Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Техническая механика»

О. Н. Шабловский, Н. В. Иноземцева

# ДИНАМИКА ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

## ПРАКТИКУМ
## по курсу «Теоретическая механика» для студентов инженерно-технических специальностей дневной и заочной форм обучения

Электронный аналог печатного издания

Гомель 2010

УДК 531.3(075.8)
ББК 22.213я73
Ш13

*Рекомендовано к изданию научно-методическим советом машиностроительного факультета ГГТУ им. П. О. Сухого* (*протокол № 1 от 28.09.2009 г.*)

Рецензент: зав. каф. «Металлорежущие станки и инструменты» ГГТУ им. П. О. Сухого канд. техн. наук, доц. *М. И. Михайлов*

**Шабловский, О. Н.**

Ш13 Динамика относительного движения точки : практикум по курсу «Теоретическая механика» для студентов инженер.-техн. специальностей днев. и заоч. форм обучения / О. Н. Шабловский, Н. В. Иноземцева. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2010. – 50 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: http://lib.gstu.local. – Загл. с титул. экрана.

ISBN 978-985-420-947-0.

Содержит краткие теоретические сведения и примеры решения задач по курсу «Теоретическая механика». Основная тема заданий: динамика относительного движения материальной точки.

Для студентов инженерно-технических специальностей дневной и заочной форм обучения.

**УДК 531.3(075.8)**
**ББК 22.213я73**

**ISBN 978-985-420-947-0**

## Предисловие

Цель данного практикума – дать основные способы исследования относительного движения материальной точки. Обращается внимание на специфику применения координатного и естественного способов описания движения. Представлена подборка задач, которые могут быть предложены студентам на практических занятиях и для выполнения расчетно-графических работ. Приступая к выполнению задания, студент должен изучить теоретический материал по соответствующей теме.

## 1. Основные понятия и определения

**Система отсчета** – это совокупность системы координат и часов, связанных с телом, по отношению к которому изучается движение каких-либо других материальных точек или тел. Выбор системы отсчета зависит от цели исследования.

**Инерциальная система отсчета** – система отсчета, в которой справедлив закон инерции: если на материальную точку действует уравновешенная система сил (либо не действуют никакие силы), то материальная точка движется равномерно и прямолинейно или находится в состоянии покоя.

Всякая система отсчета, движущаяся по отношению к инерциальной системе отсчета поступательно, равномерно и прямолинейно, есть также инерциальная система отсчета.

Система отсчета, движущаяся по отношению к инерциальной системе отсчета с ускорением, является **неинерциальной**. Закон инерции, а также другие законы механики в неинерциальной системе отсчета не выполняются.

Понятие «инерциальная система отсчета» является научной абстракцией. Реальная система отсчета всегда связывается с каким-нибудь конкретным телом, по отношению к которому изучается движение материальных объектов. В природе нет неподвижных тел, поэтому любая реальная система отсчета может рассматриваться как инерциальная лишь с определенной степенью приближения. При решении большинства технических задач в качестве инерциальной системы отсчета можно принять систему, жестко связанную с Землей.

Пусть система отсчета $\Omega\xi\eta\varsigma$ является инерциальной; примем ее за условно неподвижную (рис. 1).

Допустим далее, что неинерциальная система отсчета $Oxyz$ каким-то известным нам образом движется относительно $\Omega\xi\eta\varsigma$. Векторное уравнение движения несвободной материальной точки $M$ относительно $\Omega\xi\eta\varsigma$ имеет вид:

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{R}, \tag{1}$$

где $m$ – масса точки; $\vec{a}$ – абсолютное ускорение точки; $\vec{F}$ – равнодействующая активных сил $\vec{F}_1, ..., \vec{F}_n$, действующих на точку; $\vec{R}$ – равнодействующая реакций связей $\vec{R}_1, ..., \vec{R}_s$, которым подчинена точка. Динамика несвободного движения материальной точки изложена в учебниках [2]–[5]; способы решения задач на основе уравнения (1) проанализированы в методических указаниях [6].

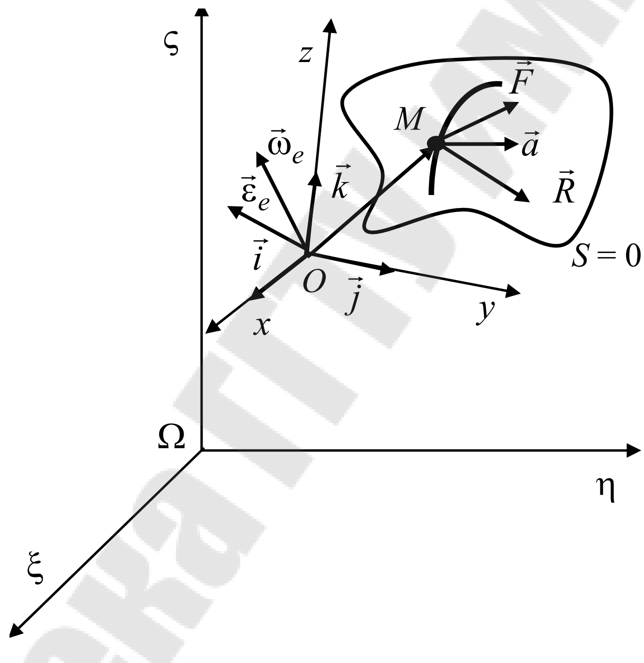



*Рис. 1*

Согласно известной из кинематики теореме о сложении ускорений:

$$\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c; \tag{2}$$

$$\vec{a}_e = \vec{a}_o + \left(\vec{\varepsilon}_e \times \vec{r}\right) + \left(\vec{\omega}_e \times \left(\vec{\omega}_e \times \vec{r}\right)\right); \tag{3}$$

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_e \times \vec{\upsilon}_r, \tag{4}$$

где $\vec{a}_e$ – переносное ускорение; $\vec{a}_O$ – ускорение точки $O$; $\vec{a}_c$ – кориолисово ускорение; $\vec{a}_r$ – относительное ускорение; $\vec{\upsilon}_r$ – относительная скорость точки; $\vec{\omega}_e$, $\vec{\varepsilon}_e$ – угловая скорость и угловое ускорение переносного движения. Второе и третье слагаемые в уравнении (3) – вращательное и осестремительное ускорения точки *M*, если бы она двигалась *только* с подвижной системой координат *Oxyz*.

Подставляя выражение (2) в левую часть (1) и перегруппировав слагаемые, запишем

$$m\vec{a}_r = \vec{F} + \vec{R} + (-m\vec{a}_e) + (-m\vec{a}_c). \tag{5}$$

Векторная величина, численно равная произведению массы материальной точки на ее ускорение и направленная противоположно ускорению, называется **силой инерции**.

В соответствии с этим определением величины

$$\vec{\Phi}_e = -m\vec{a}_e, \quad \vec{\Phi}_c = -m\vec{a}_c$$

являются переносной и кориолисовой силами инерции. В итоге получаем векторное уравнение относительного движения точки:

$$m\vec{a}_r = \vec{F} + \vec{R} + \vec{\Phi}_e + \vec{\Phi}_c. \tag{6}$$

Сравнение уравнений (1) и (6) позволяет сделать важный вывод: основное уравнение динамики относительного движения отличается от основного уравнения динамики абсолютного движения наличием в правой части переносной и кориолисовой сил инерции.

Прибавление сил $\vec{\Phi}_e$ и $\vec{\Phi}_c$ учитывает влияние на относительное движение точки перемещения подвижных осей $Oxyz$, т. е. служит поправкой на неинерциальность системы отсчета. В самом деле, сила в механике – это мера механического действия на материальную точку других тел; это действие вызывает изменение скорости и может происходить при непосредственном контакте либо через поле тяготения или электромагнитное поле.

Силы, действующие на точку со стороны других тел, определяются соответствующими физическими законами и имеют одни и те же значения независимо от выбора системы отсчета. Ускорения материальной точки в ее движениях относительно различных систем отсчета зависят, помимо действующих на точку сил, еще от движения этих систем; значит, эти ускорения различны.

Итак, в неинерциальной системе отсчета ускорение $\vec{a}_r$ материальной точки является как результатом действия на нее сил, так и результатом движения самой системы отсчета.

Проектируя выражение (6) на подвижные координатные оси $Oxyz$, получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= F_x + R_x + \Phi_{ex} + \Phi_{kx}; \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= F_y + R_y + \Phi_{ey} + \Phi_{ky}; \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= F_z + R_z + \Phi_{ez} + \Phi_{kz}, \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

позволяющую определить координаты $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$ точки в ее относительном движении. Начальные условия для уравнений (7) $t = 0,\ \ x(0) = x_0,\ y(0) = y_0,\ z(0) = z_0,\ \ \dot{x}(0) = \upsilon_{0x},\ \ \dot{y}(0) = \upsilon_{0y},\ \ \dot{z}(0) = \upsilon_{0z}$ характеризуют исходное положение точки $(x_0, y_0, z_0)$ и ее начальную относительную скорость $(\upsilon_{0x}, \upsilon_{0y}, \upsilon_{0z})$. Точка над символом функции означает дифференцирование по времени:

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x},\ \ \upsilon_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y},\ \ \upsilon_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}.$$

Если подвижная система отсчета $Oxyz$ все время движется относительно $\Omega\xi\eta\varsigma$ поступательно, равномерно и прямолинейно, т. е. $\vec{a}_e = 0,\ \vec{a}_c = 0$, то $\vec{\Phi}_e = 0,\ \vec{\Phi}_c = 0$ и уравнение (6) относительного движения имеет форму

$$m\vec{a}_r = \vec{F} + \vec{R},$$

совпадающую с выражением (1) – уравнением абсолютного движения. Значит, ускорения материальной точки относительно всех инерциальных систем отсчета одинаковы.

Теоретически может существовать любое число равноправных инерциальных систем отсчета, обладающих тем важным свойством, что во всех таких системах законы физики одинаковы (*принцип относительности*).

Если материальная точка покоится относительно $Oxyz$, т. е. $\vec{\upsilon}_r = 0,\ \vec{a}_r = 0$, то согласно уравнению (4) $\vec{a}_c \equiv 0,\ \vec{\Phi}_c \equiv 0$ и из уравнения (6) получаем условие относительного равновесия для сил:

$$\vec{F} + \vec{R} + \vec{\Phi}_e = 0. \qquad (8)$$

*Контрольные вопросы*

1. Какая система отсчета называется инерциальной, а какая неинерциальной?
2. Что называется силой инерции?
3. В чем заключается механическая сущность основного уравнения динамики относительного движения?
4. Укажите формулы для подсчета переносной и кориолисовой сил инерции.
5. Какие факторы определяют ускорение $\vec{a}_r$ материальной точки в неинерциальной системе отсчета?

## 2. Обобщенный интеграл энергии

Выделим класс механических движений, охватывающий важные в технических приложениях случаи движения материальной точки по недеформируемым гладким кривым или поверхностям, совершающим равномерное вращение вокруг оси. Примем следующие ограничения:

1. Сила $\vec{F}$ приложена к материальной точке *M*, подчиненной идеально гладкой стационарной связи $S(x, y, z) = 0$, $\dfrac{\partial S}{\partial t} = 0$. Имеется в виду стационарность в относительной системе координат; в абсолютной системе координат $\Omega\xi\eta\varsigma$ связь нестационарна.

2. Сила $\vec{F}$ обладает стационарной силовой функцией $U = U(x, y, z)$, такой, что $\vec{F} = \operatorname{grad} U = \dfrac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$ [3]–[5].

3. Переносным движением для точки М является вращение подвижной системы *Oxyz* вокруг некоторой оси с постоянной угловой скоростью $\vec{\omega}_e = \text{const}$, причем эта ось либо покоится (рис. 2), либо движется поступательно с постоянной по модулю и направлению скоростью.

Тогда можно доказать [2], что из выражения (6) следует интеграл, аналогичный интегралу энергии и выражающий **закон сохранения энергии** в равномерно вращающейся вокруг неподвижной оси системе координат:

$$\frac{m}{2}\left(\upsilon_r^2 - \left|\vec{\omega}_e \times \vec{r}\right|^2\right) + \Pi = C, \tag{9}$$

где $C$ – произвольная постоянная; $\Pi = -U + \text{const}$ – потенциальная энергия материальной точки.

Например, в поле силы тяжести $\Pi = mgz + \text{const}$. В формуле (9) $\vec{r} = O\vec{M}$, $|\vec{\omega}_e \times \vec{r}| = \omega_e r \sin(\vec{\omega}_e, \vec{r})$.

Если переносное движение отсутствует, $\vec{\omega}_e = 0$, то (9) превращается в обычный интеграл энергии. Формула (9) называется **обобщенным интегралом энергии**.

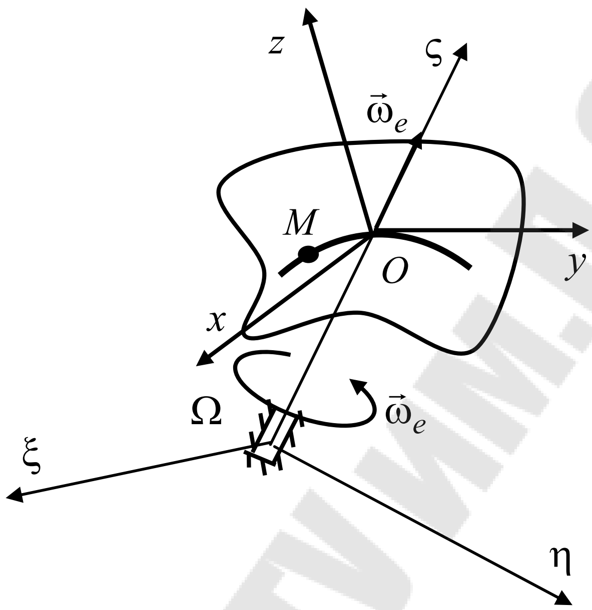



*Рис. 2*

*Контрольные вопросы*

1. Какой физический смысл имеют слагаемые в левой части интеграла (9)?

## 3. Указания к решению задач об относительном движении материальной точки в случае поступательного переносного движения

(Приложение, задачи № 1–22)

В задачах рассматриваемого типа отсутствует переносное вращение, $\vec{\omega}_e = 0$, т. е. кориолисова сила инерции равна нулю, $\vec{\Phi}_c = 0$, и уравнение относительного движения (6) имеет вид

$$m\vec{a}_r = \vec{F} + \vec{R} + \vec{\Phi}_e. \qquad (10)$$

Задачи, которые анализируются в главах 3, 4, взяты из [7].

### *Задача 1*

Грузу $A$ массы $m = 20$ кг, находящемуся на поверхности неподвижной плиты $B$ массы $m_1 = 80$ кг, в момент времени $t = 0$ сообщили скорость $\vec{\upsilon}_0$; $\upsilon_0 = \upsilon_{0x} = 4$ м/с. При $t = t_1 = 2$ с плита начинает двигаться влево поступательно и прямолинейно по закону $s(t) = 0{,}25(t - t_1)^2$. Коэффициент трения скольжения для пары груз–плита $f = 0{,}1$. Определить момент времени $t = t_*$, когда скорость груза относительно плиты будет равна нулю.

*Решение*

Груз и плита совершают прямолинейные поступательные движения. Движение плиты является для груза $A$ переносным и однозначно характеризуется уравнением $s = s(t)$. Положение груза относительно плиты дается координатой $x = x(t)$. Направления отсчета этих координат указаны на рис. 3.

Для моментов времени $t \in [0, t_1]$, предшествующих началу движения плиты, движение груза $A$ определяется уравнением (1) (рис. 4), которое в проекции на ось $Ox$ имеет вид

$$m\ddot{x} = -fmg\,,$$

где $\left|\vec{F}_{\text{тр}}\right| = \left|f\vec{N}\right|$, $\left|\vec{N}\right| = mg$. Начальные условия: $t = 0$, $x = 0$, $\dot{x} = \upsilon_{0x}$. Решение этой задачи элементарно:

$$\dot{x} = -fgt + \upsilon_{0x},\; x = -fg\frac{t^2}{2} + \upsilon_{0x}t\,.$$

Подставляя числовые значения, получаем

$$\dot{x} = 4 - t\,,\; x = -\frac{t^2}{2} + 4t\,,\; t \in [0, t_1].$$

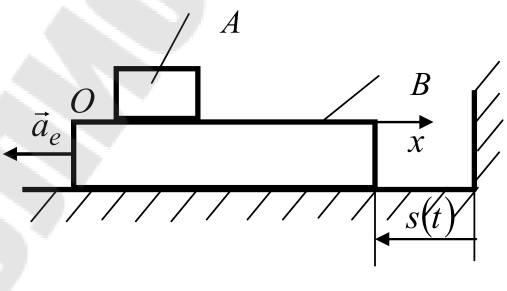



*Рис. 3*

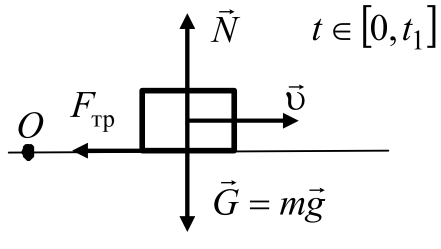



*Рис. 4*

Значит, при $t = t_1 = 2$ с скорость и координаты груза $A$ равны $\dot{x}(2) = 2$ м/с, $x(2) = 6$ м и служат начальными условиями для второго этапа движения, $t \geq 2$ с, когда плита $B$ движется.

