

УДК 62-83: 621.313.333

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАЛОГО ПАРАМЕТРА АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ «ОДНОФАЗНЫЙ АСИНХРОННЫЙ ДВИГАТЕЛЬ – ЛИНЕЙНЫЙ УПРУГИЙ ЭЛЕМЕНТ»

Докт. техн. наук, проф. **ЛУКОВНИКОВ В. И.**,

канд. техн. наук, доц. РУДЧЕНКО Ю. А., асп. САМОВЕНДЮК Н. В.

Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого

Общим классом автоколебательных систем с одной степенью свободы являются системы, описываемые уравнением

$$\ddot{x} + x = \mu f(\dot{x}), \quad (1)$$

где x , \dot{x} , \ddot{x} – относительная координата положения и ее первая (скорость) и вторая (ускорение) производные по времени; $f(\dot{x})$ – функция, определяемая диссипативными силами нагрузки и силами подпитки от источника; μ – малый параметр, который определяет близость системы к линейной консервативной.

К данному классу относится, например, известное уравнение Ван-дер-Поля

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = 0, \quad (2)$$

которое достаточно хорошо описывает некоторые автоколебательные системы.

Предположение о том, что автоколебания близки к синусоидальным, широко используется в теории колебаний для асимптотического решения уравнений вида (1). Такие приближенные методы, как метод Ван-дер-Поля, Пуанкаре и др., основаны на этом предположении [1]. Точность решения, например по методу Ван-дер-Поля, напрямую зависит от величины малого параметра μ .

Целью данной работы является получение аналитического выражения для малого параметра автоколебательной системы «однофазный асинхронный двигатель – линейный упругий элемент» [2]. Это позволит определить область применения и погрешность приближенных методов при использовании их для анализа автоколебательных систем данного вида.

Уравнение движения автоколебательной системы «однофазный асинхронный электродвигатель – линейный упругий элемент» при отсутствии

сухого трения и аппроксимации механической характеристики двигателя по Сюмеку [3] в производных по абсолютному времени t имеет вид

$$J\ddot{\varphi} = \frac{3\sqrt{3}M_{\text{кр.ОАД}}}{2\omega_1}\dot{\varphi} - \frac{3\sqrt{3}M_{\text{кр.ОАД}}}{2\omega_1^3}\dot{\varphi}^3 - H\dot{\varphi} - C\varphi,$$

где H – коэффициент жидкостного трения (демпфирование); J – момент инерции системы; C – коэффициент жесткости; $M_{\text{кр.ОАД}}$ – критический момент ОАД; ω_1 – скорость идеального холостого хода ОАД.

Введя относительное время $\tau = \omega_0 t$, где $\omega_0 = \sqrt{C/J}$ – собственная частота колебаний, упростим данное уравнение, приведя его к виду

$$\ddot{\varphi} - \mu_1\dot{\varphi} + \mu_2\dot{\varphi}^3 + \mu_3\dot{\varphi} + \varphi = 0, \quad (3)$$

где φ , $\dot{\varphi}$, $\ddot{\varphi}$ – относительные угловая координата, скорость и ускорение; μ_1, \dots, μ_3 – относительные коэффициенты, которые зависят от параметров двигателя и упругого элемента.

Уравнение (3) приводится к уравнению Ван-дер-Поля (2) с помощью замен

$$x = \dot{\varphi} \sqrt{\frac{3\mu_2}{\mu_1 - \mu_3}}, \quad \mu = \mu_1 - \mu_3.$$

Таким образом получим выражение для малого параметра автоколебательной системы «однофазный асинхронный электродвигатель – линейный упругий элемент»

$$\mu = \frac{3\sqrt{3}M_{\text{кр.ОАД}} - 2\omega_1 H}{2J\omega_0\omega_1}. \quad (4)$$

Проанализируем далее, как влияет величина малого параметра μ на погрешность метода Ван-дер-Поля при решении уравнения движения автоколебательной системы «однофазный асинхронный электродвигатель – линейный упругий элемент» (3).

Решение уравнения (3) методом Ван-дер-Поля дает три корня для амплитуды колебаний [4]:

$$\varphi_{m1} = 0; \quad \varphi_{m2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{\mu_1 - \mu_3}{\mu_2}}; \quad \varphi_{m3} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{\mu_1 - \mu_3}{\mu_2}}. \quad (5)$$

Анализ устойчивости данных решений показывает, что состоянию устойчивого равновесия соответствует амплитуда колебаний φ_{m2} .

