Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Теоретические основы электротехники»

Д. В. Комнатный

РАСЧЕТ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ ДВУХ БЕСКОНЕЧНЫХ НЕСООСНЫХ ЦИЛИНДРОВ

ПОСОБИЕ
по курсу «Теоретические основы электротехники»
для студентов специальности 1-43 01 02
«Электроэнергетические системы и сети»
дневной формы обучения

Гомель 2010

УДК 621.3(075.8)
ББК 31.21я73
К63

Рекомендовано научно-методическим советом энергетического факультета ГГТУ им. П. О. Сухого (протокол № 10 от 30.06.2010 г.)

Рецензент: зав. каф. «Электроснабжение» ГГТУ им. П. О. Сухого канд. техн. наук, доц. *О. Г. Широков*

Комнатный, Д. В.

К63 Расчет электростатического поля двух бесконечных несоосных цилиндров : пособие по курсу «Теоретические основы электротехники» для студентов специальности 1-43 01 02 «Электроэнергетические системы и сети» днев. формы обучения / Д. В. Комнатный. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2010. – 26 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: http://lib.gstu.local. – Загл. с титул. экрана.

Содержит теоретические и практические указания по выполнению расчетно-графической работы «Расчет электростатического поля двух параллельных несоосных цилиндров». Приведен пример выполнения расчетов.

Для студентов специальности 1-43 01 02 «Электроэнергетические системы и сети» дневной формы обучения.

УДК 621.3(075.8)
ББК 31.21я73

ВВЕДЕНИЕ

При эксплуатации современных электроэнергетических сетей и систем с необходимостью возникает задача обеспечения электромагнитной совместимости этих сетей и систем с потребителями электрической энергии и, наоборот, потребителей с сетями электроснабжения. Это означает, что в электроэнергетических системах не должны возникать помехи, нарушающие работу потребителей электроэнергии, электрических станций и линий электропередач. Кроме того, в настоящее время большое внимание уделяется исключению вредного влияния линий и сетей электропередачи на окружающую среду и на организм человека.

Для решения возникающих на практике вопросов электромагнитной совместимости в электрических сетях специалист-энергетик, помимо прочего, должен уметь рассчитывать характеристики электрического и магнитного полей линий электропередач и установок высокого напряжения, определять уровни электростатических помех и наводок в различном оборудовании, строить картину поля в установках сверхвысокого напряжения, конструировать высоковольтные экраны для этих установок. Основой для решения этих задач является теория электромагнитного поля. Следовательно, специалист должен владеть физическими представлениями и математическим аппаратом этой теории.

При выполнении расчетов электрического поля широко применяется прием, в котором поле реальных объектов заменяется полем набора бесконечно длинных и бесконечно тонких проводников – заряженных осей, несущих равномерно распределенный по их длине электрический заряд. Освоению этого полезного для практики приема уделяется значительное внимание в разделе «Теория электромагнитного поля» курса «Теоретические основы электротехники».

С целью закрепления теоретических знаний и получения навыков расчета электрического поля студенты специальности 1-43-01 02 «Электроэнергетические системы и сети» выполняют расчетно-графическую работу, в которой осуществляют решение задачи об электростатическом поле двух бесконечных несоосных цилиндров. При этом студенты на практике осваивают расчет электрического поля с использованием понятия заряженной оси, изучают методы построения картины поля, расчета распределения электрического заряда по поверхности проводников и взаимной емкости между проводящими телами. (Два последних пункта необходимы для анализа электростатических наводок и помех). Таким образом, успешное выполнение расчетно-графической работы необходимо для творческого и долговременного усвоения курса ТОЭ и закладывает основу для решения более сложных задач инженерной практики.

1. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Электростатическое поле – это вид материи, существующий вокруг заряженных тел и частиц с неподвижными зарядами, характерным проявлением которого является силовое воздействие на другие тела и частицы с неподвижными зарядами, внесенные в занятую этим полем область пространства.

Основной физической величиной, характеризующей электростатическое поле в каждой его точке, является **напряженность электростатического поля** E**.** Напряженностью электростатического поля называется векторная величина, равная пределу отношения силы, с которой электростатическое поле действует на неподвижное заряженное тело, внесенное в данную точку поля, к заряду этого тела, когда этот заряд стремиться к нулю. Направление напряженности совпадает с направлением силы, действующей на положительно заряженную материальную точку.

$$\vec{E} = \lim_{q \to 0} \frac{\vec{F}}{q} \qquad (1.1)$$

Важнейшим свойством электростатических полей является **принцип суперпозиции**, который заключается в том, что напряженность поля, созданного несколькими зарядами, равна геометрической сумме напряженностей поля каждого из зарядов в отдельности.

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \cdots \qquad (1.2)$$

Потоком вектора напряженности электростатического поля Ψ_E называется интеграл от произведения элемента некоторой поверхности S на составляющую вектора напряженности, нормальную к этим элементам.

$$\Psi_E = \int_S E \cos\beta \, dS \tag{1.3}$$

Если ввести вектор $\overrightarrow{dS}$, длина которого численно равна площади элемента поверхности, а направление совпадает с направлением положительной нормали к этому элементу, то формулу (1.3) можно записать

$$\Psi_E = \int_S \vec{E}\,\overrightarrow{dS} \tag{1.4}$$

Справедлива **теорема Гаусса,** которая гласит: поток вектора напряженности электрического поля сквозь замкнутую поверхность равен отношению электрического заряда, заключенного внутри данной поверхности к абсолютной диэлектрической проницаемости среды ε_a. С ее доказательством можно ознакомиться в [1,2,3].

Электростатическое поле способно совершать работу при перенесении в нем электростатических зарядов. Энергетические свойства электростатического поля характеризует **потенциал электростатического поля.** Потенциал электростатического поля в данной точке численно равен работе, совершаемой силами электростатического поля при перенесении единичного положительного электрического заряда из этой точки в бесконечность.

