + \frac{1}{2} \int_0^t |\dot{\varphi}| x^2 dt.$$

Пусть $\varphi(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Ясно, что для достаточно больших t будет выполнено неравенство $(1 + \varphi) \geq \frac{1}{2}$. Тогда последнее неравенство трансформируется в такое:

$$\frac{x^2}{4} \leq C + \frac{4}{2} \int_0^t |\dot{\varphi}| \frac{x^2}{4} dt. \quad (1.27)$$

Обозначим здесь $u = x^2/4$, $v = 2|\dot{\varphi}|$. Следовательно, неравенство (1.27) соответствует исходному неравенству (1.25) только что доказанной леммы. Теперь остается записать итоговую оценку (1.26) в принятых обозначениях:

$$\frac{x^2}{4} \leq C \cdot \exp \int_0^t 2|\dot{\varphi}| dt.$$

Теорема доказана.

Пример. Пусть колебательное движение материальной точки описывается дифференциальным уравнением (1.16), в котором

$$g = g_0 \exp(-\alpha t), \quad \omega = \omega_0 \exp(-\alpha t/2), \quad \alpha > 0, \quad g_0 > 0.$$

В этом случае левая часть неравенства (1.24) имеет вид:

$$\hat{g} \equiv g + \frac{1}{\omega} \frac{d\omega}{dt} = g_0 e^{-\alpha t} - \frac{\alpha}{2}.$$

Очевидно, что при

$$t_* = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{2g_0}{\alpha} > 0$$

будет $\hat{g}(t_*) = 0$, а при $t > t_* > 0$ получаем $\hat{g}(t) < 0$, т.е. достаточное условие устойчивости (1.24) оказывается невыполненным.

2 НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

В этой главе рассматриваются динамические системы, описываемые нелинейными обыкновенными дифференциальными уравнениями. Даются исходные понятия теории бифуркации решений. Излагаются элементы теории уравнений с малым параметром при старшей производной.

2.1 Система первого порядка

Будем изучать динамическую модель (система с половинной степенью свободы) [9], движение которой описывается одним дифференциальным уравнением первого порядка

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad (2.1)$$

где $x = x(t)$ характеризует состояние системы, а $f = f(x)$ является аналитической, т.е. в окрестности каждой точки x ее можно разложить в степенной ряд с ненулевым радиусом сходимости.

Следует заметить, что к уравнению вида (2.1) мы приходим, в частности, рассматривая уравнения Лагранжа 2-го рода для автономной системы с одной степенью свободы

$$\ddot{q} = F(q, \dot{q}),$$

где $q = q(t)$ – обобщенная координата. Если $\partial F/\partial q = 0$, то легко понизить порядок этого уравнения, взяв $\dot{q}(t) = x(t)$, после чего получаем (2.1). В случае, когда уравнение Лагранжа имеет первый интеграл

$$\frac{d}{dt}\Phi(q, \dot{q}) = 0, \quad \Phi(q, \dot{q}) = C \equiv \text{const},$$

также имеем дифференциальное уравнение первого порядка вида (2.1), содержащее произвольную постоянную C .

Фазовое пространство (2.1) одномерно, и движение можно интерпретировать движением изображающей точки на фазовой прямой. Если значения x и $x + 2\pi$ соответствует одному и тому же состоянию систем, то функция $f(x)$ – тоже периодическая с периодом 2π . Для такой системы фазовым пространством будет отрезок прямой длиной 2π с отождествленными концами. Соединив эти концы, получаем окружность единичного радиуса.

В общем случае будем рассматривать фазовое пространство в виде бесконечной прямой – оси ОХ. Основными элементами, которые полностью определяют разбиение фазовой прямой на траектории, являются состояния равновесия системы (см. п. I.I). Равновесные значения $x = x_k$, для которых $f(x_k) = 0$, представляет собой самостоятельные фазовые траектории. Остальные траектории состоят из отрезков оси ОХ, заключенных между корнями уравнения $f(x) = 0$, или из полупрямых вида $[x_i, \infty)$. Направление движения изображающей точки по этим траекториям определяет знак $f(x)$: при $f(x) > 0$ изображающая точка движется вправо ($dt > 0, dx > 0$), при $f(x) < 0$ влево ($dx < 0$). Располагая зависимостью $y = f(x)$, легко установить разбиение фазовой прямой на траектории. На рис.2.1 дан пример такого разбиения, стрелками показано направление движения изображающей точки. Эта иллюстрация говорит о том, что состояние равновесия системы в точках $x = x_1, x = x_4$ является устойчивым, а в точках $x = x_2, x = x_3, x = x_5$ – неустойчивыми. Из рис. 2.1 ясно, что в устойчивых состояниях равновесия $f'(x_k) < 0$, а в неустойчивых состояниях $f'(x_k) > 0$. Значение $f'(x_k) = 0$ (например, $x = x_2, x = x_4$) может быть как в точках устойчивого, так и неустойчивого состояния равновесия.

Естественно, что в конкретном физическом процессе правая часть уравнения (2.1) зависит от некоторого параметра λ . Уравнение $f(x, \lambda) = 0$ характеризует поведение точек покоя в зависимости от λ , рис. 2.2. А именно: точки пересечения прямой $\lambda = \lambda_0 = \text{const}$ и линии $f(x, \lambda) = 0$ определяют значения $x = x_k$ в состояниях равновесия, число которых определяет качественную картину разбиения фазовой прямой на траектории. В примере, показанном на рис. 2.2 при значениях λ_0 из интервала (λ_1, λ_2) система обладает тремя состояниями равновесия, а при $\lambda_0 < \lambda_1$ либо $\lambda_0 > \lambda_2$ она имеет одно состояние равновесия.

Определение. Значение параметра λ , при переходе через которое происходит качественное изменение фазового портрета системы, называется **бифуркационным**.

На рис. 2.2 бифуркационными являются значения λ_1 и λ_2 . Равновесие при $x = x_k$ устойчиво, если $f'_x(x_k, \lambda_0) < 0$ и неустойчиво, если $f'_x(x_k, \lambda_0) > 0$. Для наглядности можно определять устойчивость состояний равновесия по бифуркационной диаграмме, рис.2.3. Учтем, что линия $f(x, \lambda) = 0$ делит плоскость (λ, x) на две области: $f(x, \lambda) > 0$ и $f(x, \lambda) < 0$.