Относительную погрешность будем рассчитывать по формуле

$$\delta = \frac{|\varphi_m - \varphi_{m2}|}{\varphi_m} \cdot 100\%,$$

где φ_m – амплитуда колебаний, найденная в результате численного решения уравнения движения (3); φ_{m2} – то же, найденная по (5), которые получены в результате решения уравнения (3) методом Ван-дер-Поля.

Численное решение уравнения движения (3) проводилось в программном пакете MatLab. Результаты расчетов для характерных случаев нелинейности системы представлены ниже в виде временных диаграмм на рис. 1–3.

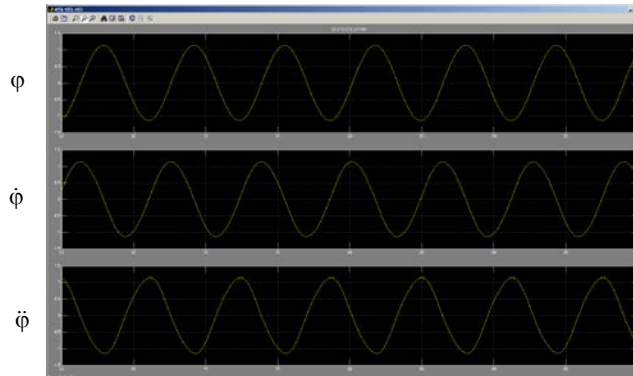


Рис. 1. Временные диаграммы φ , $\dot{\varphi}$, $\ddot{\varphi}$ при «малой» нелинейности системы ($\mu = 0,1$)

1. Случай «малой» нелинейности автоколебательной системы ($\mu \ll 1$).

Задаем параметры автоколебательной системы «однофазный асинхронный электродвигатель – линейный упругий элемент» такими, чтобы малый параметр составлял $\mu = 0,1$.

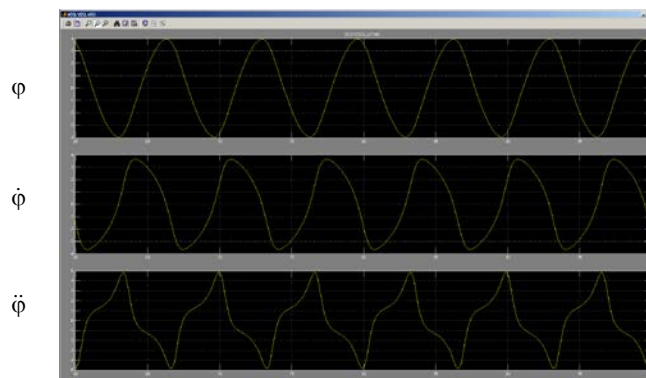


Рис. 2. Временные диаграммы φ , $\dot{\varphi}$, $\ddot{\varphi}$ при «средней» нелинейности системы ($\mu = 1$)

В результате решения (3) с заданными параметрами методом Ван-дер-Поля по (5) получаем амплитуду устойчивых колебаний $\varphi_{m2} = 1,155$ о. е.

Амплитуда колебаний, найденная по временным диаграммам (рис. 1) в результате численного решения уравнения движения (3) в программном пакете MatLab $\varphi_m = 1,142$ о. е. Как видно из рис. 1, в системе с «малой» нелинейностью относительные угловая координата φ , скорость $\dot{\varphi}$ и ускорение $\ddot{\varphi}$ изменяются по синусоидальному закону.

Погрешность метода Ван-дер-Поля для случая «малой» нелинейности автоколебательной системы составит

$$\delta = \frac{|\varphi_m - \varphi_{m2}|}{\varphi_m} \cdot 100\% = \frac{|1,142 - 1,155|}{1,142} \cdot 100\% = 1,14\%.$$

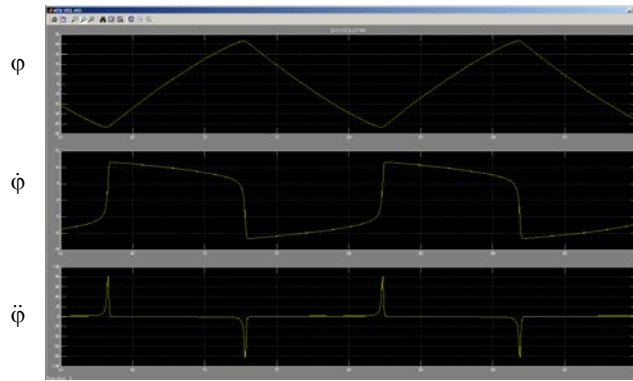


Рис. 3. Временные диаграммы φ , $\dot{\varphi}$, $\ddot{\varphi}$ при «большой» нелинейности системы ($\mu = 10$)

2. Случай «средней» нелинейности автоколебательной системы ($\mu = 1$).

