

УДК 519.3:539.3:624.131

РАСЧЁТ ДЕФОРМАЦИЙ НЕОДНОРОДНЫХ ПЛИТ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ СЛОЖНОЙ СТРУКТУРЫ

К.С. КУРОЧКА

*Учреждение образования «Гомельский государственный
технический университет имени П.О. Сухого»,
Республика Беларусь*

Введение

В современном градостроительстве получают всё более широкое распространение здания каркасного типа. Основным конструктивным элементом зданий данного типа является диск перекрытия, состоящий из ригелей, колонн и плит перекрытия. При проектировании дисков перекрытий особое внимание уделяется расчёту деформаций плит перекрытия [1, 2].

Для решения данных задач с учётом их конструктивных особенностей целесообразно применять методы математического моделирования на основе теории систем и системного подхода, метод конечных элементов и (или) суперэлементов. От степени изученности системы в целом, от уровня подхода к описанию её функций и принятой методологии исследования зависит энергоматериалоёмкость системы в физической реализации, что является немаловажным в наш век энергоресурсосберегающих технологий.

Постановка задачи

Для расчёта монолитных плит разработан ряд теорий и методов, дающих хорошие результаты для практического применения [3, 4, 5, 6]. В настоящее время диски перекрытия, как правило, проектируются из многопустотных армированных плит, расчёт которых с использованием данных методов приводит к значительным погрешностям. Кроме того, возникают значительные трудности при рассмотрении диска перекрытия и в целом каркасного здания как единой пространственной системы.

Основной целью работы является разработка и исследование механико-математических моделей деформирования и прогибов армированных плит со сквозными горизонтальными и (или) вертикальными отверстиями в структуре каркасного здания при учёте особенностей их структуры и свойств. Плита рассматривается как неоднородная линейно-деформируемая пространственная система, определённая в n -связанной области. Оригинальным результатом работы являются унифицированные алгоритмы моделирования и соответствующее программное обеспечение по компьютерному объектно-ориентированному моделированию деформаций многопустотных плит в структуре диска перекрытия каркасного здания.

Предпосылки математического моделирования прогиба диска перекрытия

Для определения прогибов плит используется теория изгиба пластин [3,6], основанная на гипотезах Кирхгофа.

В срединной плоскости пластинка не испытывает никаких деформаций. При изгибе эта плоскость остаётся нейтральной:

$$u_0 = \vartheta_0 = 0, \tag{1}$$

где u_0 и ϑ_0 – соответственно, перемещения точек срединной плоскости вдоль осей X и Y .

Точки плиты, лежащие до нагружения на нормали к срединной плоскости, остаются в процессе изгиба на нормали к её срединной поверхности:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{yz} &= 0 \\ \gamma_{zx} &= 0 \end{aligned} \right\}; \quad (2)$$

$$\varepsilon_z = 0. \quad (3)$$

Нормальными напряжениями в направлении, поперечном к срединной плоскости пластинки, можно пренебрегать:

$$\sigma_z = 0. \quad (4)$$

Данные гипотезы позволяют при расчёте пластинок для аппроксимации использовать плоские конечные элементы [5, 7, 8, 9]. Однако такие конечные элементы не позволяют учитывать неоднородные свойства плит во всём объёме (например, рассчитывать многопустотные армированные плиты) и могут быть использованы только для нахождения некоторого первого приближения расчётов.

Вторая гипотеза (2), (3) эквивалентна пренебрежению влиянием перерезывающих сил на прогиб плит. Но для многопустотных плит дисков перекрытий перерезывающие силы оказывают заметное влияние на величину прогибов, пренебрежение сдвиговыми деформациями в плоскостях XOZ и YOZ приводит к значительным погрешностям. Поэтому приходится отказаться от гипотез (2) и (3). Помимо этого, при наличии вертикальных и горизонтальных сквозных отверстий нормальные напряжения σ_z в направлении, поперечном к срединной плоскости плиты, сопоставимы по величине с напряжениями σ_x и σ_y в плоскостях, параллельных срединной. Следовательно, срединная плоскость будет деформироваться. Таким образом приходится отказаться и от гипотез (1) и (4). Кроме того, деформации таких плит будут иметь нелинейный характер. Всё это в целом приводит к необходимости разработки новых моделей прогиба плит, новых алгоритмов и соответствующего программного обеспечения.

Конечный элемент в форме параллелепипеда при изгибе плит

Рассмотрение многопустотных плит как пространственных тел позволяет наиболее полно учесть их геометрические (наличие сквозных горизонтальных и вертикальных отверстий) и конструктивные особенности (армирование). Поэтому предлагается проводить дискретизацию пространственными конечными элементами, например, в форме тетраэдров или параллелепипедов.

