

ЗАДАЧА О КОНТАКТЕ ДВУХ УПРУГИХ ТЕЛ БОЧКООБРАЗНОЙ ФОРМЫ

А. А. Примак, П. В. Дорошко

*Гомельский государственный технический университет
имени П. О. Сухого, Беларусь*

Научные руководители: Г. П. Тариков, В. В. Комраков

При расчете деталей трибосопряжений необходимо определять контактные напряжения, что связано с необходимостью решения пространственных контактных задач. Вместе с тем, решение таких задач аналитическими методами связано с большими трудностями. В связи с этим, другие методы решения пространственных контактных задач, и в частности, с помощью электрического моделирования представляют известный интерес.

Рассмотрим аналитическое решение задачи для области контакта в виде эллипса и решение этой же задачи, полученное с помощью электрического моделирования.

Постановка задачи. Два упругих тела, ограниченные выпуклыми поверхностями S_1 и S_2 , соприкасаются в точке O (рис. 1). Приняв точку O за начало координат, проведем оси z_1 и z_2 , перпендикулярные к общей касательной плоскости Π , внутрь каждого из тел.

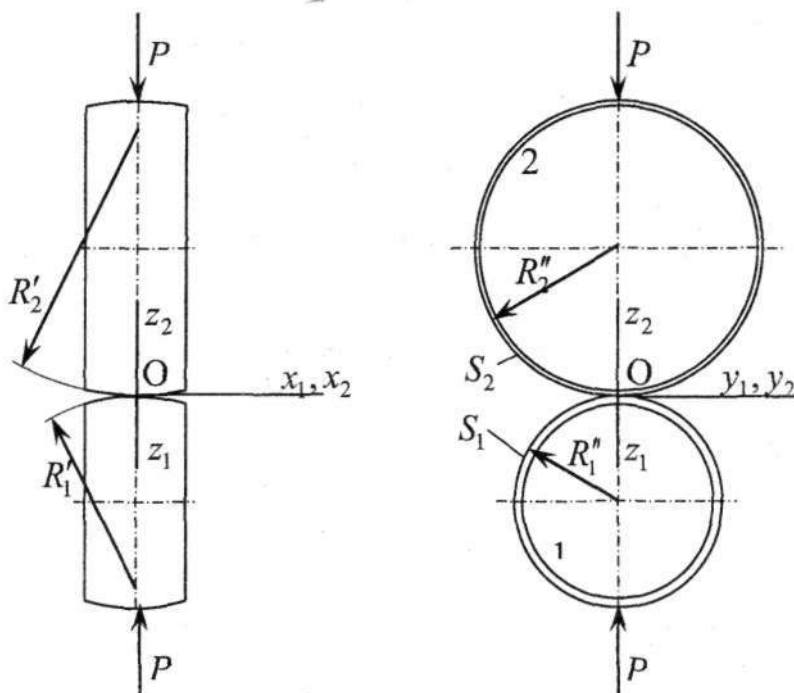


Рис. 1. Схема контакта

На рис. 1 также показаны R_1, R_2 - радиусы бочкообразных образующих роликов и R_1'', R_2'' - радиусы первого и второго роликов соответственно.

В случае отсутствия нагрузки на ролики имеем точечный контакт, который при приложении силы P переходит в эллиптическую площадку контакта.

Интегральное уравнение, описывающее распределение давления по площадке контакта имеет вид [1]:

$$\left(\delta - \frac{x^2}{2R_1} - \frac{y^2}{2R_2} \right) = \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2\pi} \iint_{\Omega} \frac{p(x_1, y_1)}{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}} dx_1 dy_1, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (1)$$

$$\text{где } \frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_1'} + \frac{1}{R_2'}, \quad \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1''} + \frac{1}{R_2''}, \quad (2)$$

$$\vartheta_1 = \frac{1-\nu_1^2}{\pi E_1}, \quad \vartheta_2 = \frac{1-\nu_2^2}{\pi E_2},$$

$p(x, y)$ – контактное давление на площадке контакта; E_1, E_2 и ν_1 и ν_2 – соответственно модули упругости первого рода и коэффициенты Пуассона материалов первого и второго роликов.

Решение уравнения (1) описывается группой выражений:

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{K(e) - E(e)}{\frac{1}{1-e^2} E(e) - K(e)}, \quad (3)$$

$$a = \left\{ \frac{3}{2\pi} (\vartheta_1 + \vartheta_2) R_1 P \frac{1}{e^2} [K(e) - E(e)] \right\}^{1/3}, \quad (4)$$

$$b = a\sqrt{1-e^2}, \quad (5)$$

$$\delta = \frac{3}{4} p_c (\vartheta_1 + \vartheta_2) b K(e) \quad (6)$$

$$p(x, y) = \frac{3}{2} p_c \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)^{1/2}, \quad (7)$$

где $p_c = \frac{P}{\pi a b} = \frac{P}{\pi a^2 \sqrt{1-e^2}}$; $K(e), E(e)$ – полные эллиптические интегралы; e – эксцентриситет эллиптической площадки контакта; a и b – большая и меньшая полуоси эллиптической площадки контакта соответственно; δ – сближение упругих тел.

