Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Высшая математика»

В. И. Гойко, С. М. Евтухова, А. В. Емелин

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ПРАКТИКУМ
для студентов
всех специальностей
заочной формы обучения

Гомель 2010

УДК 514.12(075.8)
ББК 22.151.5я73
Г59

*Рекомендовано научно-методическим советом
заочного факультета
ГГТУ им. П. О. Сухого
(протокол № 7 от 30.03.2010 г.)*

Рецензент: зав. каф. «Высшая математика» БелГУТа
канд. физ.-мат. наук *С. П. Новиков*

Гойко, В. И.

Г59 Аналитическая геометрия : практикум для студентов всех специальностей заоч. формы обучения / В. И. Гойко, С. М. Евтухова, А. В. Емелин. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2010. – 34 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: http://lib.gstu.local. – Загл. с титул. экрана.

Приведены задачи и примеры для самостоятельного решения по следующим темам: «Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве», «Векторная алгебра, матрицы и определители», «Системы линейных уравнений».

Для студентов всех специальностей заочной формы обучения.

УДК 514.12(075.8)
ББК 22.151.5я73

ГЛАВА 1. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

1.1. Уравнение прямой

<u>*Пример 1.*</u> Построить прямую по данному уравнению $y = 3x - 1$.

Решение.

Для построения прямой достаточно найти любые две точки, принадлежащие этой прямой (так как через две точки проходит только одна прямая).

Так как прямая задана своим уравнением, найдем любые два решения, которые и будут определять искомые точки.

Пусть $x_1 = 0$. Подставляя в уравнение получим:

$$y_1 = 3 \cdot 0 - 1 = -1$$

Пусть $x_2 = 1$

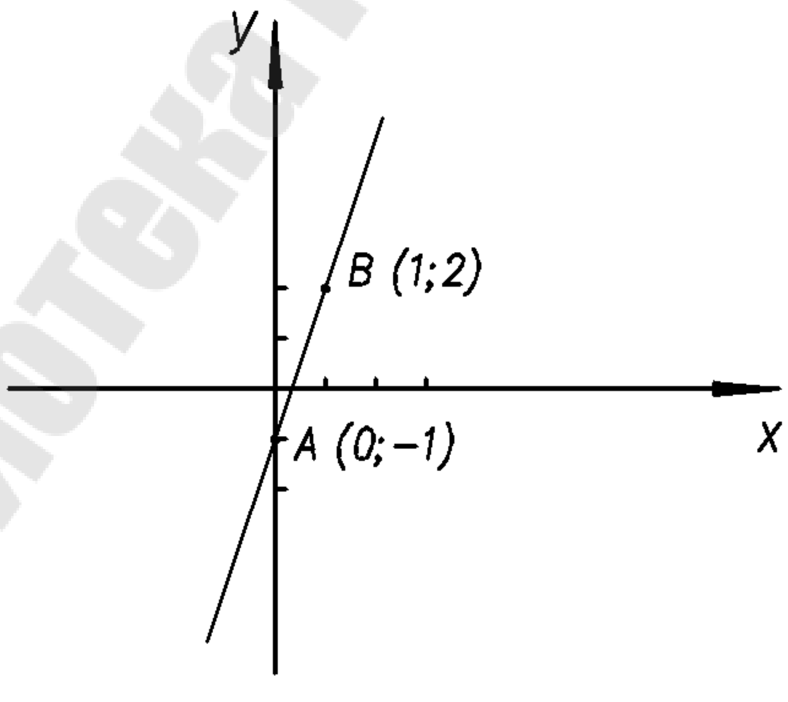
$$y_2 = 3 \cdot 1 - 1 = 2$$

Итак, прямая проходит через точки $A(0; -1)$ и $B(1; 2)$.

Удобно составить таблицу вида:

x	**0**	**1**
y	**–1**	**2**

Изображая точки в декартовой системе координат, строим прямую.



Пример 2. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $A(1; -3)$ и $B(3; 2)$.

Найти угловой коэффициент и длину отрезка, отсекаемого на оси OY.

Найти уравнение отрезка AB.

Решение.

Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две данные точки:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1};$$

Пусть A – первая точка, B – вторая.

Подставляя в уравнение, получим:

$$\frac{x-1}{3-1}=\frac{y-(-3)}{2-(-3)}; \qquad \frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{5};$$

$$5(x-1)=2(y+3);\ 5x-5=2y+6;\ 5x-2y-11=0.$$

Для нахождения углового коэффициента и длины отрезка приведем уравнение к виду: $y=kx+b$.

Тогда k – угловой коэффициент, а $|\,b\,|$ – длина отрезка.

Получаем: $2y=5x-11$; $y=\frac{5}{2}x-\frac{11}{2}$;

Тогда $k=\frac{5}{2}$, $|b|=\left|-\frac{11}{5}\right|=\frac{11}{5}$.

Найдем уравнение отрезка AB.

Воспользуемся параметрическим уравнением прямой:

$$\begin{cases} x=a_1t+x_0 \\ y=a_2t+y_0 \end{cases},\ t\in R, \text{ где}$$

$(a_1; a_2)$ – координаты вектора, параллельного прямой, $M(x_0; y_0)$ – любая точка, принадлежащая прямой.

В качестве направляющего вектора возьмем вектор $\overrightarrow{AB}$. Найдем его координаты, вычитая от координат точки B координаты точки A.

$\overrightarrow{AB}(2; 5)$. В качестве точки M возьмем A.

Получаем: $\begin{cases} x=2t+1 \\ y=5t-3 \end{cases}$

При $t\in[0;1]$ полученные равенства задают все точки отрезка AB.

Пример 3. Составить уравнение оси OX.

Решение.

Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через точку $M(x_0; y_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}(A; B)$, т.е. уравнением вида:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

В качестве нормального вектора возьмем вектор $j(0;1)$, а в качестве точки, принадлежащей прямой, точку $M(1;0)$. Подставляя в уравнение получим:

$0 \cdot (x-1) + 1 \cdot (y-0) = 0$ или $y = 0$.

Итак, уравнение оси OX имеет вид: $y = 0$.

Пример 4. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(-1; 3)$ и образующей с осью OX угол, равный $\frac{3\pi}{4}$.

Решение.

Воспользуемся уравнением вида:

$$y - y_0 = k(x - x_0), \text{ где } k = \operatorname{tg}\varphi.$$

В нашем случае $\varphi = \frac{3\pi}{4}$. Найдем k.

$$k = \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = -1.$$

Подставляя в уравнение координаты точки A и $k = -1$ получаем:

$$y - 3 = (-1) \cdot (x - (-1)) \text{ или } y = -x + 2.$$

Задачи для самостоятельного решения.

1. Построить прямую по данному уравнению.

а) $y = 4x + 1$; б) $y = -2x + 3$; в) $y = \frac{3}{4}x - 2$;

г) $y = 3x$; д) $y = 3$; е) $x = -2$.

2. Составить уравнение прямой, проходящей через точки:

а) $A(-1; 2)$, $B(3; 5)$; б) $A(0; 0)$, $B(2; 1)$;

в) $A(1; 4)$, $B(1; 7)$.