Рассмотрим конечный элемент в форме параллелепипеда (рис. 1), работающий на изгиб при действии поперечной нагрузки q .

Для построения конечно-элементных соотношений воспользуемся принципом возможных перемещений:

$$\{\delta g\}^T \{R\} = \int_V \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} dV, \quad (5)$$

где $\{g\} = \begin{Bmatrix} u \\ g \\ w \end{Bmatrix}$ – вектор узловых перемещений; u – перемещения вдоль оси X ; g –

перемещения вдоль оси Y ; w – перемещение вдоль оси Z ; $\{R\}$ – вектор узловых усилий; $\{\varepsilon\}$ – вектор деформаций; $\{\sigma\}$ – вектор напряжений.

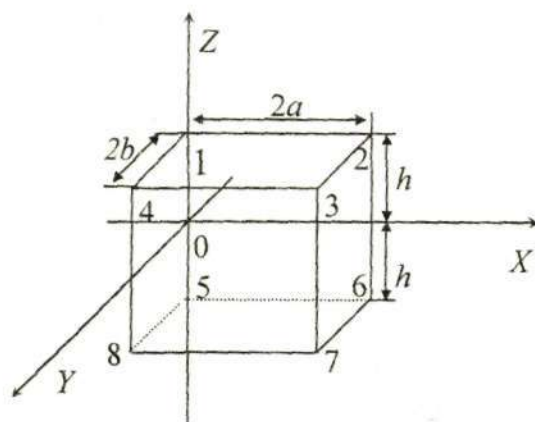


Рис. 1. Конечный элемент в форме параллелепипеда

Перемещения любой точки внутри конечного элемента в форме параллелепипеда будем задавать вектор-столбцом:

$$\{f\} = [N]\{g\} = [N_1 \dots N_8] \begin{Bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_8 \end{Bmatrix}, \quad (6)$$

где $[N_i]$ ($i = \overline{1,8}$) являются в общем случае функциями положения (формы) и представляют собой вектор, размерность которого зависит от количества степеней свободы в узле; $\{g_i\}$ ($i = \overline{1,8}$) – вектор значений узловых степеней свободы.

Функции формы $[N_i]$ ($i = \overline{1,8}$) должны быть выбраны таким образом, чтобы удовлетворялись следующие условия.

При подстановке в (6) координат узлов конечного элемента получались соответствующие узловые перемещения:

$$\begin{cases} N_i(x_j, y_j, z_j) = I, \text{ при } i = j \\ N_i(x_j, y_j, z_j) = 0, \text{ при } i \neq j \end{cases} \quad (7)$$

где I – единичная матрица, $i = \overline{1,8}$, $j = \overline{1,8}$.

Выбираемые функции формы должны обладать гладкостью (непрерывностью) внутри конечного элемента, а также при переходе через границы между элементами.

Построенные на базе выбранных функций соотношения, связывающие силы и перемещения, должны давать нулевую энергию деформации при движении тела как твёрдого целого.

Выбираемые функции должны включать представления постоянных величин для соответствующих напряжений или деформаций.

Изменение функции формы на грани элемента должно единственным образом определяться узловыми значениями.

Будем искать функции формы в виде полиномов. Согласно условию 2, необходимо, чтобы функции формы были дифференцируемы столько раз, каков наибольший порядок производных в функционале вариационной задачи. Существование производных $n^{\text{го}}$ порядка требует, чтобы в полиномиальном представлении функций поведения фигурировали по крайней мере члены $n^{\text{ой}}$ степени.

Анализируя (5) и уравнение изгиба пластины (Софи Жермен-Лагранжа) [3, 6]:

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = q, \quad (8)$$

где $D = \frac{2Eh}{3(1-\mu^2)}$ – изгибная жёсткость изотропной пластины; E – модуль упругости; μ – коэффициент Пуассона; h – половина толщины пластины; q – интенсивность поперечной нагрузки, в частности, примем, что вдоль оси X перемещение u будет изменяться по кубическому закону, а вдоль осей Y и Z – по линейному. Поскольку полином третьей степени единственным образом определяется четырьмя постоянными, а линейный – двумя, перемещения вдоль границы однозначно определяются значениями перемещений и угла наклона $\chi_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ в узловых точках на концах этой границы. А так как для смежных элементов значения на концах границы между элементами одинаковы, то вдоль любой границы функция u будет непрерывной. Аналогично рассуждая для функции ϑ , в каждом узле необходимо ввести ещё одну степень свободы: $\chi_y = \frac{\partial \vartheta}{\partial y}$. Таким образом полиномы, аппроксимирующие функции u и ϑ , будут содержать по 16 постоянных. Перемещение w вдоль любой линии $x = \text{const}$ или $y = \text{const}$ на произвольной плоскости, параллельной срединной, будет изменяться по кубическому закону; вдоль оси Z – по линейному. Чтобы выполнить условие 5, необходимо в каждом узле задать ещё по две дополнительные степени свободы: $\theta_x = \frac{\partial w}{\partial x}$ и $\theta_y = \frac{\partial w}{\partial y}$. Следовательно, перемещение w будем аппроксимировать полиномом, содержащим 24 слагаемых.

