

УДК 539.375

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ ПОД ПЛОЩАДКОЙ КОНТАКТА В СИСТЕМЕ «РЕЛЬС – КОЛЕСО»

Г. П. ТАРИКОВ*Учреждение образования «Белорусский государственный университет транспорта», г. Гомель***Е. М. АКУЛОВА***Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого»,
Республика Беларусь*

Введение

Задача о контактном взаимодействии рельса и колеса представляет известный интерес. В работе [1] эта задача сведена к решению двумерного интегрального уравнения первого рода. Для случая эллиптической площадки контакта максимальное давление p_{\max} будет иметь место в центре этой площадки.

Однако величину p_{\max} нельзя использовать для оценки прочности материала на площадке контакта, так как материал здесь находится в сложном напряженном состоянии, причем главные напряжения σ_1 , σ_2 и σ_3 – величины одного порядка. Поэтому для проверки прочности материала необходимо использовать теории прочности. Наибольшее расчетное напряжение будет возникать не на площадке контакта, а в точке, расположенной на некоторой глубине под ней.

Для определения расчетных напряжений на некоторой глубине под площадкой контакта рельса и колеса используются третья и четвертая теории прочности. Целью работы является определение наибольших расчетных напряжений по этим теориям, а также глубины, где эти напряжения достигают наибольших значений.

Пространственные контактные задачи рассматриваются в книгах [2]–[6]. Там же приводятся многочисленные ссылки на работы в этом направлении.

Постановка задачи

Рассматривается пространственная задача о контакте колеса и рельса для случая эллиптической площадки контакта.

В этой задаче характерные размеры площадки контакта весьма малы по сравнению с размерами рельса и колеса. Кроме того, размеры области контакта малы по сравнению с радиусами кривизны контактирующих тел.

Эти особенности задачи позволяют рассматривать рельс и колесо при вычислении локальных перемещений (в пределах площадки контакта) как упругие полупространства, нагруженные по малой эллиптической области. При этом контактные напряжения по площадке контакта вычисляются независимо от распределения напряжений в рельсе и колесе в целом. Напряженное состояние рельса и колеса определяется при решении краевой задачи теории упругости для этих тел.

Формулы для определения главных напряжений

В работе [1] получены формулы для определения напряжений в точках, расположенных под площадкой контакта. Эти формулы имеют вид:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= 2\nu \frac{\partial^2 N}{\partial x_3^2} - (1-2\nu) \frac{\partial^2 N}{\partial x_1^2} - x_3 \frac{\partial^3 N}{\partial x_1^2 \partial x_3}; \\
 \sigma_{22} &= 2\nu \frac{\partial^2 N}{\partial x_3^2} - (1-2\nu) \frac{\partial^2 N}{\partial x_2^2} - x_3 \frac{\partial^3 N}{\partial x_2^2 \partial x_3}; \\
 \sigma_{33} &= \frac{\partial^2 N}{\partial x_3^2} - x_3 \frac{\partial^3 N}{\partial x_3^3}; \\
 \sigma_{12} = \sigma_{21} &= - \left[(1-2\nu) \frac{\partial^2 N}{\partial x_1 \partial x_2} + x_3 \frac{\partial^3 N}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} \right]; \\
 \sigma_{23} = \sigma_{32} &= -x_3 \frac{\partial^3 N}{\partial x_2 \partial x_3^2}; \\
 \sigma_{31} = \sigma_{13} &= -x_3 \frac{\partial^3 N}{\partial x_1 \partial x_3^2}.
 \end{aligned} \tag{1}$$

При этом использованы прямоугольные координаты x_1, x_2, x_3 . Ось x_3 проходит через центр эллиптической площадки контакта и направлена перпендикулярно к ней.

Здесь σ_{ii} ($i = 1, 2, 3$) – нормальные напряжения; σ_{ij} ($i \neq j$) ($i, j = 1, 2, 3$) – касательные напряжения; ν – коэффициент Пуассона материала рельса (колеса).