Найти числовой коэффициент и отрезок, отсекаемый на оси OY.

3. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-3;\,2)$:

а) параллельно вектору $\vec{a}(1;\,3)$;

б) параллельно вектору $\vec{i}(1;\,0)$;

в) перпендикулярно вектору $\vec{n}(-2;\,5)$;

г) перпендикулярно вектору $\vec{j}(0;\,1)$.

4. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(2;\,1)$ и образующей с ось абсцисс угол, равный:

а) $\dfrac{\pi}{4}$; б) $\dfrac{2\pi}{3}$.

5. Составить уравнение отрезка AB, если:

а) $A(-2;\,1)$, $B(2;\,4)$; б) $A(3;\,-2)$, $B(-1;\,6)$.

6. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(-1;\,2)$:

а) перпендикулярно прямой $3x-2y+4=4$;

б) параллельно к прямой $\dfrac{x-2}{-3}=\dfrac{y+1}{-2}$.

1.2. Угол между прямыми. Расстояние от точки до прямой.

<u>*Пример 1.*</u> Найти один из углов между прямыми

$$x-2y+4=0 \text{ и } \frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}.$$

Решение.

Приведем уравнение второй прямой к общему виду: $3(x-1)=2(y+2)$ или $3x-2y-7=0$. Найдем угол между прямыми, как угол между нормальными векторами этих прямых.

Для первой прямой $\overrightarrow{n_1}(1;-2)$, для второй прямой $\overrightarrow{n_2}(3;-2)$.

$$\cos\varphi=\frac{(\overrightarrow{n_1}\overrightarrow{n_2})}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}=\frac{1\cdot 3+(-2)\cdot(-2)}{\sqrt{1^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{3^2+(-2)^2}}=\frac{7}{\sqrt{65}};$$

Тогда $\varphi=\arccos\dfrac{7}{\sqrt{65}}\approx 30^\circ$.

Пример 2. Найти расстояние от точки $A(-2;\ 3)$ до прямой

$$x-2y+1=0.$$

Найти проекцию данной точки на данную прямую.

Решение.

Найдем решение по формуле: $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+c|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

Подставляя координаты точки A и параметры прямой в формулу получаем:

$$d=\frac{|-2-2\cdot 3+1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{7}{\sqrt{5}}.$$

Найдем проекцию точки.

Так как проекция – это точка пересечения перпендикуляра проведенного из данной точки на данную прямую, найдем уравнение прямой проходящей через точку A, перпендикулярно данной. Так как прямые перпендикулярны, то нормальный вектор $\vec{n}(1;\ -2)$ является направляющим для искомой прямой.

Получаем: $\dfrac{x-(-2)}{1}=\dfrac{y-3}{-2}$; $\quad -2(x+2)=y-3$;

$2x+y+1=0$ – уравнение искомой прямой.

Найдем точку пересечения этих двух прямых.

Решим систему:

$$\begin{cases}2x+y+1=0\\ x-2y+1=0\end{cases}$$

По формулам Крамера получим:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -1 & -2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}}=-\frac{3}{5};\qquad y=\frac{\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix}}{-5}=\frac{1}{5}.$$

Итак, $B\left(-\dfrac{3}{5};\dfrac{1}{5}\right)$ – искомая проекция.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Найти один из углов между прямыми:

а) $x+2y-1=0$ и $y=3x+2$;

б) $2x+y+3=0$ и $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+4}{-2}$;

в) $\begin{cases} x=2t+1 \\ y=-t+2 \end{cases}$ и $\begin{cases} y=-6t+2 \\ y=3t-1 \end{cases}$

2. Найти расстояние от точки $A(2; -1)$ до прямой $3x+2y-1=0$.

3. Найти расстояние между прямыми

$$2x-3y-2=0 \text{ и } -4x+6y=0.$$

1.3. Кривые второго порядка

1.3.1 Окружность

<u>*Пример 1.*</u> Найти центр и радиус окружности заданной уравнением $x^2+4x+y^2+5=0$.

Решение.

Приведем данное уравнение к виду:

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$, где $O(x_0; y_0)$ – центр окружности, R – радиус, выделяя полный квадрат по переменной *x*. Это можно сделать по формуле:

$$x^2+px+q=x^2+\frac{2p}{2}x+\left(\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4};$$

$$x^2+4x+y^2-5=x^2+2\cdot 2x+2^2-2^2+y^2-5=$$
$$=(x+2)^2+y^2-4-4=(x+2)^2+y^2-9$$

Получили следующее уравнение: $(x+2)^2+y^2=9$. Таким образом, центр окружности находится в точке $O(-2; 0)$, радиус $R=3$.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Изобразить в системе координат Oxy:

а) $x^2+y^2=4$;

б) $x^2+y^2-6y-1=0$;

в) $x^2+y^2-2x+4y+2=0$.

2. Составить уравнение окружности имеющей центр в точке:

а) (2; –5) и радиус, равный 4;

б) (–3; 4) и проходящей через начало координат;

в) (0; 4) и проходящей через точку (5; –8).

1.3.2. Эллипс

Пример 1. Дано уравнение эллипса: $25x^2+169y^2=4225$. Вычислить длину осей, координаты фокусов и эксцентриситет.

Решение.

Приведем данное уравнение к виду: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, разделив левую и правую часть на 4225.

Получим:

$$\frac{25x^2}{4225}+\frac{169y^2}{4225}=1 \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1 \text{ или } \frac{x^2}{13^2}+\frac{y^2}{5^2}=1.$$

Тогда большая ось $2a=2\cdot 13=26$, малая ось $2b=2\cdot 5=10$.

Из соотношения $b^2=a^2-c^2=\sqrt{169-25}=\sqrt{144}=12$.

Таким образом, первый фокус имеет координаты (12; 0), второй фокус имеет координаты (–12; 0).

Находим эксцентриситет: $e=\frac{c}{a}=\frac{12}{13}$.

Пример 2. Прямые $x=\pm 8$ служат директрисами эллипса, малая ось которого равна 8.

Найти уравнение этого эллипса.

Решение.

Из условия $2b=8\Rightarrow b=4$.

Уравнения директрис: $x=\pm\frac{a}{e}$, тогда $\frac{a}{e}=8\Rightarrow\frac{a}{c/a}=8\Rightarrow\frac{a^2}{c}=8$.

Так как $a^2=c^2+b^2$ получим $\frac{c^2+16}{c}=8$.

Приходим к квадратному уравнению: $c^2-8c+16=0$.

Решая, находим с=4. Тогда $a^2=4^2+4^2=32$.

Искомое уравнение: $\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{16}=1$.

Задачи для самостоятельного решения.

Составить каноническое уравнения эллипса, зная, что:

а) расстояние между фокусами равно 6 и большая полуось равна 5;

б) большая полуось равна 10 и $e = 0{,}8$;

в) малая полуось равна 3 и $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

г) сумма полуосей равна 8 и расстояние между фокусами также равно 8.