Таким образом (6) можно переписать:

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ \vartheta \\ w \end{Bmatrix} = [N] \begin{Bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_8 \end{Bmatrix}, \quad (9)$$

где $[N]$ – матрица размерностью 3×56 , содержащая функции формы;

$\{g_i\}^T = \{u_i, \vartheta_i, w_i, \chi_{xi}, \chi_{yi}, \theta_{xi}, \theta_{yi}\}$, $i = \overline{1,8}$ – номер узла конечного элемента.

Для построения функций формы для каждого перемещения воспользуемся Эрмитовой интерполяцией. В результате в нормализованных координатах получим:

$$u = \sum_{i=1}^8 (N_i^u u_i + N_i^{\chi} \chi_{xi}), \quad (10)$$

$$\vartheta = \sum_{i=1}^8 (N_i^{\vartheta} \vartheta_i + N_i^{\vartheta'} \chi_{y_i}), \quad (11)$$

$$w = \sum_{i=1}^8 (N_i^w w_i + N_i^{w_x} \theta_{x_i} + N_i^{w_y} \theta_{y_i}), \quad (12)$$

где $u_i, \vartheta_i, w_i, \chi_{x_i}, \chi_{y_i}, \theta_{x_i}, \theta_{y_i}$ — соответственно, значения перемещений и производных в узлах конечного элемента;

$$N_i^u(\xi, \eta, \zeta) = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \xi_0 - \frac{1}{4} \xi_0^3 \right) (\eta_0 + 1) (\zeta_0 + 1),$$

$$N_i^{u'}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{3a}{4} \xi_i (\xi_0^2 - 1) (\eta_0 + 1) (\zeta_0 + 1),$$

$$N_i^{\vartheta}(\xi, \eta, \zeta) = (\xi_0 + 1) \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \eta_0 - \frac{1}{4} \eta_0^3 \right) (\zeta_0 + 1),$$

$$N_i^{\vartheta'}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{3b}{4} \eta_i (\xi_0 + 1) (\eta_0^2 - 1) (\zeta_0 + 1),$$

$$N_i^w(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2} (\xi_0 + 1) (\eta_0 + 1) (2 + \xi_0 + \eta_0 - \xi^2 - \eta^2) (\zeta_0 + 1),$$

$$N_i^{w_x}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{a}{2} \xi_i (\xi_0 + 1)^2 (\eta_0 + 1) (\xi_0 - 1) (\zeta_0 + 1),$$

$$N_i^{w_y}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{b}{2} \eta_i (\xi_0 + 1) (\eta_0 + 1)^2 (\eta_0 - 1) (\zeta_0 + 1),$$

$$\xi = \frac{x-a}{a}, \quad \eta = \frac{y-b}{b}, \quad \zeta = \frac{z-h}{h}, \quad \xi_0 = \xi \xi_i, \quad \eta_0 = \eta \eta_i, \quad \zeta_0 = \zeta \zeta_i,$$

ξ_i, η_i, ζ_i — нормализованные координаты $i^{\text{го}}$ узла, $i = \overline{1, 8}$.

Между компонентами напряжений и деформаций справедливы следующие закономерности (закон Гука):

$$\{\sigma\} = [E] \{\varepsilon\}, \quad (13)$$

где

$$[E] = \begin{bmatrix} 2G + \lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2G + \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 2G + \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix},$$

G — модуль сдвига, $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$; $\lambda = \frac{2\mu G}{1-2\mu}$ — постоянная Ляме.

Подставив (10) – (12) в уравнения Коши

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial \vartheta}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta}{\partial x}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}; \end{aligned} \right\}, \quad (14)$$

дифференцируя, получим:

$$\{\varepsilon\} = [C]\{g\}, \quad (15)$$

где матрица $[C]$ размерностью 6×56 определяется дифференцированием (10) – (12).