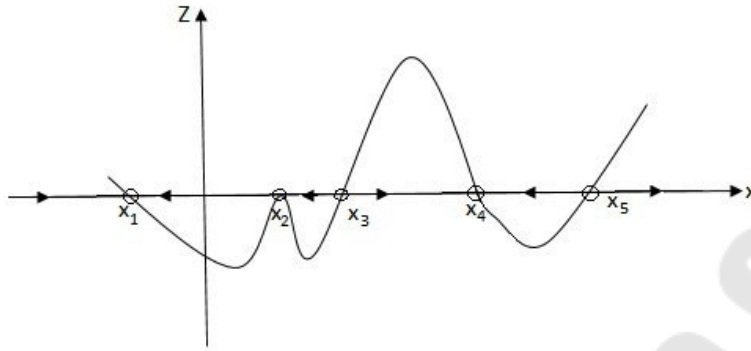


Рис. 2.1. Положения устойчивого и неустойчивого равновесия

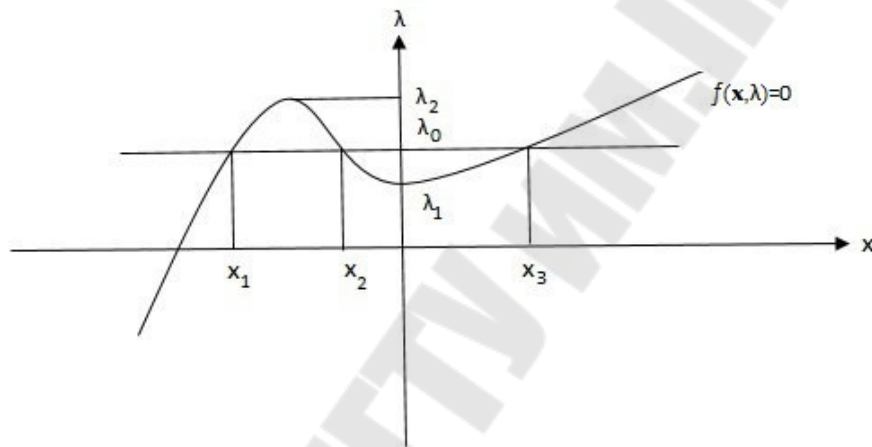


Рис. 2.2. Изображение бифуркационных значений

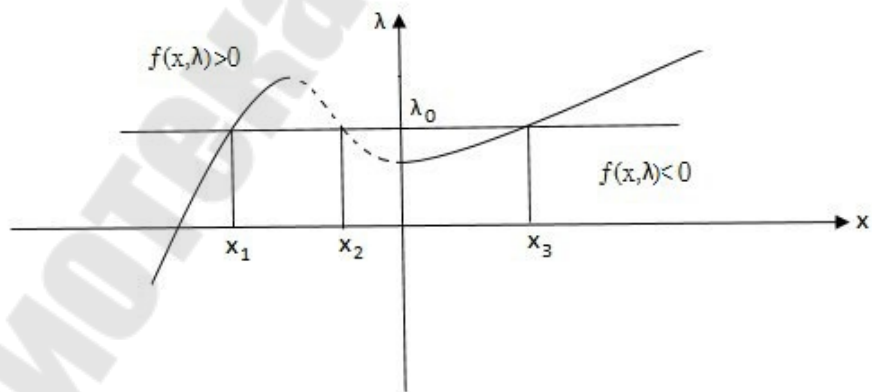


Рис. 2.3. Бифуркационная диаграмма

Для производной $f'_x(x, \lambda)$ в состоянии равновесия $x = x_k$ имеем:

$$f'_x(x_k, \lambda) \cong \frac{f(x_k + \Delta x, \lambda) - f(x_k, \lambda)}{\Delta x}, \quad \Delta x > 0.$$

Отсюда следует, что если точка (x_k, λ) расположена справа от области $f > 0$, то $f'_x(x_k, \lambda) < 0$ (устойчивое равновесие); если точка (x_k, λ) находится слева от области $f > 0$, то $f'_x(x_k, \lambda) > 0$ (неустойчивое равновесие). На бифуркационной диаграмме, рис. 2.3, толстой линией отмечены участки кривой $f(x, \lambda) = 0$, соответствующие устойчивым состояниям равновесия, пунктирной линией – неустойчивым состояниям равновесия.

Отметим еще, что если $f = f(x)$ – неоднозначная функция, то могут возникать условия, при которых (2.1) описывает периодические движения. Если же $f = f(x)$ – аналитическая функция на всей фазовой прямой, то, как и следует из проведенного анализа, периодические движения в системе (2.1) невозможны.

Пример 1. Однофазный асинхронный двигатель. Рассмотрим, следуя А.А. Андронову и А.Г. Майеру, движение роста асинхронного двигателя, статор которого питается однофазным переменным током:

$$J \frac{d\omega}{dt} = M(\omega) - N(\omega),$$

где ω – угловая скорость вращения ротора, J – момент инерции ротора, $M(\omega)$ – электромеханический вращающий момент, $N(\omega)$ – момент сил трения на валу ротора. Зависимость вращающего момента $z = M(\omega)$ от числа оборотов ротора однофазного двигателя имеет вид, показанный на рис.2.4. Здесь же дан график зависимости $z = N(\omega)$, который получается при учете сил сухого и вязкого трения. Состояния равновесия для уравнения движения ротора, соответствующие режимам равномерного вращения ротора (или его состоянию покоя при $\omega = 0$), определяются корнями уравнения

$$M(\omega) - N(\omega) = 0$$

или, другими словами, абсциссами точек пересечения графиков функции $z = M(\omega)$ и $z = N(\omega)$ на рис. 2.4.

График функции

$$f(\omega) = \frac{1}{J} [M(\omega) - N(\omega)]$$

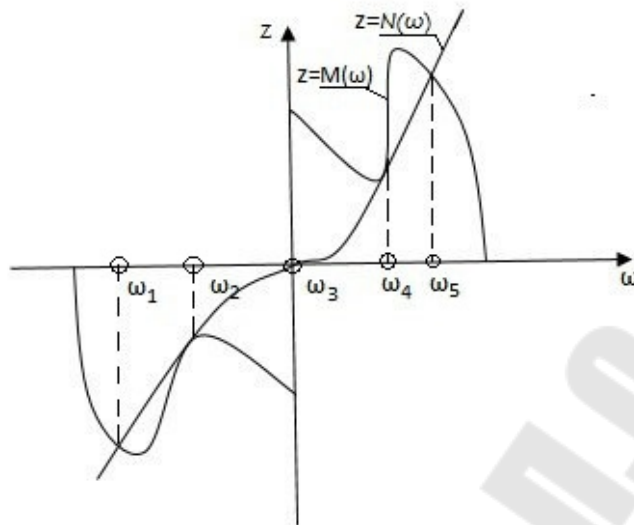


Рис. 2.4. Графическое изображение корней уравнения

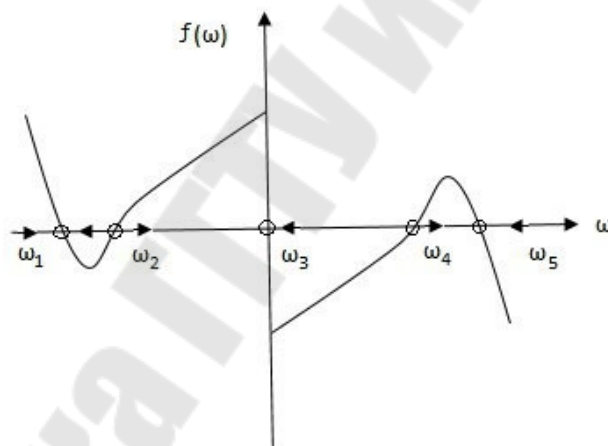


Рис. 2.5. Разбиение фазовой прямой

на рис. 2.5 позволяет найти разбиение фазовой прямой ω на траектории и определить на ней устойчивость равновесия. Корни $\omega = \omega_k$ расположены симметрично относительно начала координат, поэтому динамика изучаемой системы не зависит от направления вращения ротора. Из рис. 2.5 видно, что состояние покоя ротора $\omega = 0$ и его вращения с угловыми скоростями ω_1 и ω_5 устойчивы, а вращения с угловыми скоростями ω_2 и ω_4 неустойчивы. Это означает, что ротор такого двигателя, находясь в покое, не может начать вращение "без посторонней помощи". Если нужно, чтобы ротор вращал-

ся с угловой скоростью ω_5 , ему надо придать первоначальную скорость, превышающую ω_4 .

