*Д. В. **Комнатный**, доцент кафедры «Теоретические основы электротехники» Гомельского государственного технического университета имени П. О. Сухого*

ДОСТИЖЕНИЯ ТРАДИЦИОННОЙ МАТЕМАТИКИ ЯПОНИИ

Начиная с XVII и до середины XIX в. в Японии наблюдался расцвет математических исследований, подобного которому не имелось в предыдущие эпохи. Эти исследования хотя и базировались на результатах предшествующих трудов китайских математиков, но были во многом самостоятельными в выборе изучаемых проблем и создании методов их решения. Углубляя и расширяя математические знания, японские учёные получили неординарные и интересные результаты, во многом не уступающие достижениям математиков Европы.

Тем не менее содержание традиционной японской математики остаётся практически неизвестным в странах СНГ, в том числе и в Беларуси. Даже в обобщающей монографии об истории науки и техники в Японии [1] содержатся некорректные сведения по этому вопросу. Кроме того, указанный источник не позволяет решить вопрос о возможности применения японской математической традиции в современности. Поэтому целью настоящей статьи является заполнение указанных пробелов в историко-математических исследованиях.

Появление самобытных математических школ в Японии берёт начало в период объединения страны под властью сёгунов дома Токугава (1603—1643). Прекращение внутренних войн и междоусобиц благоприятно сказалось на развитии всех сторон культуры. Значительное влияние имели и торговые связи со странами Востока и Запада, существовавшие вплоть до «закрытия» страны в 1641 г. Следует полагать, что именно эти процессы общественной жизни способствовали созданию математической школы *Мори Сигеёши*. Книги этого математика достаточно просты по содержанию и излагают правила работы с японскими счётами соробан. Главная заслуга Мори Сигеёши состоит в усвоении китайских достижений и передаче стремления к математической образованности многим своим ученикам. В частности, *Иошида Мицуоки* (1598—1672) составил и издал первый японский сборник задач Дзинкоку. В него вошли задачи о счёте на соробане, об извлечении корней, о разделе имущества, вычислении площадей и т. д. Книга пользовалась колоссальной популярностью в Японии, многократно переиздавалась с дополнениями.

В трудах следующего поколения математиков Японии начинают появляться темы исследования, демонстрирующие начало самостоятельного развития.

Мурамацу Сигикиё (1608—1695) начал поиски методов уточнения значения числа π по сравнению с известным из Китая. Он осуществил вычисление периметров правильных многоугольников, вписанных в круг единичного радиуса. Вычисление периметра 2^{15}-угольника дало ему 7 верных знаков числа π после запятой. Далее им был вычислен объём сферы методом, основанным на тех же идеях, что и метод Архимеда [2, 3]. Мурамацу Сигикиё ввёл в японскую математику биномы вплоть до восьмой степени, на основе известного из китайских источников треугольника Паскаля. Он увлекался составлением магических квадратов, пришедших из Китая, но изобрёл и оригинальные магические круги.

Исомура Иошинори (1630—1710) продолжил эти исследования. Он нашёл периметр правильного 2^{17}-угольника и определил большее число верных знаков π. Затем он предложил метод вычисления площади круга, подобный известному из работ И. Кеплера [3, 4]. Также Исомура определил площадь поверхности сферы путём рассмотрения разности объёмов двух близко расположенных концентрических сфер. Им была развита идея Мурамацу Сигикиё о вычислении объёмов методом исчерпывания. Кроме того, Исомура Иошинори занимался составлением магических квадратов, магических кругов и наборов таких кругов.

Первые результаты, не уступающие достижениям математиков Европы, были получены в Японии *Секи Такакадзу* (1640—1708) (в европейской литературе Секи Кова). Его считают основателем традиционной японской математики. Прежде всего им заложены основы алгебраических методов решения геометрических задач, которые были столь популярны в Японии на протяжении следующих лет. Развивая китайские методы решения алгебраических уравнений, Секи Такакадзу не только освоил схему Горнера, известную и китайским математикам, но и предложил метод решения алгебраических уравнений, очень схожий с первоначальным вариантом метода Ньютона – Рафсона [3, 5]. Но главным достижением Секи Такакадзу в алгебре является теория определителей, разработанная им в 1633 г., на десять лет раньше Г. В. Лейбница.