Подставим (15) в (13), имеем:

$$\{\sigma\} = [E][C]\{g\}. \quad (16)$$

Подставляя (15) и (16) в (5), интегрируя, получим основное уравнение метода конечных элементов:

$$\{R\} = [K]\{g\}, \quad (17)$$

где $[K]$ – матрица жёсткости конечного элемента.

После учёта граничных условий решаем систему линейных алгебраических уравнений (17) и находим искомые перемещения. Однако, если рассматривать диск перекрытия или здание в целом, как сложную пространственную систему, одним из элементов которой будет являться плита, то наличие семи степеней свободы в каждом узле конечного элемента приведёт к значительным трудностям. Кроме того, большая размерность матрицы жёсткости приведёт к большим затратам машинного времени при расчёте всей системы. Поэтому целесообразно для рассматриваемого конечного элемента плиты провести конденсацию [7] – выразить дополнительные степени свободы через основные.

Положим $\{g\} = [\{g^{осн}\} \quad \{g^{дон}\}]$, где $\{g^{осн}\}^T = \{u \quad \vartheta \quad w\}$, $\{g^{дон}\}^T = \{\chi_x \quad \chi_y \quad \theta_x \quad \theta_y\}$. Уравнения (17) можно представить в виде:

$$\begin{bmatrix} k_{дон} & k_{дон-осн} \\ k_{осн-дон} & k_{осн} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} g^{дон} \\ g^{осн} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R^{дон} \\ R^{осн} \end{Bmatrix}. \quad (18)$$

Необходимо найти такую матрицу $\begin{bmatrix} \hat{k}_{осн} \end{bmatrix}$ и вектор узловых усилий, чтобы выполнялось следующее тождество:

$$\begin{bmatrix} \hat{k}_{осн} \end{bmatrix} \{g^{осн}\} = \begin{Bmatrix} \hat{R}^{осн} \end{Bmatrix}. \quad (19)$$

Найдём матрицу преобразований $[\Gamma]$ такую, что

$$\begin{Bmatrix} g^{дон} \\ g^{осн} \end{Bmatrix} = [\Gamma]\{g^{осн}\}. \quad (20)$$

Решая (18), получим:

$$\{g^{дон}\} = -[k_{дон}]^{-1} [k_{дон-осн}] \{g^{осн}\} + [k_{дон}]^{-1} \{R^{дон}\}. \quad (21)$$

Так как $[k_{дон}]^{-1} \{R^{дон}\} = const$ для заданных нагрузок, то можно записать:

$$\begin{Bmatrix} g^{дон} \\ g^{осн} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -[k_{дон}]^{-1} [k_{дон-осн}] \\ I \end{bmatrix} \{g^{осн}\} = [\Gamma] \{g^{осн}\}. \quad (22)$$

Применяя преобразование (22) к уравнениям (18) как обычное преобразование координат, получим:

$$[[k_{осн}] - [k_{осн-дон}] [k_{дон}]^{-1} [k_{дон-осн}]] \{g^{осн}\} = \{R^{осн}\} - [k_{осн-дон}] [k_{дон}]^{-1} \{R^{дон}\}, \quad (23)$$

где $[\hat{k}_{осн}] = [[k_{осн}] - [k_{осн-дон}] [k_{дон}]^{-1} [k_{дон-осн}]]$, $\{\hat{R}^{осн}\} = \{R^{осн}\} - [k_{осн-дон}] [k_{дон}]^{-1} \{R^{дон}\}$.

Таким образом система (17), содержащая 56 неизвестных, с помощью (22) преобразуется к системе (23), содержащей уже всего 24 неизвестных.

Согласно вышеизложенным алгоритмам, было разработано программное обеспечение в среде Delphi 5.

Верификация программного обеспечения

Для оценки точности решения, получаемого с помощью изложенного алгоритма, был проанализирован ряд задач. Например, рассматривалась прямоугольная плита размерами $a \times b \times h$ с модулем упругости E и коэффициентом Пуассона μ .

Принималось, что монолитная плита свободно оперта по всему контуру или защемлена и находится под действием либо сосредоточенной поперечной силы P , либо равномерно распределённой нагрузки интенсивности q . Считалось, что углы многопустотной плиты (рис. 2) жёстко закреплены и на плиту действует равномерно распределённая нагрузка интенсивности q .

