АКАДЕМИЯ НАУК БЕЛОРУССКОЙ ССР
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукописи

ГОЙКО Владимир Иосифович

УДК 512.542

$\mathfrak{F}$-ПРОФРАТТИНИЕВЫ ПОДГРУППЫ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

01.01.06 - математическая логика, алгебра и теория чисел

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Минск - 1987

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Важное направление в теории конечных групп составили результаты, посвящённые решению классической задачи отыскания и исследования свойств характеристических классов сопряжённых подгрупп. Такая задача берёт своё начало от знаменитой теоремы Силова и результатов Ф.Холла и С.А.Чунихина о подгруппах разрешимых и обобщённо разрешимых конечных групп. В дальнейшем с появлением нового направления в алгебре - теории формаций - частные результаты, относящиеся к рассматриваемой задаче, были освещены с общей точки зрения, причём большинство из них получило распространение либо на произвольные, либо на частично разрешимые конечные группы. Так, например, существование и сопряжённость $\mathfrak{F}$-проекторов для произвольной локальной формации $\mathfrak{F}$ было установлено последовательно в конечных разрешимых группах (Гашюц, 1963), для конечных групп с разрешимым $\mathfrak{F}$-корадикалом (Э.Ф.Шмигирёв, Шмид, 1975), в конечных группах с $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимым $\mathfrak{F}$-корадикалом (Л.А.Шеметков, 1978). Существование в произвольной конечной группе проекторов, отличных от силовских подгрупп, было доказано В.Г.Сементовским (1975).

Ещё одним примером исследований в данном направлении может служить работа Л.А.Шеметкова (1976), в которой доказывается существование $\mathfrak{F}$-нормализатора в произвольной конечной группе и устанавливается ряд важных свойств таких подгрупп: инвариантность при гомоморфизмах, свойство покрывать $\mathfrak{F}$-центральные главные факторы и др. Изложению теории $\mathfrak{F}$-нормализаторов и $\mathfrak{F}$-проекторов посвящены главы 4 и 5 монографии Л.А.Шеметкова "Формации конечных групп", М.:Наука, 1978.

Гашюц в 1962 г. ввёл понятие профраттиниевой подгруппы конечной разрешимой группы. В 1965 г. Хоукс сконструировал $\mathfrak{F}$-профраттиниеву подгруппу в конечной разрешимой группе для локальной формации $\mathfrak{F}$. В дальнейшем появились работы Чемберса, Дёрка, Гиллэма, Фёрстера, Наказато, Бечтела, в которых исследовались свойства $\mathfrak{F}$-профраттиниевых подгрупп в конечных разрешимых группах.

Цель работы. Теория $\mathfrak{F}$-профраттиниевых подгрупп развивалась до настоящего времени лишь в рамках теории конечных разрешимых групп. Обнаруженная тесная связь $\mathfrak{F}$-профраттиниевых подгрупп с $\mathfrak{F}$-нормализаторами и $\mathfrak{F}$-проекторами указывает на необходимость построения теории $\mathfrak{F}$-профраттиниевых подгрупп в классе произвольных конечных групп. Решение этой задачи и является целью данной диссертации. Задача предложена автору профессором Л.А.Шеметковым.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми. Получены следующие основные результаты:

1. Введено определение $\mathfrak{F}$-профраттиниевой подгруппы для класса всех конечных групп.

2. Дано конструктивное описание условий, при которых $\mathfrak{F}$-профраттиниевы подгруппы принадлежат формации $\mathfrak{F}$.

3. Описана связь $\mathfrak{F}$-профраттиниевых подгрупп с формационными нормализаторами, $\mathfrak{F}$-гиперцентром, $N(\mathfrak{F})$-корадикалом.

4. Установлена связь $\mathfrak{F}$-профраттиниевых подгрупп с нормальным строением группы.

Теоретическое и практическое значение. Работа носит теоретический характер. Основное её научное значение состоит в том, что в произвольных конечных группах построены $\mathcal{F}$-профраттиниевы подгруппы и изучены свойства таких подгрупп. В диссертации получили дальнейшее развитие результаты Гашюца, Л.А.Шеметкова, Хоукса, Дёрка. Развитые в работе методы могут быть применены для исследования непростых конечных групп.

П у б л и к а ц и и. По теме диссертации опубликовано 10 работ.

А п р о б а ц и я р а б о т ы. Основные результаты диссертации докладывались на алгебраических семинарах при кафедре алгебры и геометрии Гомельского государственного университета, в Гомельском отделении Института математики АН БССР, на XУ Всесоюзной алгебраической конференции (Красноярск,1979), на УII Всесоюзном симпозиуме по теории групп (Шушенское,1980), на XУIII Всесоюзной алгебраической конференции (Кишинёв,1985), на XУI Всесоюзной алгебраической конференции (Ленинград,1981).