При составлении уравнения относительного движения груза учтем, что $\vec{\omega}_e = 0$, $\vec{a}_c = 0$, $\vec{\Phi}_c = 0$. Переносное ускорение равно $a_e = \ddot{s}(t) = 0{,}5 \equiv \text{const} > 0$ и направлено влево (рис. 3). Тогда переносная сила инерции (рис. 5) ориентирована вправо, $\left|\vec{\Phi}\right| = m\ddot{s}$ и уравнение вида (7) записывается в форме

$$m\ddot{x} = ma_e - fmg\,.$$

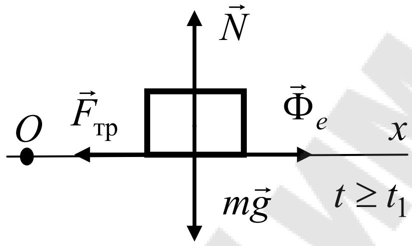



*Рис. 5*

Таким образом, имеем $\ddot{x} = -\dfrac{1}{2}$, $t \geq 2$ с. Выполнив интегрирование и удовлетворив начальным условиям $t = 2$ с, $\dot{x} = 2$ м/с, $x = 6$ м, найдем

$$\dot{x} = 3 - \frac{t}{2},\ x = 3t - \frac{t^2}{4} + 1\,.$$

Значит, скорость груза относительно плиты равна нулю при $t_* = 6$ с, при этом $x_{\max} = x(6) = 10$ м.

*Контрольное задание*

Укажите на схеме (рис. 3) неинерциальную систему отсчета.

***Задача 2***

Материальная точка $M$ может двигаться в трубке $AB$, которой сообщается поступательное движение в вертикальной плоскости при помощи кривошипов $OA$ и $O_1B$ одинаковой длины $r$, вращающихся с постоянной угловой скоростью $\omega$ (рис. 6). Коэффициент трения скольжения между точкой $M$ и трубкой равен $f$. В начальный момент времени точка $M$ находилась на конце $A$ трубки в состоянии относительного покоя, а трубка и кривошип располагались горизонтально. Определить перемещение точки М по трубке за время, соответствующее четверти оборота кривошипов, если $f = 0{,}2$, $\omega = 2\left(\dfrac{gf}{r}\right)^{\frac{1}{2}}$.

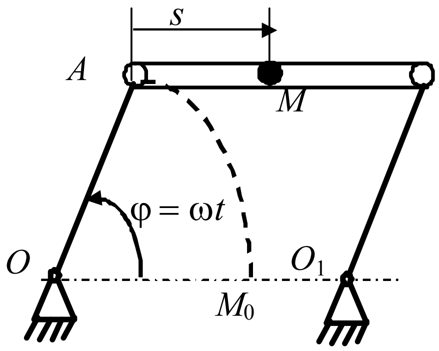



*Рис. 6*

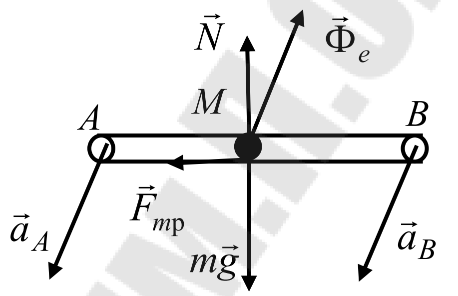



*Рис. 7*

*Решение*

Трубка $AB$ в каждый момент времени параллельна своему первоначальному положению, т. е. движется поступательно. Это движение является для точки $M$ переносным: $\vec{\omega}_e = 0$, $\vec{a}_c = 0$, $\vec{\Phi}_c = 0$. Воспользуемся тем, что при поступательном движении скорости и ускорения точек трубки одинаковы: $\vec{\upsilon}_A = \vec{\upsilon}_B = \vec{\upsilon}_{Me}$, $\vec{a}_A = \vec{a}_B = \vec{a}_{Me}$. Точка $A$, принадлежащая трубке $AB$, находится также на кривошипе $OA$, совершающем равномерное вращение вокруг точки $O$ (рис. 7):

$$\varphi = \omega t, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega \equiv \text{const}, \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 0.$$

Значит вращательная компонента ускорения точки $A$ равна нулю $\vec{a}_{A\tau} = 0$. Таким образом, имеем для переносного ускорения только центростремительную компоненту:

$$\vec{a}_{Me} = \vec{a}_{An} = \vec{a}_{Bn}, \quad |\vec{a}_{An}| = \omega^2 OA.$$

Напомним, что в случае вращения тела вокруг неподвижной оси касательную и нормальную составляющие ускорения принято называть соответственно вращательной и центростремительной составляющими ускорения.

Уравнение относительного движения (10) имеет вид:

$$m\vec{a}_r = m\vec{g} + \vec{F}_{\text{тр}} + \vec{N} + \vec{\Phi}_{en}.$$

Проектируя его на $AB$ и на направление, ортогональное $AB$, получим дифференциальное уравнение

$$m\ddot{s} = \Phi_e \cos\varphi - F_{\text{тр}}, \;\; \Phi_e = \Phi_{en} = m\omega^2 r, \;\; F_{\text{тр}} = fN,$$

а также выражение для нормальной реакции трубки

$$N = mg - \Phi_e \sin\varphi, \quad \varphi = \omega t.$$

Проведя простые преобразования, получаем

$$\ddot{s} = \omega^2 r(\cos\omega t + f\sin\omega t) - fg, \; t = 0, \; \dot{s} = 0, \; s = 0.$$

Проинтегрировав это уравнение один раз по времени, найдем относительную скорость

$$\dot{s} = \omega r(\sin\omega t - f\cos\omega t) - fgt + \omega r f.$$

Проинтегрировав еще раз и удовлетворив начальным условиям, найдем

$$s = -r(\cos\omega t + f\sin\omega t) - fg\frac{t^2}{2} + \omega r f t + r.$$

Четверти полного оборота кривошипа $\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right)$ отвечает время $t_k = \frac{\pi}{2\omega}$, тогда

$$s_k = r\left(1 - f + f\frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{32}\right) = 0{,}806r.$$

*Контрольные вопросы*

1. Как влияет переносное движение на величину и направление реакции $\vec{N}$?

***Задача 3***

Материальная точка движется из крайнего нижнего положения по шероховатой поверхности бака, имеющего форму полусферы радиуса $R$. В начальный момент времени точка находилась в состоянии относительного покоя в положении $M_0$.

Бак движется поступательно и прямолинейно по горизонтальной плоскости с постоянным ускорением $\vec{a}_1$. Коэффициент трения точки о поверхность бака равен $f$. Составить и проанализировать дифференциальное уравнение движения точки $M$ (рис. 8).

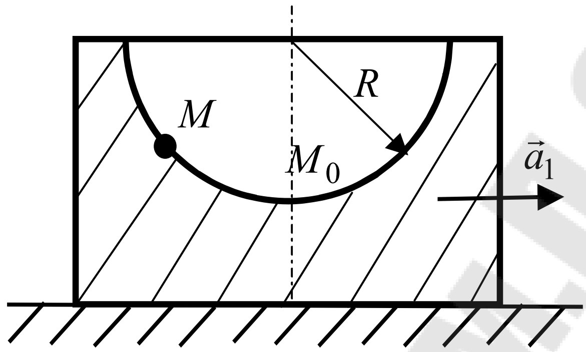



*Рис. 8*

*Решение*

Траекторией относительного движения является дуга окружности $s(t) = (M_0 M)$, поэтому для описания движения удобно применять естественные координатные оси, направление которых показано на рис. 9. Здесь $\vec{\tau}$ – единичный вектор касательной к траектории, ориентирован в сторону возрастания дуговой координаты, $\vec{n}$ – единичный вектор главной нормали, направлен к центру кривизны траектории, т. е. по радиусу полусферы.

Переносное движение бака – поступательное, поэтому $\vec{\omega}_e = 0$, $\vec{a}_c = 0$, $\vec{\Phi}_c = 0$, $\vec{\Phi}_e = -m\vec{a}_1$.

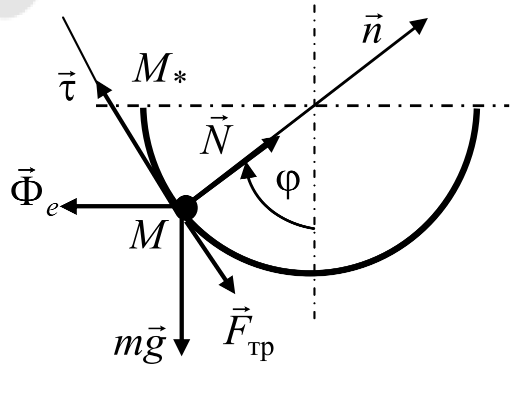



*Рис. 9*

Уравнение (10) относительного движения записывается в виде

$$m\vec{a}_r = m\vec{g} + \vec{F}_{\text{тр}} + \vec{N} + \vec{\Phi}_e, \tag{11}$$

где $\vec{a}_r = \vec{\tau}\dfrac{d^2 s}{dt^2} + \vec{n}\dfrac{\upsilon_r^2}{R}$; $\vec{F}_{\text{тр}} = -\vec{\tau} fN$ – сила трения; $\vec{N} = \vec{n}N$ – нормальная реакция связи (поверхности бака). Проектируя уравнение (11) на естественные координатные оси, имеем

$$m\ddot{s} = -mg\sin\varphi - fN + \Phi_e\cos\varphi; \tag{12}$$

$$\frac{m\dot{s}^2}{R} = -mg\cos\varphi + N - \Phi_e\sin\varphi,\ \upsilon_r = \dot{s}, \tag{13}$$

где $\Phi_e = \left|\vec{\Phi}_e\right| = ma_1$.

Наряду с дуговой координатой $s = s(t)$ положение точки $M$ на траектории относительного движения можно однозначно охарактеризовать углом $\varphi = \varphi(t)$ (рис. 9), причем $s = R\varphi$.

Из уравнения (13) находим динамическую реакцию:

$$N = \frac{m\upsilon_r^2}{R} + mg\cos\varphi + ma_1\sin\varphi, \quad \varphi = 0.$$

Подставив это выражение в (12) и проведя простые преобразования, получим дифференциальное уравнение относительного движения точки $M$:

$$R\left(\ddot{\varphi} + f\dot{\varphi}^2\right) = \left(a_1 - fg\right)\cos\varphi - \left(a_1 f + g\right)\sin\varphi. \tag{14}$$

Чтобы понизить порядок этого нелинейного дифференциального уравнения второго порядка, воспользуемся формулами

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \omega\frac{d\omega}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\omega^2}{2}\right), \quad \omega = \omega(\varphi(t)),$$

и вместо уравнения (14) получим линейное дифференциальное уравнение первого порядка для неизвестной функции $\omega^2 = \omega^2(\varphi)$:

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\omega^2\right) + 2f\omega^2 = \frac{2}{R}\left(a_1 - fg\right)\cos\varphi - \frac{2}{R}\left(a_1 f + g\right)\sin\varphi,\ \varphi = 0,\ \omega = 0.$$

Интегрируя это уравнение обычным образом [8], получаем решение, удовлетворяющее поставленным начальным условиям:

$$\omega^2 = \frac{2}{R} e^{-2f\varphi}\left(4f^2+1\right)^{-1}\left[e^{2f\varphi}\left(2f\cos\varphi + \sin\varphi\right) - 2f\right]\left(a_1 - fg\right) -$$
$$-\left[e^{2f\varphi}\left(2f\sin\varphi - \cos\varphi\right) + 1\right]\left(a_1 f + g\right). \qquad (15)$$

Теперь для отыскания угла $\varphi = \varphi(t)$ требуется проинтегрировать нелинейное дифференциальное уравнение с известной правой частью:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega(t), \;\; \varphi = 0, \;\; t = 0.$$

Эта задача достаточно просто решается одним из численных методов интегрирования [9].

Обсудим следующий вопрос: при каком ускорении $\vec{a}_1$ точка $M$ достигнет верхнего края бака? Если пренебречь трением и считать, что поверхность бака гладкая, то решение уравнения (15) при $f = 0$ примет вид

$$R\frac{\omega^2}{2} = a_1 \sin\varphi + g\left(\cos\varphi - 1\right).$$

Отсюда следует, что верхний край бака ($\varphi = \frac{\pi}{2}$) – точка $M_*$ – будет достигнут при $a_1 = g$, когда $\upsilon_r = R\omega = 0$, $\omega\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

*Контрольное задание*

Применяя формулу (15), выяснить, при каком ускорении $\vec{a}_1$ точка $M$ достигнет верхнего края бака, если учесть шероховатость и принять $f = \frac{\ln 2}{\pi} \cong 0{,}22$.

## 4. Указания к решению задач об относительном движении материальной точки в случае вращательного переносного движения

(Приложение, задачи № 23–100)

***Задача 4***

Кольцо (материальная точка $M$) массы $m$ движется по гладкому обручу радиуса $R$ (рис. 10). Обруч вращается в своей плоскости с постоянной угловой скоростью $\omega$ вокруг вертикальной оси, проходящей через точку $O$. В начальный момент времени кольцо находилось в состоянии относительного покоя в положении, соответствующем $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$.

Определить максимальную величину радиального давления кольца на обруч.

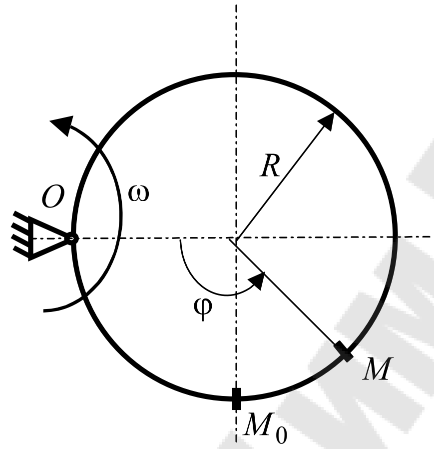



*Рис. 10*

*Решение*

Вращение обруча вокруг вертикальной оси является переносным движением для точки $M$. Учитывая, что $\omega_e = \text{const}$, получим $\varepsilon_e = \frac{d\omega}{dt} = 0$. Значит переносное вращательное ускорение равно нулю: $a_{e\tau} = \varepsilon_e OM = 0$. Таким образом, имеем

$$\vec{a}_e = \vec{a}_{en},\ |\vec{a}_{en}| = \omega_e^2(OM),\ \omega = \omega_e,\ OM = 2R\sin\frac{\varphi}{2},\ a_{en} = 2\omega^2 R\sin\frac{\varphi}{2},$$

$$\vec{\Phi}_e = -m\vec{a}_e,\ |\vec{\Phi}_e| = 2m\omega^2 R\sin\frac{\varphi}{2} = \Phi_e. \qquad (16)$$

Для описания относительного движения точки $M$ вдоль обруча введем естественные координатные оси с ортами $\vec{\tau}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$ (орты $\vec{\tau}$, $\vec{n}$ такие же как в задаче 3, орт $\vec{b}$ направлен вдоль бинормали перпендикулярно плоскости чертежа в точке $M$ на читателя). Естественная дуговая координата равна $\breve{OM} = s(t) = R\varphi(t)$. Направление отсчета угла $\varphi(t)$ показано на рис. 10.

Значит,

$$\upsilon_r = \frac{ds}{dt},\ \upsilon_r = R\psi,\ \psi = \frac{d\varphi}{dt}. \qquad (17)$$

При расчете кориолисова ускорения $\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_e \times \vec{\upsilon}_r$ учтем, что вектор $\vec{\omega}_e$ направлен на читателя перпендикулярно плоскости чертежа, т. е. $(\vec{\omega}_e, \vec{\upsilon}_r) = 90°$. Следовательно, вектор $\vec{a}_c$ направлен вдоль радиуса $O_1M$ и по модулю равен $|\vec{a}_c| = a_c = 2\omega_e\upsilon_r$. Значит, $|\vec{\Phi}_c| = \Phi_c = 2m\omega_e\upsilon_r$. Направление кориолисовой силы инерции показано на рис. 11.

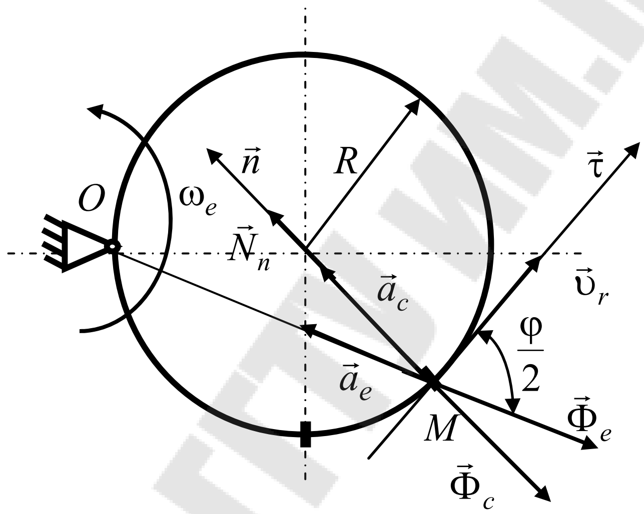



*Рис. 11*

Векторное уравнение относительного движения точки $M$ имеет вид

$$m\vec{a}_r = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{\Phi}_e + \vec{\Phi}_c, \qquad (18)$$

где $\vec{N} = \vec{n}N_n + \vec{b}N_b$ – реакция обруча; вектор относительного ускорения запишем в форме

$$\vec{a}_r = \vec{\tau}a_{r\tau} + \vec{n}a_{rn}, \quad a_{r\tau} = \frac{d\upsilon_r}{dt}, \quad a_{rn} = \frac{\upsilon_r^2}{R}.$$

Проекция уравнения (18) на бинормаль дает $N_b = mg$, поскольку из кинематики известно, что $\vec{a}_{rb} = 0$.