В области теории чисел Секи Такакадзу независимо от Фаульхабера, Паскаля и Ферма вывел формулы для сумм степеней чисел от 1 до n вплоть до одиннадцатой степени. Значит, им независимо были введены числа Бернулли. Также Секи Такакадзу описал треугольник Паскаля, изучил частные случаи диофантова уравнения $ax - by = 1$. Поскольку в Японии не ослабевал интерес к магическим фигурам, то Секи Такакадзу дал правила составления магических квадратов и магических кругов [2, 3].

Но вершиной творчества Секи Такакадзу следует признать самостоятельное создание методов, относящихся к началам математического анализа. Им получено правило нахождения экстремумов полиномов, подобное данному П. де Ферма способу решения той же задачи [2, 4]. Далее, исследуя методы отыскания всё более точных значений числа π, Секи Такакадзу высказал идеи, послужившие основой для разработки энри — самобытных инфинитезимальных методов вычисления объёмов и площадей. Ход мысли Секи был таков. Вначале он определял цифры в числе π путём вычисления периметров многоугольников и дал формулу для определения числа π с 11 знаками по периметрам 2^{15}-, 2^{16}-, 2^{17}-угольников. Также им было получено представление числа π в виде подходящих простых дробей. Затем Секи Такакадзу начал рассматривать радиусы окружностей, вписанной и описанной вокруг правильного многоугольника, с целью реализовать нахождение числа π методом — аналогом метода изопериметров Эйлера [3, 6]. Поскольку тригонометрические функции оставались неизвестными в Японии вплоть до XIX в., то расчёты последним методом крайне усложнялись [3]. Тогда Секи Такакадзу перешёл к рассмотрению системы хорд и высот сегментов, которые последовательно делят пополам дугу заданного сектора круга. С помощью аналога метода конечных разностей им было получено соотношение для длины дуги с данными радиусом и высотой сегмента, а на его основе бесконечный ряд для вычисления π^2 [7, 8].

Секи Такакадзу также работал над вычислением объёмов сферы, эллипсоида, тел вращения, образованных сегментом круга или луночкой, а также тела, полученного сечением цилиндра двумя параллельными плоскостями, наклонными к плоскости основания цилиндра. В этом случае он использовал аналог метода неделимых Б. Кавальери [3].

Идеи Секи Такакадзу в области математического анализа подхватил его ученик *Такебе Катахиро* (1664—1739). Им рассмотрены методы вычисления площади круга путём деления дуги на малые отрезки и путём вписывания в круг системы хорд и высот полученных сегментов. Объём сферы он вычислял методом вписывания в сферу и описывания вокруг сферы системы круговых цилиндров и методом вписывания в сферу системы усечённых конусов. Такебе Катахиро смог вывести большое количество бесконечных рядов, связывающих диаметр круга, длину его хорды, высоту сегмента круга, площадь сектора и площадь круга. В частности, один из рядов является аналогом разложения в бесконечный ряд функции $\arcsin x$. Такебе Катахиро поставил проблему ускорения сходимости рядов и создал метод ускорения их сходимости. Таким образом, в Японии была создана оригинальная теория бесконечных рядов, которая стала главенствовать в дальнейших исследованиях по энри. Такебе Катахиро продолжил определение знаков в числе π и нашёл 24 знака этого числа после запятой, причём точность значения π у Катахиро имела порядок 10^{-19}.

Дальнейшие значительные исследования в области инфинитезимальных методов выполнены *Аджима Наонобу* (1732—1798) и *Вада Неи* (1787—1840). Аджима Наонобу при вычислении площади круга разбивал диаметр на малые отрезки, на которых строилась система заполняющих круг прямоугольников, подобно построению суммы Римана в теории определённого интеграла. Пользуясь этим методом, Аджима Наонобу вычислил и объём тела, образованного пересечением двух цилиндров под прямым углом. Им выполнено спрямление спирали Архимеда, использованный для этого метод был подобен методу Архимеда [3]. Также Аджима Наонобу независимо поставил и решил проблему Мальфатти [2] и рассмотрел некоторые геометрические задачи о системах пересекающихся и вписанных кругов.