Задаем параметры автоколебательной системы «однофазный асинхронный электродвигатель – линейный упругий элемент» такими, чтобы $\mu = 1$.

В результате решения (3) с заданными параметрами методом Ван-дер-Поля по (5) получаем амплитуду устойчивых колебаний $\varphi_{m2} = 3,651$ о. е.

Амплитуда колебаний, найденная по временным диаграммам (рис. 2) в результате численного решения уравнения движения (3) в программном пакете MatLab, 4 о. е. Как видно из рис. 2, в данном случае нелинейность системы проявляется в несинусоидальности автоколебательного движения, что особенно заметно для ускорения $\ddot{\varphi}$.

Погрешность метода Ван-дер-Поля для данного случая $\delta = 8,73$ %.

3. Случай «большой» нелинейности автоколебательной системы ($\mu = 10$).

Задаем параметры автоколебательной системы «однофазный асинхронный электродвигатель – линейный упругий элемент» такими, чтобы $\mu = 10$.

В результате решения (3) с заданными параметрами методом Ван-дер-Поля по (5) получаем амплитуду устойчивых колебаний $\varphi_{m2} = 11,55$ о. е.

Амплитуда колебаний, найденная по временным диаграммам (рис. 3) в результате численного решения уравнения движения (3) в программном пакете MatLab $\varphi_m = 43,55$ о. е. Как видно из рис. 3, в случае «большой» нелинейности системы несинусоидальность проявляется и по относительной угловой координате φ , и по скорости $\dot{\varphi}$, и по ускорению $\ddot{\varphi}$.

Погрешность метода Ван-дер-Поля для данного случая $\delta = 74,48$ %.

Проведя дополнительные расчеты для промежуточных значений малого параметра μ , в диапазоне 0,1–10,0 получим зависимость $\delta = f(\mu)$, график которой представлен на рис. 4.

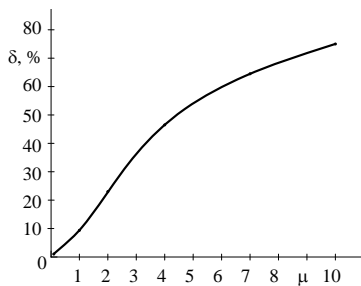


Рис. 4. Зависимость погрешности метода Ван-дер-Поля δ от величины малого параметра μ для автоколебательной системы «однофазный асинхронный электродвигатель – линейный упругий элемент»

ВЫВОДЫ

1. Получено выражение (4) для определения малого параметра, который определяет близость нелинейной автоколебательной системы к линейной консервативной. Данное выражение совместно с графиком зависимости $\delta = f(\mu)$ можно использовать для определения погрешности, которую дают асимптотические методы анализа автоколебательной системы, описанной в данной работе (в частности, метод Ван-дер-Поля).

2. Выражение (4) можно использовать при проектировании приводов на основе однофазных асинхронных электродвигателей, работающих в автоколебательном режиме. Следует выбирать электродвигатель и нагрузку с такими параметрами, чтобы значение малого параметра было как можно меньше. В этом случае мощность двигателя не будет затрачиваться на растягивание или сжатие пружины, а идти только на компенсацию потерь трения в системе, что приведет к улучшению энергетических характеристик электропривода.

3. Получена зависимость погрешности метода Ван-дер-Поля δ от величины малого параметра μ для автоколебательной системы «однофазный асинхронный электродвигатель – линейный упругий элемент» (рис. 4). Из рис. 4 видно, что приближенные методы анализа уравнения движения (в частности, метод Ван-дер-Поля) дают удовлетворительные результаты лишь при $\mu < 1$, в этом случае погрешность менее 10 %. Если же $\mu < 0,1$, то закон колебаний можно считать гармоническим и погрешность расчетов не превышает 1 %.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андронов, А. А. Теория колебаний / А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин. – М.: Физматгиз, 1959. – 915 с.
2. Луковников, В. И. Физические процессы автоколебательного движения в системе «однофазный асинхронный электродвигатель – упругий элемент» / В. И. Луковников, Ю. А. Рудченко // Вестник ГГТУ имени П. О. Сухого. – 2006. – № 4. – С. 60–66.
3. Sumec, I. K. Der einphasige Induktionsmotor / I. K. Sumec // Archiv der Math. Und Physik. – 1905. – Bd8. – S. 306.
4. Луковников, В. И. Критический сравнительный анализ методов исследования электромеханических автоколебательных систем / В. И. Луковников, Ю. А. Рудченко, Г. И. Селиверстов // Вестник ГГТУ имени П. О. Сухого. – 2007. – № 2. – С. 76–81.

Представлена кафедрой
электроснабжения

Поступила 04.11.2010