Спроектировав (18) на касательную к траектории относительного движения (рис. 11), запишем уравнение

$$m\frac{d\upsilon_r}{dt} = \Phi_e \cos\frac{\varphi}{2},$$

которое с учетом выражений (16), (17) принимает вид

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega^2 \sin\varphi, \quad t = 0, \quad \psi = 0.$$

Переходя от аргумента $t$ к аргументу $\varphi$, получаем

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{d\psi}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\psi}{d\varphi}\psi = \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\psi^2}{2}\right), \quad \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\psi^2}{2}\right) = \omega^2 \sin\varphi.$$

Проинтегрировав последнее уравнение при начальных условиях $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\psi = 0$, найдем зависимость

$$\psi = \omega(-2\cos\varphi)^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{3\pi}{2}, \tag{19}$$

позволяющую определить относительную скорость

$$\upsilon_r = \omega R(-2\cos\varphi)^{\frac{1}{2}}. \tag{20}$$

Эта же формула может быть легко получена с помощью обобщенного интеграла энергии из выражения (9). Действительно, будем определять положение точки $M$ на обруче радиусом-вектором $\vec{r}(t) = \vec{OM}$, тогда $|\vec{\omega}_e \times \vec{r}| = 2\omega R \sin\frac{\varphi}{2}$. Плоскость обруча в процессе движения остается горизонтальной, поэтому потенциальная энергия точки $M$ постоянна, $\Pi \equiv \mathrm{const}$. Следовательно, интеграл (9) можно записать в виде

$$\upsilon_r^2 - |\vec{\omega}_e \times \vec{r}|^2 = C_1 \equiv \mathrm{const};$$

$$R^2\psi^2 - \left(2\omega R \sin\frac{\varphi}{2}\right)^2 = C_1.$$

Постоянную величину $C_1$ найдем из начальных условий:

$$C_1 = -\left(2\omega R\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2\omega^2 R^2.$$

Учитывая, что $1-2\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)=\cos\varphi$, окончательно имеем $\psi^2=-2\omega^2\cos\varphi$. Это совпадает с ранее установленной зависимостью (19).

Проекция уравнения (18), отвечающая радиальному направлению, доставляет нам формулу для составляющей реакции

$$N_n=\Phi_c+\Phi_e\sin\frac{\varphi}{2}+m\frac{\upsilon_r^2}{R}.$$

Подставляя сюда формулы (16), (20), найдем:

$$N_n=2m\omega^2R\left(\sin^2\frac{\varphi}{2}+\sqrt{-2\cos\varphi}-\cos\varphi\right).$$

Исследование функции $N_n=N_n(t)$ на экстремум показывает, что наибольшее значение радиальной составляющей реакции достигается при $\varphi=\pi$, т. е. при $OM=2R$ и равно

$$(N_n)_{\max}=2m\omega^2R\left(2+\sqrt{2}\right).$$

*Контрольное задание*

Проанализировать влияние кориолисовой силы инерции на величину радиальной составляющей реакции обруча.

***Задача 5***

Кольцо (материальная точка $M$) массы $m$ движется из состояния относительного покоя по обручу радиуса $h$, преодолевая силу сопротивления $\vec{R}=-\mu\vec{\upsilon}_r$, где $\mu=\text{const}>0$; $\upsilon_r$ – скорость кольца относительно обруча. Обруч вращается в своей плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через центр обруча с угловой скоростью $\omega=\omega_0\left(1-e^{-\frac{t}{t_*}}\right)$, где $\omega_0=\text{const}>0$, $t_*=\text{const}>0$. Найти и проанализировать уравнение движения кольца по обручу (рис. 12).

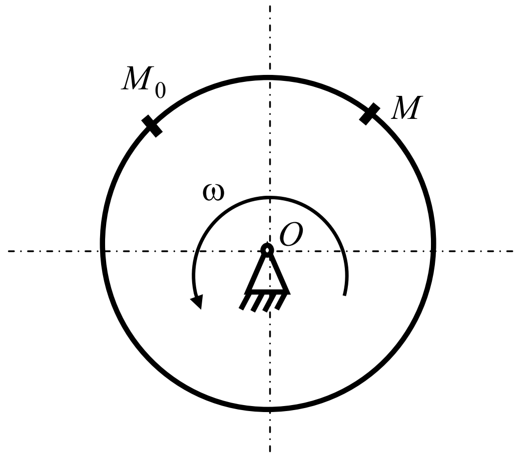



*Рис. 12*

*Решение*

Для описания относительного движения точки $M$ применяем дуговую координату $s(t) = \overset{\smile}{M_0 M}$. Выбор естественных координатных осей (рис. 13) производится аналогично тому, как это делалось в задачах 3, 4.

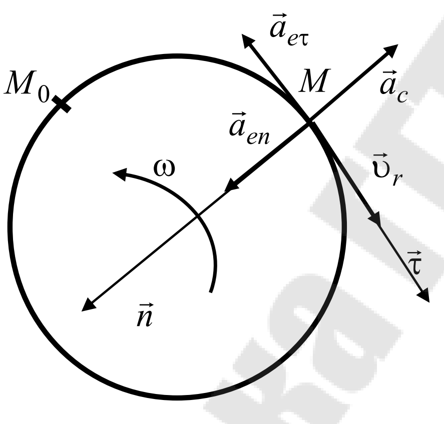



*Рис. 13*

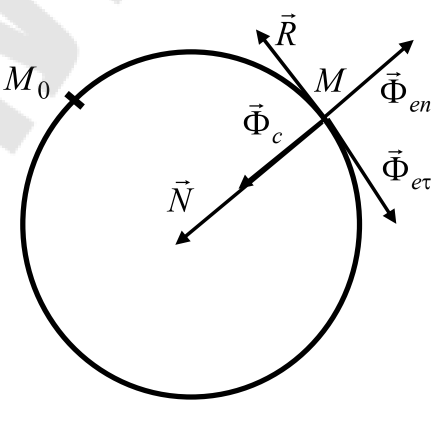



*Рис. 14*

Вращение обруча вокруг оси является для точки $M$ переносным движением. По известным из кинематики формулам имеем

$$\vec{\upsilon}_r = \vec{\tau}\frac{ds}{dt}, \quad \vec{a}_e = \vec{\tau}a_{e\tau} + \vec{n}a_{en}, \quad a_{e\tau} = \varepsilon(OM), \quad a_{en} = \omega^2(OM).$$

Здесь $\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{\omega_0}{t_*}e^{-\frac{t}{t_*}}$ есть угловое ускорение обруча. В соответствии с этим переносная сила инерции имеет две компоненты: вращательную $\vec{\Phi}_{e\tau} = -m\vec{a}_{e\tau}$ и центробежную $\vec{\Phi}_{en} = -m\vec{a}_{en}$ (рис. 14).

Ускорение Кориолиса $\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_e \times \vec{\upsilon}_r$ направлено так, как показано на рис. 14; это легко установить, пользуясь правилом Н. Е. Жуковского. Тогда имеем $\vec{\Phi}_c = -m\vec{a}_c$, $\left|\vec{\Phi}_c\right| = \Phi_c = 2m\omega\upsilon_r$.

Итак, векторное уравнение относительного движения для данной задачи записывается в форме

$$m\vec{a}_r = m\vec{g} + \vec{R} + \vec{\Phi}_c + \vec{N} + \vec{\Phi}_{e\tau} + \vec{\Phi}_{en},$$

$$\vec{a}_r = \vec{\tau} a_{r\tau} + \vec{n} a_{rn}, \quad a_{r\tau} = \frac{d\upsilon_r}{dt}, \quad a_{rn} = \frac{\upsilon_r^2}{h}, \quad \vec{N} = \vec{n} N_n + \vec{b} N_b. \qquad (21)$$

Проектирование (21) на естественные координатные оси доставляет нам дифференциальное уравнение для определения относительной скорости

$$m\frac{d\upsilon_r}{dt} = -\mu\upsilon_r + mh\varepsilon, \quad \left|\vec{\Phi}_{e\tau}\right| = mh\varepsilon, \quad t = 0, \quad \upsilon_r = 0 \qquad (22)$$

и два соотношения для компонент реакции обруча

$$N_b = mg, \quad \frac{m\upsilon_r^2}{h} = \Phi_c - \Phi_{en} + N_n.$$

Следовательно,

$$N_n = \frac{m\upsilon_r^2}{h} + m\omega^2 h - 2m\omega\upsilon_r.$$

Пользуясь этой формулой, нетрудно проследить зависимость радиальной динамической реакции $\vec{N}_n$ от кориолисовой силы инерции, а также от величин $h, \omega$.

Линейное неоднородное дифференциальное уравнение (22) записываем в виде

$$\frac{d\upsilon_r}{dt} + \frac{\mu}{m}\upsilon_r = h\frac{\omega_0}{t_*}e^{-\frac{t}{t_*}}, \quad t = 0, \quad \upsilon_r = 0$$

и, интегрируя стандартным способом [8], получаем:

$$\upsilon_r = e^{-\frac{\mu t}{m}} \frac{h\omega_0}{t_*\left(\frac{\mu}{m} - \frac{1}{t_*}\right)}\left[e^{\left(\frac{\mu}{m} - \frac{1}{t_*}\right)t} - 1\right], \quad \frac{\mu}{m} \neq \frac{1}{t_*}. \qquad (23)$$

В частном случае, когда $t_* = \frac{m}{\mu}$, решение уравнения (22) примет вид

$$\upsilon_r = \frac{th\omega_0}{t_*} e^{-\frac{\mu t}{m}}. \qquad (24)$$

Выражение для дуговой координаты дается интегралом

$$s(t) = \int_0^t \upsilon_r(t) dt,$$

который нетрудно вычислить.

Если пренебречь силой сопротивления $\vec{R}$ и взять $\mu = 0$, то относительная скорость, согласно (23), дается формулой

$$\upsilon_r = \frac{h\omega_0}{t_*} \int_0^t e^{-\frac{t}{t_*}} dt = h\omega_0 \left[ 1 - e^{-\frac{t}{t_*}} \right]. \qquad (25)$$

Проанализируем поведение относительной скорости $\upsilon_r = \upsilon_r(t)$ при неограниченном росте времени. Отметим прежде всего, что при $t \to \infty$ переносное движение стремится к равномерному вращению $\omega \to \omega_0$, так что $\upsilon_e \to h\omega_0$. При наличии трения ($\mu \neq 0$) из уравнения (23) получаем $t \to \infty$, $\upsilon_r \to 0$, т. е. предельным состоянием точки $M$ является относительный покой.

Для идеализированного варианта постановки задачи ($\mu = 0$) формула (25) дает принципиально иной результат:

$$t \to \infty, \quad \upsilon_r \to h\omega_0 > 0.$$

Таким образом, в задачах рассмотренного типа учет сил сопротивления движению точки является существенно важным.

*Контрольное задание*

Найти предельное (при $t \to \infty$) расстояние, которое пройдет точка $M$ в относительном движении, если $t_* = \frac{m}{\mu}$.

***Задача 6***

Материальная точка $M$ массы $m$ приводится в движение по неподвижной гладкой горизонтальной плоскости прямой лопаткой, вращающейся с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, проходящей через точку $O$. Движению точки по плоскости препятствуют сила сопротивления $\vec{R} = -\mu\vec{\upsilon}$ ($\mu = \text{const} > 0$, $\vec{\upsilon}$ – абсолютная скорость точки) и сила трения точки о поверхность лопатки (коэффициент трения скольжения $f$). В начальный момент времени точка $M$ находилась относительно лопатки в покое на расстоянии $OM_0 = l$ от оси вращения и имела переносную скорость $\upsilon_e(0) = \omega l$ (рис. 15). Найти уравнение движения точки относительно лопатки.

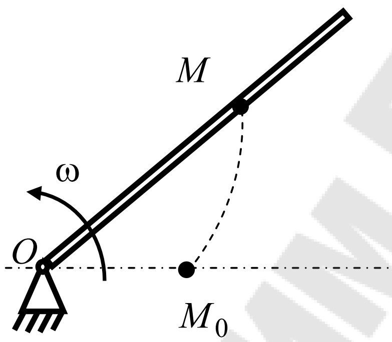



*Рис. 15*

*Решение*

Относительное движение материальной точки $M$ будем определять, пользуясь подвижной системой отсчета $Oxyz$ (рис. 16). Ось $Oz$ направлена перпендикулярно плоскости чертежа на читателя. Тогда имеем $OM = x$, $x = x(t)$; направление относительной скорости $\vec{\upsilon}_r = \vec{i}\,\dot{x}(t)$ показано на рис. 16.

Равномерное вращение лопатки вокруг оси $Oz$ является переносным движением для точки $M$:

$$\upsilon_e = \omega x, \quad \omega_e = \omega \equiv \text{const}, \quad \varepsilon_e = \frac{d\omega}{dt} \equiv 0, \quad a_{en} = \omega^2 x, \quad a_{e\tau} = 0.$$

Значит, переносное движение имеет только одну составляющую, направленную вдоль лопатки к точке $O$: $\vec{a}_e = \vec{a}_{en}$ (рис. 16).

Абсолютная скорость точки дается вектором

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_e + \vec{\upsilon}_r = \vec{i}\,\dot{x} + \vec{j}\,\omega x.$$

Ориентацию ускорения Кориолиса определяем по правилу Н. Е. Жуковского, а модуль его равен $a_c = 2\omega\dot{x}$, так как $\sin(\vec{\omega}_e, \vec{\upsilon}_r) = 1$.

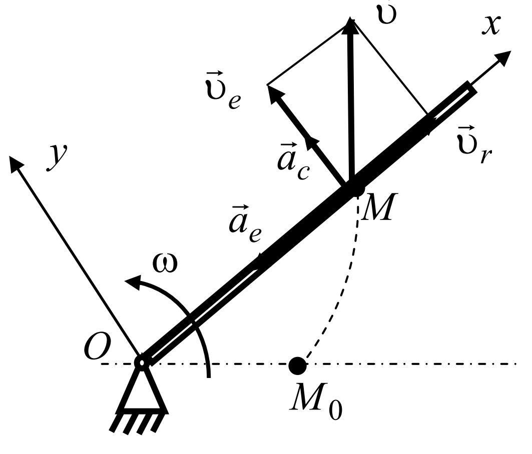



*Рис. 16*

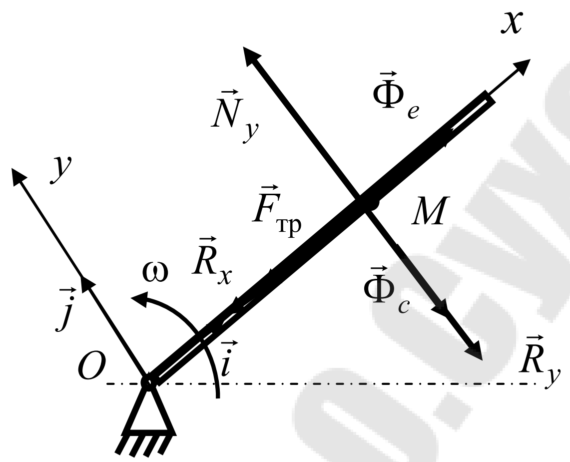



*Рис. 17*

Векторное уравнение относительного движения (6) запишем в виде

$$m\vec{a}_r = m\vec{g} + \vec{R} + \vec{\Phi}_c + \vec{N} + \vec{\Phi}_e + \vec{F}_{\text{тр}}, \qquad (26)$$

где $\vec{R} = -\mu\vec{\upsilon}$; $\vec{R} = \vec{R}_x + \vec{R}_y$; $\vec{R}_x = -\vec{i}\,\mu\dot{x}$; $\vec{R}_y = -\vec{j}\mu\omega x$; $\vec{N} = \vec{N}_x + \vec{N}_z$; $\vec{\Phi}_e = \vec{i}\left(m\omega^2 x\right)$; $\vec{\Phi}_c = -\vec{j}(2m\omega\dot{x})$; $\vec{F}_{\text{тр}} = -\vec{i}\,F_{\text{тр}}$; $\vec{a}_r = \vec{i}\,\ddot{x}(t)$.

Проектирование этого уравнения на оси $Oz$ и $Oy$ дает соотношения:

$$N_z = mg, \quad N_y = \Phi_c + R_y.$$

Зная нормальную к поверхности лопатки реакцию $\vec{N}_y$ (рис. 17), вычислим модуль силы трения точки:

$$F_{\text{тр}} = fN_y, \quad F_{\text{тр}} = f\left(2m\omega\dot{x} + \mu\omega x\right).$$

Уравнение относительного движения точки вдоль лопатки, получаемое проектированием (26) на $Ox$, записываем в форме

$$m\ddot{x} = -\mu\dot{x} - f\left(2m\omega\dot{x} + \mu\omega x\right) + m\omega^2 x, \quad t = 0, \quad x = l, \quad \dot{x} = 0.$$

Придадим этому уравнению стандартный вид:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \lambda x = 0,\ 2n = \frac{\mu}{m} + 2f\omega,\ \lambda = f\frac{\mu\omega}{m} - \omega^2 \qquad (27)$$

и проинтегрируем его методом Эйлера [8]. Будем искать общее решение уравнения (27) в виде

$$x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t),$$

где $x_1$, $x_2$ – частные линейно независимые решения; $C_1$, $C_2$ – произвольные постоянные. Составим характеристическое уравнение, соответствующее (27): $\alpha^2 + 2n\alpha + \lambda = 0$ и вычислим его корни

$$\alpha_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - \lambda}, \quad \Delta = \sqrt{n^2 - \lambda}.$$

Тогда находим

$$x_1 = e^{\alpha_1 t}, \quad x_2 = e^{\alpha_2 t}, \quad \Delta = \sqrt{\left(\frac{\mu}{2m}\right)^2 + \omega^2\left(1 + f^2\right)}$$

и получаем общее решение:

$$x = e^{-nt}\left(C_1 e^{t\Delta} + C_2 e^{-t\Delta}\right).$$

Продифференцировав эту функцию по времени, запишем:

$$\dot{x} = -nx + e^{-nt}\left(C_1 e^{t\Delta} - C_2 e^{-t\Delta}\right)\Delta.$$

Удовлетворив начальным условиям задачи, определим постоянные:

$$C_1 = \frac{l}{2}\left(1 + \frac{n}{\Delta}\right), \quad C_2 = \frac{l}{2}\left(1 - \frac{n}{\Delta}\right).$$

Применяя гиперболические функции, уравнение относительного движения можно записать в следующем виде:

$$x = le^{-nt}\left(ch(t\Delta) + \frac{n}{\Delta} sh(t\Delta)\right).$$

Легко заметить, что $0 < n < \Delta$, поэтому с течением времени точка $M$ неограниченно удаляется от оси вращения.