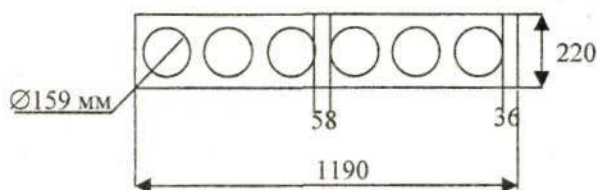


Рис. 2. Поперечное сечение многопустотной плиты марки ПК 57.12-8Ат800Т

Для монолитной плиты найденные значения прогибов сравнивались с известными точными значениями [3, 6], значения прогибов многопустотной плиты марки ПК 57.12-8Ат800Т сравнивались с экспериментальными данными [1].

В таблице 1 приведены решения 5 указанных задач, которые в полной мере отражают соответствие между точным решением и приближёнными, при этом размеры плиты: $a=1,19$ м, $b=6$ м, $h=0,22$ м; модуль упругости $E=20 \cdot 10^3$ МПа; коэффициент Пуассона $\mu=0,2$. Дискретизация плиты прямоугольными конечными элементами проводилась на 16 элементов, элементами в форме параллелепипеда – также на 16 конечных элементов в случае монолитной плиты, и на 198 конечных элементов в случае многопустотной плиты, при этом сквозные отверстия в плите заменялись равновеликими параллелепипедами и исключались из рассмотрения.

Прогиб в центре монолитной и многопустотной плиты, см

Методы решения	Монолитная плита				Многопустотная плита под действием распределённой нагрузки интенсивностью $q = 0,6$ МПа
	Сосредоточенная сила $P = 784,8$ кН		Равномерно распределённая нагрузка интенсивностью $q = 0,6$ МПа		
	свободно опёртая	защемлённая	свободно опёртая	защемлённая	
МКЭ пр.	0,09937	0,03526	0,08308	0,01986	–
МКЭ п.	0,10199	0,04367	0,08451	0,01703	0,46307
Точное решение	0,10197	0,04359	0,08442	0,01692	–
Эксперимент	–	–	–	–	0,45000

МКЭ пр. – метод конечных элементов – элемент в форме прямоугольника;

МКЭ п. – метод конечных элементов – элемент в форме параллелепипеда.

Рассматривалась также круглая плита с отверстием в центре опёртая по контуру. Диаметр плиты: $d = 12$ м; диаметр отверстия: $r = 6$ м; толщина плиты: $h = 0,2$ м; модуль упругости: $E = 30000$ МПа; коэффициент Пуассона: $\mu = 0,3$; на плиту действует равномерно распределённая нагрузка интенсивностью $q = 100 \text{ кН/м}^2$. В силу симметричности, рассматривалась только четверть плиты. Дискретизация проводилась на 100 четырёхугольных призмах. Затем каждая призма заменялась равновеликим параллелепипедом одинаковой высоты. При построении глобальной матрицы жёсткости считалось, что узлы параллелепипедов и призм совпадают. В результате расчётов был найден максимальный прогиб – 0,365 м, что менее чем на 2 % отличается от точного решения из [10] – 0,359 м.

Проведённый анализ результатов позволяет сделать следующие выводы:

- 1) для монолитных плит перерезывающие силы не оказывают существенного влияния, однако, их значение повышается с увеличением толщины плиты;
- 2) расчёт многопустотных плит без учёта их конструктивных особенностей приводит к значительным погрешностям;
- 3) погрешность, полученных приближённых решений не превышала 3 %, что позволяет данный подход применять для решения других задач расчёта деформаций и изгиба плит как монолитных, так и многопустотных.

Список литературы

1. Пространственные конструктивные системы зданий и сооружений, методы расчёта, конструирования и технология возведения: Тр. Междунар. науч.-техн. конф., г. Минск, 10-12 окт. 2001г.: В 2 т. – Мн.: Стринко. – 2002. – Т. 1. – 288 с.; Т. 2. – 200 с.
2. Быховцев А.В., Быховцев В.Е., Курочка К.С. Компьютерное моделирование прогиба диска перекрытия в структуре каркасного здания //Вестник ГГТУ им. П.О. Сухого, 2001. – № 2. – С. 43-48.

3. Александров А.В., Потапов В.Д. Основы теории упругости и пластичности: Учеб. для строит. спец. вузов. – М.: Высш. шк., 1990.
4. Киселев В.А. Строительная механика. Общий курс: Учеб. для вузов. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Стройиздат, 1986.
5. Справочник по теории упругости /Под ред. П.М. Варвака и А.Ф. Рябова. – Киев: Будивельник, 1971.
6. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. – М.: Физматгиз, 1963.
7. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы /Перев. с англ. – Москва: Мир, 1984.
8. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. – М.: Наука, 1981.
9. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. – М.: Мир, 1979.

Получено 29.07.2002 г.