В электростатическом поле могут быть проведены поверхности, все точки которых имеют одинаковый потенциал. Такие поверхности называются **эквипотенциальными поверхностями.** Следы пересечения этих поверхностей с какой-либо секущей плоскостью называются **эквипотенциальными линиями или эквипотенциалями.**

Для потенциалов также справедлив принцип суперпозиции: потенциал поля нескольких заряженных тел равен сумме потенциалов полей каждого тела в отдельности.

Потенциал и напряженность электростатического поля связаны между собой следующим соотношением.

$$E_l = -\frac{\partial \varphi}{\partial l} \tag{1.5}$$

Составляющая напряженности электростатического поля по направлению *l* равна производной потенциала поля по этому направлению, взятой с противоположным знаком.

Под **граничными условиями** понимаются условия, которым подчиняется поле на границе раздела сред с разными электрическим свойствами.

Рассмотрим поведение электростатического поля на границе раздела проводящего тела и диэлектрика. На этой границе выполняются два граничных условия.

Первое граничное условие. Вся толща проводника эквипотенциальна, равно как и его поверхность. Следствием этого условия является отсутствие тангенциальной составляющей напряженности электростатического поля на поверхности проводника.

Второе граничное условие. Вектор нормальной составляющей напряженности электростатического поля в любой точке диэлектрика, непосредственно примыкающей к поверхности проводника равен поверхностной плотности заряда проводника.

С доказательствами этих условий можно ознакомиться в [1] и [3].

2. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ЗАРЯЖЕННОЙ ОСИ И ДВУХПРОВОДНОЙ ЛИНИИ

Под **заряженной осью** понимают весьма тонкий, бесконечно длинный проводник. Заряд, приходящийся на единицу длины такого проводника, называется **линейной плотностью заряда**, обозначается τ и имеет размерность Кл/м.

Поле заряженной оси зависит только от двух координат, поскольку ось имеет бесконечную длину. Такое поле называется **плоскопараллельным**. Картина поля будет одинакова в любой плоскости, перпендикулярной электрической оси. Поэтому в дальнейшем поля электрических осей будем рассматривать в этой плоскости.

В силу симметрии вектор напряженности электростатического поля оси $\vec{E}$ всюду направлен радиально. Для вычисления этого вектора в некоторой точке, удаленной на расстояние r от оси, охватим электрическую ось цилиндром радиуса r и диной l=1 [1]. Применим к этому цилиндру теорему Гаусса (рисунок 2.1).

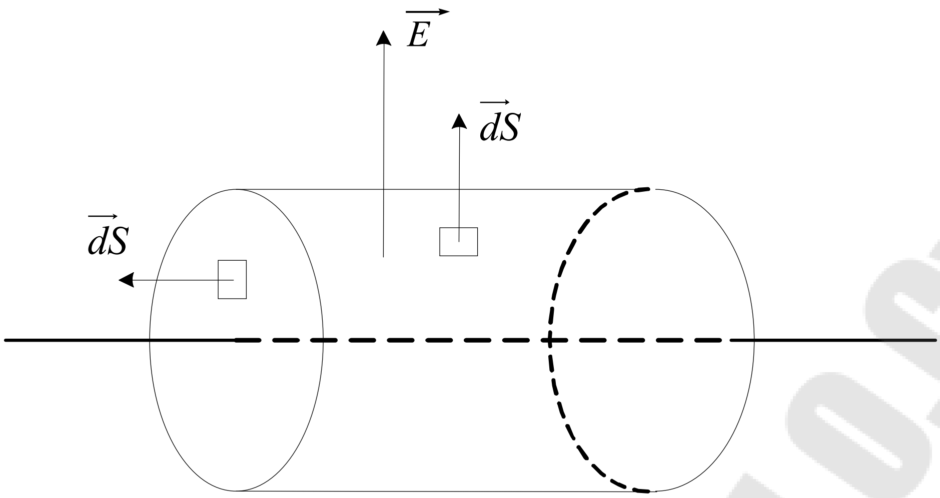

Рисунок 2.1. – Расчет напряженности поля электрической оси

Поток вектора E имеется только через боковую поверхность цилиндра, так как элементы оснований цилиндра перпендикулярны напряженности поля (1.3). Так как элементы $\vec{dS}$ боковой поверхности совпадают по направлениям с вектором напряженности электростатического поля, то из (1.4) и теоремы Гаусса следует

$$E \cdot 2\pi r l = \frac{\tau}{\varepsilon_a}$$

или

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a r} \quad . \tag{2.1}$$

Напряженность поля заряженной оси обратно пропорциональна расстоянию от точки, в которой рассчитывается напряженность, до оси.

Из (1.5) следует, что потенциал поля заряженной оси можно вычислить путем интегрирования

$$\varphi = -\int E dr = -\int \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a r} dr = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a} \ln r + C \tag{2.2}$$

Положим $\varphi=0$ на некоторой цилиндрической поверхности радиуса $r_0=1$. Тогда из (2.2) $C=\dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_a}\ln 1$ и

$$\varphi=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a}\ln\frac{1}{r}\ . \qquad (2.3)$$

Таким образом, потенциал поля электрической оси изменяется по логарифмическому закону.

Рассмотрим поле **двухпроводной линии,** состоящей из двух электрических осей, одна из которых имеет линейную плотность заряда $+\tau$, а другая $-\tau$. Обозначим через r_1 расстояние от некоторой точки до положительно заряженной оси, а расстояние от той же точки до отрицательно заряженной оси – r_2. По принципу суперпозиции полей можно записать выражение для потенциала поля двухпроводной линии

$$\varphi=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a}\ln\frac{1}{r_1}-\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a}\ln\frac{1}{r_2}=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a}\ln\frac{r_2}{r_1}. \qquad (2.4)$$

Из (2.4) следует, что в точках плоскости, для которых $r_1=r_2$, потенциал равен нулю. Из геометрии известно, что точки равноудаленные от двух данных точек (в нашем случае это следы пересечения электрических осей с плоскостью) находятся на прямой линии, перпендикулярной отрезку, соединяющему эти точки и проходящей через середину указанного отрезка. Поэтому принято располагать начало координат в середине отрезка, соединяющего электрические оси, ось Ox проводить через электрические оси, тогда потенциал точек оси Oy оказывается равным нулю, а ось Oy – нулевой эквипотенциалью [4].