Если рассмотреть идеализированную постановку задачи и пренебречь силами трения и сопротивления ($\mu = 0$, $f = 0$), то получим:

$$x = \frac{l}{2}\left(e^{\omega t} + e^{-\omega t}\right), \quad x = lch(\omega t).$$

Для этого упрощенного варианта обобщенный интеграл энергии (9) можно записать в форме

$$\upsilon_r^2 - \left|\vec{\omega}_e \times \vec{r}\right|^2 = C_3 \equiv \text{const}, \quad \vec{r} = \vec{OM},$$

учтя, что потенциальная энергия точки $M$ в данном случае постоянна. Тогда вычисляем $\left|\vec{\omega}_e \times \vec{r}\right| = \omega x$ и находим из начального условия $x = l$,

$\upsilon_r = 0$ постоянную $C_3 = -\omega^2 l^2$. В итоге имеем зависимость относительной скорости движения от координаты $x$:

$$\upsilon_r^2 = \omega^2 \left(x^2 - l^2\right).$$

Как видим, обобщенный интеграл энергии позволяет получать простые и физически содержательные формулы, характеризующие относительное движение точки.

*Контрольное задание*

Сохраняя условие задачи 6, составить и проанализировать дифференциальное уравнение относительного движения точки $M$ для случаев:

1) неравномерное вращение лопатки с угловой скоростью

$$\omega = \omega_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right), \quad \omega_0 > 0, \quad \tau > 0;$$

2) равномерное вращение лопатки вокруг оси, движущейся прямолинейно с постоянной скоростью $\vec{u}$.

***Задача** 7*

Материальная точка $M$ массы $m$ движется в трубке, изогнутой по дуге окружности радиуса $h$. Трубка вращается вокруг вертикальной оси, перпендикулярной плоскости трубки и проходящей через центр кривизны трубки, с угловой скоростью $\omega = \omega_0 \left(k_0 - k_1 e^{-\frac{t}{t_*}}\right)$, $\omega_0 > 0$, $0 \le k_1 \le k_0$, $t_* > 0$. Точка преодолевает силу сопротивления $\vec{R} = -\mu \vec{\upsilon}_r$, $\mu > 0$.

В начальный момент времени точка находилась в трубке и имела относительную скорость $\vec{\upsilon}_r^0 = \vec{\tau} \upsilon_r^0$ (рис. 18). Найти уравнение движения точки по трубке.

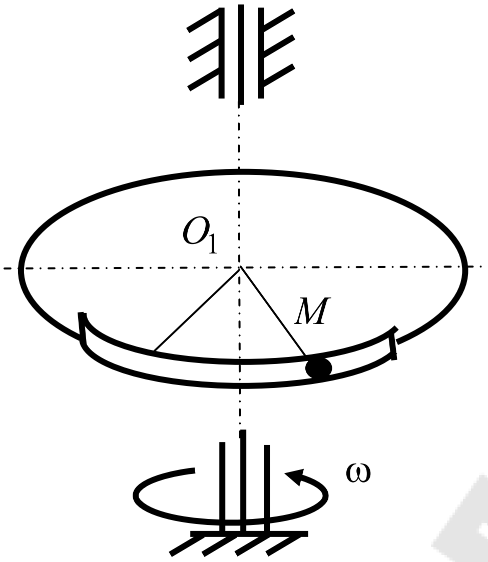



*Рис. 18*

*Решение*

Определим относительное движение точки, применяя координатные оси с ортами $\vec{\tau}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$ (рис. 19); орт бинормали параллелен оси вращения.

Векторы относительной скорости и относительного ускорения запишем в виде:

$$\vec{\upsilon}_r = \vec{\tau}\upsilon_r, \quad \upsilon_r = \frac{ds}{dt}, \quad \vec{a}_r = \vec{\tau}a_{r\tau} + \vec{n}a_{rn}, \quad a_{r\tau} = \frac{d\upsilon_r}{dt}, \quad a_{rn} = \frac{\upsilon_r^2}{h}.$$

Угловая скорость переносного вращения в случае $0 \le k_1 \le k_0$ положительна:

$$\omega(0) = \omega_0(k_0 - k_1) > 0, \quad \omega_e(t) = \omega;$$

$$t \to \infty, \quad \omega(t) \to \omega_0 k_0 > 0.$$

Для переносного углового ускорения трубки имеем формулу

$$\varepsilon_e(t) = \frac{d\omega_e}{dt}, \quad \varepsilon_e = \frac{\omega_0 k_1}{t_*} e^{-\frac{t}{t_*}} > 0.$$

Далее вычисляем

$$\vec{a}_e = \vec{\tau}a_{e\tau} + \vec{n}a_{en}, \quad a_{e\tau} = \varepsilon_e h, \quad a_{en} = \omega_e^2 h.$$

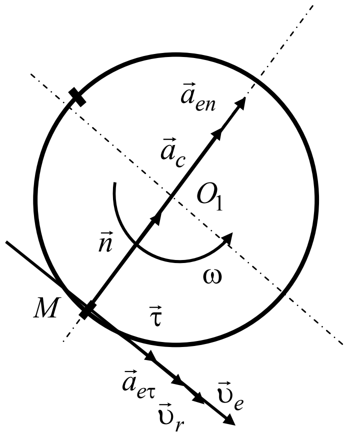



*Рис. 19*

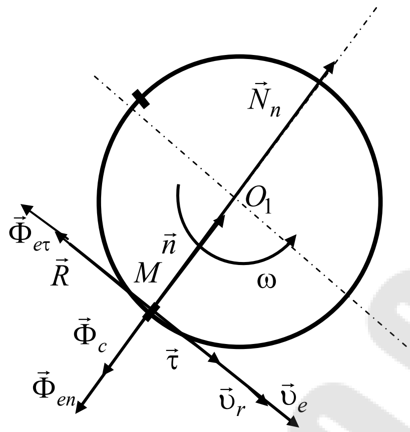



*Рис. 20*

Запишем в векторной форме уравнение относительного движения точки $M$:

$$m\vec{a}_r = m\vec{g} + \vec{R} + \vec{N} + \vec{\Phi}_c + \vec{\Phi}_e, \tag{28}$$

где $\vec{R} = -\mu\vec{\upsilon}_r = -\vec{\tau}\mu\upsilon_r$ – сила сопротивления; $\vec{N} = \vec{n}N_n + \vec{b}N_b$ – реакция трубки, которую представляем в виде суммы двух составляющих: радиальной и вертикальной (в направлении бинормали $\vec{b}$); $\vec{\Phi}_e = \vec{\Phi}_{e\tau} + \vec{\Phi}_{en}$ – переносная сила инерции, $\vec{\Phi}_{e\tau} = -m\vec{a}_{e\tau} = -\vec{\tau}m\varepsilon_e h$, $\vec{\Phi}_{en} = -m\vec{a}_{en} = -\vec{n}\left(m\omega_e^2 h\right)$.

Направление кориолисовой силы инерции $\vec{\Phi}_c = -m\vec{a}_c = -\vec{n}\left(2m\omega_e\upsilon_r\right)$ показано на рис. 20.

В результате проектирования (28) на бинормаль и главную нормаль имеем

$$N_b = mg, \quad N_n = m\left(\frac{\upsilon_r^2}{h} + h\omega_e^2 + 2\omega_e\upsilon_r\right).$$

Последняя формула говорит о существенной зависимости динамической радиальной компоненты $N_n$ реакции трубки от $\upsilon_r$ и $\omega_e$.

Наконец, из выражения (28) получаем дифференциальное уравнение относительного движения точки

$$m\frac{d\upsilon_r}{dt} = -\mu\upsilon_r - m\varepsilon_e h, \quad t = 0, \quad \upsilon_r = \upsilon_r^0.$$

Проинтегрировав это уравнение обычным образом [8], получим

$$\upsilon_r = e^{-\frac{\mu}{m}t}\left[\upsilon_r^0 + \frac{h\omega_0 k_1}{t_* \delta}\left(1 - e^{t\delta}\right)\right], \quad \delta = \frac{\mu}{m} - \frac{1}{t_*} \neq 0. \tag{29}$$

Отсюда следует, что если переносное вращение равномерное ($k_1 = 0$, $\omega_e = \omega_0 \equiv \text{const}$) и в начальный момент времени точка находилась в трубке в относительном покое ($\upsilon_r^0 = 0$), то $\upsilon_r(t) \equiv 0$, $t \ge 0$, т. е. состояние относительного покоя сохранится и в последующие моменты времени. При $\upsilon_r^0 \ne 0$, $k_1 = 0$ имеем $\upsilon_r(t) = \upsilon_r^0 e^{-\frac{\mu t}{m}}$, т. е. относительная скорость монотонно стремится к нулю.

Если пренебречь сопротивлением и положить в выражение (29) $\mu = 0$, то относительная скорость получается следующей:

$$\upsilon_r(t) = \upsilon_r^0 - h\omega_0 k_1 \left(1 - e^{-\frac{t}{t_*}}\right).$$

Это означает, что в случае равномерного переносного вращения $\upsilon_r(t) = \upsilon_r^0$, $t \ge 0$, $k_1 = 0$, т. е. относительная скорость сохраняет свое первоначальное значение. Такой же вывод следует из обобщенного интеграла энергии (9). Действительно, взяв $\vec{r} = O_1\vec{M}$ (рис. 19) и приняв во внимание, что в данном случае $\Pi \equiv \text{const}$, получим вместо (9):

$$\upsilon_r^2 - (\omega_0 h)^2 = C_1 \equiv \text{const}.$$

Постоянная $C_1$ определяется из начальных условий:

$$C_1 = \left(\upsilon_r^0\right)^2 - (\omega_0 h)^2.$$

Следовательно, $\upsilon_r(t) = \upsilon_r^0(t)$, $t \ge 0$.

Значение дуговой координаты $s = \breve{OM}$ легко получается вычислением интеграла

$$s(t) = \int_0^t \upsilon_r(t)dt.$$

*Контрольное задание*

Сохраняя условие задачи 7, составить и проанализировать дифференциальное уравнение относительного движения точки $M$ для случая, когда

$$0 < k_0 < k_1 < \infty.$$

## 5. Варианты заданий

*Постановка задачи*

Материальная точка $M$ массы $m$ движется относительно шероховатого тела из начального состояния $t = 0$, $s_r = 0$, $\upsilon_r = \upsilon_r^0$. Переносное движение тела определяется функцией $y_1(t) = b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3$ (варианты 1–22 приложения) либо функцией $\varphi(t) = \varphi_1 t + \varphi_2 t^2 + \varphi_3 t^3$ (варианты 23–100 приложения). Исходные данные приведены в таблице, схемы вариантов – в приложении.

**Таблица исходных данных для индивидуальных заданий**

| Вариант | $m$, кг | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | $\varphi_1$ | $\varphi_2$ | $\varphi_3$ | $f$ | $R$, м | $r$, $h$, м | $\upsilon_r^0$, м/с |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,01 | 2 | 3 | 5 | 6 | 4 | 1 | 0,1 | 0,2 | 0,12 | 0,2 |
| 2 | 0,02 | 3 | 4 | 4 | 2 | 1,5 | 0,5 | 0,12 | 0,30 | 0,11 | –0,3 |
| 3 | 0,05 | 4 | 5 | 3 | 3 | 3 | 10 | 0,15 | 0,5 | 0,14 | 0 |
| 4 | 0,03 | 5 | 2,5 | 5 | 10 | 5 | 3,5 | 0,15 | 0,3 | 0,2 | 0,25 |
| 5 | 0,06 | 6 | 9 | 7 | 3 | 4 | 1 | 0,2 | 0,4 | 0,18 | 0,5 |
| 6 | 0,01 | 1 | 3 | 9 | 7 | 7 | 2 | 0,22 | 0,2 | 0,15 | –0,9 |
| 7 | 0,03 | 7 | 1 | 8 | 6 | 2,5 | 1 | 0,1 | 0,8 | 0,11 | –0,6 |
| 8 | 0,06 | 1,5 | 2 | 2 | 4 | 3 | 3 | 0,15 | 0,4 | 0,2 | 0,3 |
| 9 | 0,05 | 9 | 6 | 2,5 | 1 | 8 | 6 | 0,12 | 0,2 | 0,1 | 1 |
| 10 | 0,02 | 1 | 7 | 2 | 3 | 3,5 | 5 | 0,15 | 0,8 | 0,14 | –0,14 |
| 11 | 0,03 | 2 | 9 | 4 | 10 | 5 | 1,5 | 0,2 | 0,3 | 0,12 | –0,35 |
| 12 | 0,06 | 5 | 3 | 6 | 2 | 0,5 | 1 | 0,22 | 0,6 | 0,2 | 1,5 |
| 13 | 0,08 | 6 | 2 | 7 | 1 | 4 | 3,5 | 0,1 | 0,4 | 0,16 | –1 |
| 14 | 0,05 | 8 | 1 | 8 | 9 | 7 | 0,5 | 0,12 | 0,12 | 0,11 | 1,5 |
| 15 | 0,02 | 4 | 4 | 9 | 8 | 3 | 7 | 0,22 | 0,7 | 0,14 | –0,25 |
| 16 | 0,10 | 3 | 5 | 1,5 | 6 | 5 | 6 | 0,15 | 0,6 | 0,1 | 0,3 |
| 17 | 0,08 | 8 | 10 | 1 | 1 | 2,5 | 4 | 0,2 | 0,5 | 0,2 | 0 |
| 18 | 0,06 | 9 | 9 | 3 | 3 | 6 | 7 | 0,12 | 0,8 | 0,25 | 2 |
| 19 | 0,01 | 2 | 7 | 4 | 7 | 0,5 | 9 | 0,1 | 0,4 | 0,13 | –0,7 |
| 20 | 0,03 | 6 | 6 | 2 | 4 | 8 | 3 | 0,12 | 0,3 | 0,16 | –2 |
| 21 | 0,06 | 4 | 3 | 1 | 2 | 8 | 3,5 | 0,15 | 0,35 | 0,1 | 0,9 |
| 22 | 0,08 | 2,5 | 4 | 5 | 3 | 6 | 2 | 0,22 | 0,6 | 0,12 | –0,8 |
| 23 | 0,06 | 3 | 5 | 6 | 9 | 10 | 5 | 0,12 | 0,45 | 0,2 | 0,45 |
| 24 | 0,02 | 5 | 7 | 9 | 2 | 3,5 | 3 | 0,1 | 0,7 | 0,11 | 0,6 |
| 25 | 0,01 | 7 | 8 | 10 | 3 | 0,5 | 1 | 0,15 | 0,12 | 0,14 | 0,3 |
| 26 | 0,05 | 9 | 9 | 1 | 4 | 7 | 2 | 0,2 | 0,9 | 0,18 | 2,5 |
| 27 | 0,08 | 8 | 2 | 4 | 10 | 2 | 9 | 0,12 | 0,8 | 0,13 | –1,2 |
| 28 | 0,03 | 6 | 1 | 5 | 9 | 3,5 | 1 | 0,1 | 0,4 | 0,1 | 1,5 |

*Окончание*

| Вари-ант | $m$, кг | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | $\varphi_1$ | $\varphi_2$ | $\varphi_3$ | $f$ | $R$, м | $r$, $h$, м | $\upsilon_r^0$, м/с |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 29 | 0,06 | 5 | 10 | 7 | 7 | 6 | 0,5 | 0,22 | 0,45 | 0,11 | –0,8 |
| 30 | 0,03 | 4 | 6 | 4 | 8 | 4 | 1,5 | 0,2 | 0,6 | 0,16 | 1,4 |
| 31 | 0,02 | 2 | 8 | 8 | 4 | 3 | 8 | 0,15 | 0,3 | 0,1 | 1,2 |
| 32 | 0,05 | 3 | 9 | 6 | 6 | 4 | 7 | 0,2 | 0,7 | 0,18 | 0,15 |
| 33 | 0,04 | 1 | 1,5 | 3 | 1 | 3,5 | 3 | 0,1 | 0,15 | 0,2 | 2,0 |
| 34 | 0,05 | 5 | 2 | 1,5 | 2 | 3 | 5 | 0,12 | 0,9 | 0,25 | 1,6 |
| 35 | 0,03 | 7 | 5 | 3 | 3 | 2,5 | 0,5 | 0,15 | 0,4 | 0,18 | –1,7 |
| 36 | 0,01 | 8 | 4 | 1 | 5 | 3 | 1 | 0,22 | 0,15 | 0,14 | 0 |
| 37 | 0,01 | 9 | 3,5 | 8 | 1,5 | 0,5 | 10 | 0,1 | 0,8 | 0,15 | –0,9 |
| 38 | 0,03 | 3 | 4 | 5 | 6 | 1 | 3 | 0,12 | 0,45 | 0,1 | 0,2 |
| 39 | 0,02 | 2 | 6 | 6 | 8 | 4 | 0,5 | 0,22 | 0,7 | 0,16 | 0,6 |
| 40 | 0,06 | 0,5 | 7 | 8 | 4 | 2,5 | 1 | 0,2 | 0,4 | 0,2 | 0,25 |
| 41 | 0,05 | 6 | 8 | 9 | 10 | 5 | 4 | 0,15 | 0,8 | 0,14 | 0,4 |
| 42 | 0,08 | 2 | 4 | 5 | 1 | 4 | 0,5 | 0,12 | 0,9 | 0,1 | 0,3 |
| 43 | 0,03 | 1,5 | 1 | 3 | 2 | 7 | 2,5 | 0,22 | 0,6 | 0,18 | –0,15 |
| 44 | 0,10 | 4 | 2 | 2 | 9 | 3,5 | 10 | 0,2 | 0,15 | 0,25 | 0,5 |
| 45 | 0,10 | 2 | 9 | 1 | 8 | 0,5 | 4 | 0,22 | 0,6 | 0,13 | 0,8 |
| 46 | 0,03 | 10 | 7 | 5 | 1,5 | 2 | 6 | 0,15 | 0,35 | 0,11 | 0 |
| 47 | 0,10 | 1 | 6 | 6 | 6 | 5 | 1,5 | 0,1 | 0,4 | 0,25 | 0,9 |
| 48 | 0,06 | 3,5 | 4 | 7 | 8 | 2 | 6 | 0,12 | 0,3 | 0,18 | –0,13 |
| 49 | 0,10 | 1,5 | 3 | 9 | 2 | 2,5 | 7 | 0,22 | 0,5 | 0,11 | –0,16 |
| 50 | 0,06 | 1 | 1 | 5 | 3 | 3 | 2 | 0,1 | 0,45 | 0,1 | 0,6 |
| 51 | 0,02 | 2,5 | 2 | 4 | 6 | 3,5 | 7 | 0,15 | 0,7 | 0,16 | 0,1 |
| 52 | 0,05 | 10 | 5 | 3 | 7 | 4 | 5 | 0,2 | 0,8 | 0,25 | 0,15 |
| 53 | 0,08 | 3 | 8 | 2 | 9 | 2 | 6 | 0,12 | 0,6 | 0,12 | 0,13 |
| 54 | 0,03 | 2,5 | 9 | 5 | 1 | 10 | 8 | 0,22 | 0,5 | 0,18 | –0,25 |
| 55 | 0,08 | 5 | 1 | 9 | 3 | 5 | 1 | 0,15 | 0,4 | 0,2 | –0,1 |
| 56 | 0,05 | 4 | 2 | 7 | 6 | 3 | 4 | 0,22 | 0,12 | 0,14 | –0,3 |
| 57 | 0,06 | 2 | 10 | 4 | 5 | 3,5 | 10 | 0,2 | 0,7 | 0,1 | 0,8 |
| 58 | 0,02 | 1,5 | 1 | 2 | 10 | 6 | 8 | 0,15 | 0,45 | 0,16 | 0 |
| 59 | 0,05 | 1,5 | 2 | 6 | 5 | 4 | 2,5 | 0,12 | 0,3 | 0,11 | –0,15 |
| 60 | 0,02 | 3,5 | 10 | 4 | 1,5 | 4 | 7 | 0,1 | 0,4 | 0,12 | 0,35 |

*Цель задания*

1. Составить дифференциальное уравнение относительного движения точки.