1.3.3. Гипербола

<u>*Пример 1.*</u> Дана гипербола $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$.

Найти координаты фокусов, эксцентриситет, уравнения асимптот и директрис.

Решение.

Из данного уравнения $a=3$; $b=4$.

Для гиперболы $c^2=a^2+b^2 \Rightarrow c^2=9+16=25$.

Тогда $c=5$ и координаты фокусов: $F(5;\,0)$; $F(–5;\,0)$.

Эксцентриситет $e=\frac{c}{a}=\frac{5}{3}$.

Асимптоты: $y=\pm\frac{b}{a}x$. В нашем случае: $y=\pm\frac{4}{3}x$.

Уравнения директрис: $x=\pm\frac{a}{e}$; $x=\pm\frac{3}{5/3}=\pm\frac{9}{5}$.

Задачи для самостоятельного решения.

Составить каноническое уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси OX, если:

а) расстояние между вершинами равно 8, а расстояние между фокусами 10;

б) действительная полуось равна 5 и вершины делят расстояние между центрами и фокусами пополам;

в) действительная ось равна 6 и гипербола проходит через точку $A(9; -4)$;

г) гипербола проходит через две точки $P(-5; 2)$ и $Q(2\sqrt{2}; \sqrt{2})$.

1.3.4. Парабола

<u>*Пример 1.*</u> Дано уравнение параболы $y = x^2$.

Найти координаты фокуса и уравнение директрисы.

Решение.

Из вида уравнения следует, что парабола симметрична относительно оси OY и ветви направлены вверх. Уравнение такой параболы имеет вид: $x^2 = 2py \Rightarrow 2p = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{2}$. Тогда фокус имеет координаты $(0; \frac{p}{2})$. В нашем случае $F(0; \frac{1}{4})$. Уравнение директрисы для такой параболы имеет вид: $y = -\frac{p}{2}$. В нашем случае: $y = -\frac{1}{4}$.

Задачи для самостоятельного решения.

Составить уравнение параболы, зная, что:

а) расстояние фокуса от вершины равно 3;

б) фокус имеет координаты (5; 0), а ось ординат служит директрисой;

в) парабола симметрична относительно оси X, проходит через начало координат и точку $M(1; -4)$;

г) парабола симметрична относительно оси Y, проходит через начало координат и через точку $M(6; -2)$;

д) симметрична относительно оси Y, фокус помещается в точке (0; 2) и вершина совпадает с началом координат.

ГЛАВА 2. МАТРИЦЫ. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

2.1. Матрицы и действия над ними

<u>*Пример 1.*</u> Вычислить $3A-2A^T+7E$, если $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ -1 & 2 & 0\\ 4 & 3 & -5\end{pmatrix}$.

Решение.

$$3A-2A^T+7E=3\cdot\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ -1 & 2 & 0\\ 4 & 3 & -5\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ -1 & 2 & 0\\ 4 & 3 & -5\end{pmatrix}^T+7\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}6 & 0 & 3\\ -3 & 6 & 0\\ 12 & 9 & -15\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}2 & -1 & 4\\ 0 & 2 & 3\\ 1 & 0 & -5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7 & 0 & 0\\ 0 & 7 & 0\\ 0 & 0 & 7\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}6-2\cdot 2+7 & 0-2\cdot(-1)+0 & 3-2\cdot 4+0\\ -3-2\cdot 0+0 & 6-2\cdot 2+7 & 0-2\cdot 3+0\\ 12-2\cdot 1+0 & 9-2\cdot 0+0 & -15-2\cdot(-5)+7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 2 & -5\\ -3 & 9 & -6\\ 10 & 9 & 2\end{pmatrix}.$$

<u>*Пример 2.*</u> Найти произведение матриц A и B:

а) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 5 & 9\end{pmatrix}$ б) $A=\begin{pmatrix}5 & 0 & 2 & 3\\ 4 & 1 & 5 & 3\\ 3 & 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6 & -1\\ -2 & 3\\ 7 & 0\\ 4 & 5\end{pmatrix}$

в) $A=\begin{pmatrix}8 & 0 & 1\\ 1 & -2 & 0\\ 4 & 2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 7\\ -2 & -4 & 5\\ 1 & 2 & -6\end{pmatrix}$.

Решение.

а) $A_{2\times 2}\cdot B_{2\times 2}=C_{2\times 2}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 5\\ 5 & 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 3+2\cdot 5 & 1\cdot 5+2\cdot 9\\ 3\cdot 3+4\cdot 5 & 3\cdot 5+4\cdot 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13 & 23\\ 29 & 51\end{pmatrix}$

б) $A_{3\times4}\cdot B_{4\times2}=C_{3\times2}=\begin{pmatrix}5&0&2&3\\4&1&5&3\\3&1&-1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6&-1\\-2&3\\7&0\\4&5\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}5\cdot6+0\cdot(-2)+2\cdot7+3\cdot4 & 5\cdot(-1)+0\cdot3+2\cdot0+3\cdot5\\ 4\cdot6+1\cdot(-2)+5\cdot7+3\cdot4 & 4\cdot(-1)+1\cdot3+5\cdot0+3\cdot5\\ 3\cdot6+1\cdot(-2)-1\cdot7+2\cdot4 & 3\cdot(-1)+1\cdot3-1\cdot0+2\cdot5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}56&10\\69&14\\17&10\end{pmatrix}.$$

в) $A_{3\times3}\cdot B_{3\times3}=C_{3\times3}=\begin{pmatrix}8&0&1\\1&-2&0\\4&2&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&3&7\\-2&-4&5\\1&2&-6\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}8\cdot2+0\cdot(-2)+1\cdot1 & 8\cdot3+0\cdot(-4)+1\cdot2 & 8\cdot7+0\cdot5+1\cdot(-6)\\ 1\cdot2-2\cdot(-2)+0\cdot1 & 1\cdot3-2\cdot(-4)+0\cdot2 & 1\cdot7-2\cdot5+0\cdot(-6)\\ 4\cdot2+2\cdot(-2)+3\cdot1 & 4\cdot3+2\cdot(-4)+3\cdot2 & 4\cdot7+2\cdot5+3\cdot(-6)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}17&26&50\\6&11&-3\\7&10&20\end{pmatrix}.$$

<u>*Пример 3.*</u> Найти значение многочлена $f(x)$ от матрицы A, если

$$f(x)=3x^2-2x+5,\ A=\begin{pmatrix}1&-2&3\\2&-4&1\\3&-5&2\end{pmatrix}.$$

Решение.

$f(x)=3A^2-2A+5E_3$, где E_3 – единичная матрица размера 3×3.

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1&-2&3\\2&-4&1\\3&-5&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-2&3\\2&-4&1\\3&-5&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-9&7\\-3&7&4\\-1&4&8\end{pmatrix}.$$

$$f(A)=3\cdot\begin{pmatrix}6&-9&7\\-3&7&4\\-1&4&8\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1&-2&3\\2&-4&1\\3&-5&2\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21&-23&15\\-13&34&10\\-9&22&25\end{pmatrix}.$$

Задачи для самостоятельного решения.