Для составляющих напряженности поля по координатным осям справедливы выражения, следующие из принципа суперпозиции полей (1.2)

$$E_x=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a r_1}\cos\beta_1-\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a r_2}\cos\beta_2 \qquad (2.5)$$

$$E_y = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a r_1}\sin\beta_1 - \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a r_2}\sin\beta_2\,; \qquad (2.6)$$

где β_1 – угол между осью *Ox* и отрезком, соединяющим рассматриваемую точку с положительно заряженной осью (рисунок 2.2);

β_2 – угол между осью *Ox* и отрезком, соединяющим эту же точку с отрицательно заряженной осью.

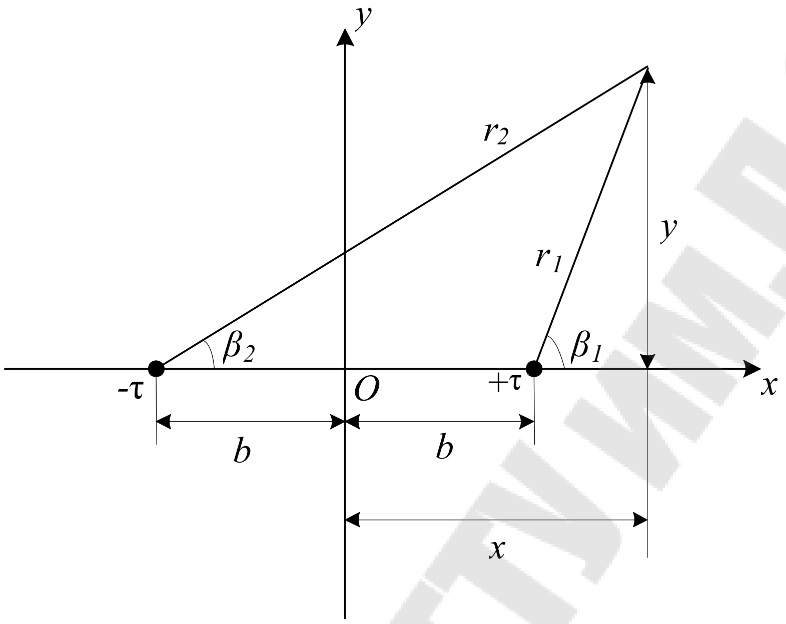

Рисунок 2.2. – Геометрические соотношения в системе двух электрических осей

Из геометрических соображений, показанных на рисунке 2.2, следует

$$\cos\beta_1 = \frac{x-b}{r_1};\ \cos\beta_2 = \frac{x+b}{r_2};\ \sin\beta_1 = \frac{y}{r_1};\ \sin\beta_2 = \frac{y}{r_2}.$$

Подставив эти соотношения в (2.5) и (2.6), получаем

$$E_x = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a}\left(\frac{x-b}{r_1^2} - \frac{x+b}{r_2^2}\right) \qquad (2.7)$$

$$E_y = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a}\left(\frac{y}{r_1^2} - \frac{y}{r_2^2}\right) \qquad (2.8)$$

Найдем форму эквипотенциальных линий картины поля двух заряженных осей. Из (2.4) следует, что для всех точек эквипотенциали $\frac{r_1}{r_2} = k = const$. Из рисунка 2.2 следует

$$r_1 = (b - x)^2 + y^2 \quad r_2 = (b + x)^2 + y^2 .$$

Тогда

$$\frac{(b - x)^2 + y^2}{(b + x)^2 + y^2} = k^2 .$$

Это уравнение может быть приведено к виду [3]

$$\left(x - \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1} b \right)^2 + y^2 = \left(\frac{2bk}{k^2 - 1} \right)^2 \tag{2.9}$$

Это уравнение окружности. Координаты центра этой окружности суть

$$x_0 = \frac{1 + k^2}{1 - k^2} b \, ; y_0 = 0 , \tag{2.10}$$

а радиус

$$R_0 = \frac{2k}{\left| 1 - k^2 \right|} b . \tag{2.11}$$

Итак, эквипотенциалями поля двух разноименно заряженных осей являются окружности. Числа k при возрастании порядкового номера эквипотенциали ν образуют геометрическую прогрессию со знаменателем B

$$\frac{k_{\nu + 1}}{k_\nu} = B . \tag{2.12}$$

Рассмотрим электростатическое поле, созданное двумя равномерно заряженными бесконечно длинными круглыми цилиндрами, сечение которых имеет радиус R, а расстояние между геометрическими центрами цилиндров равно D (рисунок 2.3).