2. Проанализировать это уравнение движения для двух ситуаций:

– с учетом трения (сопротивления);

– без учета трения (сопротивления).

3. Проинтегрировать уравнение относительного движения точки при движении точки по гладкой плоскости.

## Литература

1. Бутенин, Н. В. Курс теоретической механики / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. – Санкт-Петербург : Лань, 1998. – 730 с.

2. Старжинский, В. М. Теоретическая механика : учебник : крат. курс по полной программе втузов / В. М. Старжинский. – Москва : Наука, 1980. – 464 с.

3. Тарг, С. М. Краткий курс теоретической механики / С. М. Тарг. – Москва : Высш. шк., 1986. – 416 с.

4. Добронравов, В. В. Курс теоретической механики : в 2 ч. / В. В. Добронравов, Н. Н. Никитин. – Ч. 1. – Москва : Высш. шк., 1983. – 575 с.

5. Яблонский, А. А. Курс теоретической механики : в 2 ч. / А. А. Яблонский. – Ч. 2. – Москва : Высш. шк., 1984. – 430 с.

6. Шабловский, О. Н. Динамика : практикум по курсу «Теоретическая механика» для студентов инженер.-техн. специальностей днев. и заоч. форм обучения / О. Н. Шабловский, И. А. Концевой. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2008. – 42 с.

7. Сборник задач по теоретической механике / К. С. Колесников [и др.] ; под общ. ред. К. С. Колесникова. – Москва : Наука, 1983. – 320 с.

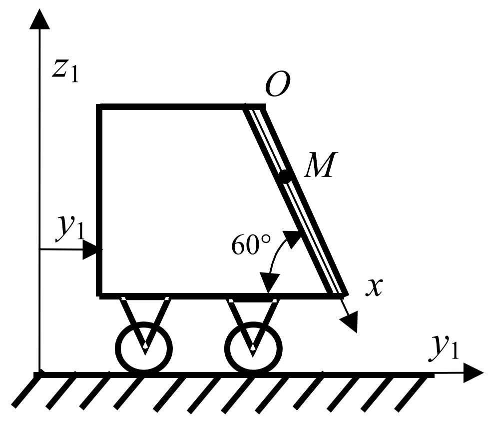
8. Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – Москва : Наука, 1971. – 576 с.

9. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений / Дж. Холл [и др.] ; под общ. ред. Дж. Холла. – Москва : Мир, 1979. – 312 с.