Вада Неи получил бесконечные ряды для функций $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ и $\sqrt{1-x}$. Пользуясь ими, он составил таблицы коэффициентов бесконечных рядов для вычисления интегралов вида $\int_0^1 x^p(1-x)^q dx$, $\int_0^1 x(1-x)^{\frac{1}{2}-q} dx$, $\int_0^1 x^p(1-x)^{\frac{1}{2}} dx$. Эти достижения позволили ему найти бесконечный ряд для вычисления площади поверхности сферического пояса. Также им был получен бесконечный ряд для длины эллиптической кривой и несколько рядов для значений $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{8}$, $\frac{\pi}{32}$, $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ методом, аналогичным методу Аджимы Наонобу. Вада Неи принадлежат работы по теории гипо- и эпициклоид, по треугольным и квадратным числам.

Таким образом, в трудах этих учёных инфинитезимальные методы достигли уровня, позволявшего не ограничиваться разысканием площади круга и объёма сферы, а осваивать более сложные задачи на вычисление площадей и объёмов различных фигур и тел. Математики Японии поставили и решили большое число задач о вычислении объёмов геометрических тел методом-аналогом определённого интегрирования [9]. Подборка таких задач содержится в книге «Теория интегралов в пяти томах» (1844) математика Учиды Кюмея (?—1868).

В трудах японских математиков XVII—XIX вв. имеются и многие частные проблемы, поставленные и решённые независимо от европейских коллег. Это задача о площади сферического треугольника (Л. Эйлер, 1778; неизвестный ученик Ичино Шигетаки, 1804), теорема Декарта о кругах, независимо опубликованная Накамура Токиказу в 1830 г., гекслеты (Ф. Содди, 1937; Язава Хироацу, 1822), цепочки Штейнера (1826), независимо исследованные в том же году Икеда Сазаказе, теорема Фейербаха (1822), полученная в 1830 г. Накамура Токиказу, теорема Кейси (1857), доказанная Сироиши Нагатада в 1830 г., задача Нойберга (1896), решённая в 1803 г. Ямамото Корихаса, задача о теле Вивиани (Учида Кюмей, 1844) [2].

Даже из беглого обзора, ограниченного объёмом статьи, становится ясным, что традиционная математика в Японии достигла очень высокого уровня. Обращает на себя внимание факт, что при различных подходах к построению математики как науки, исследования в Европе и в Японии проходили по схожим направлениям (например, методы энри и работы Архимеда, Кеплера, Кавальери) и приводили к совпадающим крупным достижениям, каковы теория определителей, теория рядов, методы поиска экстремумов и другие, указанные выше. Тем не менее с XVIII—XIX вв. математические знания Европы начинают превосходить японские достижения. Если сравнить освоение различных областей математики в Европе и в Японии, то можно заметить следующее. В геометрии Японии весьма популярны были задачи, решаемые алгебраическим методом. Интереса к задачам на построение почти не было. Основным типом задач были задачи о сочетаниях четырёхугольников, кругов и эллипсов. Это объясняется влиянием китайской натурфилософии, в которой эти фигуры считались священными [2, 10]. Но совершенно не рассматривались конические сечения, эллипс вводился как сечение кругового цилиндра плоскостью, расположенной под углом к основанию. Также не были введены тригонометрические функции, их заимствовали достаточно поздно через голландские сочинения [3]. Отсутствовало дедуктивное построение геометрии по образцу Евклида, геометрия бытовала как набор задач. В области математического анализа достижения учёных Японии больше напоминают методы Дж. Валлиса, чем И. Ньютона и Г. В. Лейбница [3, 11, 12]. Математики Японии так и не выработали понятия функции, неопределённого интеграла и теорию дифференциального исчисления. Инфинитезимальные методы оставались тесно связанными с геометрическими задачами на определение объёмов и площадей.

Причины такого различия могут быть указаны следующие. С одной стороны, знание достижений математики Китая — биномы, прогрессии — послужило основой для создания инфинитезимальных методов, вначале для вычисления π, а потом объёмов и площадей. С другой стороны, в Японии с 1641 г. было прекращено мореплавание, производство до XIX в. оставалось полуремесленным и находилось вне интересов феодальной верхушки и служилого дворянства. Развитие астрономии и физики также было незначительным, следовательно, не требовались математические методы. Зато огромное влияние оказывала буддийская религия: математические задачи рассматривались как коаны — загадки для развития мистической интуиции [1, 13]. Немаловажное влияние на математические исследования оказало и то обстоятельство, что математика считалась одним из благородных занятий самурая наряду с верховой ездой и музыкой [2]. Всё это препятствовало развитию математики и её связи с практикой.