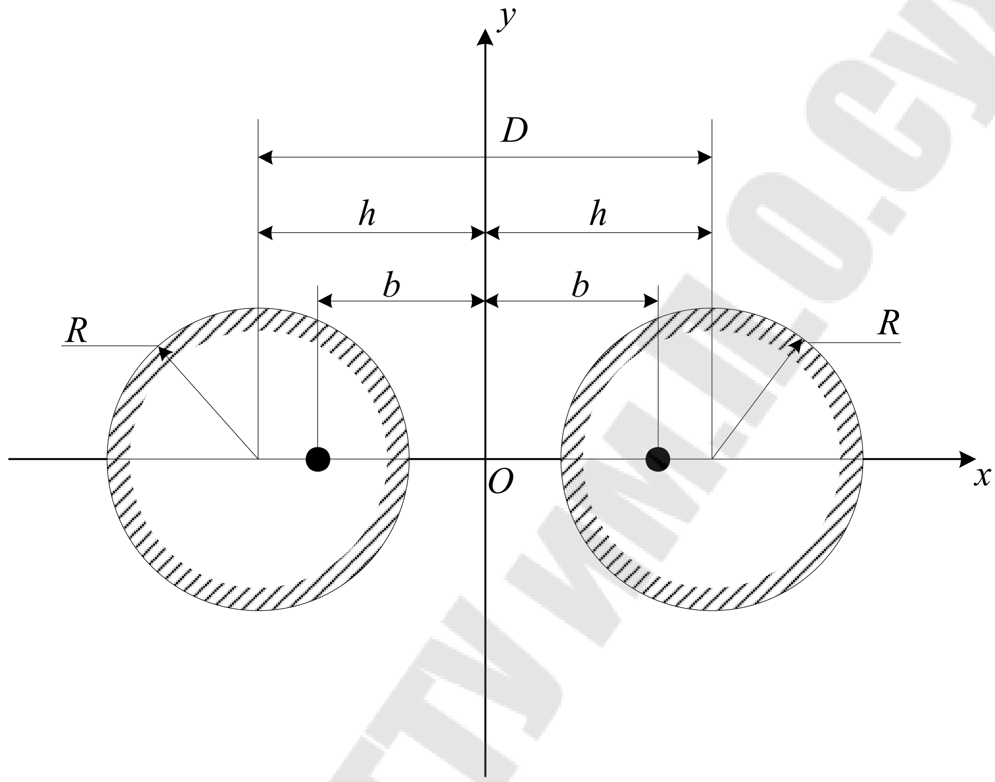

Рисунок 2.3. – Двухпроводная линия с проводами равного сечения

Поверхности цилиндров, согласно первому граничному условию, эквипотенциальны. С другой стороны эквипотенциальные поверхности в поле двух разноименно заряженных электрических осей также являются круговыми цилиндрами. Поэтому можно подобрать такое положение двух заряженных осей, чтобы поверхности проводящих цилиндров оставались эквипотенциальными в поле этих осей. При этом поле в окружающем цилиндры диэлектрике останется неизменным, так как удовлетворяется граничное условие на поверхности проводящих тел задачи.

Выведем формулу для координат указанных заряженных осей. Пусть k_0 – некая постоянная, при которой формула 2.11 дает радиус заданных цилиндров

$$R = \frac{2k_0}{\left|1 - k_0^2\right|} b,$$

а формула 2.10 – координату h центра сечения цилиндров

$$h = \frac{1 + k_0^2}{1 - k_0^2} b.$$

Исключая из этих соотношений параметр k_0, получаем, что координата заряженных осей может быть вычислена из формулы

$$b = \pm\sqrt{h^2 - R^2}. \tag{2.13}$$

Если расстояние между геометрическими осями цилиндров равно D, то $h = \frac{D}{2}$ и

$$b = \pm\sqrt{\frac{D^2}{4} - R^2} \tag{2.14}$$

Тем самым, найдены координаты двух таких заряженных осей, электростатическое поле которых совпадает с полем двух параллельных круглых цилиндров. Так как поля этих двух систем проводников совпадают, то заряженные оси называются **эквивалентными электрическими осями** цилиндрических проводников.

Рассмотрим теперь случай, когда заданы не заряды, а потенциалы цилиндрических проводников, равные по величине и противоположные по знаку [5]. Чтобы найти электростатическое поле такой системы проводников следует принять во внимание, что в этом случае линейные плотности зарядов цилиндров также равны по величине и противоположны по знаку. Поэтому для выполнения расчета можно применить тот же прием, что и в предыдущем случае. А именно, найти положение эквивалентных электрических осей цилиндров и линейные плотности зарядов осей. Координаты электрических осей рассчитываются так же, как и выше, по формулам 2.13 и 2.14. Линейную плотность заряда осей будем искать, исходя из того, что поверхности цилиндров в поле эквивалентных электрических осей являются эквипотенциальными поверхностями. Радиус этих поверхностей равен R, а координата центра – $\pm h$. Тогда параметр k_0 этих эквипотенциалей может быть найден путем исключения b из формул 2.10 и 2.11. Получаем

$$k_0 = \frac{|h|}{R} \pm \sqrt{\frac{h^2}{R^2} - 1} = \frac{|h| \pm \sqrt{h^2 - R^2}}{R}.$$

Для любой точки эквипотенциали

$$|\varphi| = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a} \ln \frac{|h| \pm \sqrt{h^2 - R^2}}{R}.$$

Следовательно, линейная плотность зарядов цилиндров и, соответственно, эквивалентных электрических осей выражается следующим образом

$$\pm\tau = \frac{\pm 2\pi\varepsilon_a \varphi}{\ln \frac{|h| + \sqrt{h^2 - R^2}}{R}} = \frac{\pm 2\pi\varepsilon_a \varphi}{\ln \frac{0.5D + \sqrt{(0.5D)^2 - R^2}}{R}} \qquad (2.15)$$

Зная положение и линейную плотность зарядов эквивалентных электрических осей можно рассчитать параметры электрического поля в любой точке плоскости xOy и построить картину поля во внешней для проводников области по (2.4) – (2.8).

3. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ДВУХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ НЕСООСНЫХ ЦИЛИНДРОВ

Электростатическое поле в пространстве вокруг двух параллельных несоосных заряженных цилиндров, имеющих бесконечно большую длину и круглые сечения радиусов R_1 и R_2, можно рассчитать, исходя из тех же соображений, что и в случае двух цилиндров равного радиуса. Все рассуждения, проведенные в предыдущем разделе для цилиндров равного радиуса, остаются в силе и для рассматриваемого случая. Поэтому для координат электрических осей рассматриваемых цилиндров также будут справедлива формула [3]

$$b = \pm\sqrt{h_1^2 - R_1^2} = \pm\sqrt{h_2^2 - R_2^2}\,, \qquad (3.1)$$

где h_1 – координата геометрической оси первого цилиндра, м;

h_2 – координата геометрической оси второго цилиндра, м.

Как правило, в технических задачах заданы радиусы цилиндров и расстояние между их геометрическими осями. Необходимо найти расстояния от геометрических осей цилиндров до линии нулевого потенциала, которая является прямой и принята за ось Oy. Эти расстояния и будут координатами геометрических осей цилиндров.

Из (3.1) имеем

$$b^2 = h_1^2 - R_1^2 = h_2^2 - R_1^2$$

и, следовательно

$$(h_1 + h_2)(h_2 - h_1) = R_2^2 - R_1^2\,. \qquad (3.2)$$

Рассмотрим два случая: первый случай – цилиндры не охватывают друг друга (рисунок 3.1), второй случай – цилиндры охватывают друг друга (рисунок 3.2).