Функция $N(x_1, x_2, x_3)$ определяется так:

$$N(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} p(y_1, y_2) \ln(x_3 + r) \partial y_1 \partial y_2, \tag{2}$$

где Ω – площадка контакта рельса и колеса.

Радиус кривизны определяется по формуле

$$r^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + x_3^2.$$

Учитывая, что площадкой контакта Ω является эллипс с полуосями a, b , получаем:

$$N(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b \partial y_2 \int_{-a\sqrt{1-y_2^2/b^2}}^{a\sqrt{1-y_2^2/b^2}} p(y_1, y_2) \ln(x_3 + r) \partial y_1.$$

Нормальное давление на площадке контакта:

$$p(x_1, x_2) = p_0 \left(1 - \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} \right)^{1/2} \text{ при } (x_1, x_2) \in \Omega. \tag{3}$$

Формулы и график для определения полуосей a, b приведены в [1].

В точках оси x_3 напряжения σ_{11} , σ_{22} и σ_{33} являются главными [2]. Этот вывод следует также из анализа формулы (1). В точках оси x_3 расчетные напряжения по теориям прочности достигают наибольших значений.

С учетом выражения (2) формулы (1) для напряжений σ_{11} , σ_{22} и σ_{33} принимают такой вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} p(y_1, y_2) \left\{ -2\nu \frac{x_3}{r^3} - (1-2\nu) \left[\frac{r^2 - (x_1 - y_1)^2}{r^3(r+x_3)} - \frac{(x_1 - y_1)^2}{r^2(r+x_3)^2} \right] - x_3 \left[-\frac{1}{r^3} + 3 \frac{(x_1 - y_1)^2}{r^5} \right] \right\} dy_1 dy_2; \\ \sigma_{22} &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} p(y_1, y_2) \left\{ -2\nu \frac{x_3}{r^3} - (1-2\nu) \left[\frac{r^2 - (x_2 - y_2)^2}{r^3(r+x_3)} - \frac{(x_2 - y_2)^2}{r^2(r+x_3)^2} \right] - x_3 \left[-\frac{1}{r^3} + 3 \frac{(x_2 - y_2)^2}{r^5} \right] \right\} dy_1 dy_2; \\ \sigma_{33} &= \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} p(y_1, y_2) \left(-3 \frac{x_3^3}{r^5} \right) dy_1 dy_2. \end{aligned} \quad (4)$$

По формулам (4) можно определить нормальные напряжения σ_{11} , σ_{22} и σ_{33} в любой точке с координатами (x_1, x_2, x_3) под площадкой контакта. Однако наибольший интерес представляют эти напряжения в точках, расположенных на оси x_3 . Полагая в формулах (4) $x_1 = x_2 = 0$, получаем:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}(0, 0, x_3) &= \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} p(y_1, y_2) \left\{ -2\nu \frac{x_3}{r_0^3} - (1-2\nu) \left[\frac{y_2^2 + x_3^2}{r_0^3(r_0 + x_3)} - \frac{y_1^2}{r_0^2(r_0 + x_3)^2} \right] - \right. \\ &\quad \left. - x_3 \left(\frac{-r_0^2 + 3y_1^2}{r_0^5} \right) \right\} dy_1 dy_2; \\ \sigma_{22}(0, 0, x_3) &= \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} p(y_1, y_2) \left\{ -2\nu \frac{x_3}{r_0^3} - (1-2\nu) \left[\frac{y_1^2 + x_3^2}{r_0^3(r_0 + x_3)} - \frac{y_2^2}{r_0^2(r_0 + x_3)^2} \right] - \right. \\ &\quad \left. - x_3 \left(-\frac{1}{r_0^3} + 3 \frac{y_2^2}{r_0^5} \right) \right\} dy_1 dy_2; \\ \sigma_{33}(0, 0, x_3) &= -\frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} p(y_1, y_2) \frac{3x_3^3}{r_0^5} dy_1 dy_2. \end{aligned} \quad (5)$$

Имеем:

$$p(x_1, x_2) = \frac{3}{2} p_c \left(1 - \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} \right)^{1/2} \quad \text{при } (x_1, x_2) \in \Omega.$$