Пример 2. Движение судна на подводных крыльях, [9]. Уравнение прямолинейного движения судна на подводных крыльях без учета килевой и бортовой качки может быть записано в виде

$$\frac{dv}{dt} = T(v) - S(v),$$

где v – скорость судна, $T(v)$ – сила тяги винта, $S(v)$ – результирующая сила сопротивления движению, отнесенная к единице массы судна. При заданном режиме работы двигателя сила тяги $T(v)$ обычно монотонно убывает с ростом скорости, а график $S(v)$ представляет собой возрастающую кривую, которая имеет на некотором интервале скоростей падающий участок, рис. 2.6. Наличие участка убывания на кривой $S = S(v)$ связано с изменением условий движения судна при выходе его корпуса из воды. При малых скоростях движения судно на подводных крыльях ведет себя как судно с обычным корпусом: с увеличением скорости сопротивление движению возрастает. Однако по мере увеличения скорости возникает гидродинамическая подъемная сила, в результате чего корпус судна постепенно выходит из воды, и на интервале скоростей, при которых судно полностью выходит из воды, сила сопротивления движению уменьшается при увеличении скорости. После этого судно переходит в режим движения на подводных крыльях. При дальнейшем повышении скорости движения поверхность погруженных в воду стоек с подводными крыльями почти не уменьшается, и сопротивление движению снова возрастает с увеличением скорости.

Состояния равновесия, которые соответствуют режимам равномерного движения судна, определяются уравнением $T(v) = S(v)$. Возможны случаи, когда имеется либо один (рис. 2.6 а), либо три (рис. 2.6 б) режима равномерного движения судна на подводных крыльях. Один режим $v = v_1$ на рис. 2.6 а является всегда устойчивым. При наличии трех режимов, движение со скоростями $v = v_1$, $v = v_3$ устойчиво, а со скоростью $v = v_2$ – неустойчиво.

2.2 Бифуркации динамических систем второго порядка

Вернемся к динамической системе (1.1), полагая что правые части $P(x, y, \lambda)$, $Q(x, y, \lambda)$ зависят от параметра λ и являются аналитическими



Рис. 2.6. Режимы движения судна

функциями своих аргументов:

$$\dot{x} = P(x, y, \lambda), \quad \dot{y} = Q(x, y, \lambda). \quad (2.2)$$

Определение. Динамическая система (1.1) называется **грубой**, если существует такое малое число $\delta > 0$, что все динамические системы вида

$$\dot{x} = P(x, y) + p(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y) + q(x, y),$$

в которых аналитические функции $p(x, y)$, $q(x, y)$ удовлетворяют условию

$$|p(x, y)| + |q(x, y)| + \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial p}{\partial y} \right| + \left| \frac{\partial q}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial q}{\partial y} \right| < \delta$$

и имеют одинаковую структуру разбиения фазовой плоскости на траектории.

Это определение означает, что грубость динамической системы можно истолковать как устойчивость структуры разбиения ее фазового пространства на траектории по отношению к малым изменениям дифференциальных уравнений (1.1). Требования грубости для автономных систем второго порядка вполне естественно с точки зрения приложений и упрощает возможные структуры фазовой плоскости. Каждая из этих структур определяется конечным числом особых фазовых траекторий: состояний равновесия, сепаратрисных кривых, седловых состояний равновесия и замкнутых фазовых траекторий (предельных циклов). При этом состояния равновесия и периодические движения не имеют нулевых характеристических показателей и нет сепаратрисных кривых, идущих из седла в седло. Это означает, что точки пересечения кривых

$$P(x, y) = 0, Q(x, y) = 0,$$

определяющих координаты состояний равновесия грубой системы, являются простыми, т.е. коэффициент Δ в характеристическом уравнении (1.3) не должен обращаться в нуль. Кроме того, должно быть $\sigma \neq 0$, т.е. состояние равновесия грубой системы не может представляться особой точкой типа центр. Обозначим

$$h = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \left[\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right]_{\substack{x = \varphi \\ y = \psi}} dt, \quad (*)$$

где $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ – уравнения периодического движения с периодом τ вдоль замкнутой фазовой траектории. Тогда $h \neq 0$ выражает аналитическое условие, которому должна удовлетворять фазовая траектория в грубой системе.

Вывод: в грубой системе существуют лишь такие состояния равновесия, для которых $\Delta \neq 0$ и $\sigma \neq 0$, если $\Delta > 0$; лишь такие предельные циклы, для которых $h \neq 0$; лишь такие сепаратрисы, которые не идут из седла в седло.

Если при некотором λ система (2.2) является грубой, то при небольшом изменении λ качественная картина на фазовой плоскости не изменяется. Суть дела в том, что не для всех значений λ это условие может быть выполнено.

Определение. Значение параметра $\lambda = \lambda_0$ называется **бифуркационным**, если при сколь угодно близких к λ_0 значениях $\lambda < \lambda_0$ и $\lambda > \lambda_0$ топологическая структура фазовой плоскости различна.

Очевидно, что при $\lambda = \lambda_0$ система является негрубой. Итак, только те значения параметра λ оказываются бифуркационными, при которых появляются особые элементы (особые траектории), имеющие негрубую природу.

Определение. Говорят, что автономная система (2.2) имеет первую степень негрубости, если при бифуркационном значении $\lambda = \lambda_0$ на фазовой плоскости появляется только один особый элемент.

Для системы I-ой степени негрубости возможны следующие типы особых элементов:

1. сложное состояние равновесия, получающееся при слиянии двух простых особых точек (например, узел или седло); на рис. 2.7 показаны

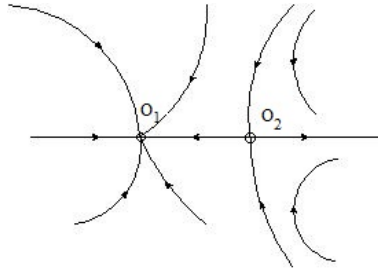


Рис. 2.7. Фазовая траектория в окрестности двух простых особых точек

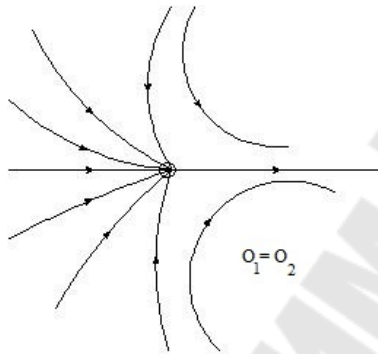


Рис. 2.8. Седло-узел

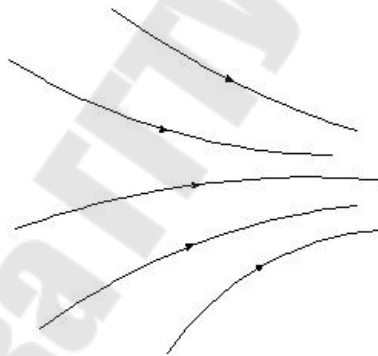


Рис. 2.9. Фазовая траектория без особых точек

три последовательные фазы изменения поведения фазовых траекторий в окрестности двух простых особых точек: узла O_1 и седла O_2 ; когда параметр λ достигает бифуркационного значения, точки O_1 , O_2 сливаются, образуя сложную особую точку "седло-узел", рис. 2.8, а затем исчезают, рис. 2.9;

2. вырожденный фокус или центр; этому варианту, рис. 2.10, 2.11, соответствует бифуркация второго типа, когда простой фокус превращается в сложный фокус (момент бифуркации, соответствующий вы-

рождению фокуса), из которого затем рождается **предельный цикл** (изолированная замкнутая траектория, которая соответствует периодическому движению);