О б ъ ё м р а б о т ы. Диссертация изложена на 97 страницах и состоит из введения, четырёх глав и списка цитированной литературы из 64 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В диссертации рассматриваются только конечные группы. В дальнейшем $\mathcal{F}$ обозначает некоторую локальную формацию.

Во введении показана актуальность работы и кратко изложены её основные результаты. В первой главе помещены необходимые в дальнейшем определения и обозначения, а также известные теоремы, используемые при доказательстве результатов диссертации.

Цель второй главы диссертации - ввести определение $\mathcal{F}$-профраттиниевых подгрупп для класса произвольных групп и установить наиболее общие свойства таких подгрупп. В основе предлагаемой здесь конструкции $\mathfrak{F}$-профраттиниевой подгруппы лежит следующая модификация понятия короны, введённого Гашюцом.

О п р е д е л е н и е 3.1. Пусть H/K - нефраттиниевый абелевый главный фактор группы G, $C = C_G(H/K)$. Обозначим через R пересечение всех таких нормальных подгрупп N из G, что C/N не входит в $\Phi(G/N)$ и факторы H/K и C/N G-изоморфны. Фактор C/R называется короной группы G, соответствующей фактору H/K или короче (H/K)-короной. Корону C/R группы G назовём $\mathfrak{F}$-эксцентральной, если C/R есть (H/K)-корона, где H/K - $\mathfrak{F}$-эксцентральный главный фактор группы G.

В § 3 устанавливаются свойства короны, необходимые в последующих параграфах. В частности, в теореме 3.9 доказано, что если C/R - $\mathfrak{F}$-эксцентральная корона в G, то она дополняема в G, т.е. существует такая подгруппа B в G, что $BC = G$ и $B \cap C = R$.

В § 4 вводится определение $\mathfrak{F}$-профраттиниевой подгруппы для класса произвольных конечных групп.

О п р е д е л е н и е 4.3. Пусть $C_1/R_1, \ldots, C_n/R_n$ - множество всех $\mathfrak{F}$-эксцентральных корон группы G. Всякое пересечение $H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_n$, где H_i - дополнение к C_i/R_i в группе G $(i = 1, 2, \ldots, n)$ назовём $\mathfrak{F}$-профраттиниевой подгруппой группы G. Если в группе G нет абелевых нефраттиниевых $\mathfrak{F}$-эксцентральных главных факторов, то $\mathfrak{F}$-профраттиниевой подгруппой группы G будем называть саму группу G.

Отметим, что как следует из определения $\mathfrak{F}$-профраттиниевой подгруппы, в любой группе для любой локальной формации $\mathfrak{F}$ множество $\mathfrak{F}$-профраттиниевых подгрупп не пусто.

Основными результатами §4 являются теоремы 4.4 и 4.5. Теорема 4.4 описывает связь $\mathfrak{F}$-профраттиниевых подгрупп с нормальным строением группы.

Т е о р е м а 4.4. Пусть T - любая $\mathfrak{F}$-профраттиниева подгруппа группы G. Тогда T изолирует все абелевы нефраттиниевы $\mathfrak{F}$-эксцентральные главные факторы группы G и покрывает остальные главные факторы группы G, причём если $\mathfrak{F}$-корадикал $G^{\mathfrak{F}}$ группы G разрешим, то все $\mathfrak{F}$-профраттиниевы подгруппы группы G сопряжены в G.

Теорема 4.5 устанавливает инвариантность $\mathfrak{F}$-профраттиниевых подгрупп при гомоморфизмах.

Т е о р е м а 4.5. Пусть N - произвольная нормальная подгруппа группы G. Тогда и только тогда A/N является $\mathfrak{F}$-профраттиниевой подгруппой группы G/N, когда в группе G найдётся такая $\mathfrak{F}$-профраттиниева подгруппа B, что $A/N = BN/N$.

Из теорем 4.4 и 4.5 вытекают основные результаты работы Гашюца (I962) в частном случае, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{E}$, где $\mathfrak{E}$ - формация всех единичных групп. В конце §4 показывается, что в классе разрешимых групп данное в диссертации определение $\mathfrak{F}$-профраттиниевых подгрупп эквивалентно определению $\mathfrak{F}$-профраттиниевых подгрупп, предложенному Хоуксом. Таким образом, следствиями из теорем 4.4 и 4.5 оказываются основные результаты работы Хоукса (I965).

Отметим несколько новых следствий из теоремы 4.4. В случае, когда $\mathfrak{F}$ - класс всех единичных групп, каждый главный фактор любой неединичной группы $\mathfrak{F}$-эксцентрален, и поэтому из теоремы 4.4 вытекает

Следствие I. В любой группе G существует подгруппа, которая изолирует все абелевы нефраттиниевы главные факторы группы G и покрывает её остальные главные факторы.