Пример 4. Вычислить $4A-5A^T+3E$, если $A=\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.

Пример 5. Вычислить $A-4B+2C^T$, если $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 6 \end{pmatrix}$,

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 7 & 8 & 1 \\ 2 & 0 & -4 \\ 3 & 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

Пример 6. Найти произведение матриц $A\cdot B$:

а) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -5 \\ 6 \end{pmatrix}$, б) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & 5 \\ 7 & 6 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 8 \end{pmatrix}$,

в) $A=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 8 & -2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$.

Пример 7. Найти значение многочлена $f(x)=2x^2-4x+3$ от матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

2.2. Определители

Пример 1. Вычислить определители первого, второго и третьего порядков: а) $|-3|$, б) $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & -2 \\ 6 & 5 & -1 \end{vmatrix}$.

Решение.

а) $|-3|=-3$,

б) $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot 5-(-3)\cdot 4 = 10+12 = 22$,

в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & -2 \\ 6 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot 0\cdot(-1) + 2\cdot(-2)\cdot 6 + 4\cdot 5\cdot(-3) - (-3)\cdot 0\cdot 6 -$

$$-5\cdot(-2)\cdot 1 - 4\cdot 2\cdot(-1) = -66.$$

Пример 2. Вычислить определитель, используя теорему Лапласа

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Решение.

Воспользуемся теоремой Лапласа и разложим определитель по элементам третьей строки.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot A_{31} + 0\cdot A_{32} + 1\cdot A_{33} =$$

$$= 2\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 4 + 8 = 16.$$

Пример 3. Вычислить определители, предварительно упростив их, используя свойства определителя:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 191 & 391 \\ 227 & 427 \end{vmatrix}, \qquad \text{б) } \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Решение.

а) $\begin{vmatrix} 191 & 391 \\ 227 & 427 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 191 & 191+200 \\ 227 & 227+200 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 191 & 191 \\ 227 & 127 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 191 & 200 \\ 227 & 200 \end{vmatrix} =$

$$= 0 + 191\cdot 200 - 227\cdot 200 = 200\cdot(191-227) = -7200.$$

б) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{I+III(-2) \\ II+III(-3)}}{=} \begin{vmatrix} 0 & -5 & -4 \\ 0 & -11 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{I+II\cdot 4}{=} \begin{vmatrix} 0 & -49 & 0 \\ 0 & -11 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -49\cdot 1\cdot 1 = -49$

Задачи для самостоятельного решения.

<u>*Пример 4.*</u> Вычислить определители первого, второго и третьего порядков: а) $|12|$, б) $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -9 & 5 \end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 7 & -5 & 1 \\ 3 & -2 & 6 \end{vmatrix}$.

<u>*Пример 5.*</u> Вычислить определители, используя теорему Лапласа:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 9 \\ 0 & 3 & 7 \end{vmatrix}, \qquad \text{б) } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 8 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}.$$

<u>*Пример 6.*</u> Вычислить определители, предварительно упростив их, используя свойства определителя:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 3171 & 2161 \\ 3172 & 2162 \end{vmatrix}, \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 4 \\ -3 & 1 & -5 \end{vmatrix}.$$

2.3. Обратная матрица. Системы линейных однородных и неоднородных уравнений.

<u>*Пример 1.*</u> Найти матрицу A^{-1}, обратную данной матрице A, если она существует:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Решение.

а) $\det\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = 8 + 3 = 11$. Так как определитель матрицы отличен от нуля, то матрица невырожденная и, следовательно, существует единственная обратная матрица. Для ее определения вычислим алгебраические дополнения данной матрицы.

$$A_{11}=(-1)^{1+1}|4|=4,\ A_{12}=(-1)^{1+2}|1|=-1,\ A_{21}=(-1)^{2+1}|-3|=3,$$
$$A_{22}=(-1)^{2+2}|2|=2.$$

Следовательно, для матрицы $A=\begin{pmatrix}2&-3\\1&4\end{pmatrix}$ обратной матрицей будет матрица $A^{-1}=\dfrac{1}{11}\begin{pmatrix}4&3\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4/11&3/11\\-1/11&2/11\end{pmatrix}$.

б) $\det\begin{pmatrix}1&2&3\\-4&1&0\\-1&3&5\end{pmatrix}=5+0-36+3-0+40=12\neq 0.$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&0\\3&5\end{vmatrix}=5,\qquad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-4&0\\-1&5\end{vmatrix}=20,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-4&1\\-1&3\end{vmatrix}=-11,\quad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2&3\\3&5\end{vmatrix}=-1,$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&3\\-1&5\end{vmatrix}=8,\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&2\\-1&3\end{vmatrix}=-5,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2&3\\1&0\end{vmatrix}=-3,\qquad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1&3\\-4&0\end{vmatrix}=-12,$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1&2\\-4&1\end{vmatrix}=9.$$

Следовательно, $A^{-1}=\dfrac{1}{12}\begin{pmatrix}5&-1&-3\\20&8&-12\\-11&-5&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5/12&-1/12&-1/4\\5/3&2/3&-1\\-11/12&-5/12&3/4\end{pmatrix}$.

в) $\det\begin{pmatrix}3&5&0\\1&-2&4\\5&1&8\end{pmatrix}=-48+100+0-0-12-40=0.$

Так как определитель матрицы равен нулю, то матрица является вырожденной и, следовательно, для нее не существует обратной матрицы.

Замечание: для матрицы A обратная матрица A^{-1} найдена верно, если выполняется условие $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$, где E – единичная матрица.

<u>*Пример 2.*</u> Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить ее:

1) по формулам Крамера;
2) с помощью обратной матрицы (матричным методом);
3) методом Гаусса.

а) $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 8 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 = -7 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 6 \end{cases}$, б) $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -6 \\ -3x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 + 11x_2 - 5x_3 = 3 \end{cases}$.

Решение.

а) Совместность данной системы поверим по теореме Кронекера-Капелли. С помощью элементарных преобразований найдем ранг матрицы системы $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ и ранг расширенной матрицы системы $\widetilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & 8 \\ 2 & -4 & 1 & -7 \\ -1 & 3 & -1 & 6 \end{array}\right)$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & 8 \\ 2 & -4 & 1 & -7 \\ -1 & 3 & -1 & 6 \end{array}\right)^{\substack{II+I\cdot(-2) \\ III+I}} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & 8 \\ 0 & -14 & -5 & -23 \\ 0 & 8 & 2 & 14 \end{array}\right)^{III+II\cdot(4/7)} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & 8 \\ 0 & -14 & -5 & -23 \\ 0 & 0 & -6/7 & 6/7 \end{array}\right).$$

Следовательно, $r_A = r_{\widetilde{A}} = 3$ (т.е. числу неизвестных). Значит, исходная система совместима и имеет единственное решение.

1) По формулам Крамера.