3. двойной предельный цикл, который может, в частности, получиться при слиянии устойчивого и неустойчивого предельных циклов; на рис. 2.12, 2.13, 2.14, показаны три последовательных фазовых портрета для случая, когда два предельных цикла (устойчивый и неустойчивый), рис. 2.12, в момент бифуркации сливаются, образуя полуустойчивый предельный цикл, рис. 2.13, и потом исчезают, 2.14; если рассмотреть эти схемы в обратной последовательности, то получим случай рождения двух предельных циклов из так называемого уплотнения фазовых траекторий;
4. сепаратриса (см. п. I.I), идущая из одного седла в другое или в него же; на рис. 2.15, 2.16, 2.17 показан случай рождения устойчивого предельного цикла из петли сепаратрисы седла. Пусть сепаратрисы седла при некотором значении λ имеют расположение, показанное на рис. 2.15. Допустим, что при увеличении λ ветви сепаратрисы сближаются и при $\lambda = \lambda_0$ сливаются, образуя петлю, рис. 2.16. Если при дальнейшем увеличении λ сепаратрисы седла вновь разделяются так, как показано на рис. 2.17, то из петли рождается предельный цикл. Значение $\lambda = \lambda_0$ в этом случае является бифуркационным.

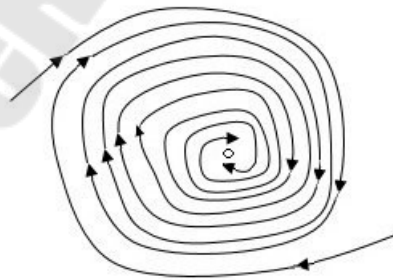


Рис. 2.10. Простой фокус

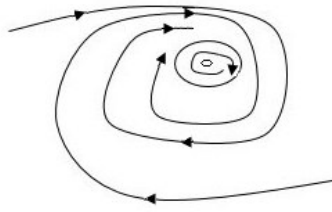


Рис. 2.11. Предельный цикл

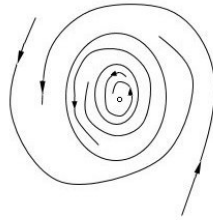


Рис. 2.12. Устойчивый цикл

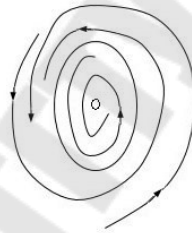


Рис. 2.13. Отсутствие цикла

Пример. Гидродинамическая задача о плоском течении вязкой несжимаемой жидкости при определенных допущениях сводится [10] к уравнению

$$\frac{d^2U}{d\varphi^2} = C - 4U - U^2, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad C = \text{const}, \quad (2.3)$$

где функция $U = U(\varphi)$ характеризует радиальную скорость течения. Уравнение (2.3) имеет классическое решение

$$U = U_0 = \text{const}, \quad C = C_0 = 4U_0 + U_0^2,$$

соответствующее осесимметричному течению, вызванному точечным источником с расходом Q . Если ввести число Рейнольдса $Re = Q/\nu$, то $U_0 =$

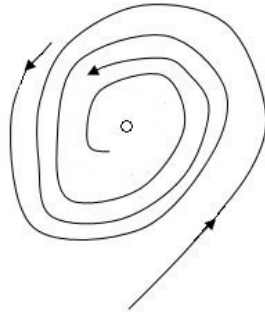


Рис. 2.14. Отсутствие цикла

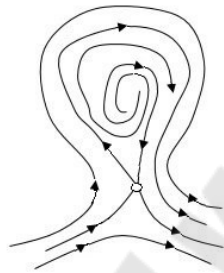


Рис. 2.15. Расположение сепаратрис

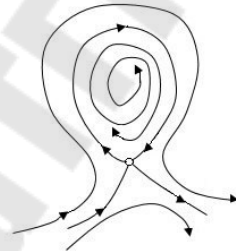


Рис. 2.16. Образование петли сепаратрисы

$Re/(2\pi)$.

Линеаризуем уравнение (2.3) вблизи фиксированного значения $U = U_0$: $U = U_0 + u, u \ll 1$. Линеаризованное уравнение имеет вид

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + (4 + 2U_0)u = 0.$$

Оно имеет нетривиальные, периодические по φ решения, если $4 + 2U_0 = m^2$, $m = 1, 2, \dots$. С учетом произвола выбора начала координат по углу φ собственная функция имеет вид $u = A \sin m\varphi$. Бифуркационные значения

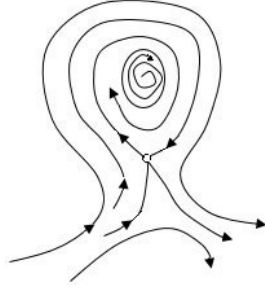


Рис. 2.17. Рождение предельного цикла

величины U_0 (т.е. числа Рейнольдса) определяются формулами

$$(U_0)_{*,m} = \frac{m^2 - 4}{2}, \quad m = 1, 2, \dots; \quad Re_{*,m} = \pi(m^2 - 4).$$

Таким образом, первая бифуркация происходит при $(U_0)_{*,1} = -3/2$. Нулевое значение $U_0 = 0$ также является бифуркационным. Отрицательные числа Рейнольдса отвечают стоку жидкости, а положительные – источнику. Если амплитуды A не малые, то колебания по φ становятся ангармоническими, и решение (2.3) выражается через эллиптические функции.

Продемонстрируем основные свойства решений, воспользовавшись методом фазовой плоскости. Подстановками

$$U = \sqrt{C + 4}(y - 1) - 2, \quad \theta = \sqrt{2}(C + 4)^{\frac{1}{4}}\varphi$$

уравнение (2.3) приводится к виду

$$2\frac{d^2y}{d\theta^2} = 2y - y^2.$$

Умножив его на dy/dQ и проинтегрировав, находим первый интеграл

$$\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = y^2 - \frac{y^3}{3} + B; \quad y' = \frac{dy}{d\theta}.$$

Типичные интегральные кривые на фазовой плоскости (y, y') изображены на рис. 2.18. Периодическим решениям отвечают замкнутые линии. Величина B меняется от $-4/3$ для бесконечно малых колебаний вблизи $y = 2$ до нуля сепаратрисы $y_c = 3 \cosh^{-2}(\theta/2)$. Для колебаний конечной амплитуды величину A удобно определить как $(U_{\max} - U_{\min})/2$. В момент бифуркации

из точки $y = 2$ рождается цикл, с увеличением A его размер возрастает и при $A \rightarrow \infty$ цикл ”влипает” в петлю сепаратрисы.

Таким образом, анализ достаточно простой задачи об источнике обнаруживает удивительный факт – существование счетного числа стационарных решений при всех числах Рейнольдса.

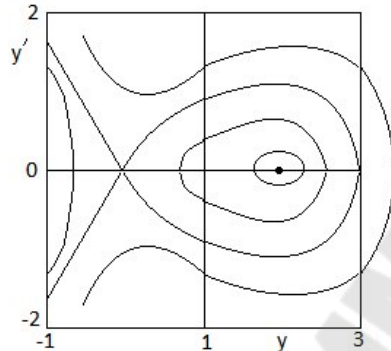


Рис. 2.18. Интегральные кривые гидродинамической задачи

2.3 Малый параметр при старшей производной

Многие задачи физики и механики не поддаются точному решению. Причиной тому служат нелинейные уравнения движения, переменные коэффициенты, нелинейные граничные условия на известных и неизвестных границах сложной формы. При решении таких задач применяются различного рода приближения либо численные методы или комбинации тех и других. Среди приближенных методов основными являются методы возмущений (асимптотических разложений) по большим или малым значениям параметра или координаты. Приступим к описанию основ методов возмущений.