Если $\mathfrak{F}$ - класс всех нильпотентных групп, то понятие $\mathfrak{F}$-центральности и центральности оказываются эквивалентными. Следовательно, ввиду теоремы 4.4 имеет место

Следствие 2. В любой группе G существует подгруппа, которая изолирует все абелевы нефраттиниевы эксцентральные главные факторы и покрывает остальные главные факторы группы G.

Если $\mathfrak{F}$ - класс всех сверхразрешимых групп, то $\mathfrak{F}$-центральность главного фактора означает в точности, что он цикличен. Таким образом, согласно теореме 4.4 справедливо

Следствие 3. В любой группе G существует подгруппа, которая изолирует все нефраттиниевы абелевы нециклические главные факторы и покрывает остальные главные факторы группы G.

Все результаты работы Климовича (1977) вытекают из результатов второй главы в частном случае, когда G есть π-разрешимая группа.

§5 посвящён вопросу о характеризации $\mathfrak{F}$-профраттиниевых подгрупп свойством покрытия-изолирования главных факторов группы. Гиллэм установил (1974), что даже в разрешимой группе $\mathfrak{F}$-профраттиниевы подгруппы не характеризуются одним только свойством покрытия-изолирования главных факторов группы,т.е. в общем случае подгруппа разрешимой группы G, которая изолирует нефраттиниевы $\mathcal{F}$-эксцентральные G-главные факторы и покрывает её остальные главные факторы,не обязательно является $\mathcal{F}$-профраттиниевой подгруппой группы G.Однако,как показал Чемберс (1972), это имеет место в разрешимых группах G с единичной p-длиной для всех простых $p \in \pi(G)$.Теорема 5.4 усиливает этот результат одновременно в двух направлениях: во-первых, предполагает лишь частичную разрешимость группы и, во-вторых,требует, чтобы p-длина была единичной только для тех простых p, которые делят порядок её $\mathcal{F}$-корадикала.

Важной характеристикой $\mathcal{F}$-нормализаторов и $\mathcal{F}$-проекторов является их принадлежность формации $\mathcal{F}$. В третьей главе доказывается, что $\mathcal{F}$-профраттиниевы подгруппы этим свойством могут не обладать,т.е. существует такая локальная формация $\mathcal{F}$, что в некоторой группе $\mathcal{F}$-профраттиниевы подгруппы не принадлежат формации $\mathcal{F}$. В §6 приводится определение n-кратно локальной формации,предложенное А.Н.Скибой,а также доказывается ряд свойств n-кратно локальных формаций, необходимых для доказательства основного результата §6 - теоремы 6.I7. Следует отметить, что даже в классе конечных разрешимых групп эта теорема является новой и включает в себя, как частный случай, основной результат работы Дёрка (1970). В связи с теоремой 6.I7 возникает вопрос о нахождении условий, при которых $\mathcal{F}$-профраттиниевы подгруппы принадлежат формации $\mathcal{F}$. Эта задача решена в §7 теоремами 7.I и 7.2.

Т е о р е м а 7.I.Пусть $\mathfrak{x}$ - максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{X}$, $\mathcal{F} \subseteq \mathfrak{X}$.В точности тогда всякая

$\mathfrak{F}$-профраттиниева подгруппа T группы G принадлежит $\mathfrak{X}$, когда для любого фраттиниевого G-главного фактора H/K справедливо, что $T/C_T(H/K) \in x(H/K)$.

Теорема 7.2. Пусть f – максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$. В точности тогда всякая $\mathfrak{F}$-профраттиниева подгруппа T группы G принадлежит формации $\mathfrak{F}$, когда для любого фраттиниевого G-главного фактора H/K справедливо, что $T/C_T(H/K) \in f(H/K)$.

Соответствующие результаты Наказато (1977) вытекают из теоремы 7.1 в частном случае, когда G – разрешимая группа, $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}$, $\mathfrak{X}$ – формация всех нильпотентных групп.

Из результатов третьей главы вытекает следующее

Следствие. Существуют разрешимые группы, профраттиниевы подгруппы которых ненильпотентны.

Гашюц (1963) установил этот результат построением конкретного примера.

Одной из центральных задач, возникающих на пути изучения формационных подгрупп ($\mathfrak{F}$-нормализаторов, $\mathfrak{F}$-проекторов, $\mathfrak{F}$-гиперцентра, $\mathfrak{F}$-корадикала и др.) является задача выявления их взаимного расположения в группе. Четвёртая глава диссертации посвящена изучению связи $\mathfrak{F}$-профраттиниевых подгрупп с $\mathfrak{F}$-нормализаторами, $\mathfrak{F}$-гиперцентром и $\mathfrak{F}$-корадикалом группы.

Между $\mathfrak{F}$-профраттиниевой подгруппой и $\mathfrak{F}$-нормализатором существует тесная связь, описываемая теоремой 8.3, которая является основной в § 8.