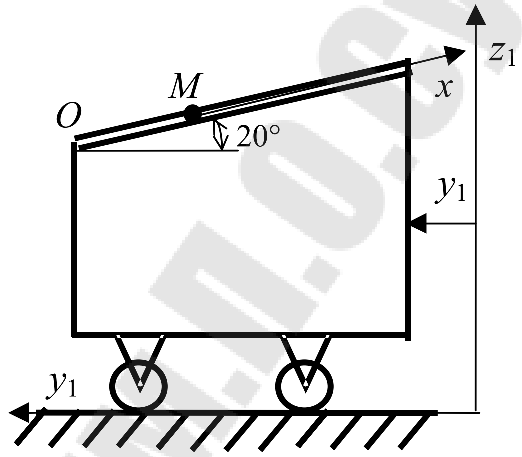
## Приложение

*Варианты индивидуальных заданий*

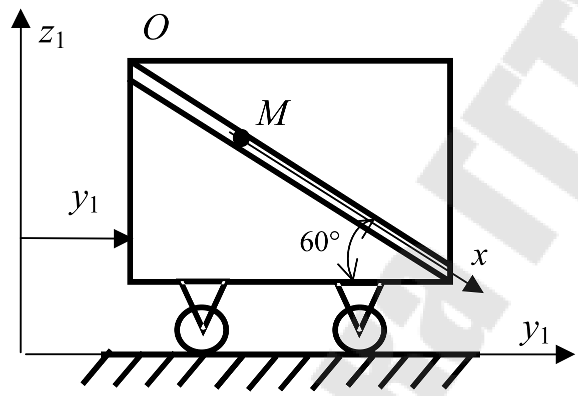
**1**



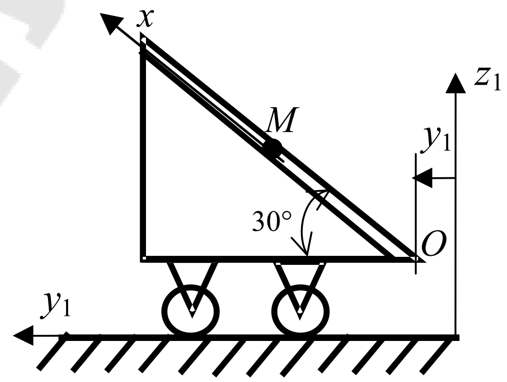

**2**



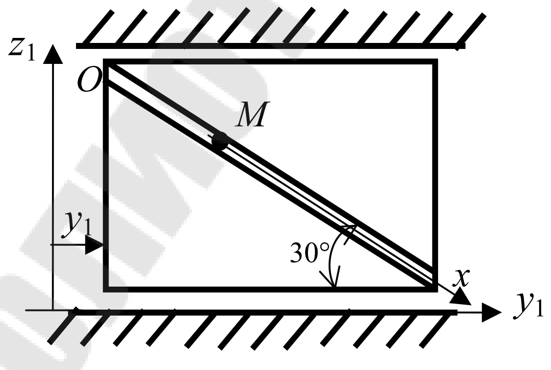

**3**



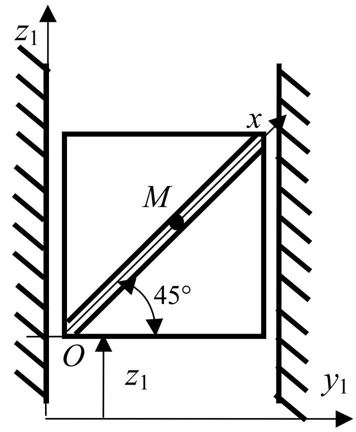

**4**



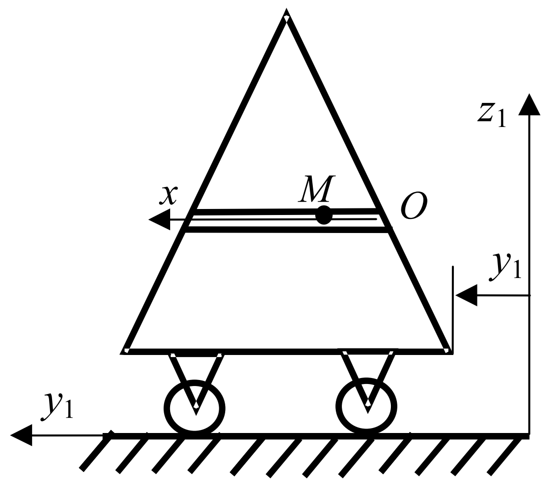

**5**



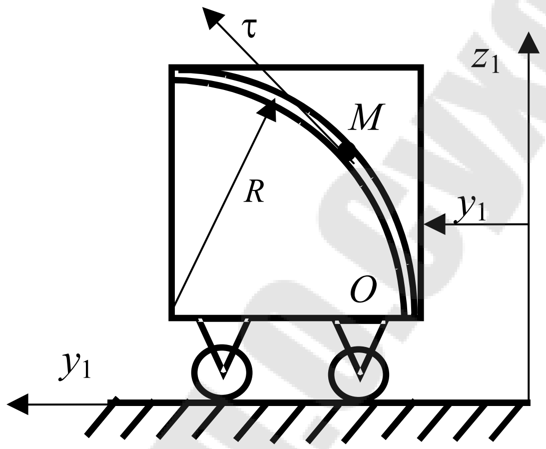

**6**



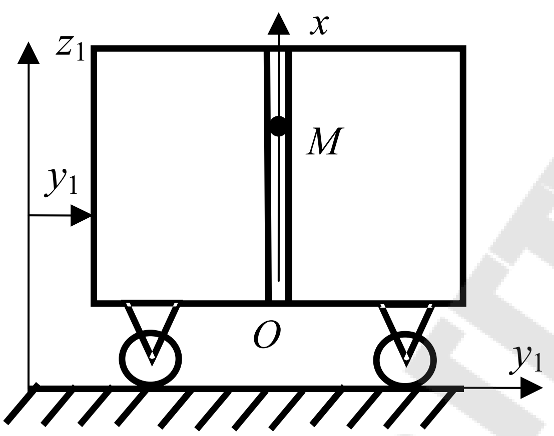
**7**


z1
x
M
O
y1
y1

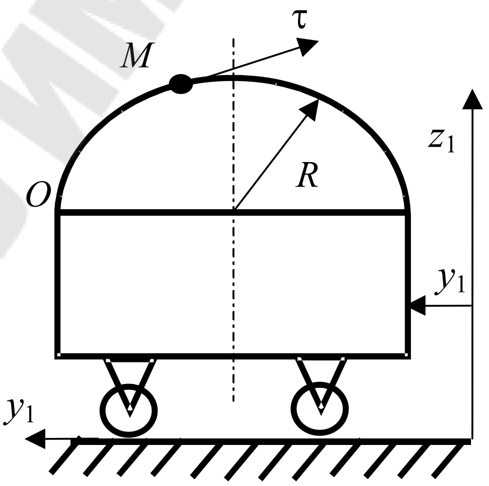
**8**


τ
z1
M
R
y1
O
y1

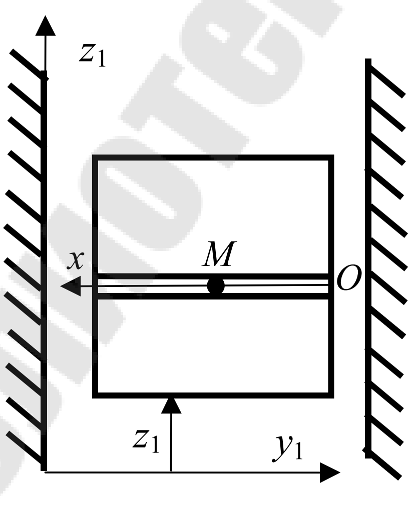
**9**


x
z1
M
y1
O
y1

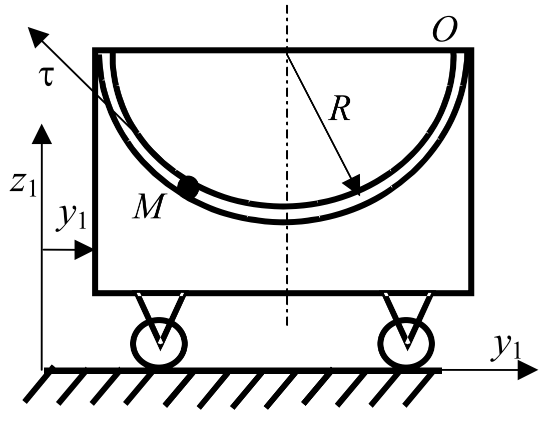
**10**


τ
M
z1
R
O
y1
y1

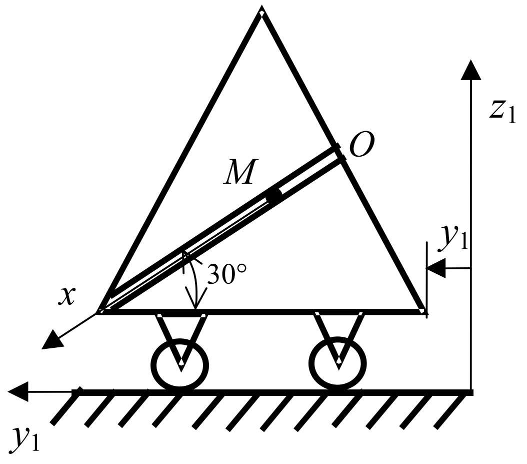
**11**


z1
M
x
O
z1
y1

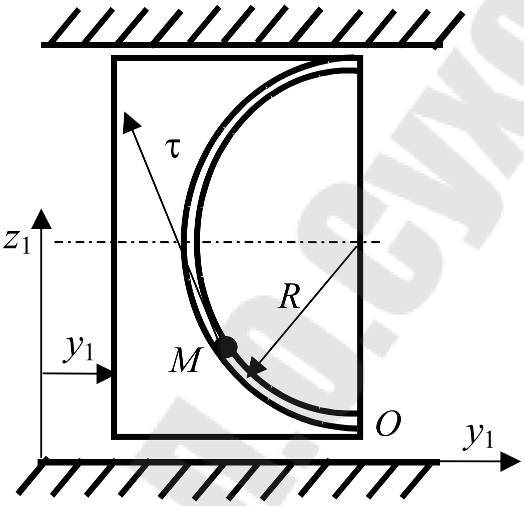
**12**


O
τ
R
z1
y1
M
y1

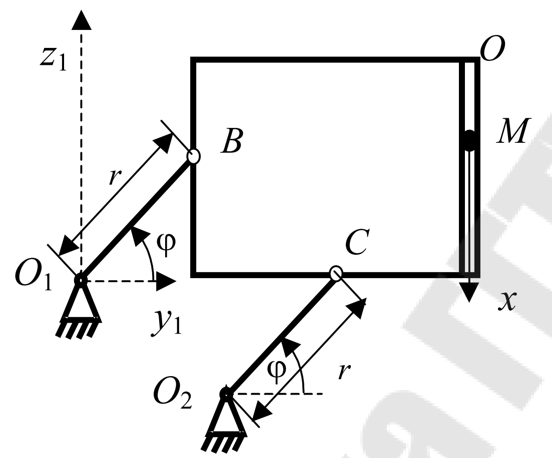
**13**



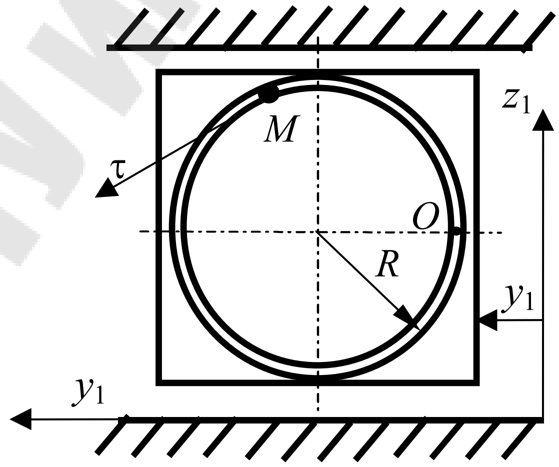

**14**



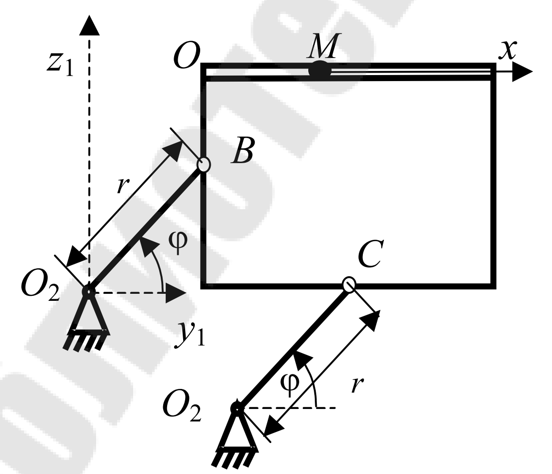

**15**



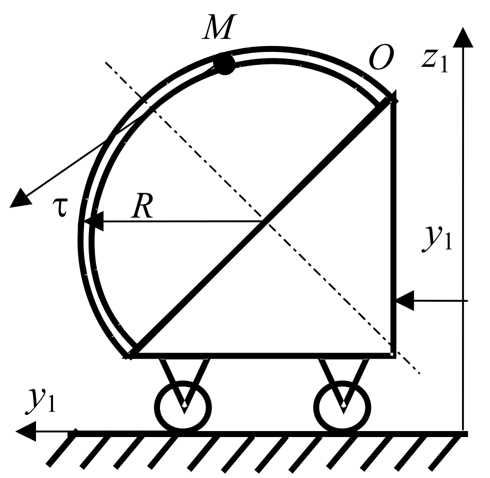

**16**



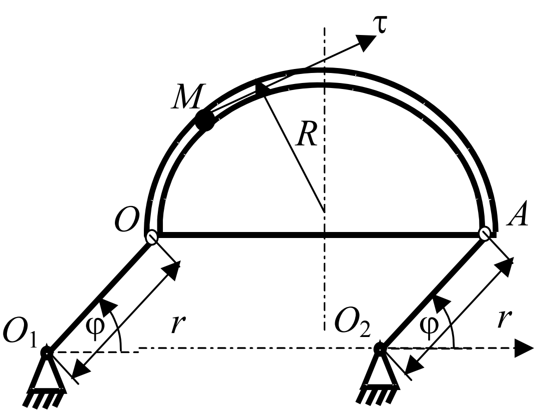

**17**



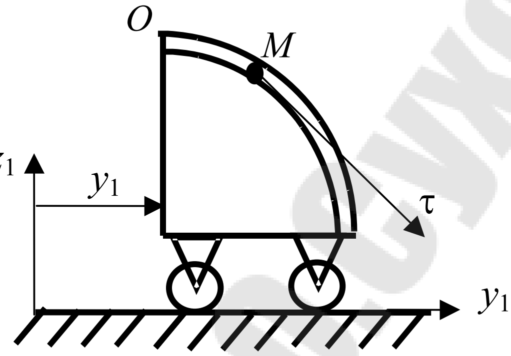

**18**



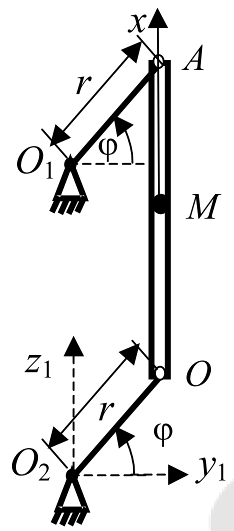
**19**



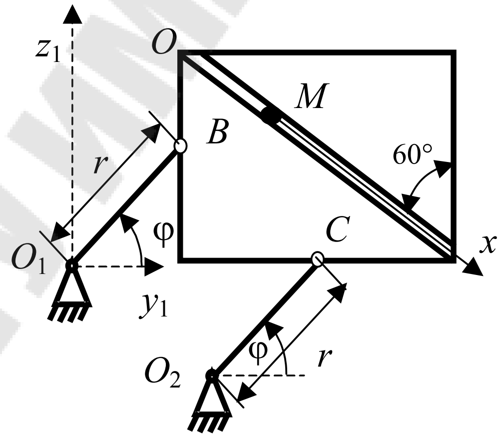

**20**



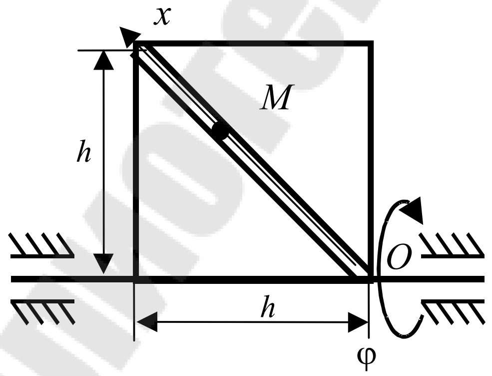

**21**



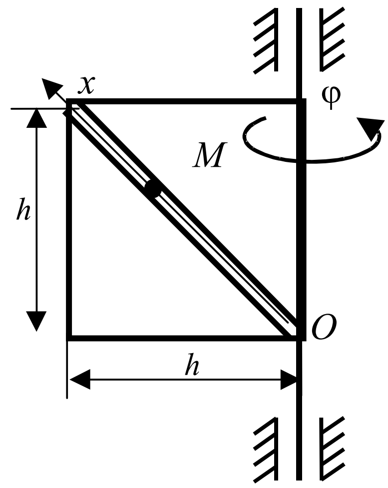

**22**



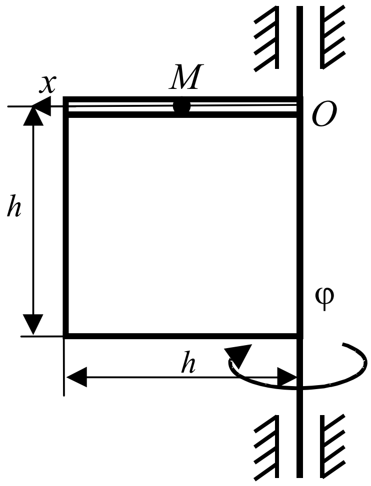

**23**



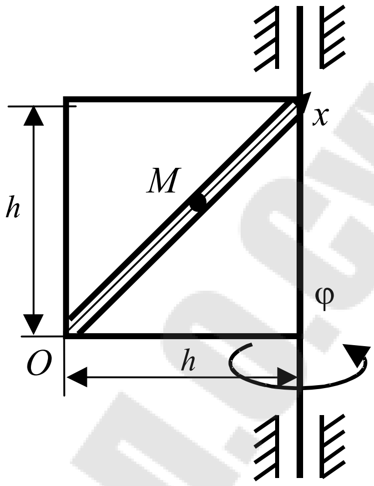

**24**



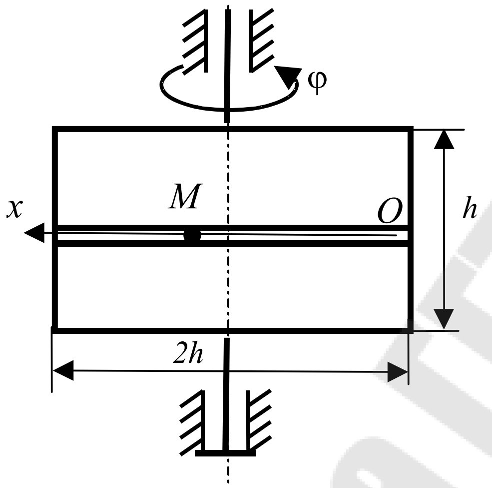
25



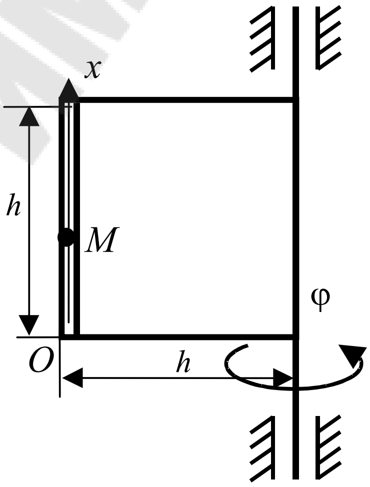

26



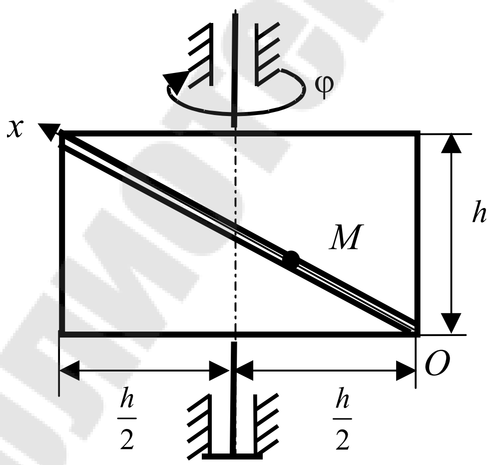

27



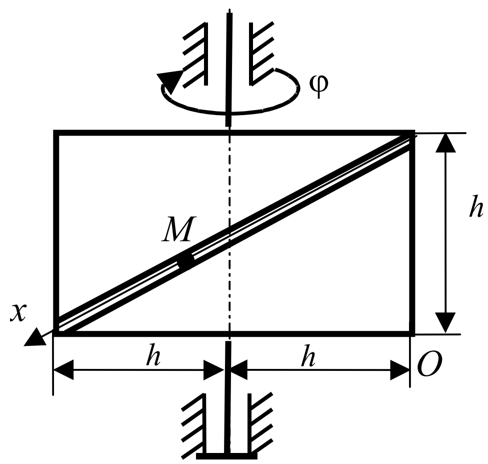

28



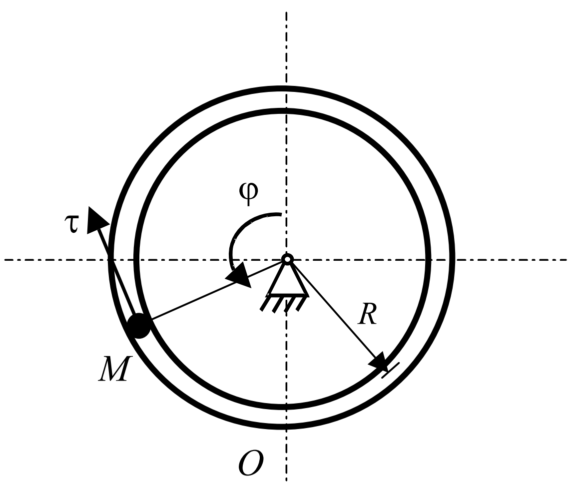

29



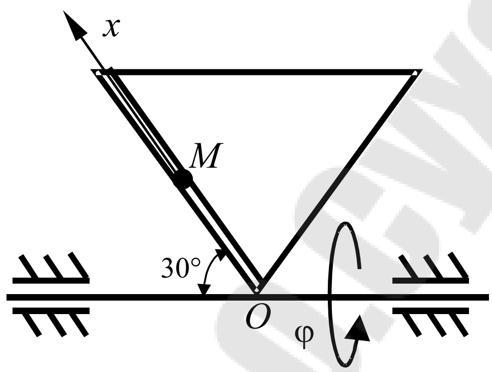

30



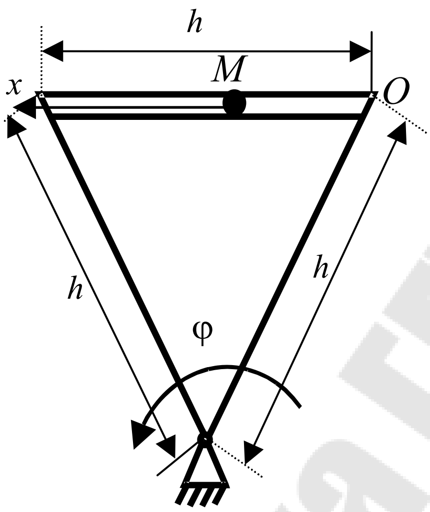
**31**



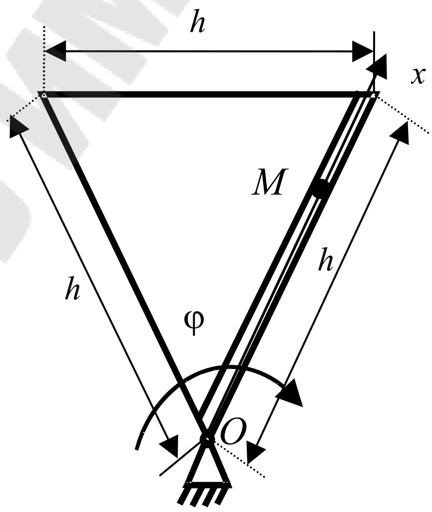

**32**



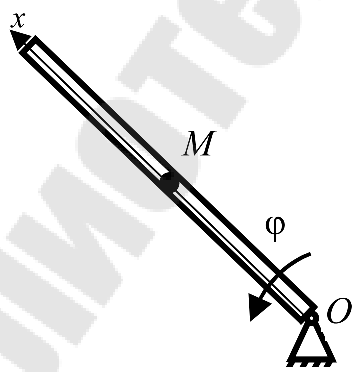

**33**



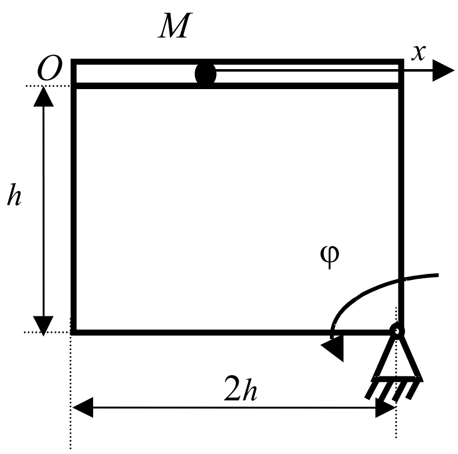

**34**



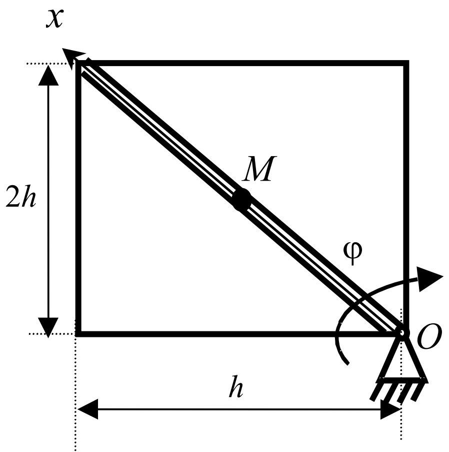