Начнем изложение с уравнения движения

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = f(t, x), x = x(t), \quad (2.4)$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр. Начальные условия: $t = t_0$, $x = x_0$. Цель исследования: выяснить, можно ли при малых значениях ε пренебречь членом $\varepsilon \dot{x}$, т.е. приближенно заменить решение уравнения (2.4) решением так

называемого вырожденного уравнения

$$f(t, x) = 0. \quad (2.5)$$

Известная теорема о непрерывной зависимости решения от параметра говорит о том, что решение дифференциального уравнения $\dot{x} = f(t, x, \varepsilon)$ непрерывно зависит от ε , если в замкнутой области изменения (t, x, ε) функция f непрерывна по совокупности аргументов и удовлетворяет условию Липшица по x . В данном случае эта теорема не применима, т.к. правая часть уравнения

$$\dot{x} = \frac{1}{\varepsilon} f(t, x) \quad (2.6)$$

разрывна при $\varepsilon = 0$.

Допустим, что вырожденное уравнение (2.5) имеет одно решение $x = \varphi(t)$. Знак производной $\dot{x}(t)$ совпадает со знаком функции $f(t, x)$. Значит, касательные к интегральным кривым во всех точках, где $f(t, x) \neq 0$, стремятся при $\varepsilon \rightarrow 0$ к направлению, параллельному оси OX ($dx/dt \rightarrow \infty$). Если $f(t, x) > 0$, то $(dx/dt) > 0$, и решение $x = x(t, \varepsilon)$ уравнения (2.6) растет с увеличением t . Если $f(t, x) < 0$, то $(dx/dt) < 0$, и решение $x = x(t, \varepsilon)$ – убывающая функция времени.

- Вариант 1, рис. 2.19: при фиксированном t с ростом x знак $f(t, x)$ меняется при переходе через линию $x = \varphi(t)$ с "+" на "-". Поле направлений касательных к интегральным кривым при достаточно малом $\varepsilon > 0$ показано стрелками. Это поле устремлено к графику решения вырожденного уравнения. Значит, для любых начальных значений (x_0, t_0) соответствующая интегральная кривая, будучи почти параллельной OX , устремится к графику $x = \varphi(t)$ и с ростом t находится в окрестности этого графика.

Вывод: в этом варианте, рис. 2.19, при $t \geq t_1 > t_0$ при достаточно малом ε можно приближенно заменять решения уравнения (2.4) решением уравнения (2.5). В данном случае решение $x = \varphi(t)$ называется устойчивым.

- Вариант 2, рис. 2.20: при фиксированном t с ростом x знак $f(t, x)$ меняется при переходе через линию $x = \varphi(t)$ с "-" на "+". Для любых начальных значений (x_0, t_0) при $f(t_0, x_0) \neq 0$ соответствующая интегральная кривая уравнения (2.6) при достаточно малом ε удаляется

от решения $x = \varphi(t)$, имея почти параллельную оси OX касательную. В этом случае решение $x = \varphi(t)$ называется неустойчивым: решение исходного уравнения (2.4) нельзя заменять решением вырожденного уравнения (2.5). Это означает, что членом $\varepsilon \dot{x}$ в уравнении (2.4) нельзя пренебречь, как бы мало ε ни было.

- Вариант 3, рис. 2.21: знак функции $f(t, x)$ не изменяется при переходе через график решения $x = \varphi(t)$ (полуустойчивый случай). Здесь тоже нельзя пренебрегать членом $\varepsilon \dot{x}$. Дело в том, что: 1) интегральные кривые, соответствующие начальной точке (x_0, t_0) удаляются от линии $x = \varphi(t)$; 2) те интегральные кривые, что приближаются к линии $x = \varphi(t)$, могут пересечь ее, уйти на неустойчивую сторону и удалиться от решения вырожденного уравнения; 3) даже в благоприятной ситуации, когда линии $x = x(t, \varepsilon)$ находится в окрестности решения $x = \varphi(t)$ с его устойчивой стороны, из-за неизбежных в практических задачах возмущениях решение $x = x(t, \varepsilon)$ может перейти на неустойчивую сторону линии $x = \varphi(t)$, после чего интегральная кривая $x = x(t, \varepsilon)$ удалится от решения $x = \varphi(t)$.

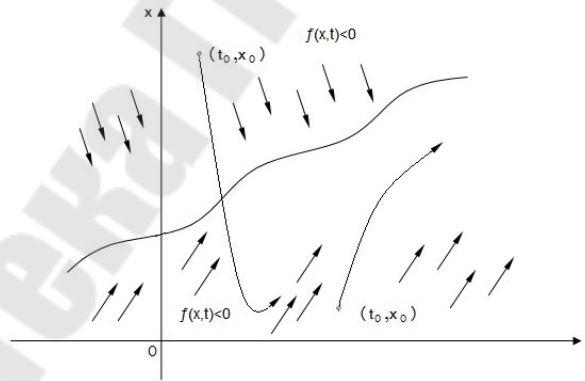


Рис. 2.19. Графическое изображение устойчивого решения

Для устойчивого варианта 1 в окрестности линии $x = \varphi(t)$, очевидно, имеем $\partial f / \partial x < 0$; для неустойчивого варианта 2: $\partial f / \partial x > 0$. Отметим еще, что если вырожденное уравнение (2.5) имеет несколько решений, то каждое из них надо исследовать на устойчивость.

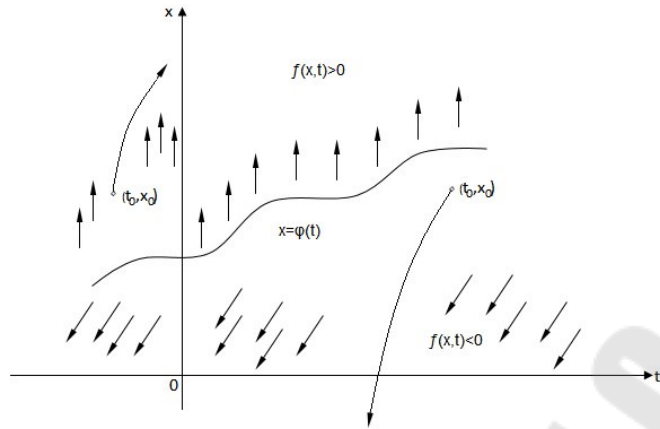


Рис. 2.20. Графическое изображение неустойчивого решения

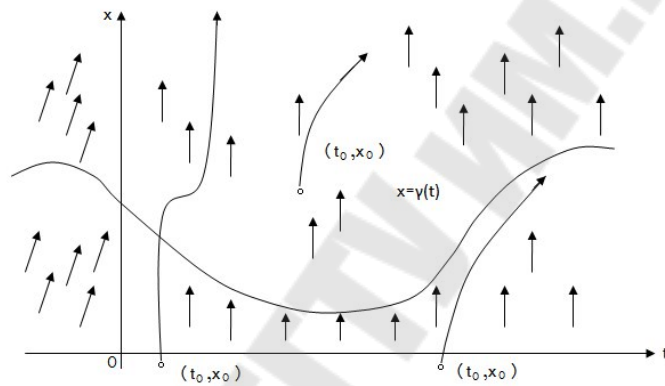


Рис. 2.21. Полуустойчивый случай

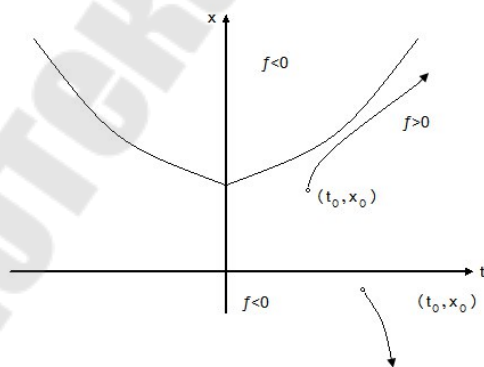


Рис. 2.22. Различные варианты положения точки (t_0, x_0)