Теорема 8.3. Пусть $\mathfrak{X}$ – локальная формация,

$\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$, $G \in \Upsilon\mathfrak{X}$. Тогда для произвольной $\mathfrak{F}$-профраттиниевой подгруппы T группы G найдутся такие $\mathfrak{F}$-нормализатор H и $\mathfrak{X}$-профраттиниева подгруппа X, что $T = HX$.

Вложение $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$ в этой теореме не является ограничением, а вводится в связи с факторизационным смыслом теоремы.

Как доказал Л.А.Шеметков, пересечение всех $\mathfrak{F}$-нормализаторов группы совпадает с её $\mathfrak{F}$-гиперцентром. Этот результат позволяет изучить связь $\mathfrak{F}$-профраттиниевых подгрупп и $\mathfrak{F}$-гиперцентра:

Следствие 8.4. Любая $\mathfrak{F}$-профраттиниева подгруппа группы G с разрешимым $\mathfrak{F}$-корадикалом содержит $\mathfrak{F}$-гиперцентр группы G.

А.Н.Скиба показал (1981), что класс $N(\mathfrak{F})$ всех тех групп H, у которых $\mathfrak{F}$-корадикал не содержит фраттиниевых G-главных факторов, является формацией. В §9 устанавливаются свойства $N(\mathfrak{F})$-корадикала группы с помощью понятия $\mathfrak{F}$-профраттиниевой подгруппы. Основным результатом §9 являются теоремы 9.1 и 9.2, в соответствии с которыми группа G с разрешимым $\mathfrak{F}$-корадикалом тогда и только тогда принадлежит $N(\mathfrak{F})$, когда выполняется одно из следующих двух условий: 1) любая нормальная подгруппа группы G, входящая в $G^{\mathfrak{F}}$, дополняема в G, 2) $\mathfrak{F}$-профраттиниева подгруппа группы G имеет единичное пересечение с $N(\mathfrak{F})$-корадикалом группы G. Отсюда в случае, когда G разрешима и $\mathfrak{F} = \mathfrak{E}$, вытекает следующий результат Гашюца: в разрешимой группе каждая нормальная подгруппа дополняема тогда и только тогда, когда профраттиниева подгруппа этой группы является единичной.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Гойко В.И. Построение $\mathcal{F}$-профраттиниевых подгрупп в произвольных конечных группах // Докл. АН БССР. - 1978. - Т.22, № 8. - С.687-689.

2. Гойко В.И. Максимальные локальные подформации некоторых формаций // Докл. АН БССР. - 1979. - Т.23, № 1. - С. 20-21.

3. Гойко В.И. $\mathcal{F}$-профраттиниевы подгруппы конечных групп // Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп. Мн.: Наука и техника, 1986. - С.34-42.

4. Гойко В.И. Характеризация $\mathcal{F}$-профраттиниевых подгрупп конечных групп свойством покрытия-изолирования главных факторов группы // Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп. Мн.: Наука и техника, 1986. - С.43-47.

5. Гойко В.И. $\mathcal{F}$-профраттиниевы подгруппы и $\mathcal{F}$-нормализаторы в конечных группах // XVIII Всесоюзная алгебраическая конференция: Тезисы сообщений. - Кишинёв, 1985. - Ч.1. - С.117.

6. Гойко В.И. О некоторых свойствах $\mathcal{F}$-профраттиниевых подгрупп конечных групп. - Деп. в ВИНИТИ 27.02.1985, № 1530-85. - 15 с.

7. Гойко В.И. О некоторых свойствах $\mathcal{F}$-профраттиниевых подгрупп конечных групп // Вопросы алгебры. - Мн.: изд. "Университетское", 1986. - Вып.2. - С.120-124.

8. Гойко В.И. О формации конечных групп с дополняемыми инвариантными подгруппами // XV Всесоюзная алгебраичес-

ная конференция: Тезисы докладов. - Красноярск, 1979. - Ч.I. С.41.

9. Гойко В.И. О принадлежности $\mathfrak{F}$-профраттиниевых подгрупп конечных групп формации $\mathfrak{F}$ // YII Всесоюзный симпозиум по теории групп: Тезисы докладов. - Шушенское, 1980.- С.27.

10. Гойко В.И. p-нормальная погружённость $\mathfrak{F}$-профраттиниевых подгрупп конечных групп // XYI Всесоюзная алгебраическая конференция: Тезисы сообщений. - Ленинград, 1981.- С.52.

Подписано в печать 20.01.87 г. АТ 14519.
Формат 60x84/16. Усл.печ.л. 0,70. Уч.-изд.л. 0,50.
Тираж 100 экз. Заказ 19. Бесплатно.
Ротапринт Института математики АН БССР.
220604, Минск ГСП, ул.Сурганова, 11