В XIX в. с революцией Мэйдзи (1868) в Японии была освоена математика, созданная в Западной Европе. Традиционная математика стала достоянием историков и немногих энтузиастов-любителей. Тем не менее многие достижения независимого математического знания Японии могут найти применение в преподавании математики, что справедливо и для Беларуси, а также для других стран СНГ.

Например, в курсе математики средней школы для повышения интереса учащихся можно показывать магические круги и правила построения магических квадратов Секи Такакадзу [3]. Геометрические задачи японской школы полезны для разнообразия набора задач в учебных пособиях [2, 14]. В высшей школе в рамках как учебных занятий, так и научно-исследовательской работы студентов допустимо рассматривать задачи на нахождение объёмов или площадей поверхности сложных тел из японских источников [9]. В заключительной части статьи приводятся примеры такого материала. Кроме того, приведён пример решения задачи методами энри, но изложенными на современном математическом языке.

Автор выражает искреннюю благодарность кандидату физико-математических наук, доценту кафедры «Высшая математика» ГГТУ им. П. О. Сухого Л. Л. Великовичу, а также рецензенту за помощь в написании статьи и полезные обсуждения, позволившие существенно улучшить её содержание.

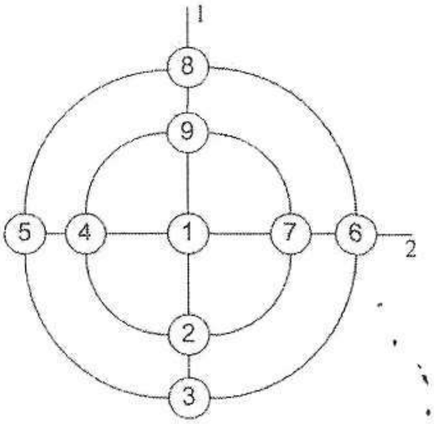

Рисунок 1

Пример 1

Магический круг представляет собой несколько концентрических окружностей, из общего центра которых проведено несколько диаметров. В точки пересечения диаметров и окружностей вписаны целые числа так, что суммы чисел, находящихся на каждой окружности, равны между собой и суммы чисел, находящихся на каждом диаметре, также равны между собой. Для простейшего магического круга, показанного на рисунке, сумма чисел на каждом диаметре равна 23, сумма чисел на каждой окружности равна 22.

Рассматривая этот круг, учащиеся с помощью преподавателя могут найти правило построения таких кругов по Секи Такакадзу [3]. Оно заключается в следующем. Пусть в рассчитываемом круге задано n диаметров и произвольное количество концентрических окружностей. Заданные диаметры нумеруются последовательно по произвольному направлению обхода числами от 1 до n. В общий центр окружностей ставится 1. На каждом диаметре по порядку, начиная с первого, точки пересечения соответствующих радиусов с окружностями нумеруются, начиная с 2, последовательно от центра к периферии. Так продолжается, пока не будут занумерованы точки радиуса, принадлежащего диаметру n. Затем продолжают последовательно нумеровать от периферии к центру точки пересечения с окружностями остальных радиусов, начиная с принадлежащего диаметру n и заканчивая принадлежащим диаметру 1. После установления правила оно проверяется построением более сложного круга. Такой способ использования магических кругов будет интересен и понятен большинству учащихся, особенно в IV–VI классах.

Пример 2

Дана сторона квадрата b. Найдите длину стороны квадрата a и радиус малого круга r, выразив его длину через длины сторон квадратов a и b. (Задача из [14].)

Решение задачи основано на применении теоремы Пифагора, независимо открытой в Китае и перешедшей в Японию.