Пример. Рассмотрим уравнение

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = x(t^2 - x + 1), \quad \varepsilon > 0, \quad x(t_0) = x_0.$$

Имеем здесь два решения вырожденного уравнения: $x^{(1)} = 0$, $x^2 = t^{(2)} + 1$.
Решение $x = x^{(1)}$ неустойчивое, потому что

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0} \equiv \left. \frac{\partial}{\partial x} [x(t^2 - x + 1)] \right|_{x=0} = (t^2 + 1) > 0.$$

Решение $x = x^{(2)}$ устойчивое, потому что

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} [x(t^2 - x + 1)] \right|_{x=t^2+1} = -(t^2 + 1) < 0.$$

В зависимости от выбора начальных условий (x_0, t_0) интегральные кривые ведут себя при $\varepsilon \rightarrow 0$ различно. Если (x_0, t_0) лежит в верхней полуплоскости $x > 0$, то интегральная кривая изучаемого уравнения при $\varepsilon \rightarrow 0$ приближается к линии $x = x^{(2)}(t)$ и остается в ее окрестности, рис. 2.22. Если (x_0, t_0) лежит в области $x < 0$, то при $t > t_0$, $\varepsilon \rightarrow 0$ решение $x(t, \varepsilon)$ устремляется к $(-\infty)$.

3 АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

Эта глава содержит введение в теорию автоколебаний механических систем. Представлены элементарные примеры, иллюстрирующие природу автоколебаний.

3.1 Сущность автоколебаний и формулировка задачи

Рассмотрим уравнение движения консервативной системы с одной степенью свободы

$$\ddot{x} + f(x) = 0 \quad (3.1)$$

полагая выполненными условия при $x = 0$:

$$f(0) = 0, (df/dx)_{x=0} > 0.$$

В малой окрестности точки покоя $x = 0$, $\dot{x} = 0$ уравнение (3.1), как мы убедились ранее, определяет колебательные движения с постоянной амплитудой. Фазовые траектории – замкнутые кривые – целиком заполняют окрестность этого положения равновесия (см., например, рис. 1.6). Сила $\varphi = \varphi(\dot{x})$, зависящая только от скорости, называется **диссипативной**, если для любого значения $\dot{x}(t) \neq 0$ она удовлетворяет условию

$$\dot{x}\varphi(\dot{x}) < 0. \quad (3.2)$$

Пусть $\varepsilon > 0$ – малый параметр, и колебания происходят под действием двух сил: консервативной силы $-f(x)$ и диссипативной силы $\varepsilon\varphi(\dot{x})$, т.е. вместо (3.1) рассматриваем уравнение вида

$$\ddot{x} + f(x) = \varepsilon\varphi(\dot{x}). \quad (3.3)$$

В этом случае полная механическая энергия маятника равна

$$E = \frac{\dot{x}^2}{2} + \int_{x_0}^x f(x)dx.$$

Имея ввиду это выражение, умножим обе части (3.3) на \dot{x} и запишем следующим образом

$$\frac{dE}{dt} = \varepsilon\dot{x}\varphi(\dot{x}) \leq 0.$$

Знак неравенства здесь следует из (3.2), а $dE/dt = 0$ будет выполнено только в те моменты времени, когда скорость движения нулевая, $\dot{x} = 0$. Это значит, что колебательное движение, происходящее под действием консервативной и диссипативной сил затухает с течением времени: $E = E(t)$ – невозрастающая функция времени.

Рассмотрим для уравнения (3.3) фазовую плоскость (x, \dot{x}) . Допустим, при $t = t_0$ система находится в состоянии $x = 0$, $\dot{x} = \dot{x}_0 > 0$, $E = \dot{x}_0^2/2$, рис.3.1. Спустя конечное время после начала движения вдоль фазовой траектории, изображающая точка совершает полный оборот вокруг начала координат (положение равновесия) и снова пересекает ось ординат, но при этом имеет скорость \dot{x}_1 , такую, что $E_1 < E_0$, т.е. $\dot{x}_1 < \dot{x}_0$. Изучаемая система (3.3) имеет только одну особую точку – начало координат, поэтому две ее фазовые траектории не могут пересекаться: через каждую точку фазовой плоскости, которая не является особой, проходит только одна фазовая траектория. Отсюда вывод: фазовый портрет колебательной системы (3.3) имеет вид, изображенный на рис. 3.1. Точка $x = 0$, $\dot{x} = 0$ является устойчивым фокусом, на который наматываются фазовые траектории.

Усложним теперь разобранный пример, [2]. К уже имеющимся предположениям добавим условие, что $|\varphi(\dot{x})|$ – монотонно возрастающая функция своего аргумента, рис. 3.2, а также примем, что на точку действует некоторая активная сила $\psi = \psi(x, \dot{x})$, которая равна нулю в начале координат: $\psi(0, 0) = 0$. Характерное свойство этой силы таково: за каждый период колебаний она вносит в систему некоторую порцию энергии. Это означает, что при отсутствии диссипативной силы энергии системы возрастала бы все время. Другими словами, эта механическая система не имела бы никаких стационарных режимов, кроме состояния покоя. Проанализируем характер колебаний в системе, которая определяется уравнением

$$\ddot{x} + f(x) = \varepsilon [\varphi(\dot{x}) + \psi(x, \dot{x})], \quad (3.4)$$

для которого предполагается, что активная сила ψ тем сильнее раскачивает маятник, чем ближе его состояние к положению равновесия, т.е., чем меньше его амплитуда x . На рис. 3.3 показана зависимость приращения энергии ΔE , поступающей в систему за один период колебаний, от амплитуды.

Итак, в обсуждаемом примере (3.4) колебательный процесс происходит под действием трех сил: 1) консервативная сила ; 2) диссипативная

сила; 3) активная сила, которая вносит в систему тем больше энергии, чем меньше амплитуда.

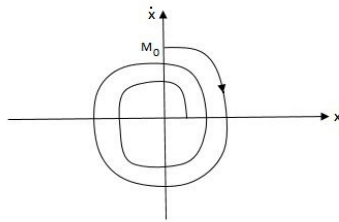


Рис. 3.1. Устойчивый фокус фазового портрета колебательной системы (3.3)

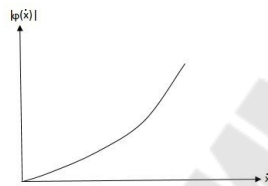


Рис. 3.2. Модуль диссипативной функции

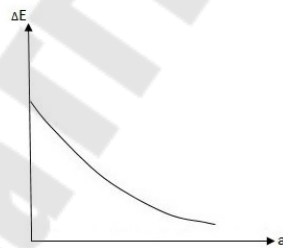


Рис. 3.3. Зависимость приращения энергии от амплитуды

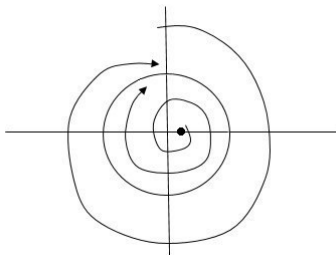


Рис. 3.4. Автоколебания – предельный цикл

Учитывая принятые свойства функций f , φ , ψ заключаем, что положение равновесия системы (3.4) находится в точке $(x_*, 0)$, где x_* – корень уравнения

$$f(x_*) - \varepsilon\psi(x_*, 0) = 0.$$

Вариант 1. Допустим, что начальное положение изображающей точки – вблизи точки покоя, где $\dot{x}_* = 0$. В этом случае (см. рис. 3.2, 3.3) энергия, которая рассеивается за один период, меньше энергии, поступающей в систему.