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta},\quad \text{где } \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 12,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 8 & 5 & 3 \\ -7 & -4 & 1 \\ 6 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 12, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 3 \\ 2 & -7 & 1 \\ -1 & 6 & -1 \end{vmatrix} = 24,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 8 \\ 2 & -4 & -7 \\ -1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = -12.$$

Таким образом, $x_1 = \dfrac{12}{12} = 1$, $x_2 = \dfrac{24}{12} = 2$, $x_3 = \dfrac{-12}{12} = -1$.

2) Система уравнений записанная в матричной форме имеет вид $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, решением будет матрица $X = A^{-1}B$.

Так как $\Delta = \det A = 12 \neq 0$, то матрица A невырожденная и для нее существует единственная обратная матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 1 & 14 & 17 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & -8 & -14 \end{pmatrix}.$$

Решение системы:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 1 & 14 & 17 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & -8 & -14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 12 \\ 24 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Итак, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$.

3) Решим систему методом Гаусса.

Так как система совместна и имеет единственное решение, то с помощью элементарных преобразований приведем расширенную матрицу системы к трапециевидной форме и последовательно выразим неизвестные. Выполняя аналогичные преобразования, как и при нахождении ранга расширенной матрицы системы, получим:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 8 \\ \quad -14x_2 - 5x_3 = -23. \\ \qquad\quad -6/7\, x_3 = 6/7 \end{cases}$$

Из полученной системы находим $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$.

б) Проверим совместность системы с помощью теоремы Кронекера-Капелли.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -3 & -6 \\ -3 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 11 & -5 & 3 \end{array}\right)^{\substack{II+I\cdot 3 \\ III+I}} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -3 & -6 \\ 0 & 16 & -8 & -16 \\ 0 & 16 & -8 & -3 \end{array}\right)^{III+II\cdot(-1)} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -3 & -6 \\ 0 & 16 & -8 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{array}\right).$$

Ранг матрицы системы $r_A = 2$, ранг расширенной матрицы системы $r_{\widetilde{A}} = 3$. Так как $r_A \neq r_{\widetilde{A}}$, то из теоремы Кронекера-Капелли следует несовместность исходной системы.

<u>*Пример 3.*</u> Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить ее.

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 1 \\ -x_1 + 5x_2 - 6x_3 = 7 \end{cases}$; б) $\begin{cases} -3x_1 - 4x_2 + x_3 - 1 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3 = 0 \end{cases}$.

Решение.

Так как метод Гаусса позволяет одновременно и проверять совместность системы уравнений и решать ее, то воспользуемся этим методом.

а) Составим расширенную матрицу системы $\widetilde{A}$ и находим r_A и $r_{\widetilde{A}}$ с помощью элементарных преобразований строк.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 4 & 1 \\ -1 & 5 & -6 & 7 \end{array}\right)^{\substack{II+I\cdot(-3) \\ III+I}} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -7 & 7 & -11 \\ 0 & 7 & -7 & 11 \end{array}\right)^{III+II} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -7 & 7 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Следовательно, $r_A = r_{\widetilde{A}} = 2 < 3$ (количества неизвестных). Поэтому система совместна и имеет бесчисленное множество решений, зависящих от одного $(3 - 2 = 1)$ параметра.

Первые две строки последней матрицы составляют расширенную матрицу системы $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ -7x_2 + 7x_3 = -11 \end{cases}$ эквивалентной исходной.

Так как $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$, то в качестве базисных неизвестных берем x_1 и x_2, а x_3 принимаем за свободную неизвестную (параметр).

Пусть $x_3 = C$, тогда из второго уравнения последней системы имеем $x_2 = \frac{11}{7} + C$. Подставив выражение для x_2 в первое уравнение, найдем $x_1 = 4 + C - 2\left(\frac{11}{7} + C\right) = 6/7 - C$.

Значит, общее решение системы имеет вид: $x_1 = 6/7 - C$, $x_2 = 11/7 + C$, $x_3 = C$, где C – произвольный параметр.

б) Преобразуем расширенную матрицу системы.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & -3 \end{array}\right) \overset{I+II\cdot 3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -5 & -8 \\ 1 & 2 & -2 & -3 \end{array}\right).$$

Следовательно, $r_A = r_{\tilde{A}} = 2 < 3$, система совместна и имеет бесчисленное множество решений, зависящих от одного параметра.

Так как $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, то в качестве базисных неизвестных берем x_1 и x_2, а x_3 – свободная неизвестная.

Пусть $x_3 = C$, тогда $x_2 = -4 + 5C/2$, $x_1 = 5 - 3C$ – общее решение исходной системы, где C – произвольный параметр.

Замечание: за базисные неизвестные принимаются те, для которых определитель, составленный из коэффициентов при этих неизвестных не равен нулю.

<u>*Пример 4.*</u> Решить систему линейных однородных уравнений.

а) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_1 - 6x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$.

Решение.

а) Определитель системы $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 30 \neq 0$, поэтому система имеет единственное нулевое решение $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

б) Определитель системы $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \\ -2 & -6 & 5 \end{vmatrix} = 0$, поэтому система имеет бесчисленное множество решений. Найдем их методом Гаусса.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \\ -2 & -6 & 5 \end{pmatrix}^{\substack{II+I\cdot(-3) \\ III+I\cdot 2}} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 8 & -13 \\ 0 & -8 & 13 \end{pmatrix}^{III+II} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 8 & -13 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$ для системы $\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \\ 8x_2 - 13x_3 = 0 \end{cases}$ эквивалентной исходной, то в качестве базисных неизвестных берем x_1 и x_2, а x_3 – свободная переменная.

Пусть $x_3 = C$, тогда из последнего уравнения получаем $x_2 = 13C/8$, а из первого $x_1 = x_2 - 4x_3 = \frac{13}{8}C - 4C = -\frac{19}{8}C$.

Значит, общее решение системы имеет вид: $x_1 = -\frac{19}{8}C$, $x_2 = \frac{13}{8}C$, $x_3 = C$, где C – произвольный параметр.

Задачи для самостоятельного решения.

<u>*Пример 5.*</u> Найти матрицу A^{-1}, обратную данной матрице A, если она существует.

а) $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & -8 & 2 \end{pmatrix}$.

Пример 6. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить ее: 1) по формулам Крамера; 2) с помощью обратной матрицы (матричным методом); 3) методом Гаусса.

$$\text{а) } \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 11 \\ -x_1 + 5x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = -1 \end{cases}; \qquad \text{б) } \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 7 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}.$$

Пример 7. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить ее.

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 5 \\ -3x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 14 \end{cases}; \qquad \text{б) } \begin{cases} x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 2 = 0 \\ 4x_1 + 10x_2 - x_3 - 7 = 0 \end{cases}.$$

Пример 8. Решить систему линейных однородных уравнений.

$$\text{а) } \begin{cases} 7x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}; \qquad \text{б) } \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 - 6x_3 = 0 \end{cases}.$$

ГЛАВА 3. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

3.1. Скалярное произведение двух векторов. Угол между двумя векторами

Косинус угла между векторами определяется формулой:

$$\cos\varphi = \frac{\bar{a}\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Пример 1. Даны точки $A(1;10;-5), B(9;3;-7), C(8;-1;3)$. Найти:

а) $\overline{AB}\cdot\overline{BC}$, б) угол между $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, в) площадь треугольника ABC.