Так как окружности с центрами в точках O_1, O_3 касаются друг друга внутренним образом, то центры этих окружностей лежат на одной прямой и расстояние между

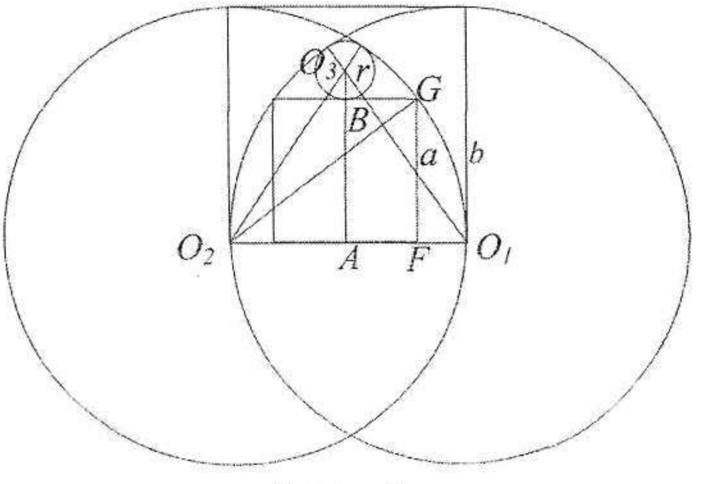

Рисунок 2

ними $O_1O_3 = b - r$. То же справедливо и для окружностей O_2, O_3: $O_2O_3 = b - r$.

Построим радиус O_3B и продлим его до пересечения со стороной квадрата b в точке A. Окружность O_3 касается стороны квадрата a в точке B, следовательно, отрезок O_3B перпендикулярен стороне квадрата a. Горизонтальные стороны квадратов параллельны, следовательно, O_3A перпендикулярен O_1O_2. Треугольник $O_1O_2O_3$ равнобедренный, поэтому O_3A является и его медианой. Таким образом, $O_3A = a + r$; $O_2A = \frac{b}{2}$, $AF = \frac{a}{2}$. По теореме Пифагора для треугольника O_2FG

$$b^2 = \left(\frac{b}{2}+\frac{a}{2}\right)^2 + a^2.$$

После возведения в квадрат и приведения подобных членов получается квадратное уравнение для длины стороны квадрата a

$$5a^2 + 2ab - 3b^2 = 0.$$

По теореме Пифагора для треугольника O_2AO_3

$$(a+r)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = (b-r)^2.$$

Путём возведения в квадрат и приведения подобных членов получается окончательное уравнение для r

$$r(2a+2b)+a^2-b^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2 = 0.$$

Откуда радиус r

$$r = \frac{\frac{3b^2}{4}-a^2}{2a+2b}.$$

Пример 3

Найдите площадь поверхности шарового пояса, если радиус сферической поверхности равен r, а расстояние между вырезающими пояс плоскостями равно d. (Задача приводится в книге Учиды Кюмея «Теория интегралов» [2].)

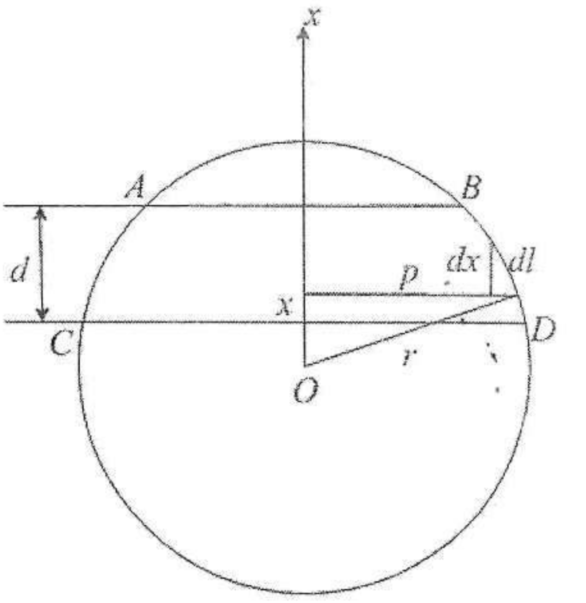

Рисунок 3

Для решения в стиле традиционной японской математики ось x направляется по радиусу сферы вертикально, как показано на рисунке 3. Малому приращению координаты dx соответствует малое приращение дуги dl. В силу малости дугу dl можно считать отрезком, а треугольники, образованные отрезками p, r и dx, dl, подобными:

$$\frac{dx}{dl} = \frac{p}{r}.$$

Малое приращение площади

$$dS = 2\pi p dl = 2\pi r dx.$$

Тогда вся площадь пояса выражается интегралом

$$S = \int_{x_{CD}}^{x_{AB}} 2\pi r dx = 2\pi r\left(x_{AB} - x_{CD}\right) = 2\pi r d.$$

Пример 4

Вычисление объёма сферического сегмента, высота которого меньше или равна радиусу шара, в школе Секи Такакадзу [3].