Вывод: в малой окрестности положения равновесия амплитуда колебаний a будет увеличиваться.

Вариант 2. В начале процесса состояние системы достаточно удалено от положения равновесия. Тогда будет доминировать диссипативная сила: за один период будет рассеиваться энергии больше, чем поступать в систему.

Вывод: амплитуда a будет уменьшаться.

Итак, если начальная амплитуда колебаний большая, то колебания затухают; если начальная амплитуда малая, то она с течением времени возрастает. На основе этих фактов можно заключить, что в системе (3.4) может установиться так называемый режим **автоколебаний**. А именно: режим колебаний с постоянной амплитудой a_* , при котором энергия, поступившая в систему за одно колебание, будет равна энергии, которая за это же время рассеивается диссипативной силой. На фазовой плоскости автоколебаниям соответствует замкнутая кривая – предельный цикл, рис.3.4. Стрелка показывает направление движения изображающей точки. Положение равновесия $(x_*, 0)$ является неустойчивым фокусом: фазовые траектории будут разматываться с фокуса и наматываться изнутри на предельный цикл. Траектории, которые находятся вне предельного цикла, будут наматываться на него извне.

Вывод: для механической системы (3.4) автоколебательный режим будет устойчивым.

Итак, если замкнутая траектория на фазовой плоскости является изолированной, она называется предельным циклом. Наличие устойчивого предельного цикла на фазовой плоскости говорит о том, что в системе возможно установление незатухающих периодических колебаний, амплитуда и период которых в определенных пределах не зависят от начальных условий

и определяются только значениями параметров системы. Такие системы называются автоколебательными.

Отличие автоколебаний от вынужденных колебаний не связано с действием периодической внешней силы или с периодическим изменением параметров системы. Автоколебания возникают за счет неперiodических источников энергии и обусловлены внутренними связями и взаимодействиями в самой системе. Одним из признаков автоколебательной системы может служить наличие обратной связи, которая управляет расходом энергии неперiodического источника. Отсюда ясно, что математическая модель автоколебательной системы должна быть грубой и существенно нелинейной.

Следовательно, наличие устойчивых предельных циклов на фазовом портрете системы является определяющим признаком автоколебательной системы. Условия устойчивости предельного цикла заключается в том, что характеристический показатель предельного цикла отрицателен: $h < 0$, см. формулу (*) в п. 2.2.

Пример. Пусть движение модели описывается уравнениями [2]

$$\dot{x} = -y + x [1 - (x^2 + y^2)], \quad \dot{y} = x + y [1 - (x^2 + y^2)].$$

Периодическое решение этой системы уравнений дается законом движения

$$x = \cos(t - t_0), \quad y = \sin(t - t_0),$$

который представляет замкнутую траекторию

$$x^2 + y^2 = 1. \tag{3.5}$$

Эта фазовая траектория – изолированная, потому что уравнения всех других траекторий на фазовой плоскости имеют вид

$$x = \frac{\cos(t - t_0)}{[1 + Ce^{-2(t-t_0)}]^{1/2}}, \quad y = \frac{\sin(t - t_0)}{[1 + Ce^{-2(t-t_0)}]^{1/2}}.$$

Двигаясь по этим траекториям при $C > 0$, изображающая точка приближается к замкнутой траектории (3.5) изнутри, а при $C < 0$ снаружи. Значит, замкнутая траектория (3.5) представляет собой устойчивый предельный цикл. Вычисления показывают, что в этом примере $h = -2 < 0$.

Наряду с устойчивыми предельными циклами фазовый портрет автоколебательной системы может содержать такие неустойчивые предельные циклы, для которых $h > 0$. Двигаясь в окрестности неустойчивого

предельного цикла, изображающая точка постепенно удаляется от него. Обычно такой цикл служит границей между областями с различным поведением фазовых траекторий.

Математическая задача построения автоколебательных режимов в системах с одной степенью свободы сводится к отысканию возможных периодических решений уравнения

$$\ddot{x} + f(x) = \varepsilon \cdot F(x, \dot{x}), \quad (3.6)$$

где ε – параметр функции; F , $f(x)$ считаем аналитическими функциями своих переменных. Будем изучать такие периодические решения, которые при $\varepsilon = 0$ переходят в периодические решения порождающего уравнения (3.1).

Если энергия системы достаточно мала, то любое решение системы (3.1) является периодическим. Пример (3.3) показывает, что не всякое решение порождающего уравнения является ”порождающим”. В общем случае существуют только исключительные решения уравнения (3.1), которые являются пределом (при $\varepsilon \rightarrow 0$) периодических решений уравнения (3.6). Именно они и называются порождающими.

Итак, задача состоит в том, что требуется одновременно разыскать периодические решения уравнения (3.6) как функции t , ε и те из периодических решений уравнения (3.1), в которые переходят периодические решения уравнения (3.6) при $\varepsilon \rightarrow 0$. Известно много методов решения этой задачи [2].

3.2 Пример автоколебательной механической системы

Механическая система, рис. 3.5, состоит из: 1) ведущего звена I, которое движется равномерно со скоростью v_0 ; 2) пружины 2, имеющей коэффициент жесткости c ; 3) груза 3 массы m ; $\omega^2 = c/m$. Между грузом 3 и поверхностью, по которой он скользит, имеется сила сухого трения. На рис. 3.6 показана предельная сила трения покоя R_1 и отличающаяся от нее сила трения скольжения R_2 . Ясно, что возможно движение системы, при котором скорость груза 3 равна скорости тележки v_0 ; при этом пружина сжата постоянной силой P , равной силе трения скольжения R_2 . Суть проблемы в том, что такой режим движения может оказаться неустойчивым, и при определенных условиях около него возникают автоколебания [8]. При малой

скорости v_0 возможна ситуация, когда какое-нибудь случайное препятствие является причиной остановки груза. Изучим динамику такого процесса после момента остановки. Ведущее звено (тележка) продолжает движение вправо и сжимает пружину до тех пор, пока сила сжатия P не сравняется с силой трения покоя R_1 . После этого груз срывается, и сила трения R_1 мгновенно уменьшается до значения R_2 , рис. 3.6. Здесь важно то, что в момент начала движения сила сжатия пружины все еще равна R_1 , т.е. нарушается равновесие сил, действующих на груз. Начало отсчета координаты x ведем от места остановки груза. Тогда в момент срыва при $t = 0$ имеем начальные условия для координаты и скорости: $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$. Далее, к некоторому моменту времени $t > 0$ длина пружины изменяется на $x - v_0t$; значит, сила упругости пружины станет равной $P(t) = R_1 - c(x - v_0t)$. Уравнение движения груза примет вид:

$$R_1 - c(x - v_0t) - R_2 = m\ddot{x},$$

т.е.