Решение.

а) $\overline{AB} = (9-1, 3-10, -7-(-5)) = (8,-7,-2)$. Аналогично находим $\overline{BC}(-1,-4,10)$. $\overline{AB}\cdot\overline{BC} = 8(-1) - 7(-4) - 2\cdot 10 = 0$ (значит, треугольник ABC прямоугольный, $\angle B = 90^\circ$).

б) $\overline{AC} = (7,-11,-8)$. Тогда

$$\cos\angle A = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{|\overline{AB}||\overline{AC}|} = \frac{8\cdot 7 + (-7)(-11) + (-2)8}{\sqrt{8^2 + (-7)^2 + (-2)^2}\sqrt{7^2 + (-11)^2 + 8^2}} =$$

$$= \frac{117}{\sqrt{117}\sqrt{234}} = \frac{117}{117\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \angle A = 45^{\circ},$$

в) так как $\sin\angle A = \sin 45^{\circ} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, то

$$S_{\Delta\,ABC} = \frac{1}{2}|AB||AC|\sin\angle A = \frac{1}{2}\sqrt{117}\sqrt{234}\,\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{117}{2} = 58{,}5 \text{ (кв. ед.)}.$$

3.2. Векторное произведение двух векторов

Пример 2. Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ имеют длины, соответственно равные 8 и 5, и образуют угол в 30°. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

Решение.

Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a},\overline{b}$, равна $8\cdot 5\sin 30^{\circ} = 40\cdot 0{,}5 = 20$ (кв. ед.). Значит, площадь соответствующего треугольника равна $20\cdot 0{,}5 = 10$ (кв. ед.).

Пример 3. Найти векторное произведение $\overline{a}\times\overline{b}$ векторов $\overline{a}(3,-4,-8)$ и $\overline{b}(-5,2,-1)$.

Решение.

Так как для векторов, заданных в базисе $\overline{i},\overline{j},\overline{k}$

$$\overline{a}\times\overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\overline{i} + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}\overline{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\overline{k},$$

то в нашем случае

$$\overline{a}\times\overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 3 & -4 & -8 \\ -5 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & -8 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\overline{i} + \begin{vmatrix} -8 & 3 \\ -1 & -5 \end{vmatrix}\overline{j} + \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}\overline{k} =$$

$$= 20\overline{i} + 43\overline{j} - 14\overline{k}.$$

Итак, $\overline{a}\times\overline{b} = (20, 43, -14)$.

Пример 4. Найти площадь S треугольника, заданного вершинами $A(2,-3,1)$, $B(0,5,-4)$, $C(1,8,6)$.

Решение.

Искомая площадь равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ (которая, как уже известно, равна $\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|$). Находим $\overline{AB}=(-2,8,-5)$, $\overline{AC}=(-1,11,5)$. Тогда

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\left(\begin{vmatrix}8 & -5\\ 11 & 5\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}-2 & -5\\ -1 & 5\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-2 & 8\\ -1 & 11\end{vmatrix}\right)=(95,15,-14).$$

Значит,

$$S=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{95^2+15^2+(-14)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{9446}\approx 48{,}6.$$

Пример 5. Найти площадь треугольника, заданного вершинами $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2,),C(x_3,y_3)$.

Решение.

В прямоугольной системе координат эти точки имеют координаты $A(x_1,y_1,0),B(x_2,y_2,0),C(x_3,y_3,0)$. Значит,

$$\overline{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,0),\quad \overline{AC}=(x_3-x_1,y_3-y_1,0).$$

Тогда

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & 0\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & 0\end{vmatrix}=\left(0,0,\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1\end{vmatrix}\right).$$

Получим $\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\sqrt{0^2+0^2+\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1\end{vmatrix}^2}=\mathrm{mod}\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1\end{vmatrix}.$

Таким образом, искомая формула имеет вид:

$$S=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\frac{1}{2}\mathrm{mod}\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1\end{vmatrix}.$$

Пример 6. Коллинеарны ли векторы $\bar{a}(2,-5,1)$ и $\bar{b}(-6,15,-3)$?

Решение.

Вычислим векторное произведение $\bar{a}\times\bar{b}$:

$$\bar{a}\times\bar{b}=\left(\begin{vmatrix}-5 & 1\\ 15 & -3\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}2 & 1\\ -6 & -3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2 & -5\\ -6 & 15\end{vmatrix}\right)=(0,0,0).$$

Итак, векторы коллинеарны. Однако, проще проверить пропорциональность соответствующих координат.

3.3. Смешанное произведение трёх векторов. Геометрический смысл смешанного произведения

Смешанное произведение трёх векторов

$$\bar{a}(x_1, y_1, z_1), \bar{b}(x_2, y_2, z_2), \bar{c}(x_3, y_3, z_3)$$

определяется формулой: $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$.

Следовательно, объём параллелепипеда, построенного на этих векторах, вычисляется по формуле:

$$V = \mathrm{mod}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Объём треугольной пирамиды с вершинами в точках $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, $M_4(x_4, y_4, z_4)$ находится по формуле:

$$V = \frac{1}{6}\mathrm{mod}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}.$$

Необходимое и достаточное условие компланарности трёх векторов выражается равенством:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Пример 7. Найти объём параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}(1{,}3{,}1)$, $\bar{b}(2{,}1{,}3)$, $\bar{c}(3{,}1{,}2)$.

Решение.

$$V = \mathrm{mod}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \mathrm{mod}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \\ 3 & -8 & -1 \end{vmatrix} = 13.$$

Пример 8. Доказать, что векторы $\bar{a}(1,–2,3)$, $\bar{b}(4,–5,6)$, $\bar{c}(5,–7,9)$ компланарны.

Решение.

Так как $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -5 & 6 \\ 5 & -7 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & -7 & 9 \\ 5 & -7 & 9 \end{vmatrix} = 0$, т.е. выполнено условие компланарности векторов, то данные векторы компланарны.

Пример. 9. Вычислить объём треугольной пирамиды, вершины которой находятся в точках $M_1(6,1,4)$, $M_2(1,–3,7)$, $M_3(7,1,3)$, $M_4(2,–2,–5)$.

Решение.

$$V = \frac{1}{6}\mathrm{mod}\begin{vmatrix} 1-6 & -3-1 & 7-4 \\ 7-6 & 1-1 & 3-4 \\ 2-6 & -2-1 & -5-4 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\mathrm{mod}\begin{vmatrix} -5 & -4 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -4 & -3 & -9 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\mathrm{mod}\begin{vmatrix} -5 & -4 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -4 & -3 & -13 \end{vmatrix} = \frac{23}{3}$$

Пример 10. Даны точки $A(-2,-3,1), B(1,-1,2), C(2,4,2), D(1,2,6)$. Вычислить: 1) угол между ребром AD пирамиды $ABCD$ и плоскостью ABC, 2) длину высоты DO пирамиды.

Решение.