Решению этой задачи предпосылается лемма. Хорда сектора круга c, его высота s и диаметр круга d связаны соотношением $c^2 = 4s(d-s)$.

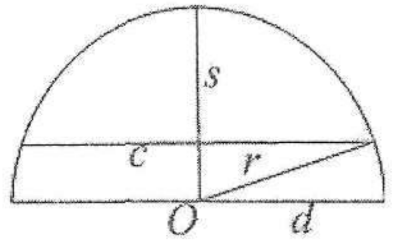

Рисунок 4

Из рисунка 4 следует, что высота определяется по формуле

$$s = \frac{d}{2} - \sqrt{\frac{d^2}{4} - \frac{c^2}{4}}.$$

Сравнивая эту формулу с формулой для корней приведённого квадратного уравнения, получаем, что высота сектора может быть найдена из квадратного уравнения

$$s^2 - ds + \frac{c^2}{4} = 0,$$

которое просто преобразуется к виду

$$c^2 = 4s(d - s).$$

Эта формула и квадратное уравнение для высоты сектора очень часто использовались математиками школы Секи Такадзу для разработки инфинитезимальных методов [7, 8]. Выражение для квадрата хорды может быть получено и по известной теореме о пересекающихся хордах окружности.

Для вычисления объёма сферического сегмента последний разделятся на n слоёв диаметрами d_1, d_2, ... $d_n = a$, как показано на рисунке 5. Высота сектора, образованного диаметром слоя k, который является хордой в полукруге ABC, равна $s_k = \frac{kh}{n}$, где h — высота сегмента.

Тогда на основании леммы

$$d_k^2 = 4\left(d - \frac{kh}{n}\right)\frac{kh}{n}$$

принимается, что объём каждого слоя равен объёму кругового цилиндра

$$V_k = \frac{\pi d_k^2}{4}\frac{h}{n} = \frac{\pi h}{n}\left(d\frac{kh}{n} - \frac{k^2h^2}{n^2}\right).$$

Объём сегмента приближённо равен сумме объёмов слоёв

$$V \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi h}{n}\left(d\frac{kh}{n} - \frac{k^2h^2}{n^2}\right).$$

Общий множитель $\frac{\pi h}{n}$ выносится за знак суммы, после чего осуществляется