Рисунок 3.1. – Параллельные несоосные цилиндры, не охватывающие друг друга

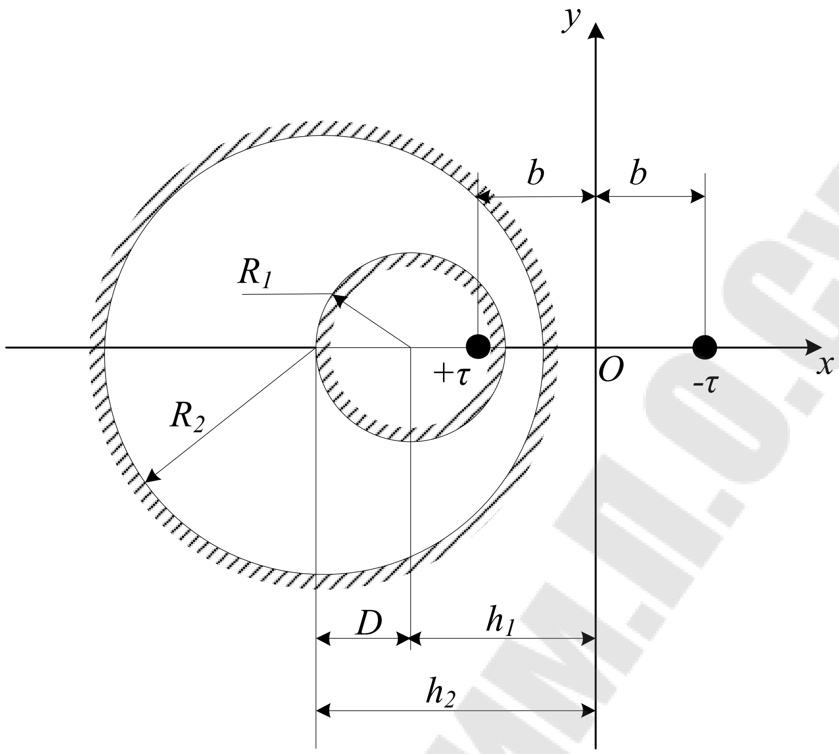

Рисунок 3.2. – Параллельные несоосные цилиндры, охватывающие друг друга

В первом случае из рисунка 3.1 следует

$$h_1 + h_2 = D \quad h_2 - h_1 = \frac{R_2^2 - R_1^2}{D}.$$

Из этих соотношений и из 3.2 получаем

$$h_1 = \frac{D^2 + R_1^2 - R_2^2}{2D} \tag{3.3}$$

$$h_2 = \frac{D^2 + R_2^2 - R_1^2}{2D} \tag{3.4}$$

Во втором случае из рисунка 3.2 следует, что

$$h_1 - h_2 = D \quad h_2 + h_1 = \frac{R_2^2 - R_1^2}{D}.$$

Тогда (3.2) дает

$$h_1 = -\frac{D^2 + R_1^2 - R_2^2}{2D} \tag{3.5}$$

$$h_2 = \frac{D^2 + R_2^2 - R_1^2}{2D}. \tag{3.6}$$

Зная координаты геометрических осей цилиндров, можно вычислить координаты электрических осей этих цилиндров по (3.1).

При проведении практических расчетов поля зачастую известны напряжение между заряженными цилиндрами и геометрическая конфигурация задачи. Для того чтобы рассчитать поле в этом случае, следует найти линейные плотности зарядов эквивалентных электрических осей. Для этого необходимо выразить напряжение между двумя ближайшими точками цилиндров через неизвестную плотность заряда, а затем решить полученное уравнение относительно плотности заряда [6].

В случае, показанном на рисунке 3.1

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a}\ln\frac{b + |h_1| - R_1}{b - |h_1| + R_1} - \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a}\ln\frac{b - |h_2| + R_2}{b + |h_2| - R_2} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a}\ln\frac{b + |h_1| - R_1}{b - |h_1| + R_1}\cdot\frac{b + |h_2| - R_2}{b - |h_2| + R_2}.$$

Тогда линейная плотность заряда

$$\tau = \frac{2\pi\varepsilon_a U}{\ln\dfrac{b + |h_1| - R_1}{b - |h_1| + R_1}\cdot\dfrac{b + |h_2| - R_2}{b - |h_2| + R_2}} \tag{3.7}$$

В случае, показанном на рисунке 3.2

$$U=\varphi_1-\varphi_2=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a}\ln\frac{b+|h_1|-R_1}{b-|h_1|+R_1}-\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a}\ln\frac{b+|h_2|-R_2}{b-|h_2|+R_2}=$$

$$\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a}\ln\frac{b+|h_1|-R_1}{b-|h_1|+R_1}\cdot\frac{b-|h_2|+R_2}{b+|h_2|-R_2}.$$

Следовательно

$$\tau=\frac{2\pi\varepsilon_a U}{\ln\dfrac{b+|h_1|-R_1}{b-|h_1|+R_1}\cdot\dfrac{b-|h_2|+R_2}{b+|h_2|-R_2}}. \qquad (3.8)$$

Зная положение и линейную плотность зарядов эквивалентных электрических осей, можно рассчитать параметры электрического поля и построить картину поля во внешней области для не охватывающих друг друга цилиндров или внутри охватывающего цилиндра по (2.4) – (2.8).

4. ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ЕМКОСТЬ МЕЖДУ ДВУМЯ КРУГЛЫМИ НЕСООСНЫМИ ЦИЛИНДРАМИ

Из курса общей физики [7] известно, что заряд уединенного проводника прямо пропорционален потенциалу поверхности проводника. При этом коэффициент пропорциональности зависит от формы и размеров проводника, а также от свойств окружающей проводник диэлектрической среды. Этот коэффициент называется электрической емкостью.