Введем новые переменные:

$$t_1 = \frac{y_1}{a}; \quad t_2 = \frac{y_2}{a}; \quad \rho = \frac{x_3}{a}; \quad \beta = \frac{a}{b}; \quad R^2 = t_1^2 + t_2^2 + \rho^2.$$

Тогда формулы (5) примут такой вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}(0, 0, \rho) &= \frac{3p_c}{4\pi} \int_{-\beta^{-1}}^{\beta^{-1}} dt_2 \int_{-\sqrt{1-\beta^2 t_2^2}}^{\sqrt{1-\beta^2 t_2^2}} (1-t_1^2 - \beta^2 t_2^2)^{1/2} \left\{ -2\nu \frac{\rho}{R^3} - \right. \\ &\quad \left. - (1-2\nu) \left[\frac{t_2^2 + \rho^2}{R^3(R+\rho)} - \frac{t_1^2}{R^2(R+\rho)^2} \right] - \rho \left(-\frac{1}{R^3} + \frac{3t_1^2}{R^5} \right) \right\} dt_1; \\ \sigma_{22}(0, 0, \rho) &= \frac{3p_c}{4\pi} \int_{-\beta^{-1}}^{\beta^{-1}} dt_2 \int_{-\sqrt{1-\beta^2 t_2^2}}^{\sqrt{1-\beta^2 t_2^2}} (1-t_1^2 - \beta^2 t_2^2)^{1/2} \left\{ -2\nu \frac{\rho}{R^3} - \right. \\ &\quad \left. - (1-2\nu) \left[\frac{t_1^2 + \rho^2}{R^3(R+\rho)} - \frac{t_2^2}{R^2(R+\rho)^2} \right] - \rho \left(-\frac{1}{R^3} + \frac{3t_2^2}{R^5} \right) \right\} dt_1; \\ \sigma_{33}(0, 0, \rho) &= -\frac{3p_c}{4\pi} \int_{-\beta^{-1}}^{\beta^{-1}} dt_2 \int_{-\sqrt{1-\beta^2 t_2^2}}^{\sqrt{1-\beta^2 t_2^2}} (1-t_1^2 - \beta^2 t_2^2)^{1/2} \frac{3\rho^3}{R^5} dt_1. \end{aligned} \quad (6)$$

Числовые расчеты по формуле (6)

Вычислим напряжения σ_{11} , σ_{22} и σ_{33} в точках, расположенных на оси x_3 . Для этого используем формулы (6).

Для расчета примем:

- коэффициент Пуассона $\nu = 0,28$;
- модуль сдвига $\mu = 8,1 \cdot 10^4$ МПа;
- радиус головки рельса Р65 равен 300 мм;
- диаметр бандажа 950 мм.

По формулам, приведенным в [1], находим:

$$\beta = \frac{a}{b} = \frac{5,40}{3,97} = 1,36.$$

Для вычисления величин σ_{11}/p_c , σ_{22}/p_c и σ_{33}/p_c по формулам (6) применяем квадратурную формулу Гаусса. Вычисления производились при различных значениях $\rho = x_3/a$. Результаты вычислений приведены в табл. 1.

Таблица 1

Результаты вычислений величин σ_{11}/p_c , σ_{22}/p_c и σ_{33}/p_c

$\rho = \frac{x_3}{a}$	$\frac{\sigma_{11}}{p_c}$	$\frac{\sigma_{22}}{p_c}$	$\frac{\sigma_{33}}{p_c}$
0	-	-	1,500
0,1	0,8375	0,8621	1,479
0,2	0,6132	0,5904	1,419
0,3	0,4408	0,3933	1,330
0,4	0,3121	0,2555	1,223
0,5	0,2181	0,1619	1,109
0,6	0,1508	0,0952	0,997
0,7	0,1026	0,0585	0,890
0,8	0,0687	0,0317	0,793

Как показывают предварительные вычисления, наибольшего значения расчетные напряжения достигают в интервале $0,2 \leq \rho \leq 0,5$. Поэтому дальнейшие расчеты выполнены именно в этом интервале значений безразмерного параметра ρ .