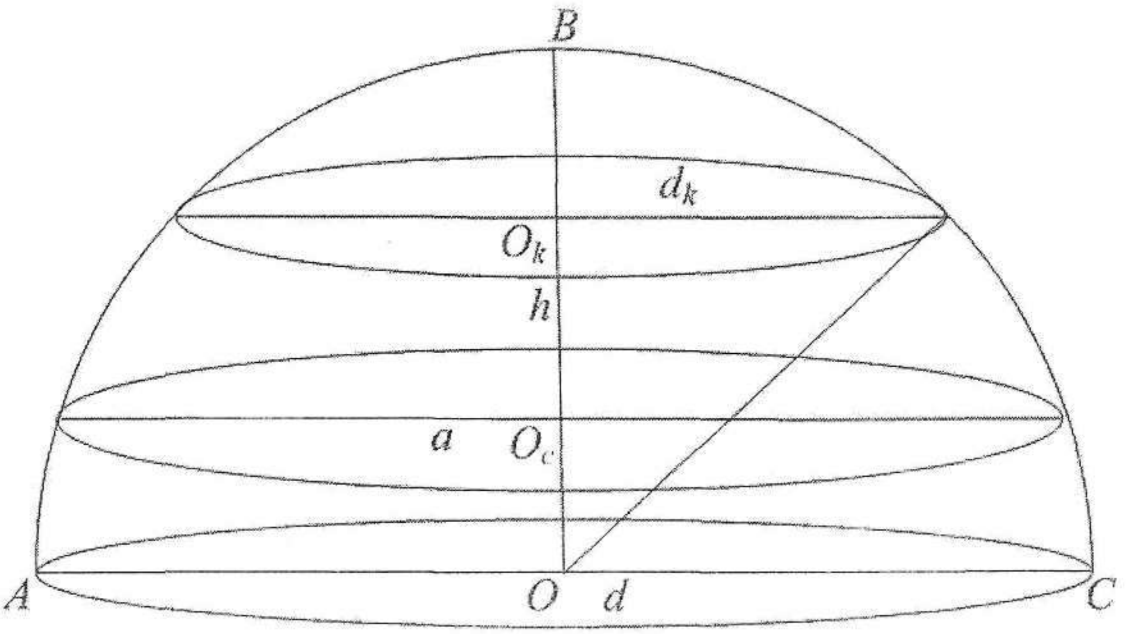

Рисунок 5

группировка положительных и отрицательных слагаемых и вынесение общего множителя в полученных суммах

$$V \approx \frac{\pi h}{n}\left(\frac{dh}{n}\sum_{k=1}^{n} k - \frac{h^2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k^2\right).$$

С помощью формул для сумм степеней чисел последнее выражение приводится к виду

$$V \approx \frac{\pi h}{n}\left(\frac{dh}{n}\frac{n(n+1)}{2} - \frac{h^2}{n^2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) =$$

$$= \pi h\left(\frac{dh}{2}\left(\frac{1}{n}+1\right) - \frac{h^2}{6}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n}+2\right)\right).$$

Следует обратить внимание, что применённые формулы для сумм степеней натуральных чисел введены в японскую математику именно Секи Такакадзу [2, 3].

Устремляя число слоёв к бесконечности, легко получить, что объём сегмента равен

$$V = \pi h\left(\frac{dh}{2} - \frac{h^2}{3}\right) = \frac{\pi h^2}{6}(3d - 2h).$$

Если радиус шара, из которого вырезан рассматриваемый сегмент, равен R, то полученная формула приводится к известной из современных руководств по геометрии

$$V = \frac{\pi h^2}{3}(3R - h).$$

Список использованных источников

1. *Воробьев, М. В.* Очерки по истории науки, техники и ремесла в Японии / М. В. Воробьев, Г. А. Соколова. — М. : Наука, 1976. — 231 с.

2. Fukagava, Hidetoshi Sacred Mathematics: Japanese Temple Geometry / Fukagawa Hidetoshi, T. Rothman. — Princeton : Princeton University Press, 2005. — 348 p.

3. *Smith, D.* A history of Japanese Mathematics / D. Smith, Yoshoi Mikami. — Chicago, Open Court. — 1914. — 280 p.

4. *Фрейман, Л. С.* Творцы высшей математики / Л. С. Фрейман. — М. : Наука, 1968. — 216 с.

5. *Вилейтнер, Г.* История математики / Г. Вилейтнер. — М. : Наука, 1966. — 507 с.

6. *Кымпан, Ф.* История числа π / Ф. Кымпан. — М. : Наука, 1971. — 216 с.

7. *Darioku, Kikuchi.* A series for π^2 obtained by the old Japanese mathematicians / Darioku Kikuchi // Journal of history of Mathematics. — 1973. — № 58. — P. 28—31.

8. *Darioku, Kikuchi.* Seki's method of Finding the Length of an arc of a circle / Darioku Kikuchi // Journal of history of Mathematics. — 1973. — № 58. — P. 36—57.

9. *Fukagava, Hidetoshi.* Integral calculus in vasan (3) / Fukagava Hidetoshi // Journal of history of Mathematics. — 1981. — № 85. — P. 9—28.

10. *Сидихменов, В. Я.* Китай: страницы прошлого / В. Я. Сидихменов. — Смоленск : Русич, 2000. — 464 с.

11. *Rikitaro, Fujisawa.* Note on the Mathematics of the old Japanese school / Rikitaro Fujisawa // Journal of history of Mathematics. — 1973. — № 58. — P. 1—27.

12. *Крешар, Ф. Д.* Интеграционные методы Дж. Валлиса / Ф. Д. Крешар // Историко-математические исследования: вып. XIV. — М. : Физматлит, 1961. — С. 11—100.

13. *Васильев, Л. С.* История религий Востока / Л. С. Васильев. — М. : Высшая школа, 1988. — 416 с.

14. Sangaku: Reflections on the Phenomenon. — [Эл. ресурс] Режим доступа : www. Cut-the-knot.org/pythagoras/CirleSquareCircle.shtml. — Дата доступа : 26.08.2014.