1) Пусть O – проекция точки D на плоскость Тогда угол между векторами $\overline{AD}$ и $\overline{AO}$ – искомый угол. Пусть $\overline{AL} = \overline{AB} \times \overline{AC}$, тогда $\overline{AL} \perp ABC$ и $\angle DAO = 90^{\circ} - \angle LAD$. Тогда $\overline{AD} = (3,5,5)$, $\overline{AB} = (3,4,1)$, $\overline{AC} = (4,7,1)$, $\overline{AL} = \left(\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}\right) = (-3,1,5).$

$$\cos(\angle LAD) = \frac{\overline{AL} \cdot \overline{AD}}{\left|\overline{AL}\right|\left|\overline{AD}\right|} = \frac{21}{\sqrt{35}\sqrt{59}} \approx 0{,}46;\ \angle LAD \approx 62{,}5^{\circ}.$$

Значит, $\angle DAO \approx 90^{\circ} - 62{,}5^{\circ} = 27{,}5^{\circ}$.

2) Как видно из рисунка $|DO| = \overline{AD}\,\overline{AL}$. Значит, $|DO| = \left|\overline{AD}\right|\cos(\angle LAD) = \sqrt{59} \cdot 0{,}46 \approx 3{,}53$.

3.4. Различные виды уравнения плоскости

Пример 11. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1,–3,2)$, $M_2(8,5;0)$ и параллельной вектору $\bar{a}(4,1,-1)$.

Решение.

Пусть точка $M(x, y, z)$ принадлежит искомой плоскости. Тогда векторы $\overline{M_1M} = (x-1, y+3, z-2)$, $\overline{M_1M_2} = (7{,}8{,}-2)$, $\bar{a}$ – компланарны (т.е. их смешанное произведение равно нулю). Получаем:

$$\overline{MM_1}\ \overline{M_1M_2}\ \bar{a} = \begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z-2 \\ 7 & 8 & -2 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (x-1)\begin{vmatrix} 8 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - (y+3)\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} + (z-2)\begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -6x + 6 - y - 3 - 25z + 50 = -6x - y - 25z + 53.$$

Приравнивая к нулю полученное смешанное произведение, получим искомое уравнение плоскости: $-6x - y - 25z + 53 = 0$ или $6x + y + 25z - 53 = 0$.

Пример 12. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(-4{,}1{,}7)$ и параллельной двум векторам $\bar{a}_1(3{,}0{,}-5)$ и $\bar{a}_2(-9{,}1{,}1)$.

Решение.

Заметим, что векторы $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$ не коллинеарны (их координаты не пропорциональны). Поэтому задача имеет единственное решение.

Будем рассуждать аналогично предыдущему примеру. Пусть точка $M(x, y, z)$ принадлежит искомой плоскости. Тогда векторы $\overline{AB} = (x+4, y-1, z-7)$, $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ компланарны и их смешанное произведение равно нулю. Т.е.

$$\begin{vmatrix} x+4 & y-1 & z-7 \\ 3 & 0 & 5 \\ -9 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (x+4)\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -9 & 1 \end{vmatrix} - (y-1)\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -9 & 1 \end{vmatrix} + (z-7)\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3x + 12 - 48y +$$

$$+ 48 - 5z + 35 = 3x - 48y - 5z + 95.$$

Итак, $3x - 48y - 5z + 95 = 0$ – уравнение искомой плоскости.

Пример 13. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1,-1,6)$ и имеющей нормаль $\bar{n}(3{,}0{,}4)$.

Решение.

Общее уравнение искомой плоскости имеет вид $3x + 4z + D = 0$ (плоскость параллельна оси OY). Так как точка M принадлежит искомой плоскости, то координаты $x=1, y=-1, z=6$ удовлетворяют уравнению плоскости. Подставив их в уравнение, вычислим D: $3\cdot 1+4\cdot 6+D=0$. Отсюда $D=-27$. Итак, $3x+4z-27=0$ – искомая плоскость.

Замечание. Так как плоскость параллельна оси OY, то любая точка вида $M(1,y,6)$, где y – любое число, будет принадлежать этой плоскости.

Пример 14. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $A(3,-3,0)$, $B(0,7,1), C(-5,3,2)$.

Решение.

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+3 & z-0 \\ 0-3 & 7+3 & 1-0 \\ -5-3 & 3+3 & 2-0 \end{vmatrix} = (x-3)\begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} - (y+3)\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -8 & 2 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} -3 & 10 \\ -8 & 6 \end{vmatrix} = 14x-42-2y-6+$$

$+62z=14x-2y+62z-48=0$. Итак, $7x-y+31z-24=0-$ искомая плоскость.

Пример 15. Найти угол между плоскостями:

$$x+4y+z-2=0, 3x-y-z-1=0.$$

Решение.

Воспользуемся формулой $\cos\varphi = \dfrac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$

и найдем косинус угла между плоскостями

$$cos\,\varphi = \frac{2\cdot 1+2\cdot 1+\sqrt{8}\cdot 0}{\sqrt{2^2+2^2+\left(\sqrt{8}\right)^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \frac{4}{\sqrt{16}\cdot\sqrt{2}} = \frac{4}{4\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Получим: $\varphi = 45^\circ$.

3.5. Различные виды уравнений прямой в пространстве

3.5.1. Каноническое уравнение прямой

Пример 16. Составить каноническое уравнение прямой, проведенной через точку $M_0(6, 2, -3)$ параллельно вектору $\bar{a}=(4,-5,7)$.

Решение.

Применяя формулу $\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3}$, получим каноническое уравнение прямой:

$$\frac{x-6}{4}=\frac{y-2}{-5}=\frac{z+3}{7}.$$

<u>*Пример 17*</u>. Составить параметрическое уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(1,-2,3)$ и параллельной вектору $\overline{a}=(2,4,-5)$. Найти точку P прямой, которой соответствует значение $t=2$.

Решение.

Так как в данном случае $x_0=1$, $y_0=-2$, $z_0=3$, $a_1=2$, $a_2=4$, $a_3=-5$, то параметрическое уравнение прямой имеет вид: $x=1+2t, y=-2+4t, z=3-5t.$

При $t=2$ получим: $x=1+2\cdot 2=5, y=-2+4\cdot 2=6, z=3-5\cdot 2=-7.$

На прямой фиксирована точка $P(5, 6, -7)$.

3.5.2. Прямая как пересечение двух плоскостей. Угол между двумя прямыми

<u>*Пример 18.*</u> Задана прямая

$$\begin{cases}3x-4y+5z-10=0,\\ 6x-5y+z-17=0.\end{cases}$$

Написать каноническое и параметрическое уравнение прямой.

Решение.