В системе двух близко расположенных друг от друга проводников, заряженных равными по величине и противоположными по знаку зарядами, заряд проводника прямо пропорционален разности потенциалов проводников. Коэффициент пропорциональности называется взаимной емкостью. Таким образом, взаимная емкость двух проводников определяется как отношение заряда одного из проводников и разности потенциалов (напряжения) между проводниками. Взаимная емкость двух проводников зависит от формы и размеров проводника, а также от свойств окружающей проводник диэлектрической среды.

Если два проводника имеют длину, достаточную для того, чтобы считать их бесконечно длинными, то емкость этих проводников вычисляется на единицу длины. Емкость на единицу длины (погонная емкость) является весьма важным параметром линий электропередач, используемым при решении множества практических задач.

Приведем без вывода формулы для расчета емкости между двумя параллельными круглыми несоосными цилиндрами бесконечной длины.

В случае не охватывающих друг друга цилиндров (рисунок 3.1) формула для емкости имеет вид [3]

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_a}{\ln\left[\left(\frac{h_1}{R_1} + \sqrt{\left(\frac{h_1}{R_1}\right)^2 - 1}\right) \cdot \left(\frac{h_2}{R_2} + \sqrt{\left(\frac{h_2}{R_2}\right)^2 - 1}\right)\right]}. \qquad (4.1)$$

В случае охватывающих друг друга цилиндров (рисунок 3.2) имеется следующая формула для емкости [3]

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_a}{\ln\left[\left(\frac{h_1}{R_1} + \sqrt{\left(\frac{h_1}{R_1}\right)^2 - 1}\right) : \left(\frac{h_2}{R_2} + \sqrt{\left(\frac{h_2}{R_2}\right)^2 - 1}\right)\right]}. \qquad (4.2)$$

5. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Расчетно-графическая работа по разделу «Теория электромагнитного поля» содержит три задачи. От студента требуется:

- рассчитать и построить картину поля во внешнем пространстве для заданных параллельных несоосных заряженных цилиндров;
- рассчитать распределение нормальной составляющей вектора напряженности электростатического поля по направляющей одного из цилиндров и построить эллипсоид указанного распределения;
- вычислить взаимную емкость в системе цилиндров.

Рекомендуемый порядок решения задач приведен ниже.

А. Расчет и построение картины поля.

1. Если в условии задачи задано напряжение между цилиндрами, то вычислить полный заряд цилиндров по (2.23) или (2.24).
2. Определить положение электрических осей (см. параграф 3).
3. Найти центры и радиусы нескольких эквипотенциалей. Чтобы получить аккуратные чертежи, достаточно вычислить три или четыре эквипотенциали слева от оси *Oy* и столько же справа в случае не охватывающих друг друга цилиндров. Если цилиндры охватывают друг друга, то достаточно рассчитать три или четыре эквипотенциали в пространстве между цилиндрами. При этом в формуле (2.12) параметры геометрической прогрессии B и k_1 принять произвольными, удобными для построений. Если эквипотенциаль лежит слева от оси *Oy,* то принимаем $k>1$, если же эквипотенциаль лежит справа, то $k<1$.
4. Вычислить координаты произвольной точки каждой эквипотенциали. Удобно рассматривать точки пересечения эквипотенциали с осью *Ox*. Координаты этих точек следует определять при помощи параметрического уравнения окружности.
5. Вычислить потенциал точки каждой эквипотенциальной линии. Расстояния между этими точками и электрическими осями находятся из геометрических соображений или по известной формуле для расстояния между двумя точками на плоскости.
6. Выполнить чертеж на миллиметровой бумаге. На чертеже изобразить в достаточно крупном для хорошего восприятия масштабе заданные цилиндрические проводники, систему координат, расположение эквивалентных электрических осей, эквипотенциальные линии. У каждой эквипотенциали указать значение потенциала, который имеют точки этой линии.

Б. Расчет распределения вектора напряженности и построение эллипсоида распределения.

Эллипсоид распределения вектора напряженности электростатического поля строится для цилиндра меньшего радиуса. Распределение напряженности поля по направляющей цилиндра рассчитывается в следующем порядке.

1. На направляющей выбрать восемь или более точек, причем эти точки должны быть равномерно распределены по направляющей. Координаты точек вычисляются по известным параметрическим уравнениям окружности.
2. Вычислить составляющие напряженности поля E_x, E_y по формулам (2.5) – (2.6) или (2.7) – (2.8).
3. Рассчитать нормальную составляющая вектора напряженности электростатического поля в выбранных точках по формуле $E_n = E_x \cos\theta + E_y \cos(90^\circ - \theta)$. Ее легко вывести из геометрических соображений (см. рисунок 5.1).
4. Выполнить чертеж. На нем изображается направляющая рассматриваемого цилиндра с выбранными точками. Из каждой точки в масштабе откладывается вектор нормальной составляющей вектора напряженности поля. Концы векторов соединяются плавной линией.

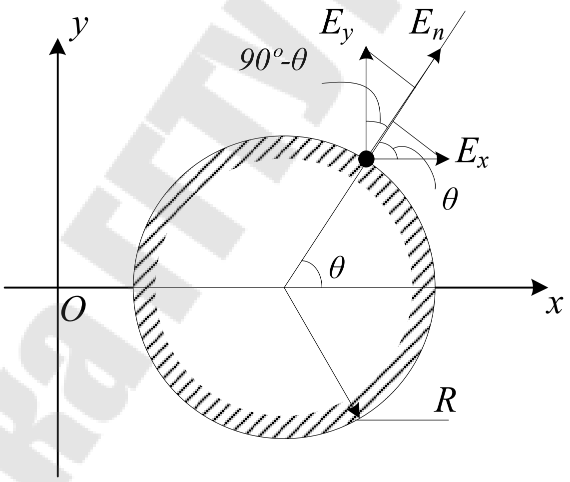

Рисунок 5.1. – Вычисление нормальной составляющей напряженности на направляющей цилиндра

Согласно второму граничному условию, распределение вектора напряженности электростатического поля соответствует распределению поверхностной плотности электростатического заряда по поверхности проводящего цилиндра.

В завершение выполнения расчетно-графической работы рассчитывается взаимная емкость между цилиндрами по формулам параграфа 4.