По данным табл. 1 строим интерполяционный полином для $-\sigma_{11}/p_c$:

$$-\frac{\sigma_{11}}{p_c} = 1,1251 - 3,2065\rho + 3,5350\rho^2 - 1,5000\rho^3. \quad (7)$$

График величины $-\sigma_{11}/p_c$ приведен на рис. 1.

Интерполяционный полином для $-\sigma_{22}/p_c$ имеет вид:

$$-\frac{\sigma_{22}}{p_c} = 1,2229 - 4,1078\rho + 5,2300\rho^2 - 2,5167\rho^3. \quad (8)$$

График величины $-\sigma_{22}/p_c$ приведен на рис. 2.

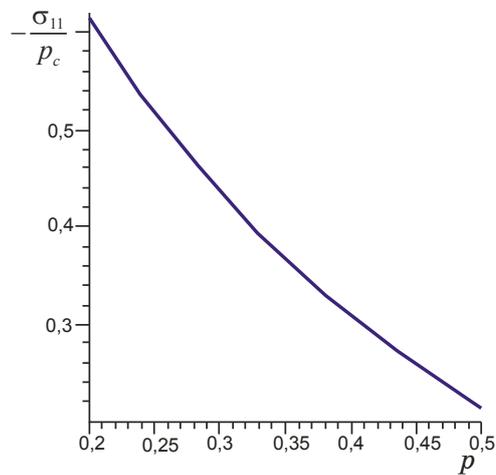


Рис. 1. График величины $-\sigma_{11}/p_c$

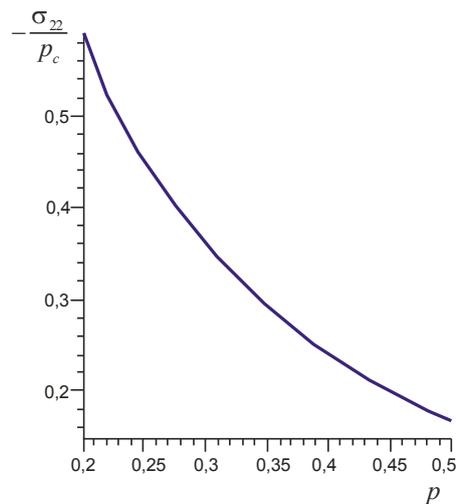


Рис. 2. График величины $-\sigma_{22}/p_c$

Интерполяционный полином для величины $-\sigma_{33}/p_c$, построенный на основании данных табл. 1, имеет такой вид:

$$-\frac{\sigma_{33}}{p_c} = 1,4990 + 0,0367\rho - 2,5500\rho^2 + 1,8333\rho^3. \quad (9)$$

График величины $-\sigma_{33}/p_c$ приведен на рис. 3.

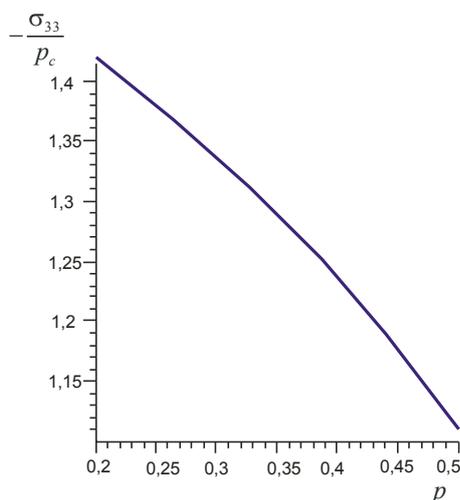


Рис. 3. График величины $-\sigma_{33}/p_c$

Формулы (7)–(9), табл. 1 и рис. 1–3 дают полное представление о распределении нормальных напряжений σ_{11} , σ_{22} и σ_{33} в интервале $0,2 \leq x_3/a \leq 0,5$ в точках на оси x_3 .