**35**



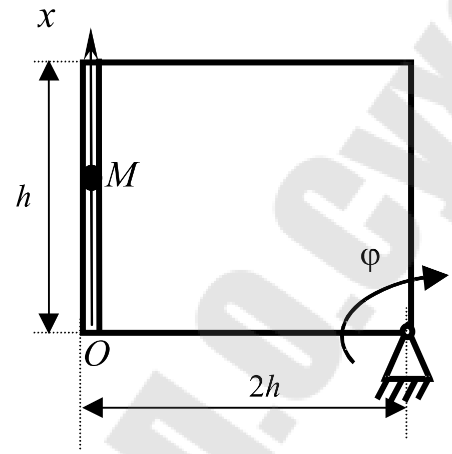

**36**



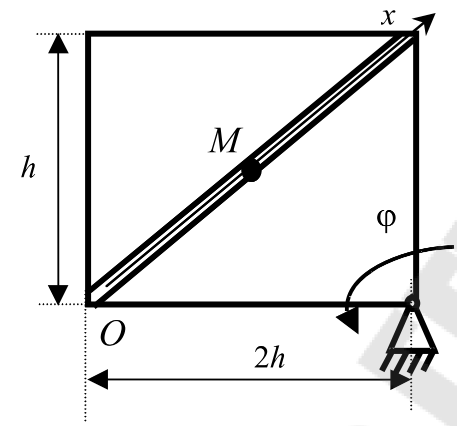
**37**



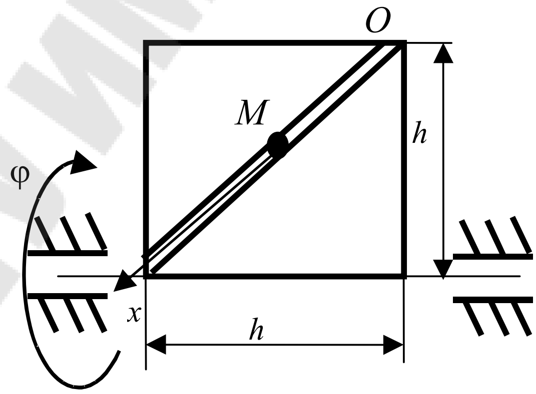

**38**



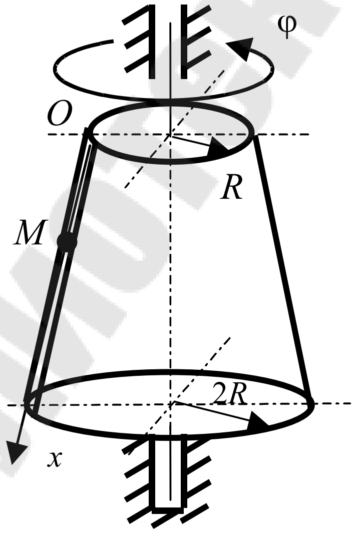

**39**



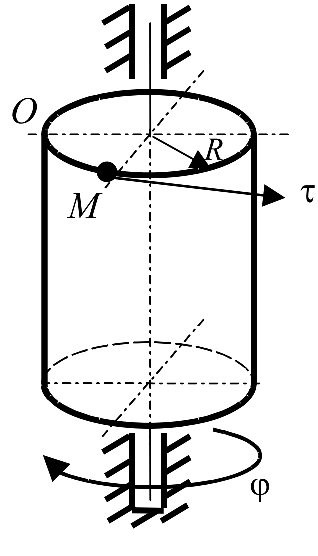

**40**



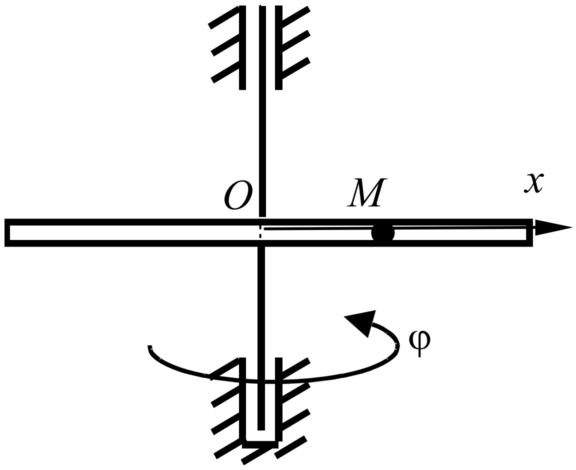

**41**



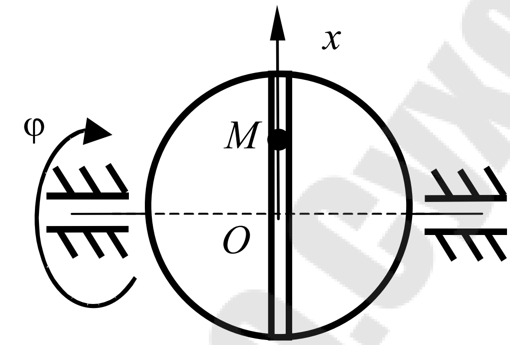

**42**



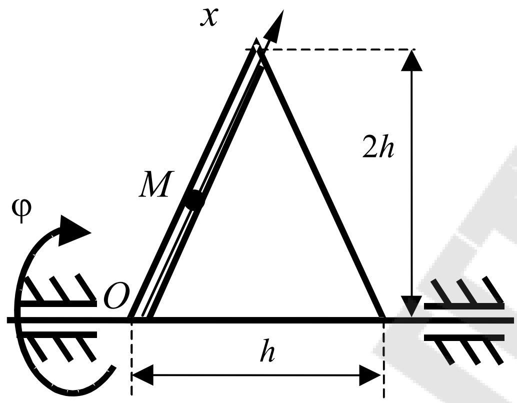
**43**



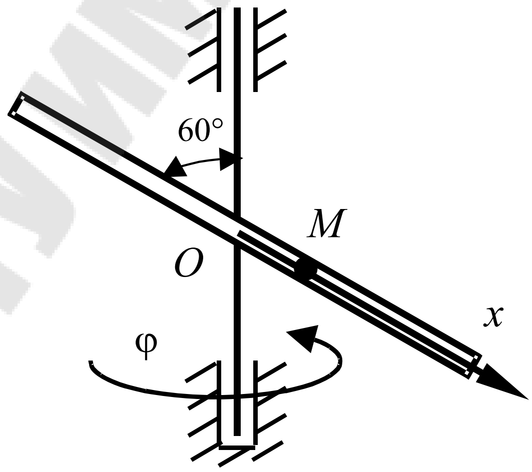

**44**



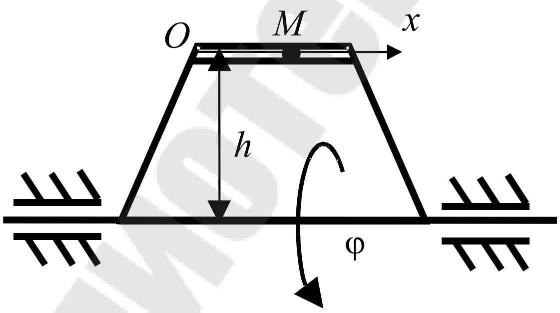

**45**



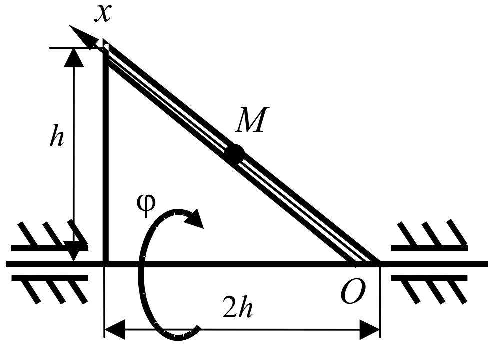

**46**

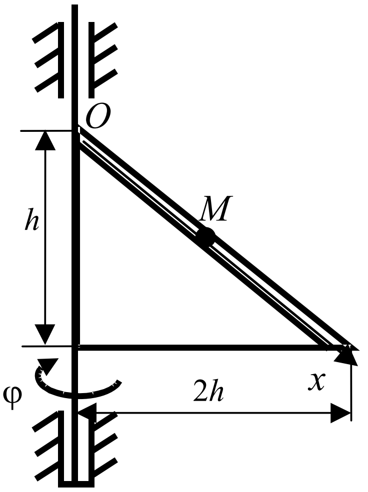
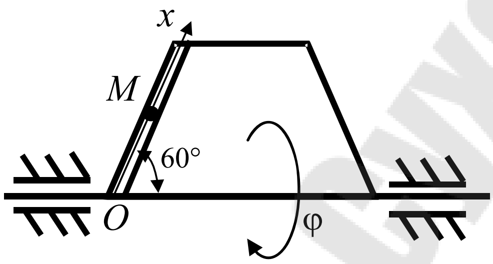



**47**



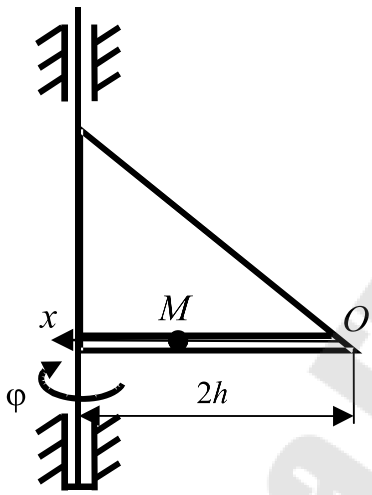
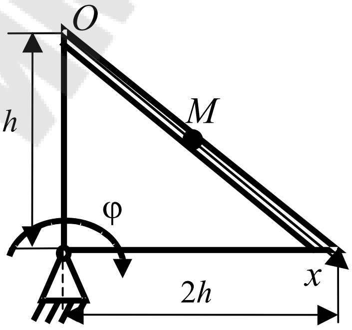

**48**



| 49 | 50 |
|---|---|
|  |  |

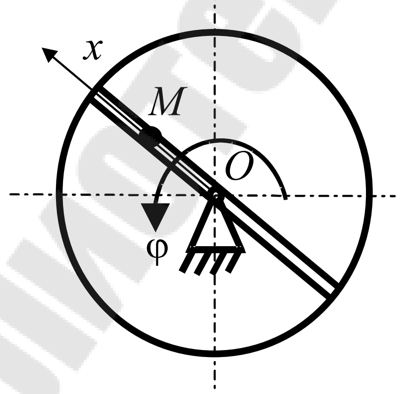
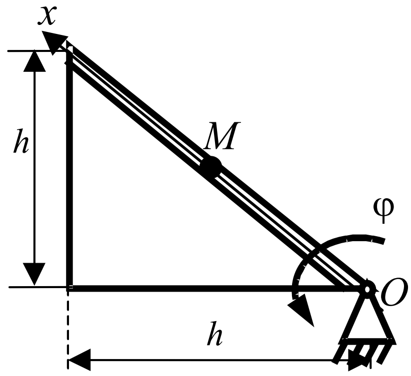




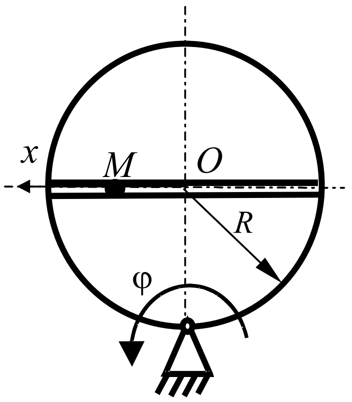
| 51 | 52 |
|---|---|
|  |  |



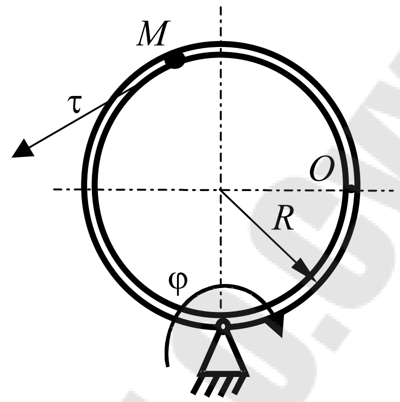


| 53 | 54 |
|---|---|
|  |  |

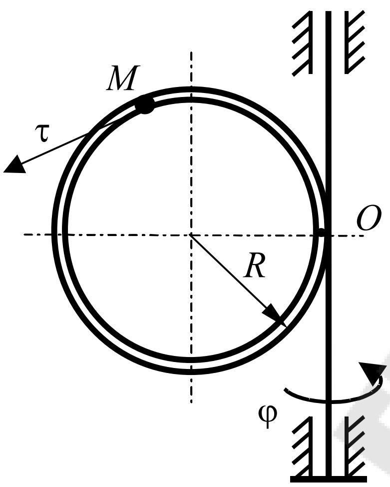
**55**



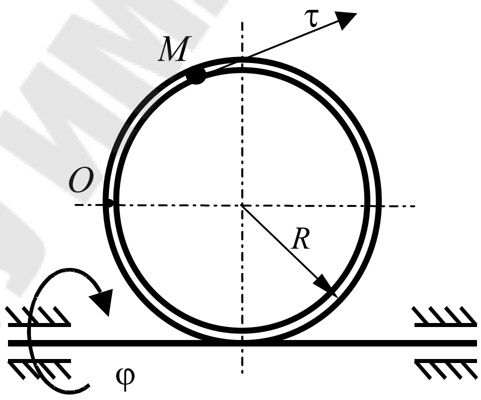

**56**



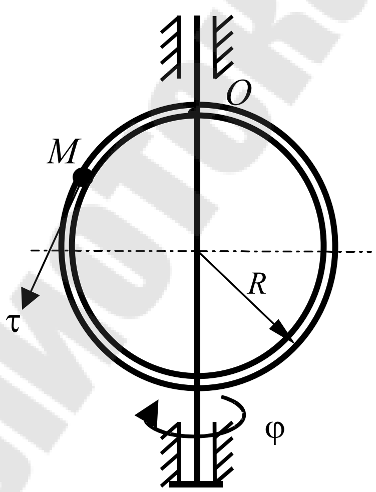

**57**



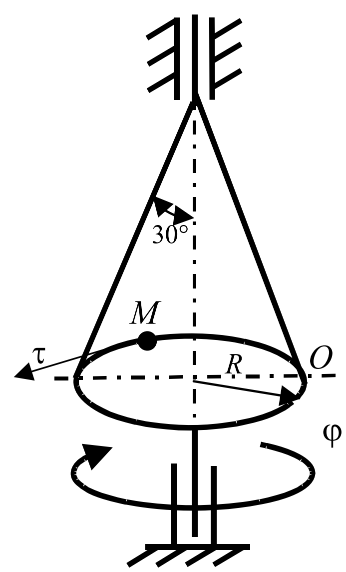

**58**



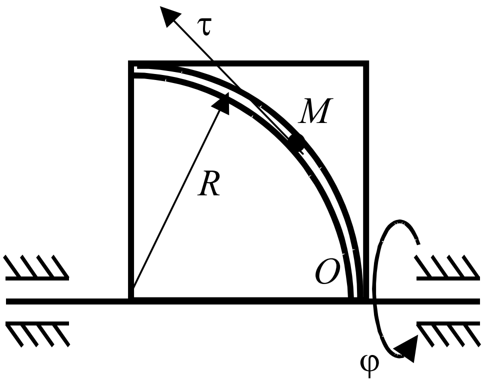

**59**



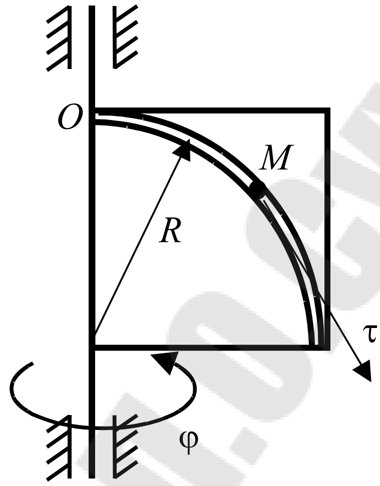

**60**



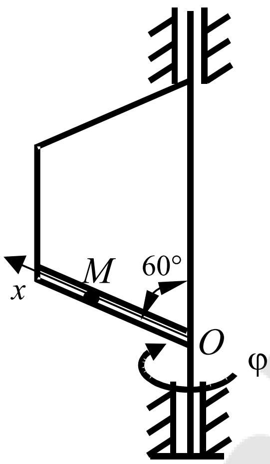
**61**



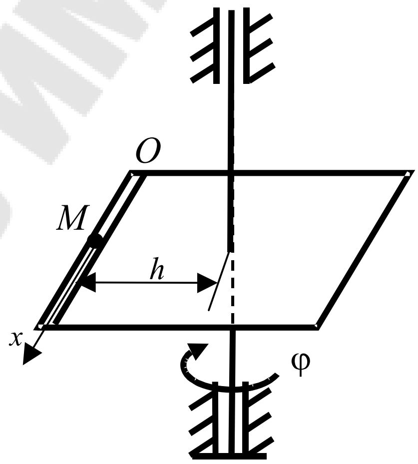

**62**



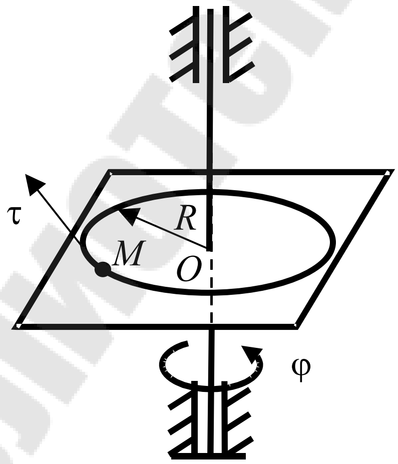

**63**



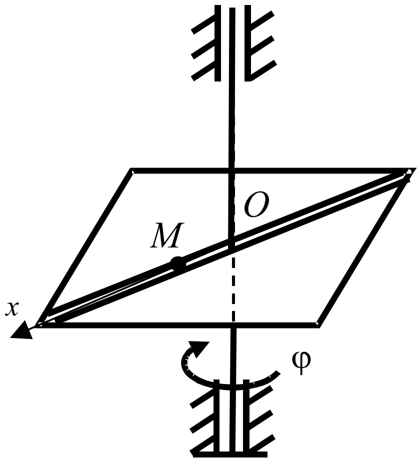

**64**

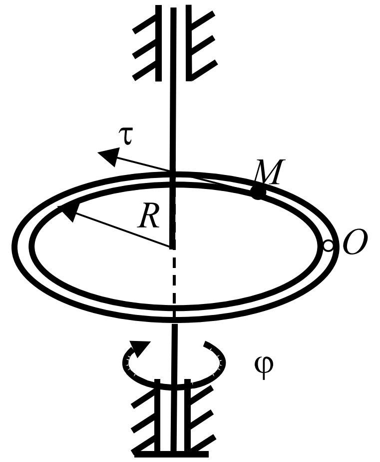
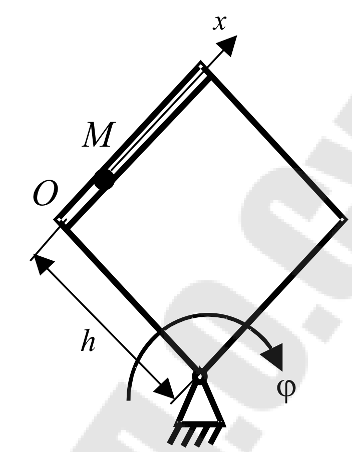
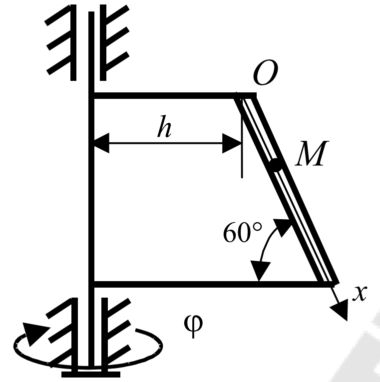
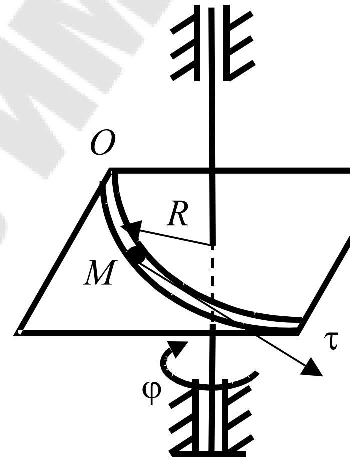
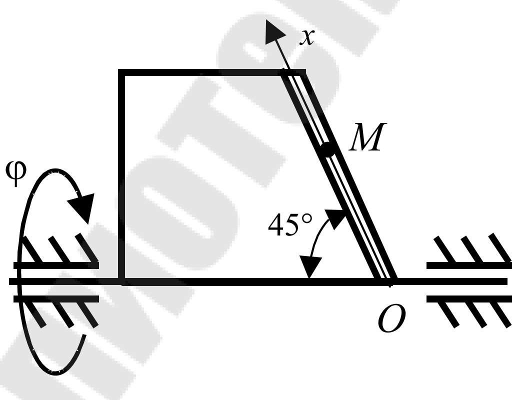
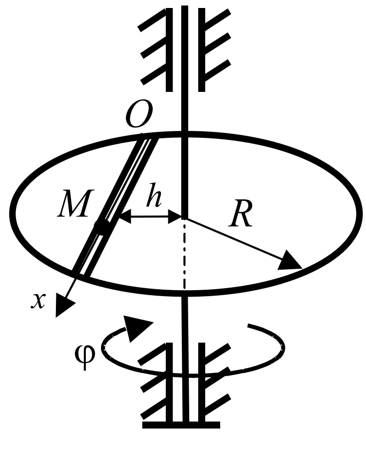



**65**

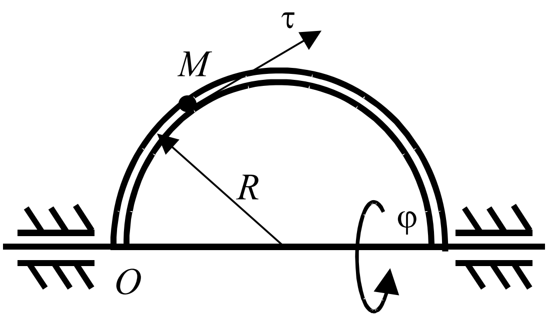



**66**

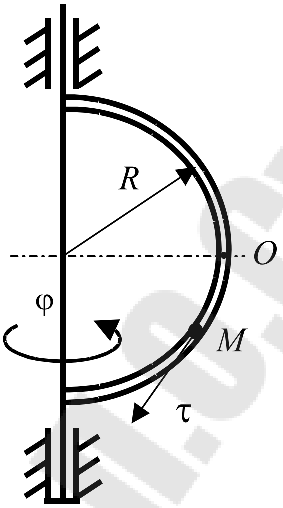


| | |
|---|---|
| **67**   | **68**   |
| **69**   | **70**   |
| **71**   | **72**   |