Указание 1. Картина поля и эллипсоид распределения напряженности должны быть построены *обязательно* на отдельных чертежах в целях обеспечения аккуратности и понятности.

Указание 2. При выполнении однотипных расчетов достаточно привести полностью один завершенный расчет с подробными пояснениями. Результаты остальных расчетов свести в таблицу.

Указание 3. При выполнении расчетов на ЭВМ порядок расчетов описать в основной части работы, а результаты расчетов свести в таблицу, которую привести в основной части работы. Распечатки расчетов оформить, как приложения.

6. ПРИМЕР РАСЧЕТА ПОЛЯ ДВУХПРОВОДНОЙ ЛИНИИ

Рассмотрим пример расчета характеристик поля двухпроводной линии, выполненный в соответствии с приведенным в параграфе 5 порядком.

Дана двухпроводная линия, состоящая из двух бесконечных цилиндров. Радиусы цилиндров равны между собой и составляют 0,02 м. (рисунок 2.3) . Расстояние между геометрическими осями цилиндров равно 0,06 м. Линейная плотность заряда цилиндров равна $\pm 1\cdot10^{-4}$ Кл/м. Будем считать, что отрицательно заряженный цилиндр расположен справа от оси *Oy*.

Требуется.

- Рассчитать параметры одной пары эквипотенциальных линий поля линии.
- Рассчитать значение вектора нормальной составляющей вектора напряженности поля в одной из точек направляющей левого цилиндра.
- Вычислить взаимную емкость между цилиндрами.

А. Расчет параметров эквипотенциалей.

1. В условии задана линейная плотность заряда цилиндров, следовательно дополнительные расчеты не требуются.

2. По формуле (2.14) определяем положение эквивалентных электрических осей.

$$b = \pm\sqrt{\frac{(0.06)^2}{4} - 0.02^2} = \pm 2.236 \cdot 10^{-2} \quad \text{м.}$$

3. Для расчета одной пары эквипотенциалей принимаем знаменатель прогрессии в (2.12) $B = \sqrt{2}$. Для левого цилиндра примем k_1=1.5, для левого – k_1=0.8.

По формулам (2.10) и (2.11) имеем для левой эквипотенциали

$$x_0 = \frac{1+1.5^2}{1-1.5^2} 2.236 \cdot 10^{-2} = -5.81 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

$$R = \frac{2 \cdot 1.5}{1-1.5^2} 2.236 \cdot 10^{-2} = 5.36 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Для правой эквипотенциали аналогично получаем

$$x_0 = \frac{1+0.8^2}{1-0.8^2} 2.236 \cdot 10^{-2} = 1.02 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

$$R = \frac{2 \cdot 0.8}{1-1.5^2} 2.236 \cdot 10^{-2} = 9.93 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

4. Принимаем параметр t в параметрическом уравнении эквипотенциалей равным 45°. Тогда координаты точки левой эквипотенциали

$$x = 5.36 \cdot 10^{-2} \cos 45^\circ + \left(-5.81 \cdot 10^{-2}\right) = -2.02 \cdot 10^{-2} \text{ м,}$$
$$y = 5.36 \cdot 10^{-2} \sin 45^\circ = 3.76 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Точка правой эквипотенциали имеет координаты

$$x = 9.93 \cdot 10^{-2} \cos 45^\circ + \left(1.02 \cdot 10^{-2}\right) = 8.04 \cdot 10^{-2} \text{ м,}$$
$$y = 9.93 \cdot 10^{-2} \sin 45^\circ = 7.02 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

5. По формуле (2.4) и формуле расстояния между двумя точками на плоскости рассчитываем потенциалы точек эквипотенциальных линий, левой

$$\varphi = \frac{1\cdot 10^{-4}}{2\pi\cdot 8.85\cdot 10^{-12}}\ln\frac{\sqrt{\left(2.236\cdot 10^{-2}+2.02\cdot 10^{-2}\right)^2+\left(3.79\cdot 10^{-2}\right)^2}}{\sqrt{\left(-2.236\cdot 10^{-2}+2.02\cdot 10^{-2}\right)^2+\left(3.79\cdot 10^{-2}\right)^2}} =$$

$= 730679$ В,

и правой

$$\varphi = \frac{1\cdot 10^{-4}}{2\pi\cdot 8.85\cdot 10^{-12}}\ln\frac{\sqrt{\left(2.236\cdot 10^{-2}-8.04\cdot 10^{-2}\right)^2+\left(7.02\cdot 10^{-2}\right)^2}}{\sqrt{\left(-2.236\cdot 10^{-2}-8.04\cdot 10^{-2}\right)^2+\left(7.02\cdot 10^{-2}\right)^2}} =$$

$= -561180$ В.

Б. Расчет нормальной составляющей вектора напряженности электростатического поля.

1. Принимаем параметр t в параметрическом уравнении направляющей равным 45º.

Тогда координаты точки на направляющей левого цилиндра

$$x = 0.02\cos 45^\circ - 0.03 = -1.585\cdot 10^{-2} \text{ м},$$
$$y = 0.02\sin 45^\circ = 1.414\cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

2. По формулам (2.7) и (2.8) вычисляем проекции вектора напряженности на оси Ox и Oy.

$$E_x = \frac{1\cdot 10^{-4}}{2\pi\cdot 8.85\cdot 10^{-12}}\left(\frac{-1.585\cdot 10^{-2}+2.23610^{-2}}{\left(-1.585\cdot 10^{-2}+2.23610^{-2}\right)^2+\left(0-1.414\cdot 10^{-2}\right)^2}-\right.$$
$$\left.-\frac{-1.585\cdot 10^{-2}-2.23610^{-2}}{\left(-1.585\cdot 10^{-2}-2.23610^{-2}\right)^2+\left(0-1.414\cdot 10^{-2}\right)^2}\right) = 8.96\cdot 10^{7} \text{ В/м}.$$

$$E_y = \frac{1\cdot 10^{-4}}{2\pi\cdot 8.85\cdot 10^{-12}}\left(\frac{1.414\cdot 10^{-2}}{\left(-1.585\cdot 10^{-2}+2.23610^{-2}\right)^2+\left(0-1.414\cdot 10^{-2}\right)^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{1.414\cdot 10^{-2}}{\left(-1.585\cdot 10^{-2}-2.23610^{-2}\right)^2+\left(0-1.414\cdot 10^{-2}\right)^2}\right) = 8.96\cdot 10^{7}\ \text{В/м.}$$