Составим матрицу из коэффициентов при неизвестных $\begin{pmatrix}3 & -4 & 5\\ 6 & -5 & 1\end{pmatrix}$. Вычислим координаты направляющего вектора $\overline{a}$ следующим образом:

$$a_1=\begin{vmatrix}-4 & 5\\ -5 & 1\end{vmatrix}=21, a_2=\begin{vmatrix}5 & 3\\ 1 & 6\end{vmatrix}=27, a_3=\begin{vmatrix}3 & -4\\ 6 & -5\end{vmatrix}=9.$$

Возьмем какую-нибудь точку прямой. Для этого нужно придать конкретное значение одной из координат, а значения двух других находятся из системы уравнений. Положим, например, z = 0. Тогда исходные уравнения примут вид: $3x-4y-10=0, 6x-5y-17=0.$ Решая эту систему, получим: $x_0 = 2,\quad y_0 = -1.$ Следовательно, на прямой зафиксирована точка $M_0(2, -1, 0)$. Каноническое уравнение примет вид:

$$\frac{x-2}{21} = \frac{y+1}{27} = \frac{z}{9},\quad \frac{x-2}{7} = \frac{y+1}{9} = \frac{z}{3}.$$

Параметрическое уравнение примет вид: $\begin{cases} x = 7t+2 \\ y = 9t-1, \quad t \in R. \\ z = 3t \end{cases}$

<u>*Пример 19.*</u> Найти угол между двумя прямыми

$$\frac{x-5}{7} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-6}{-8},\quad \frac{x-2}{11} = \frac{y-4}{-8} = \frac{z+1}{-7}.$$

Решение.

Первая и вторая прямые имеют направляющие векторы соответственно $\bar{a} = (7, 2, -8),\quad \bar{b} = (11, -8, -7)$. Воспользовавшись формулой

$$\cos\varphi = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}},$$

получим:

$$cos\,\varphi = \frac{7\cdot 11 + 2\cdot(-8) + (-8)\cdot(-7)}{\sqrt{7^2 + 2^2 + (-8)^2}\cdot\sqrt{11^2 + (-8)^2 + (-7)^2}} = \frac{117}{\sqrt{117}\cdot\sqrt{234}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно, $\varphi = 45^\circ$.

3.6. Расстояние от точки до прямой. Расстояние между двумя прямыми

Расстоянием от точки до прямой называется длина перпендикуляра, опущенного из точки на прямую.

Пусть дана прямая l: $\dfrac{x-x_0}{a_1} = \dfrac{y-y_0}{a_2} = \dfrac{z-z_0}{a_3}$ и точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$. Искомое расстояние d есть высота параллелограмма, построенного на векторах

$$\bar{a} = \{a_1, a_2, a_3\},\ \overline{M_0M_1} = \{x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0\}.$$

$$d=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1-y_0 & z_1-z_0\\ a_2 & a_3\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z_1-z_0 & x_1-x_0\\ a_3 & a_1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0\\ a_1 & a_2\end{vmatrix}^2}}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$$

Пример 20. Найти расстояние от точки $M_0(1, -2, 3)$ до прямой $x=9-2t,\quad y=4-4t,\quad z=7+4t.$

Решение.

Получим:

$$d=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} 4-(-2) & 7-3\\ -4 & 4\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} 9-1 & 7-3\\ -2 & 4\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} 9-1 & 4-(-3)\\ -2 & -4\end{vmatrix}^2}}{\sqrt{(-2)^2+(-4)^2+4^2}}=\frac{\sqrt{3600}}{\sqrt{36}}=10.$$

Пример 21. Вычислить расстояние между скрещивающимися прямыми

$$\begin{cases} x=3+2t,\\ y=7-2t,\\ z=1+3t,\end{cases}\qquad \text{и}\qquad \begin{cases} x=5+4t,\\ y=8,\\ z=2-6t.\end{cases}$$

Решение.

Прежде всего убедимся, что прямые являются скрещивающимися. С этой целью составим определитель третьего порядка, у которого в первой и второй строке находятся координаты направляющих векторов соответственно первой и второй прямой, а в третьей строке – разности между соответствующими координатами заданных точек второй и первой прямой:

$$\begin{vmatrix} 5-3 & 8-7 & 2-1\\ 2 & -2 & 3\\ 4 & 0 & -6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1\\ 2 & -2 & 3\\ 4 & 0 & -6\end{vmatrix}=56.$$

Так как определитель больше нуля, то при вычислении расстояния возьмем знак плюс перед соответствующей дробью:

$$d=\frac{56}{\sqrt{\begin{vmatrix} -2 & 3\\ 0 & -6\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} 2 & 3\\ 4 & -6\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} 2 & -2\\ 4 & 0\end{vmatrix}^2}}=\frac{56}{28}=2.$$

Задания для самостоятельного решения.

1. Даны точки $A(10,8,4), B(-3,-1,-7)$. Принадлежит ли точка $M(1,-1,0)$ прямой AB?

2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(3,8,-3)$ и параллельной плоскости: $-x+2y+4z-5=0$.

3. Найти расстояние между параллельными плоскостями $3x-y+4z+1=0$ и $3x-y+4z-10=0$.

4. Найти прямую, проходящую через точку $M_0(1,-5,3)$, параллельно вектору $\overline{a}(6,5,-2)$.

5. Построить плоскость, проходящую через точку $L(4,-1,3)$ и прямую b, заданную параметрическими уравнениями: $x=3-p, y=-2+2p, z=5p$.

6. Найти угол между прямой c, заданной каноническими уравнениями $\dfrac{x+1}{-4}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+6}{0}$, и плоскостью γ, заданной уравнением $7x+3y-z+1=0$.

Замечание. Ноль в знаменателе в каноническом уравнении прямой c не должен пугать – он лишь означает, что прямая параллельна плоскости *XOY*.

7. Найти канонические уравнения прямой $\begin{cases} x+2y-6z+5=0, \\ -3x+2y+2z-7=0. \end{cases}$

8. Найти расстояние от точки $H(-5,-2,-2)$ до прямой $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-6}{1}$.

9. Прямая $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-3}{5}$ перемещается в пространстве в направлении вектора $\overline{a}(1,6,-4)$. Какую плоскость образует она при этом перемещении?

10. Вычислить объем пирамиды, которую ограничивают плоскости $XOY, XOZ, YOZ, 8x+3y-4z-24=0$;

11. Даны две плоскости: $4x-3y+5z+2=0$ и $-8x+5y+3z-3=0$. Построить плоскость, которая делит угол, образующийся при пересечении этих плоскостей, пополам.

12. При каких значениях m и A прямая $x=3+2t$, $y=-5+mt$, $z=1+6t$ перпендикулярна плоскости $Ax-2y+3z-5=0$?

СОДЕРЖАНИЕ

Гойко Владимир Иосифович
Евтухова Светлана Михайловна
Емелин Анатолий Владимирович

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ПРАКТИКУМ
для студентов
всех специальностей
заочной формы обучения

Подписано в печать 21.12.2010.
Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».
Цифровая печать. Усл. печ. л. 2,09. Уч.-изд. л. 1,79.
Изд. № 55.
E-mail: ic@gstu.by
http://www.gstu.by

Отпечатано на цифровом дуплекаторе
с макета оригинала авторского для внутреннего использования.
Учреждение образования «Гомельский государственный
технический университет имени П. О. Сухого».
246746, г. Гомель, пр. Октября, 48.