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \omega^2 v_0 t + (R_1 - R_2)/m.$$

Проинтегрировав это уравнение и удовлетворив начальным условиям, имеем

$$x = v_0 t - \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t + \frac{(R_1 - R_2)}{c} (1 - \cos \omega t). \quad (3.7)$$

Скорость груза $v(t) = \dot{x}(t)$ в момент времени t_1 может обратиться в нуль:

$$v(t_1) = 0; \quad v_0 - v_0 \cos \omega t_1 + \frac{\omega}{c} (R_1 - R_2) \sin \omega t_1 = 0.$$

В безразмерной форме это условие записывается так:

$$\alpha \sin \omega t_1 = \cos \omega t_1 - 1, \quad \alpha = g(f_1 - f_2)/(\omega v_0),$$

где учтено, что $R_1 = f_1 mg$, $R_2 = f_2 mg$; f_1, f_2 — коэффициенты трения покоя и трения скольжения. Теперь нетрудно определить, что

$$\sin \omega t_1 = \frac{-2\alpha}{1 + \alpha^2}, \quad \cos \omega t_1 = \frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2}.$$

Очевидно, что вещественный корень t_1 всегда существует. Соответствующая координата груза: $x_1 = x(t_1) = v_0 t_1 + (2\alpha v_0/\omega)$. Сила сжатия

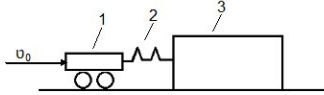


Рис. 3.5. Автоколебательная механическая система



Рис. 3.6. График предельной силы трения покоя

пружины в момент остановки: $P(t_1) = R_1 - c(x_1 - v_0 t_1) = 2R_2 - R_1$. Для сил трения верно неравенство $R_2 < R_1$, поэтому $P(t_1) < R_1$.

Следовательно, после остановки груз некоторое время будет оставаться на месте, пока сила сжатия пружины вновь не достигнет значения предельной силы трения покоя. После этого произойдет новый срыв груза и начнется следующий цикл, полностью совпадающий с предшествующим. Рассматриваемый процесс представляет собой стационарные автоколебания.

За время, в течение которого груз покоится, сила сжатия возрастает на $\Delta P = R_1 - P(t_1) = 2(R_1 - R_2)$. Соответствующее сжатие пружины: $\Delta \ell = \Delta P / c = 2(R_1 - R_2) / c$. Естественно, что за время остановки груза тележка проходит путь $\delta \ell$. Значит, груз находится в покое в течение времени

$$t_2 = \delta \ell / v_0 = 2(R_1 - R_2) / (c v_0) = 2\alpha / \omega.$$

Вывод: период автоколебаний равен $T = t_1 + t_2$.

Еще следует заметить, что чем меньше скорость тележки, тем более резко выражен автоколебательный процесс: $v_0 \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow 0$, $\sin \omega t_1 \rightarrow 0$, $t_1 \rightarrow \pi / \omega$. Тогда предельное значение периода автоколебаний равно

$$T = (\pi + 2\alpha) / \omega.$$

На рис. 3.7, 3.8, 3.9, 3.10 представлены закономерности поведения координаты и скорости для двух различных значений v_0 : $v_0^{(1)} > v_0^{(2)}$.

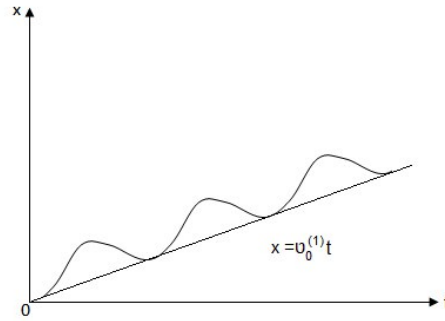


Рис. 3.7. Зависимость координаты от времени при автоколебаниях

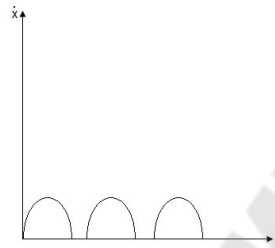


Рис. 3.8. Зависимость скорости от времени при автоколебаниях

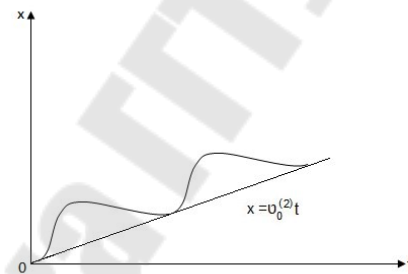


Рис. 3.9. Зависимость координаты от времени при $v_0^{(1)} > v_0^{(2)}$

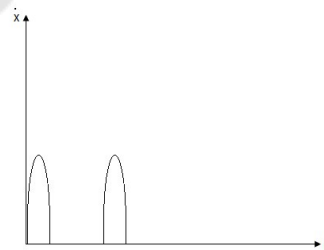


Рис. 3.10. Зависимость скорости от времени при $v_0^{(1)} > v_0^{(2)}$

Литература

1. Мандельштам, Л.И. Лекции по колебаниям / Л.И. Мандельштам – М. : Академия наук СССР, 1955. – 504 с.
2. Моисеев, Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики / Н.Н. Моисеев – М. : Наука, 1969 – 380 с.
3. Эльсгольц, Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л.Э. Эльсгольц – М. : Наука, 1969 – 424 с.
4. Коул, Дж. Методы возмущений в прикладной математике / Дж. Коул – М. : Наука, 1972 – 274 с.
5. Боголюбов, Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский – М. : Наука, 1974. – 504 с.
6. Баутин, Н.Н. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. / Н.Н. Баутин, Е.А. Леонтович – М. : Наука, 1976. – 496 с.
7. Найфз, А. Методы возмущений / А. Найфз – М. : Мир, 1976. – 456 с.
8. Пановко, Я.Г. Введение в теорию механических колебаний / Я.Г. Пановко – М. : Наука, 1980. – 272 с.
9. Бутенин, Н.В. Введение в теорию нелинейных колебаний / Н.В. Бутенин, Ю.И. Неймарк, Н.А. Фуфаев – М. : Наука, 1987. – 384 с.
10. Гольдштик, М.А. Механика жидкости и газа / М.А. Гольдштик, В.Н. Штерн – Известия АН СССР, 1989. – с. 35-44.
11. Яблонский, А.А. Курс теории колебаний / А.А. Яблонский, С.С. Норейко – СПб. : БХВ-Петербург, 2007. – 336 с.
12. Горяченко, В.Д. Элементы теории колебаний / В.Д. Горяченко – М. : Высшая школа, 2001. – 395 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
1 МЕТОД ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ.	3
1.1 Фазовый портрет динамической системы с одной степенью свободы	4
1.2 Метод фазовой плоскости	11
1.3 Системы с переменными параметрами	14
1.4 Параметрические колебания	19
1.5 Условия ограниченности параметрических колебаний	23
2 НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ	28
2.1 Система первого порядка	28
2.2 Бифуркации динамических систем второго порядка	33
2.3 Малый параметр при старшей производной	41
3 АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ	46
3.1 Сущность автоколебаний и формулировка задачи	46
3.2 Пример автоколебательной механической системы	51
Литература	56

**Шабловский Олег Никифорович
Гавриш Вадим Юрьевич**

КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

**Учебно-методическое пособие
по курсу «Теоретическая механика»
для студентов технических специальностей
дневной и заочной форм обучения**

Подписано к размещению в электронную библиотеку
ГГТУ им. П. О. Сухого в качестве электронного
учебно-методического документа 11.02.16.

Рег. № 87Е.
<http://www.gstu.by>