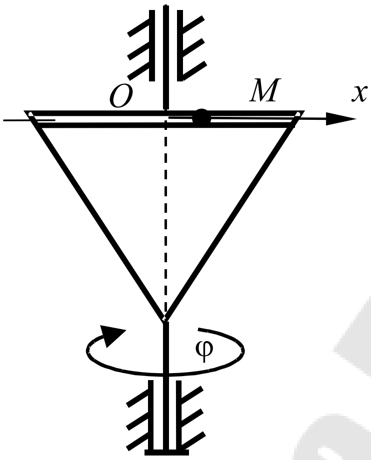
**73**



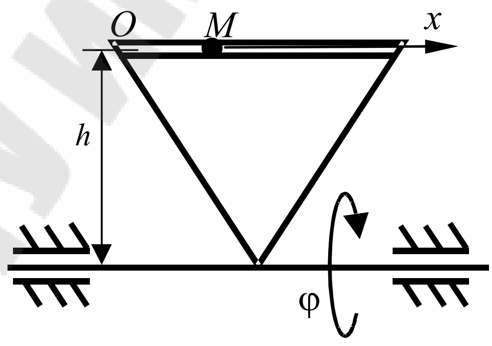

**74**



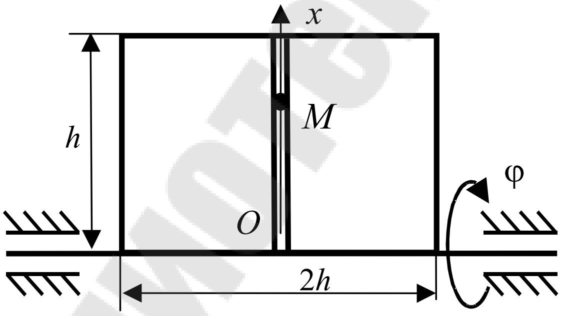

**75**



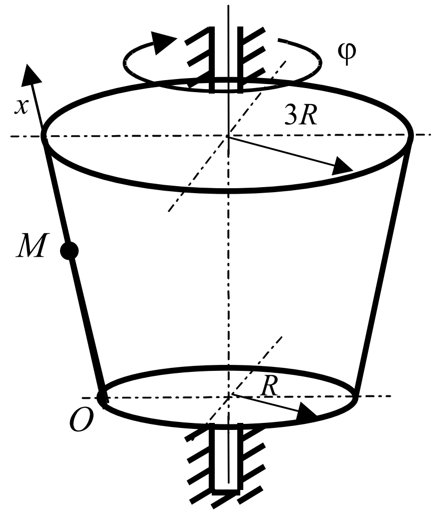

**76**



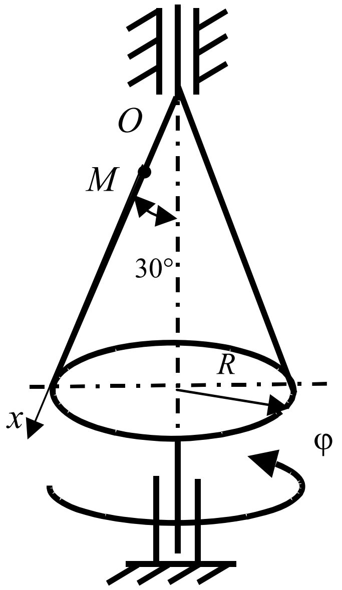

**77**



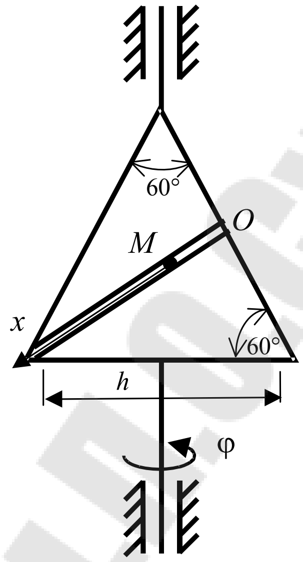

**78**



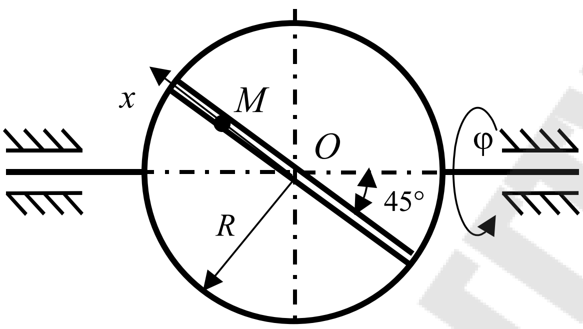
**79**



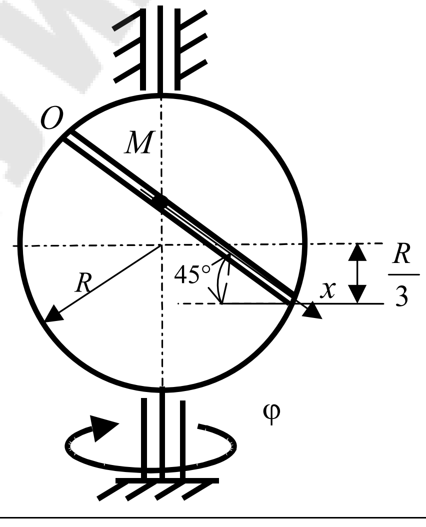

**80**



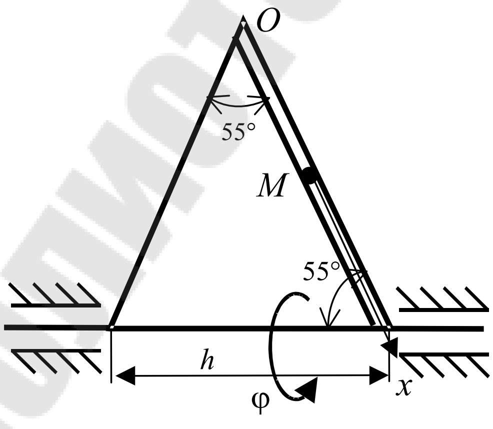

**81**



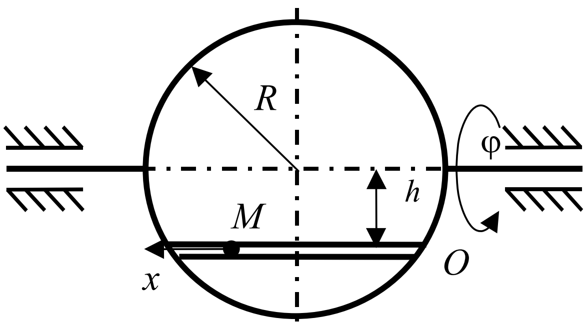

**82**



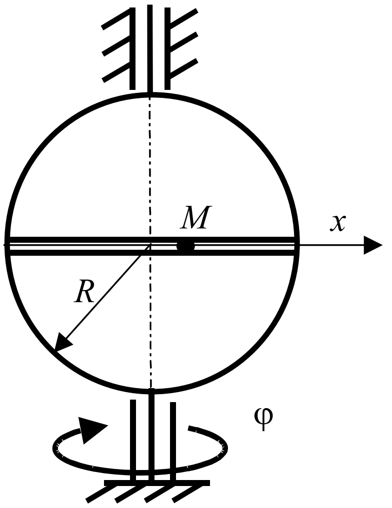

**83**



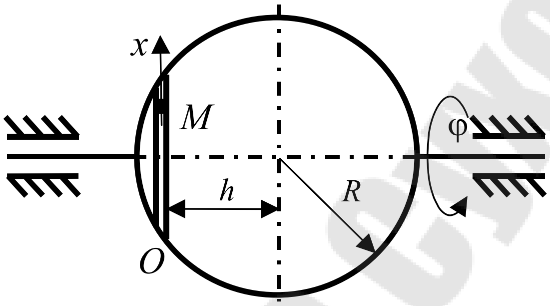

**84**



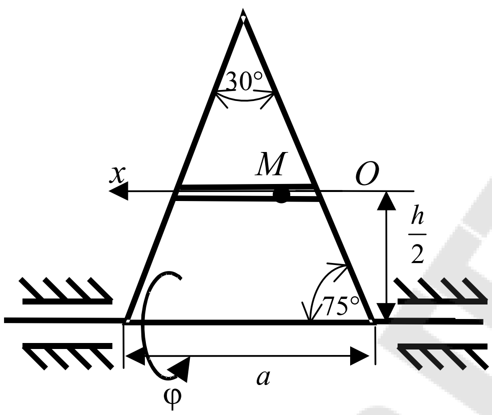
**85**



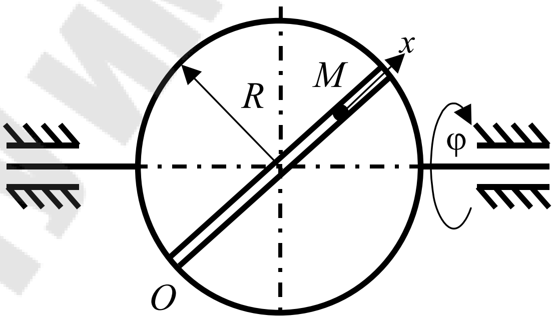

**86**



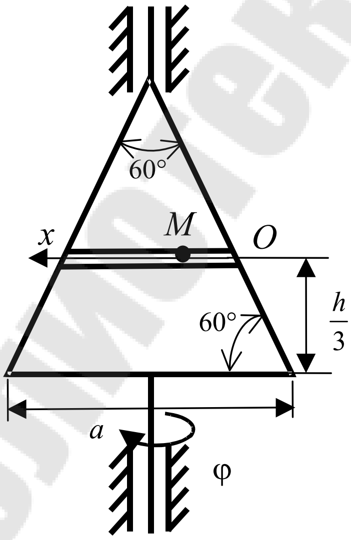

**87**



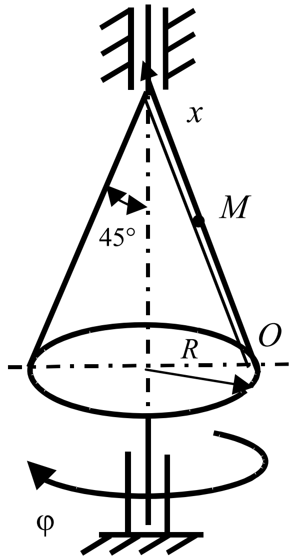

**88**



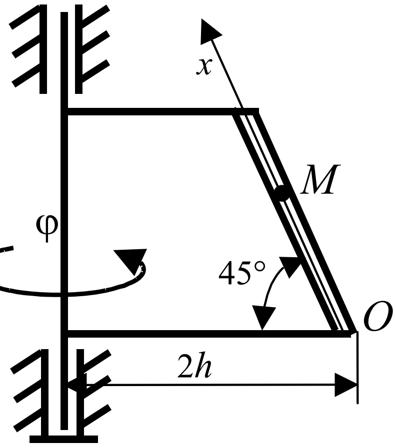

**89**



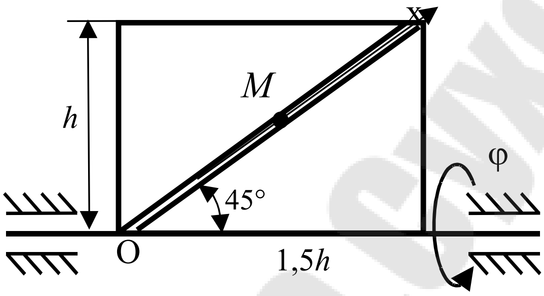

**90**



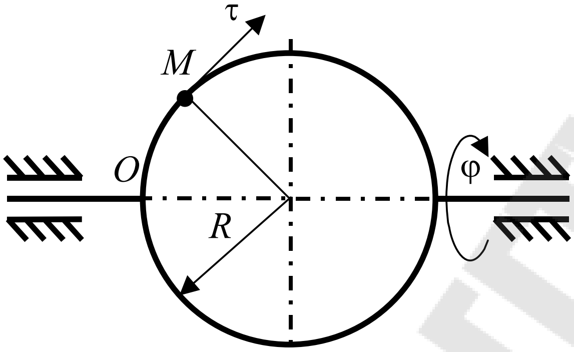
**91**



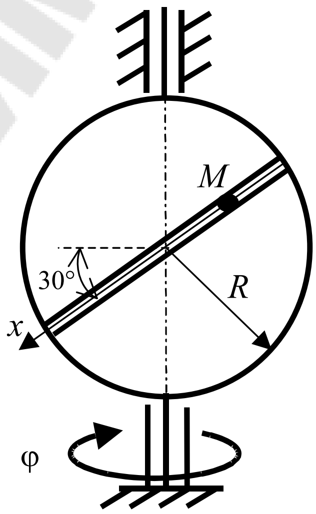

**92**



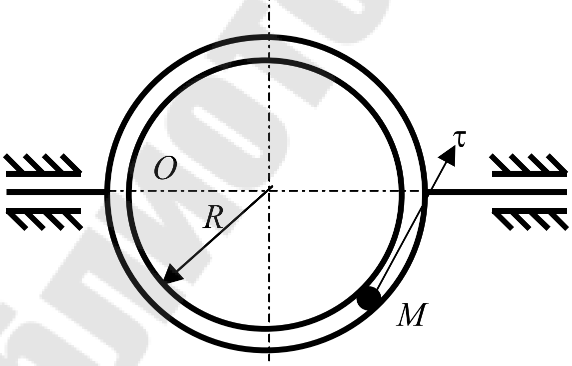

**93**



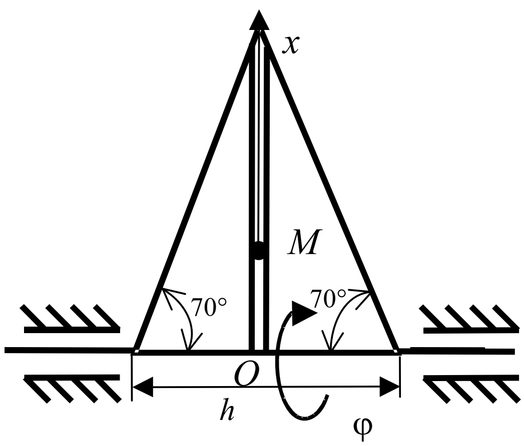

**94**



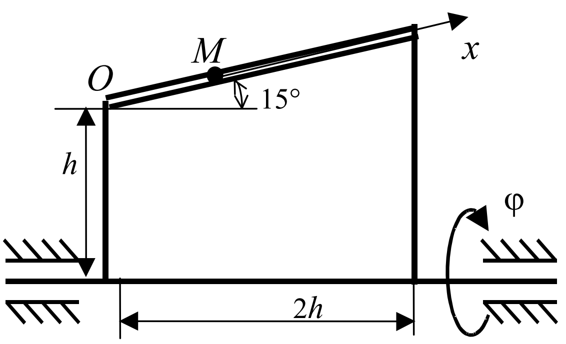

**95**



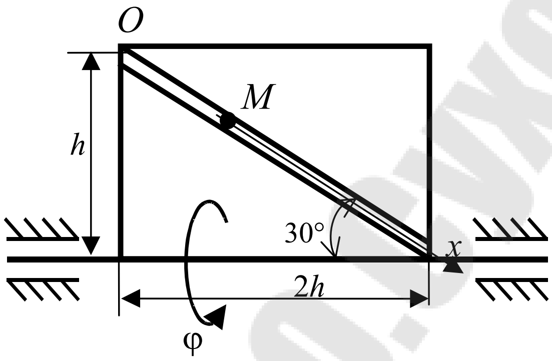

**96**



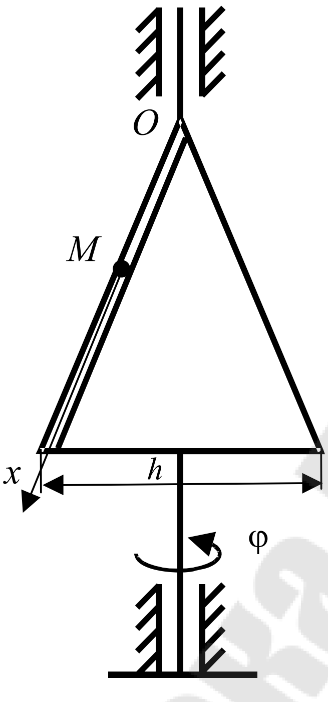
**97**



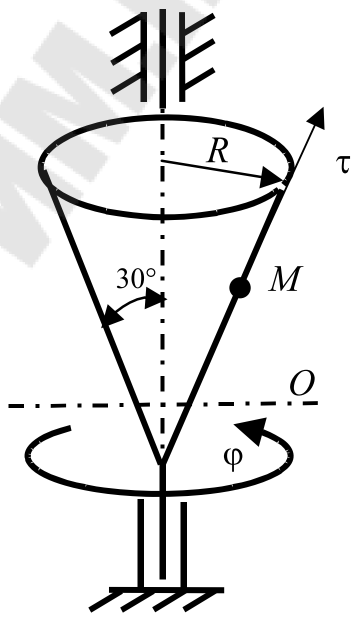

**98**




**99**




**100**



## Содержание

Учебное электронное издание комбинированного распространения

Учебное издание

**Шабловский** Олег Никифорович
**Иноземцева** Наталья Владимировна

# ДИНАМИКА ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

## Практикум по курсу «Теоретическая механика» для студентов инженерно-технических специальностей дневной и заочной форм обучения

**Электронный аналог печатного издания**

Редактор *Н. В. Гладкова*
Компьютерная верстка *М. В. Аникеенко*

Подписано в печать 29.09.10.
Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».
Ризография. Усл. печ. л. 3,02. Уч.-изд. л. 2,18.
Изд. № 258.
E-mail: ic@gstu.by
http://www.gstu.by

Издатель и полиграфическое исполнение:
Издательский центр учреждения образования
«Гомельский государственный технический университет
имени П. О. Сухого».
ЛИ № 02330/0549424 от 08.04.2009 г.
246746, г. Гомель, пр. Октября, 48.