Определение расчетных напряжений по третьей теории прочности

Определим наибольшее расчетное напряжение по третьей теории прочности в опасной точке, расположенной на некоторой глубине под площадкой контакта.

Расчетное напряжение по третьей теории прочности определяется формулой

$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3, \quad (10)$$

где σ_1 – наибольшее главное напряжение; σ_3 – наименьшее главное напряжение.

Недостатком третьей теории является то, что она не учитывает влияние промежуточного главного напряжения σ_2 .

Преимуществом третьей теории прочности является ее сравнительная простота. Поэтому предыдущие исследователи напряжений на глубине под площадкой контакта использовали эту теорию (в частности, Н. М. Беляев [2]).

Определяем, какие из напряжений σ_{11} , σ_{22} , σ_{33} являются главными напряжениями σ_1 и σ_3 . Из табл. 1 видно, что $\sigma_3 = \sigma_{33}$. Далее, из той же таблицы следует, что $\sigma_{11} > \sigma_{22}$ при $\rho \leq 0,15$, а при $\rho > 0,15$ имеем $\sigma_{11} < \sigma_{22}$. Поэтому, при $\rho > 0,15$ принимаем $\sigma_1 = \sigma_{22}$, $\sigma_3 = \sigma_{33}$.

Подставляя формулы (8) и (9) в выражение (10), получим:

$$-\frac{\sigma_{r3}}{p_c} = 0,2761 + 4,1445\rho - 7,7800\rho^2 + 4,3500\rho^3. \quad (11)$$

Дифференцируя формулу (11), находим:

$$13,0500\rho^2 - 15,5600\rho + 4,1445.$$

Приравнивая нулю это выражение и решая полученное уравнение, будем иметь:

$$\rho = 0,4017, \quad (12)$$

т. е. наибольшее расчетное напряжение по третьей теории прочности имеет место на оси x_3 на расстоянии $x_3 = 0,4017a$ от площадки контакта.

Подставляя значение ρ из (12) в формулу (11), получаем:

$$\max \sigma_{r3} = 0,9675 p_c. \quad (13)$$

Формула (13) определяет максимальное значение расчетного напряжения по третьей теории прочности на глубине под площадкой контакта рельса и колеса.

На рис. 4 представлен график изменения величины σ_{r3}/p_c в зависимости от безразмерного параметра $\rho = x_3/a$.

Определение расчетных напряжений по четвертой теории прочности

Расчетное напряжение по четвертой теории прочности определяется формулой

$$\sigma_{r4} = \left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3 \right)^{1/2}. \quad (14)$$

В рассматриваемом случае

$$\sigma_1 = \sigma_{22}; \quad \sigma_2 = \sigma_{11}; \quad \sigma_3 = \sigma_{33} \quad \text{при } \rho > 0,15.$$

Недостатком четвертой теории прочности является некоторая громоздкость формулы (14) для расчетного напряжения.

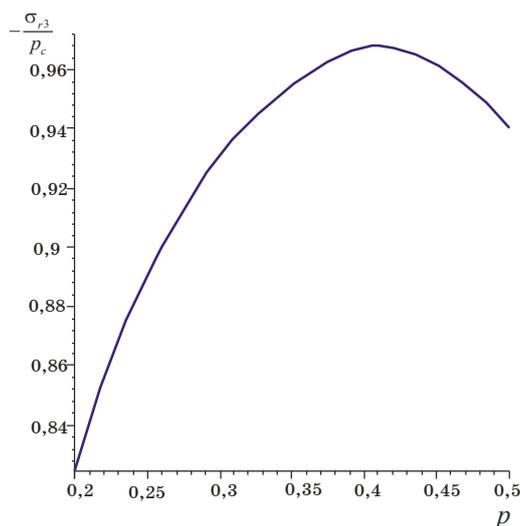


Рис. 4. График изменения величины σ_{r3}/p_c в зависимости от безразмерного параметра $\rho = x_3/a$

Преимущество четвертой теории прочности заключается в том, что она учитывает все три главных напряжения.