Перепишем уравнение (1) в виде:

$$\iint_{\Omega} \frac{p(x_1, y_1)}{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}} dx_1 dy_1 = \frac{\left(\delta - \frac{x^2}{2R_1} - \frac{y^2}{2R_2} \right)}{\frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2\pi}}, \quad (x, y) \in \Omega. \quad (8)$$

Обозначив правую часть через $W(x, y)$, получим:

$$\iint_{\Omega} \frac{p(x_1, y_1)}{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}} dx_1 dy_1 = W(x, y). \quad (9)$$

При этом должно выполняться уравнение статики

$$P(t) = \iint_{\Omega} p(x, y, t) dx dy. \quad (10)$$

Известно, что выражение для электростатического потенциала токопроводящего элемента, имеющего форму площадки контакта, можно записать в виде:

$$\iint_{\Omega} \frac{q(x_1, y_1) dx_1 dy_1}{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}} = \Psi(x, y), \quad (11)$$

где $\Psi(x, y) = \psi(x, y)4\pi k_0 \varepsilon$; k_0 – диэлектрическая постоянная; ε – диэлектрический коэффициент среды; $q(x, y)$ – плотность заряда на поверхности токопроводящего элемента.

Общее количество электричества токопроводящего элемента будет:

$$Q = \iint_{\Omega} q(x, y) dx dy. \quad (12)$$

В основе метода электрического моделирования пространственных контактных задач лежит аналогия интегральных уравнений (9), (11) и (10), (12). В соответствии с этой аналогией распределение электрического заряда на поверхности токопроводящего элемента, являющегося аналогом площадки контакта, аналогично распределению контактных давлений на площадке контакта. Задавая электрический потенциал на токопроводящий элемент в соответствии с правой частью интегрального уравнения (9) контактной задачи и замерив плотность заряда на его поверхности в исследуемых точках, используя критерии подобия, можно определить контактные давления в соответствующих точках площадки контакта.

Решение задачи осуществлялось с помощью специального электро моделирующего устройства [1], [2], [3]. Для решения этой задачи были приняты следующие исходные данные: коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$; модуль Юнга $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па. Остальные исходные данные приведены в таблице.

№	R_1'	R_1''	R_2'	R_2''	P, Н	Аналитическое решение				Экспериментальное решение			
	мм					a1, мм	b1, мм	P_{\max} , ГПа	$\delta \cdot 10^{-3}$, мм	a1, мм	b1, мм	P_{\max} , ГПа	$\delta \cdot 10^{-3}$, мм
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	15
1	25	650	15	650	30	0,28068	0,02918	0,17156	0,16621	0,281	0,029	0,17	0,1663
2	25	350	15	350	30	0,21776	0,21776	0,19619	0,19297	0,218	0,218	0,196	0,193
3	25	100	15	100	30	0,12680	0,04211	0,26316	0,25528	0,127	0,042	0,263	0,255
4	25	1000	15	1000	30	0,33354	0,02690	0,15659	0,14927	0,334	0,027	0,1567	0,149

Окончание

№	R'_1	R''_1	R'_2	R''_2	P , Н	Аналитическое решение				Экспериментальное решение			
	мм					$a1$, мм	$b1$, мм	P_{max} , ГПа	$\delta \cdot 10^{-3}$, мм	$a1$, мм	$b1$, мм	P_{max} , ГПа	$\delta \cdot 10^{-3}$, мм
5	25	250	15	250	40	0,20807	0,03868	0,23280	0,25278	0,21	0,04	0,233	0,253
6	25	250	15	250	50	0,22413	0,04167	0,25077	0,29333	0,22	0,04	0,251	0,29
7	25	250	15	250	60	0,23818	0,04428	0,26649	0,33124	0,24	0,04	0,26	0,33
8	25	250	15	250	10	0,06084	0,01131	0,06807	0,02161	0,0608	0,0113	0,068	0,0216

Получены аналитические решения контактных задач по формулам (1)-(7) при различных геометрических размерах бочкообразных роликов и при различных величинах нагрузки. Результаты решения приведены в таблице.

Получены также решения контактной задачи с помощью электро моделирующего устройства (ЭМУ-2) при тех же исходных данных. Проведено сравнение результатов, полученных аналитически и экспериментально. Из таблицы видно, что относительная погрешность эксперимента не превышает 5 %.

Анализ полученных результатов позволяет сделать вывод о том, что метод электрического моделирования может успешно применяться для решения контактных задач инженерной практики, а также для проверки результатов, полученных другими методами.

Литература

1. Бородачев, Н. М. Устройство для моделирования пространственных контактных задач : а. с. № 570905 / Н. М. Бородачев, Г. П. Тариков // Бюл. изобрет. - 1977. - № 32.
2. Бородачев, Н. М. Устройство для решения пространственных контактных задач : а. с. № 1791829 / Н. М. Бородачев, Г. П. Тариков // Бюл. изобрет. - 1992. - № 32.
3. Примак, А. А. Модернизация электро моделирующего устройства для решения пространственных контактных задач / А. А. Примак, П. В. Дорошко // Исследования и разработки в области машиностроения, энергетики и управления : материалы VIII Междунар. межвуз. науч.-техн. конф. студентов, магистрантов и аспирантов. - Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2008. - С. 55-59.