3. Нормальная составляющая вектора напряженности электростатического поля в рассматриваемой точке направляющей равна

$$E_n = 8.96\cdot 10^{7}\cos\left(45^\circ\right) + 8.96\cdot 10^{7}\cos\left(45^\circ\right) = 1.27\cdot 10^{8}\ \text{В/м.}$$

В заключение примера вычислим взаимную емкость между проводниками такой линии. Эта емкость может быть вычислена по формуле [3].

$$C = \frac{\pi\varepsilon_a}{\ln\left(\frac{D}{2R}+\sqrt{\frac{D^2}{4R^2}-1}\right)}\ .$$

Подстановка численных значений дает

$$C = \frac{\pi\cdot 8.85\cdot 10^{-12}}{\ln\left(\frac{0.06}{2\cdot 0.02}+\sqrt{\frac{0.06^2}{4\cdot 0.02^2}-1}\right)} = 2.89\cdot 10^{-11}\ \Phi\text{/м}.$$

6. ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ НА РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКУЮ РАБОТУ

Таблица 6.1

Исходные данные к расчету

Вариант задания	Расположение электродов, рисунок	R_1, м.	R_2, м.	D,м.	$\tau \cdot 10^{-9}$, Кл/м	U, В.
1	2.4	0.01	0.02	0.06	1	-
2	2.5	0.02	0.05	0.02	1	-
3	2.4	0.01	0.03	0.05	-	1000
4	2.5	0.02	0.07	0.03	-	500
5	2.4	0.015	0.04	0.07	1.5	-
6	2.5	0.02	0.08	0.04	1.5	-
7	2.4	0.02	0.05	0.09	-	500
8	2.5	0.03	0.09	0.04	-	1000
9	2.4	0.025	0.06	0.11	2	-
10	2.5	0.03	0.1	0.05	2	-
11	2.4	0.03	0.07	0.14	-	600
12	2.5	0.03	0.11	0.05	-	600
13	2.4	0.035	0.08	0.15	2.5	-
14	2.5	0.02	0.12	0.07	2.5	-
15	2.4	0.04	0.09	0.17	-	1100
16	2.5	0.03	0.12	0.05	-	700
17	2.4	0.45	0.1	0.19	3	-
18	2.5	0.03	0.14	0.08	3	-
19	2.4	0.05	0.11	0.29	-	900
20	2.5	0.02	0.14	0.05	-	900
21	2.4	0.55	0.12	0.23	4	-
22	2.5	0.04	0.15	0.09	4.5	-
23	2.4	0.6	0.13	0.25	-	800
24	2.5	0.02	0.15	0.05	-	500
25	2.4	0.65	0.14	0.27	4.5	-
26	2.5	0.04	0.16	0.06	5	-
27	2.4	0.07	0.03	0.06	-	700
28	2.5	0.03	0.16	0.08	-	700
29	2.4	0.02	0.04	0.08	5	-
30	2.5	0.01	0.05	0.02	6	-
31	2.4	0.02	0.05	0.1	-	1000
32	2.5	0.02	0.07	0.03	-	1000
33	2.4	0.02	0.06	0.11	1	-

Окончание таблицы 6.1

Вариант задания	Расположение электродов, рисунок	R_1, м.	R_2, м.	D,м.	$\tau \cdot 10^{-9}$, Кл/м	U, В.
34	2.5	0.02	0.1	0.5	2	-
35	2.4	0.03	0.07	0.15	-	1200
36	2.5	0.1	0.11	0.07	-	600
37	2.4	0.035	0.08	0.16	1.5	-
38	2.5	0.03	0.09	0.04	3	-
39	2.4	0.04	0.09	0.19	-	700
40	2.5	0.04	0.12	0.05	-	800

Список литературы

1. **Бессонов, Л. А.** Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле. : учеб. для электротехнич., энегетич. и приборостроит. спец. вузов. – 8-е изд. перераб. и доп. / Л. А. Бессонов. – М.: Высшая школа, 1986. – 262 с.
2. **Теоретические основы электротехники**: в 3 т. / К. С. Демирчан [и др.]. – 4-е изд., дополн. – СПб.: Питер, 2006. – Т. 1. – 463 с.
3. **Теоретические основы электротехники**: в 3 т. / К. С. Демирчан [и др.]. – 4-е изд., дополн. – СПб.: Питер, 2006. – Т. 3. – 377 с.
4. **Аполлонский, С. М.** Расчеты электромагнитных полей : [монография] / С. М. Аполлонский, С. М. Горский. – М.: Маршрут, 2006. – 992 с.
5. **Фальковский, О. М.** Техническая электродинамика / О. М. Фальковский. – М.: Связь, 1978. – 432 с.
6. **Коровкин, Н. В.** Теоретические основы электротехники: сборник задач / Н. В. Коровкин, Е. Е. Селина, В. Л. Чечурин. – СПб.: Питер, 2004. – 512 с.
7. **Яворский, Б. М.** Справочник по физике / Б. М. Яворский, А. А. Детлаф. – М.: Наука, 1981. – 512 с.

Комнатный Дмитрий Викторович

РАСЧЕТ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ ДВУХ БЕСКОНЕЧНЫХ НЕСООСНЫХ ЦИЛИНДРОВ

Пособие
по курсу «Теоретические основы электротехники» для студентов специальности 1-43 01 02 «Электроэнергетические системы и сети» дневной формы обучения

Подписано в печать 12.11.2010.
Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».
Ризография. Усл. печ. л. 1,63. Уч.-изд. л. 1,33.
Изд. № 82.
E-mail: ic@gstu.by
http://www.gstu.by

Отпечатано на цифровом дупликаторе
с макета оригинала авторского для внутреннего использования.
Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого».
246746, г. Гомель, пр. Октября, 48.