Подставляя формулы (7)–(9) в соотношение (14), получим выражение для определения расчетного напряжения σ_{r4} (это выражение не приводим из-за его громоздкости). При помощи этого выражения находим значения величины σ_{r4}/p_c при разных ρ . Результаты этих вычислений приведены в табл. 2.

Таблица 2

Значения величины σ_{r4}/p_c при разных ρ

$\rho = x_3/a$	0,2	0,3	0,4	0,5
σ_{r4}/p_c	0,8174	0,9139	0,9405	0,9203

По данным табл. 2 конструируем алгебраический полином для величины σ_{r4}/p_c :

$$\frac{\sigma_{r4}}{p_c} = 0,3223 + 3,7135\rho - 6,9600\rho^2 + 3,8500\rho^3. \quad (15)$$

На рис. 5 построен график величины σ_{r4}/p_c .

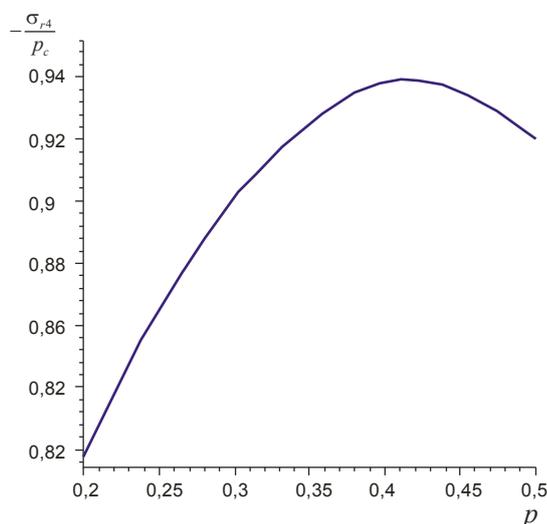


Рис. 5. График величины σ_{r4}/p_c

Дифференцируя формулу (15), получаем:

$$11,5500\rho^2 - 13,9200\rho + 3,7135.$$

Приравнявая нулю это выражение и решая полученное уравнение, находим:

$$\rho = 0,3986. \quad (16)$$

Подставляя значение ρ из (16) в формулу (15), получаем:

$$\max \sigma_{r4} = 0,9405 p_c. \quad (17)$$

Формула (17) определяет наибольшее расчетное напряжение по четвертой теории прочности. Этот $\max \sigma_{r4}$ имеет место на оси x_3 в точке, расположенной на расстоянии $x_3 = 0,3986a$ от площадки контакта рельса и колеса.

Заключение

1. Разработан метод, позволяющий определять наибольшие расчетные напряжения на глубине под площадкой контакта в системе «рельс – колесо». При этом использованы третья и четвертая теории прочности.

2. Выполнены численные расчеты по определению главных напряжений на глубине по предлагаемому методу.

3. Определены наибольшие расчетные напряжения по третьей и четвертой теориям прочности. Результаты расчета по этим теориям прочности получились достаточно близкими, разница составляет не более 3 %. Известно, что применительно к металлам четвертая теория лучше согласуется с экспериментальными данными.

Литература

1. Контактное взаимодействие рельса и колеса / Н. М. Бородачев [и др.] // Вестн. нац. техн. ун-та (Харьк. политехн. ин-т). – 2014. – № 29. – С. 18–27.
2. Беляев, Н. М. Труды по теории упругости и пластичности / Н. М. Беляев. – М. : Гостехиздат, 1957. – 632 с.
3. Лурье, А. И. Теория упругости / А. И. Лурье. – М. : Наука, 1970. – 939 с.
4. Лурье, А. И. Пространственные задачи теории упругости / А. И. Лурье. – М. : Гостехтеоретиздат, 1955. – 491 с.
5. Джонсон, К. Механика контактного взаимодействия / К. Джонсон. – М. : Мир, 1989. – 509 с.
6. Gladwell, G. M. L. Contact problems in the classical theory of elasticity / G. M. L. Gladwell. – Sijthoff and Nordhoff, 1980. – 232 с.

Получено 20.07.2015 г.